

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания  
к практическим занятиям  
по дисциплине

**Нелинейные дифференциальные уравнения**

для студентов направления подготовки  
01.04.02 «Прикладная математика и информатика»  
Направленность (профиль)  
«Математическое моделирование»

Ставрополь  
2026

## **СОДЕРЖАНИЕ**

Введение

### **РАЗДЕЛ 1. ОТКРЫТИЕ СОЛИТОНА В РАБОТАХ КРУСКАЛА И ЗАБУСКИ ПО ПРОБЛЕМЕ ФЕРМИ-ПАСТА-УЛАМА В НЕПРЕРЫВНОМ ПРЕДЕЛЕ. СЕМЕЙСТВА СОЛИТОННЫХ УРАВНЕНИЙ**

Практическое занятие № 1. Открытие солитона в работах Крускала и Забуски по проблеме Ферми-Паста-Улама в непрерывном пределе.

Практическое занятие № 2 Семейства солитонных уравнений и методы их решения. Иерархия уравнения Кортевега - де Вриза.

Практическое занятие №3 Прямое преобразование для нелинейного уравнения Шредингера, или рассеяние на бесконечной прямой.

### **РАЗДЕЛ 2. ОСНОВНЫЕ ИДЕИ МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ**

Практическое занятие №4 Основные идеи теории рассеяния.

Практическое занятие № 5. Связь коэффициента отражения с преобразованием Фурье.

Практическое занятие №6 Данные рассеяния и их свойства.

### **РАЗДЕЛ 3. СВЯЗЬ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ**

Практическое занятие №7 Обратное преобразование.

Практическое занятие №8 Односолитонное решение Двухсолитонное взаимодействие.

Практическое занятие №9 Решения уравнений семейства Кортевега - де Вриза.

### **РАЗДЕЛ 4. МНОГОСОЛИТОННЫЕ, РАЦИОНАЛЬНЫЕ И КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ**

Практическое занятие №10 Многосолитонные решения

Практическое занятие №11 Бегущие волны, автомодельные решения

Практическое занятие №12 Рациональные и конечнозонные решения.

### **РАЗДЕЛ 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХИРОТЫ И ПЕНЛЕВЕ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ**

Практическое занятие №13 Преобразования Хироты  $\tau$  - функция, метод Хироты

Практическое занятие №14 Идеи Абловица, Рамани, Сегура Об обладании свойством Пенлеве

Практическое занятие №15 Законы сохранения и интегралы движения.

### **РАЗДЕЛ 6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕКЛУНДА**

Практическое занятие №16 Симметрии для нелинейных уравнений.

Практическое занятие №17 Преобразование Беклунда. КДВ, НУШ,  $\sin$ -Гордон

Практическое занятие №18 Автопреобразования Бэклунда

## Введение

**Цель освоения дисциплины:** дать студентам глубокие знания о нелинейных моделях математической физики, что дает математику одно из мощных средств, для исследования и анализа нелинейных явлений математической физики. Знакомит студентов с навыками математического моделирования, показывает возникающие принципиальные трудности при переходе от реального объекта к его математической идеализации, разницу между “хорошими” и “плохими” моделями.

**Задачами освоения дисциплины являются:**

1. формирование научного мировоззрения, понимания широты и универсальности математического моделирования, умения применять методы вычислительных алгоритмов в решении прикладных нелинейных задач;
2. ознакомление с основами математического моделирования, а также их приложениями для решения различных нелинейных задач, требующих применения вычислительных средств;
3. овладение современным математическим аппаратом аналитических вычислений и дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных нелинейных задач в различных областях.

При изучении теории «Нелинейные дифференциальные уравнения» студенты сталкиваются со многими проблемами. Иногда они затрудняются правильно определить вид полученного уравнения, верно выбрать алгоритм решения.. Студенты не всегда правильно делают математические преобразования, соблюдают последовательность в решении. В результате при самостоятельном изучении у студентов возникают многие вопросы и ряд проблем остается невыясненными.

Для того, чтобы студенты самостоятельно выполнили решение того или иного уравнения, при этом выявили недочеты и исправили свои ошибки, необходима постоянная помощь преподавателя. Однако эта задача может быть решена самостоятельно студентами, если они в своей работе воспользуются методическими указаниями, составленными преподавателем в помощь студентам по данной теме. В данных методических указаниях подробно изложена методика решения различных типов уравнений, сформулированы алгоритмы решений со ссылками на теоретический материал.

## РАЗДЕЛ 1. ОТКРЫТИЕ СОЛИТОНА В РАБОТАХ КРУСКАЛА И ЗАБУСКИ ПО ПРОБЛЕМЕ ФЕРМИ-ПАСТА-УЛАМА В НЕПРЕРЫВНОМ ПРЕДЕЛЕ. СЕМЕЙСТВА СОЛИТОННЫХ УРАВНЕНИЙ

### Практическое занятие № 1. Открытие солитона в работах Крускала и Забуски по проблеме Ферми-Паста-Улама в непрерывном пределе.

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников;
- знанием и следование в жизни кодексу профессиональной этики;
- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;

#### Необходимая теоретическая база

Впервые на русском языке вопросы, связанные с исследованием солитонных явлений появились в работах М.А. Лаврентьева в 1943 г. Он изучал течение жидкости в канале. Был выделен периодический случай и уединенную волну с помощью изменения длины и глубины канала. Уравнение, которое исследовалось, было, уравнение для идеальной несжимаемой жидкости. Уравнение Кортевега - де Вриза, в котором возникают солитонные явления близко к тому, которое исследовал Лаврентьев М.А.

Первым кто наблюдал уединенную волну, был Рассел.

Основная масса уравнений возникших позже и имеющих солитонные решения одномерные (на функцию двух переменных, одна из которых считается переменной времени). Основные проблемы исследования таких задач связаны с отсутствием разнообразных методов построения широкого класса интегрируемых уравнений большего числа переменных. В основе имеющегося метода решений лежит метод Лакса. (Существуют ли другие методы решения такого типа задач отличные от метода Лакса?) В самом методе Лакса так же есть некоторые стороны, которые не до конца поняты.

Будем рассматривать уравнение на ассоциативных алгебрах (уравнения гладких функций на конечном множестве точек), интересные случаи возникают в простых алгебрах Ли.

**Определение.** Линейное пространство с бинарной операцией, удовлетворяющей свойствам  $[a,b] = ab-ba$  - коммутатор):

1.  $[a,b+\lambda c] = [a,b] + \lambda[a,c]$ ;
2.  $[a,b] + [b,a] = 0$ ;
3.  $[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] = 0$  – тождество Якоби

называется алгеброй Ли.

(Если выбрать  $L$  – дифференциальный оператор первого порядка, то коммутатор  $L_a L_b - L_b L_a = L_c$  – называется скобкой Пуассона и дает оператор первого порядка).

Уравнение Лакса было выведено в 1968 г. В связи с изучением уравнения Кортевега - де Вриза

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}$$

с дифференциальными операторами  $L$  - оператор Штурма - Лиувилля (оператор Шредингера)  $L = -d_x^2 + u$  и  $A = 4\partial_x^3 - 3(u\partial_x - \partial_x u)$  - оператор третьего порядка. Уравнение на собственные значения с собственной функцией  $\psi \in L_2(-\infty, +\infty)$

$$\psi'' + u\psi = f\psi,$$

может иметь конечное и бесконечное число собственных значений  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ .

Лакс заметил, что уравнение Кортевега - де Вриза представимо в виде

$$\dot{L} = [L, A]. \quad (1)$$

Интересен факт: Лакс рассматривал свое уравнение еще 1961г. и в течение десяти лет, оно фактически не применялось к интегрируемым уравнениям. В 1971г. Захаров и Шабат применили его к другим дифференциальным уравнениям.

Выведем уравнение Лакса из закона изоспектральной деформации - сохранения собственных чисел оператора  $L$ . Воспользуемся представлением оператора  $L$  в виде удобного

$$L(t) = Q(t)L_0Q^{-1}(t), \quad (2)$$

где  $L_0$  - матрица в начальный момент времени, выбранная в диагональном или блочном виде. Продифференцируем по правилу Лейбница равенство (2)

$\dot{L} = \dot{Q}L_0Q^{-1} + Q\dot{L}_0Q^{-1} + QL_0(Q^{-1})'$ , с учетом того что  $QQ^{-1} = E$ , находим  $\dot{Q}Q^{-1} + Q(Q^{-1})' = 0$ ,  $(Q^{-1})' = -Q^{-1}\dot{Q}Q^{-1}$ . Обозначая  $\dot{Q}Q^{-1} = -A$ , получим  $\dot{L} = LA + Q\dot{L}_0Q^{-1} - AL$ , которое, с учетом независимости  $L_0$  от времени дает уравнение (1). Легко показать и обратное (сделать это самостоятельно).

Для определения собственных чисел матрицы необходимо решить характеристическое уравнение  $\det(L - \lambda E) = P(\lambda) = 0$  или с учетом (2),  $\det(QL_0Q^{-1} - Q\lambda EQ^{-1}) = \det Q \det(L_0 - \lambda E) \det Q^{-1} = \det(L_0 - \lambda E)$ , поэтому если корни  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  различны, то матрица  $L_0$  имеет диагональный вид, если среди корней есть кратные  $k$ -ой кратности, то матрица состоит из блоков  $k$ -ой размерности.

Если  $L_0$  диагональная матрица, то любая степень следа этой матрицы будет постоянной, т. е.  $Tr L_0^k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k - const$ . В силу равенства (2) будет сохраняться и  $Tr L^k$ , следовательно имеется счетное число сохраняющихся величин.

Уравнение (1) в пространстве операторов действует над пространством функций. Оператор  $A$ - кососимметрический и удовлетворяет следующему свойству скалярного произведения для действительных функций

$$(A\psi, \psi) = -(\psi, A\psi), \text{ где } (\psi, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\varphi(x)dx$$

Это свойство выполняется, так как функция  $u(x, t) \rightarrow 0, x \rightarrow \pm\infty$ . Если оператор  $A$  заменить кососимметрическим оператором более высокого порядка

$$A_k = c_{2k+1}(x, t)\partial_x^{2k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} (c_{2i+1}(x, t)\partial_x^{2i+1} + \partial_x^{2i+1}c_{2i+1}(x, t))$$

и вычислить коммутатор уравнения (1), то получим  $k$  - неопределенных коэффициентов, причем  $[L, A_k]$  - симметрический оператор, и его старший член имеет степень производной  $2k$ . Если все дифференциальные части обращаются в нуль, то получается  $k$  уравнений на  $k$  коэффициентов. Эта система полностью разрешается и в зависимости от  $k$  получаем  $k$  уравнений в частных производных.

Почему эта конструкция интересна (ведь в общем одно уравнение представлено в другом виде)?

Так как  $L$  - один и тот же оператор, то полученные уравнения принадлежат одной иерархии. Собственные значения уравнений  $\dot{L} = [L, A_k]$  остаются неизменными и одни и те же для всех уравнений, поэтому уравнения называются уравнениями изоспектральной деформации. Такие уравнения имеют множество первых интегралов, причем первые интегралы будут общие для всех уравнений иерархии. Такой вывод следует из того, что уравнение на собственные значения будет одно для всех

$$L\psi = f\psi.$$

Это для иерархии КдВ (Кортевега - де Вриза)

$$u_{t_1} = buu_x - u_{xxx},$$

$$u_{t_k} = F(u, u_x, \dots, u_{x^{2k+1}}),$$

означает, что фазовые потоки  $u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_k}$  - коммутируют, а функция  $u(x, t_1, t_2, \dots, t_k)$  - будет удовлетворять всем уравнениям, тогда  $f_n[u(x, t_1, t_2, \dots, t_k)] = const$ .

Односолитонным решением называется такой потенциал  $u$ , что оператор  $L$  обладает одним собственным значением.

Доказательство независимости собственных чисел от времени основано на обращении следа коммутатора нулю

$$(TrL)_t = Tr(LA - AL) = 0,$$

$$Tr(L^k)_t = Tr[L^k, A] = 0.$$

Первые интегралы примут вид:  $TrL^k = I_k - const$ .

### Вопросы для обсуждения

1. Встреча с уединенной волной
2. Уравнение Буссинеска и Кортевега-де Фриза
3. Солитоны Френкеля и Конторовой
4. Второе рождение солитона. Проблема Ферми-Паста-Улама
5. Будущее за солитонами.
  - А). Открыты трехмерные солитоны
  - Б). Солитон на вихревой нити
  - В). Спутники подтвердили существование монстров, поглощающих корабли

ли

### Практическое занятие № 2

#### Семейства солитонных уравнений и методы их решения. Иерархия уравнения Кортевега - де Вриза.

**Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- умением понять поставленную задачу;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний;

### Теория, выносимая на обсуждение

После того как противоречия между работами Эйри, Стокса и Рассела были сняты, интерес к уединенным волнам значительно упал и возобновился лишь спустя 60 лет, после появления знаменитой работы Э.Ферми, Дж. Паста и С. Улама (ФПУ), относящейся, казалось бы, к совсем другой области науки. Она была выполнена на одном из первых компьютеров «Маниак-1» в Лос-Аламосской национальной лаборатории и была стимулирована появлением вычислительной техники, которая сделала возможным численное мо-

делирование систем с большим числом степеней свободы. По мнению А. Ньюэлла, ФПУ интересовал вопрос: почему твердые тела обладают конечной теплопроводностью? Впрочем, в оригинальной работе ФПУ упоминания об этом нет.

В качестве простейшей модели твердого тела часто рассматривают цепочку или решетку из массивных частиц (атомов), соединенных пружинами, которые играют роль сил упругого воздействия. Если пружины линейны, то выполняется закон Гука, то энергия переносится нормальными модами цепочки, которые не взаимодействуют между собой. Следовательно, для передачи энергии с одного конца цепочки на другой не требуется никакого перепада температуры. Эффективная теплопроводность оказывается бесконечной и уравнение диффузии тепла не получается. Еще в 1914 году П.Дебай предположил, что конечная теплопроводность обусловлена ангармоничностью пружин. Если пружины нелинейны, т.е. возвращающая сила не пропорциональна деформации, то появляется взаимодействие нормальных мод. Дебай полагал, что нелинейные взаимодействия ограничивают перенос энергии и приведут к конечности коэффициента теплопроводности.

Вернемся к задаче, поставленной Ферми перед ЭВМ. Вместе с математиком Станиславом Уламом и Джоном Пастой Ферми в 1952 году задумал выполнить обширные машинные эксперименты по исследованию нелинейных задач. Первой из них и была задача о перерождении теплового хаоса в цепочке грузиков с нелинейными пружинами. Как вспоминал С.Улам: «Ферми часто говорил, что будущие фундаментальные физические теории будут вероятно основаны на нелинейных уравнениях...». План состоял в том, чтобы начать с простейшей, по возможности, физической модели... затем постепенно увеличивать сложность и общность решаемых на машине задач... Решение всех этих задач послужило бы подготовкой к установлению в конце концов модели движений системы, в которой должны были бы наблюдаться «перемешивание» и «турбулентность»... За одно лето Ферми весьма быстро научился программировать задачи для ЭВМ и мог не только спланировать общую схему расчета, но и самостоятельно провести подробное программирование всей задачи. Результаты вычислений оказались весьма неожиданным для Ферми. По его мнению, они явились некоторым откровением». Машина сумела настолько удивить Ферми, что он, будучи смертельно больным, интересовался продолжением расчетов.

ФПУ рассматривали цепочку из  $N$  частиц ( $N$  не превышало 64). Частицы соединены пружинами, возвращающая сила которых нелинейным образом зависит от деформации. Конкретно рассматривались пружины с квадратичной и кубической нелинейностями.

Причем коэффициенты и выбирались такими, чтобы нелинейные члены были ма-

$$F(x) = jx + \alpha x^2 \quad (3)$$

$$F(x) = jx + \beta x^3 \quad (4)$$

лы. Тогда уравнение движения  $n$ -й частицы имеет вид:

Уравнения (5), где  $n = 1, 2, \dots, N$ , интегрировались численно при нулевых граничных условиях (струна с закрепленными концами)  $x_0 = x_N = 0$ .

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = F(x_{n+1} - x_n) - F(x_n - x_{n-1}) \quad (5)$$

В более поздних исследованиях иногда использовали периодические граничные условия  $x_0 = x_N$ .

Если рассматривать линейную цепочку ( $\alpha=\beta=0$ ), то решение представляет собой суперпози-

$$x_n = \sum_{m=1}^N x_m \cos \omega_m t \sin \frac{\pi m n}{N}$$

цию нормальных мод.

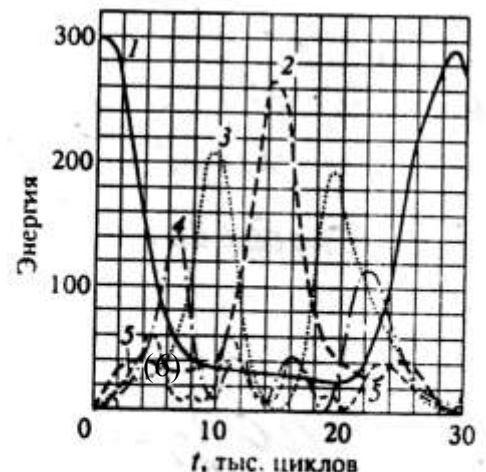


Рис. 7.1. Зависимость амплитуд низших мод от времени в задаче Ферми-Паста-Улама

где собственные частоты мод:  $\omega_m = 2\sqrt{j} \sin \pi m(2N)$ , а амплитуды –  $x_m$  – константы, определенные нормальными условиями. В слабонелинейном случае эти моды взаимодействуют между собой и амплитуды  $x_m$  начинают зависеть от времени.

ФПУ рассчитывали, что если в начальный момент возбуждена, например, низшая мода ( $m=1$ ), то с течением времени энергия будет переходить в высшие моды, пока наконец не установится состояние, в котором энергии всех мод примерно одинакова. Это состояние термодинамического равновесия, которому соответствует равномерное распределение энергии по степеням свободы. Однако результаты моделирования оказались совершенно неожиданными. Энергия не термализовалась. Вначале возбуждались несколько низших мод, а затем энергия почти полностью возвращалась в первую моду. На рис.1, воспроизведенном из оригинальной работы ФПУ, хорошо видно, что амплитуды мод колеблются почти периодически. Таким образом, возникла проблема ФПУ (или парадокс ФПУ): почему в нелинейных системах с большим числом степеней свободы не наблюдается термализация?

В последующие годы рядом авторов были выполнены работы по моделированию разнообразных нелинейных цепочек с различными граничными и начальными условиями. В некоторых численных экспериментах наблюдалось периодическое восстановление начального профиля (возвращаемость ФПУ), в других обнаруживалась термализация. Однако объяснить возвращаемость не удавалось вплоть до 60-х годов, причем оказалось, что причина заключается в специфических свойствах солитонов.

### Вопросы для обсуждения

1. Встреча с уединенной волной Джона Скотта Рассела
2. Уравнение Буссинеска и Кортвега-де Вриза
3. Второе рождение солитона. Проблема Ферми–Паста–Улама
4. Работа Мартина Крускала и Нормана Забуски.
5. Солитонный телеграф
6. Магистральные ВОЛС

### Практическое занятие №3

#### Прямое преобразование для нелинейного уравнения Шредингера, или рассеяние на бесконечной прямой

**Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- умением понять поставленную задачу;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты; владением проблемно-задачной формой представления математических знаний

### Теория, выносимая на обсуждение

Сначала кратко изложим схему решения обратной задачи рассеяния, а затем покажем, как этот метод применяется для решения уравнения КдВ. Решение обратной задачи требует априорного знания так называемых данных рассеяния. В их число вводят дискретные собственные значения (или энергетические уровни связанных состояний), нормировочные постоянные для собственных функций и коэффициент отражения.

1. Дискретные собственные значения – это такие значения

$$\lambda_n = -\chi_n^2, n = 1, \dots, N,$$

для которых решения  $\psi_n$  уравнения

$$\psi_{xx} - (u - \lambda)\psi = 0 \text{ квадратично интегрируемы.}$$

Это уравнение инвариантно к замене переменных, соответствующих переходу к равномерно и прямолинейно движущихся систем координат и сдвигу на постоянную величину (скажем  $\lambda$ ).

2. Если собственная функция  $\psi_n$  нормирована на единицу, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2(x) dx = 1,$$

то нормировочные постоянные определяются соотношением

$$C_n = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\chi_n x} \varphi_n(x)$$

3. Положив  $\lambda = k^2$ , представим волновую функцию  $\psi$  как зависящую от пространственной координаты  $x$  составляющую плоской волны, падающей из бесконечности на область с потенциалом  $u(x)$ , входящим в уравнение Шредингера. В результате рассеяния этой волны на потенциале часть ее энергии отражается в обратном направлении  $x \rightarrow +\infty$ , а остальная часть проходит в направлении  $x \rightarrow -\infty$ . В случае плоской волны с единичной амплитудой, падающей из бесконечности, асимптотическое поведение волновой функции таково:

$$\psi(x, t) \sim \begin{cases} e^{-ikx} + b(k)e^{ikx}, & \text{при } x \rightarrow \infty \\ a(k)e^{-ikx}, & \text{при } x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (2)$$

Амплитуда отраженной волны  $b(k)$  называется коэффициентом отражения, а амплитуда прошедшей волны  $a(k)$  – коэффициентом прохождения. По этим данным рассеяния построим функцию

$$B(\xi) = \sum_{n=1}^N C_n^2 e^{-\chi_n \xi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{ik\xi} dk,$$

где сумма соответствует вкладу дискретного спектра, а интеграл Фурье – вкладу непрерывного спектра. Подставив эту функцию в линейное интегральное уравнение Гельфанда – Левитана – Марченко

$$K(x, y) + B(x + y) + \int_x^\infty B(y + z) K(x, z) dz = 0,$$

и решив его, найдем решение обратной задачи с решением уравнения КдВ, заметим, что мы не принимали во внимание временную переменную  $t$  и теперь необходимо определить, как данные рассеяния зависят от  $t$ .

В случае произвольной зависимости  $u(x, t)$  от  $t$  найти зависимость данных рассеяния от времени, очевидно, невозможно. Однако, если  $u(x, t)$  меняется во времени как решение КдВ

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

то  $a(k, t)$  и  $b(k, t)$  подчиняются уравнениям

$$\begin{aligned} L\varphi &= k\varphi, \\ \varphi_t &= -A\varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

и найдем  $\dot{a}(k)$  и  $\dot{b}(k)$  из системы (1)

$$\begin{aligned} \psi &= a(k, t)\varphi_1 + b(k, t)\varphi_2, \\ \bar{\psi} &= \bar{a}\varphi_1 + \bar{b}\varphi_2. \end{aligned}$$

Из  $+\infty$  может проходить пакет функций с коэффициентами  $C_1$  и  $C_2$ , то есть

$$C_1\psi + C_2\bar{\psi} = C_1e^{-ikx} + C_2e^{ikx}, \quad \text{где } C_{1,2} = \text{const.}$$

Посмотрим, с каким коэффициентом  $C_1(C_2)$  необходимо взять функцию  $\psi$ , чтобы она удовлетворяла второму уравнению системы (3) на  $+\infty$ .

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A\right)\psi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3u\frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial}{\partial x}u\right)\psi = 4(ik)^3 e^{ikx} = -4ik^3 e^{ikx} \quad (4)$$

Последнее равенство выражается через  $A$ , где

$$A = 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3u\frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial}{\partial x}u \quad (5)$$

третьего порядка. В равенстве (4) потенциал  $u(x)$  на  $+\infty$  стремится к нулю, следовательно

$$3u\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow 0, \quad 3\frac{\partial}{\partial x}u \rightarrow 0,$$

и функция идет на  $-\infty$  в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 4\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)(ae^{ikx} + be^{-ikx}) = \dot{a}e^{ikx} + \dot{b}e^{-ikx} + 4(ik)^3 ae^{ikx} + 4(-ik)^3 be^{-ikx}.$$

Приравняем на  $+\infty$  и на  $-\infty$ , полученная функция удовлетворяет второму уравнению системы (3)

$$-4ik^3(ae^{ikx} + be^{-ikx}) = \dot{a}e^{-ikx} + \dot{b}e^{-ikx} - 4ik^3 ae^{ikx} + 4ik^3 be^{-ikx}.$$

Левая часть равенства на  $+\infty$ , и правая на  $-\infty$ . При соответствующих функция, соответствующие коэффициенты равны, следовательно

$$\dot{a}(k) = 0 \quad \text{и} \quad \dot{b}(k) = -8ik^3 b,$$

а зависимость  $\phi(x, k)$  от  $t$  дается уравнением

$$\dot{\phi}(x, k) = -A\phi(x, k) + 4ik^3 \phi(x, k). \quad (6)$$

Верно и обратное утверждение: если данные рассеяния меняются во времени, то потенциал  $u(x, t)$  (однозначно ими определяемый) удовлетворяет КдВ. Простейший способ убедиться в справедливости сделанных утверждений – это заметить, что КдВ тождественно уравнению для операторов

$$\dot{L} = [L, A], \quad (7)$$

где

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + u$$

и  $A$ , задаваемому выражением (5).

Действительно,  $\dot{L}$  есть оператор умножения на функцию  $u_t$ , а коммутатор  $[L, A]$ , как показывают простые вычисления, также является оператором умножения на  $6uu_x - u_{xxx}$ , так что (6) совпадает с КдВ

Представление эволюционных уравнений в форме (4) называется представлением Лакса. Тривиальным следствием этого представления является независимость собственных чисел оператора  $L$  от времени, поскольку, ввиду антисимметричности  $A$  в  $L_2(R)$ , оператор  $L(t)$  унитарно эквивалентен  $L(0)$ . Таким образом, собственные значения  $L$  суть интегралы КдВ. Рассмотрим теперь уравнение  $-\frac{d^2\psi}{dx^2} + u(x, t)\psi = k^2\psi$  и продифференцируем его по времени:

$$\dot{L}\psi + L\dot{\psi} = k^2\dot{\psi}, \quad \left(\frac{dk^2}{dt} = 0\right).$$

Используя выражение (4) для  $\dot{L}$ , находим

$$(L - k^2)(\dot{\psi} + A\psi) = 0,$$

то есть  $\dot{\psi} + A\psi$  является собственной функцией  $L$  с тем же собственным значением, что и  $\psi$ . Обозначим эту функцию через  $\tilde{\psi}$ :

$$\dot{\psi} + A\psi = \tilde{\psi}, (L - k^2)\tilde{\psi} = 0. \quad (8)$$

Выше мы фиксировали  $\psi$  ее асимптотикой на  $-\infty$  по  $x$ :  $\psi = \varphi(x, k)$ . Это однозначно определяет решение  $\tilde{\psi}$ : асимптотика  $\psi$  при  $x \rightarrow -\infty$  не зависит от времени и имеет вид  $e^{-ikx}$ , значит,  $\dot{\psi} + A\psi \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 4ik^3 e^{-ikx}$ , т.е.

$$\tilde{\psi} + 4ik^3 e^{-ikx} + \theta, \quad x \rightarrow -\infty, \quad \text{или} \quad \tilde{\psi} = 4ik^3 \varphi(x, k).$$

Таким образом, уравнение (8) в точности совпадает с (3). Устремляя в (3)  $x \rightarrow +\infty$  и полагая  $u(x)=0$ , находим

$$\dot{a}e^{-ikx} + \dot{b}e^{ikx} = \left( -4 \frac{d^3}{dx^3} + 4ik^3 \right) (ae^{-ikx} + be^{ikx}).$$

Столь же просто решается задача об эволюции во времени данных рассеяния в дискретном спектре  $\chi_n(t), b_n(t)$ ,  $n=1, \dots, N$ . Как уже выяснилось, собственные значения  $\lambda_n = -\chi_n^2$  от времени не зависят, поскольку  $L(t)$  эквивалентно  $L(0)$ . Этот же результат извлекается и непосредственно из уравнения  $\dot{a}(k) = 0: i\chi_n$  представляют собой нули не зависящей от времени аналитической функции  $a(k)$ , т. е.  $\dot{\chi}_n = 0$ . Зависимость же  $b_n(t)$  находится из уравнения (3), поскольку  $b_n$  по определению является коэффициентом в асимптотическом разложении  $\varphi(x, i\chi_n)$ :

$$\varphi(x, i\chi_n) = b_n(t)e^{-\chi_n x} + o(e^{-\chi_n x}), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Подставляя эту асимптотику в (3), при  $k = i\chi_n$ , находим

$$\dot{b}_n = 8\chi_n^3 b_n. \quad (9)$$

Итак, эволюция данных рассеяния во времени имеет вид:

$$s(t) = \left\{ r(k, 0)e^{8ik^3 t}, \chi_n, b_n e^{8\chi_n^3 t}, n=1, \dots, N \right\}. \quad (10)$$

Фактически мы проинтегрировали КдВ путем (неявной) замены переменных  $u(x) \rightarrow S$ . В новых переменных уравнения движения  $\dot{S} = F(S)$ .

Превратились в совокупность тривиально интегрируемых обыкновенных дифференциальных уравнений. Обращение замены  $S(t) \rightarrow u(x, t)$  дает решение КдВ. Таким образом, схема решения задачи Коши для КдВ выглядит так:

$$\overset{I}{u(x, 0)} \rightarrow \overset{II}{S(0)} \rightarrow \overset{III}{S(t)} \rightarrow u(x, t).$$

Первый этап в этой схеме состоит в вычислении данных рассеяния  $S(0)$  по начальному условию  $u(x, t)|_{t=0} = u(x, 0)$  с помощью решения уравнений на собственные функции оператора Шредингера с потенциалом  $u(x, 0)$ . Второй этап заключается в решении задачи Коши в терминах данных рассеяния. Эта задача оказывается тривиальной: ее общее решение дается формулами (10). Наконец, на последнем этапе нашей схемы необходимо указать потенциал  $u(x, t)$  в операторе Шредингера, имеющий  $S(t)$  в качестве данных рассеяния, т.е. решить обратную задачу рассеяния.

Успех применения метода обратной задачи рассеяния для решения уравнения КдФ объясняется двумя обстоятельствами. Во – первых, собственные значения постоянны, что приводит к существенному упрощению эволюционного уравнения для  $\psi$ . Во – вторых, другие данные рассеяния вычислены при  $x \rightarrow \infty$ , при где известно решение  $u(x, t)$  для всех значений времени, а именно  $u=0$ . Не так обстоит дело в случае периодического начального условия, и потому применение метода обратной задачи рассеяния к этому случаю не было успешным.

### **Вопросы для обсуждения**

1. Гильбертово пространство. Аксиоматика.
2. Операторы.
3. Границы самосопряжённого оператора.
4. Обратный оператор.
5. Спектр оператора. Схема метода обратной задачи рассеяния
6. Сведения из теории рассеяния. Обратная задача квантовой теории рассеяния.
7. Характеристики спектра оператора Шредингера.
8. Аналитические свойства специальных решений уравнения Шредингера.

## РАЗДЕЛ 2. ОСНОВНЫЕ ИДЕИ МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ

### Практическое занятие №4 Основные идеи теории рассеяния

**Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных и профессиональных позиций;
- пониманием сущности и значения информации в развитии современного общества; владение основными методами.

#### Теоретические основы

Осветим некоторые аспекты работы Лакса, которая вызвала существенное развитие метода обратной задачи и способствовала лучшему пониманию его математической природы.

**Определение:** Линейный оператор  $U$  в гильбертовом пространстве  $H$  называется унитарным, если он не меняет величины скалярного произведения

$$(Uf, Ug) = (f, g)$$

для любых  $f, g \in H$  и при этом  $U$  отображает элементы  $H$  на себя.

**Определение:** Элементы  $f$ , удовлетворяющие уравнению

$$Af = \lambda f,$$

и сохраняющие под действием оператора свое направление, (каждый такой элемент  $f \neq 0$ ) называются собственными векторами оператора  $A$ , а  $\lambda$ , для которых это возможно, называются собственными значениями оператора  $A$ .

**Определение:** Рассмотрим оператор  $A - \lambda E = B(\lambda)$ . Допустим, что для некоторого  $\lambda$  оператор  $A - \lambda E$  имеет обратный  $R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}$ . Оператор  $R_\lambda$  называется резольвентным оператором для оператора  $A$ . Все  $\lambda$  при которых  $R_\lambda$  существует, определен во всем пространстве и ограничен, называются регулярными значениями оператора  $A$ . Совокупность всех  $\lambda$  не являющихся регулярными, называется спектром оператора  $A$ , в частности, все собственные значения принадлежат спектру.

Пусть даны сравнительно простые дифференциальные операторы, зависящие от функции  $u(x, t): L_u \equiv (-\partial^2 / \partial x^2 + u)$ ,  $A_u \equiv \partial^{2n+1} / \partial x^{2n+1} +$  члены низшего порядка ( $A_\lambda$  косо-симметричен,  $A_u^* \equiv -A_u$ ), такие что существуют однопараметрическое семейство унитарных операторов  $U$ , удовлетворяющих уравнению  $U_t \equiv AU$ , причем  $L_u$  унитарно эквивалентен относительно  $U$ , т.е.  $U^{-1}(t)L_u(t)U(t)$  не зависит от  $t$ , к тому же операторы  $L_u$  и  $A_u$  не обладают коммутационным свойством при действии друг на друга; тогда, как отмечает Лакс, выполняется следующая

**Теорема 1.** Уравнение Лакса

$$L_t = [A, L] = AL - LA \quad (1)$$

с выбранными выше свойствами, эквивалентно линейной системе

$$L\varphi = \lambda\varphi, \quad (2)$$

$$\varphi_t = A\varphi. \quad (3)$$

где  $\varphi$ -собственная функция,  $\lambda$  - собственное значение оператора  $L$ ; оператор  $A$  определяет эволюцию собственных функций по времени.

*Доказательство.*

1) Докажем, что из (2) и (3) следует (1). Найдем производную по времени уравнения (2):

$$(L\varphi)_t = (\lambda\varphi)_t,$$

в силу независимости собственных чисел оператора  $L$  от времени, получим равенство

$$L_t\varphi + L\varphi_t = \lambda\varphi_t,$$

используя равенство (3) заменим производные функции  $\varphi$ , что дает уравнение

$$L_t\varphi + LA\varphi = \lambda A\varphi. \quad (4)$$

Так как  $\lambda - const$  и обладает коммутационным свойством с операторами, то

$$\lambda A\varphi = A\lambda\varphi. \quad (5)$$

Используя (2) и (5), получаем  $\lambda A\varphi = A\lambda\varphi = AL\varphi$ . Возвращаясь к (4):  $L_t\varphi + LA\varphi - AL\varphi = 0$  или  $L_t + (LA - AL) = L_t + [L, A]$ , мы приходим к выводу, что из системы линейных уравнений (2) и (3) всегда следует выполнение уравнения Лакса (1).

2) Докажем обратное: что из (1) следует (2) и (3). Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  оператор  $L$  удовлетворяет равенству

$$L(0) = L_0 = \lambda \quad (6)$$

Используя свойство унитарного оператора, имеем

$$L = UL_0U^{-1}, \quad (7)$$

где  $U^{-1}$  – оператор, обратный оператору  $U$ . Продифференцируем равенство (1) по времени  $t$ :

$$L_t = U_t L_0 U^{-1} + U(L_0)_t U^{-1} + UL_0(U^{-1})_t. \quad (8)$$

Учитывая (6), второе слагаемое в (8) равно нулю. Используя свойство тождественного (единичного) оператора  $E = UU^{-1}$ , определим производную оператора  $(U^{-1})_t$   $E_t = (UU^{-1})_t = U_t U^{-1} + U(U^{-1})_t = 0$  откуда имеем

$$U_t U^{-1} = -U(U^{-1})_t. \quad (9)$$

Умножим слева (9) на  $U^{-1}$

$$-U^{-1}U_t U^{-1} = (U^{-1})_t$$

и подставим в (8) полученное выражение:

$$L_t = U_t L_0 U^{-1} - UL_0 U^{-1} U_t U^{-1} + U(L_0)_t U^{-1} \quad (10)$$

Умножение на единичный оператор переводит получившееся уравнение в равносильное, т.о.

$$L_t = U_t E L_0 U^{-1} - UL_0 U^{-1} U_t U^{-1} + U(L_0)_t U^{-1}$$

учитывая то, что  $E = U^{-1}U$  и условие теоремы (1) получим следующее равенство:

$$\underbrace{U_t U^{-1}}_A \underbrace{UL_0 U^{-1}}_L - \underbrace{UL_0 U^{-1}}_L \underbrace{U_t U^{-1}}_A + \underbrace{U(L_0)_t U^{-1}}_0 = L_t,$$

т.к.  $A = U_t U^{-1}$ ,  $L = UL_0 U^{-1}$ ,  $U(L_0)_t U^{-1} = 0$ . В полученном выражении  $U$  принадлежит бесконечному семейству унитарных операторов и для его выполнения необходимо, чтобы  $(L_0)_t = 0$ . Следовательно,  $L(0) = L_0 = \lambda$  – не зависит от времени, поэтому собственные значения оператора  $L$  являются сохраняющимися величинами.

Т.о. мы доказали эквивалентность (1) системе (2) и (3).

**Замечание.** При замене системы координат, в которой  $x$  и  $u$  остаются прежними, а  $t = -\tau$ , уравнение Лакса примет вид  $L_t = [L, A]$ . Поэтому уравнения  $L_t = [L, A]$  и  $L_t = [A, L]$  эквивалентны.

Следует отметить, что все собственные значения  $\lambda$  оператора  $L$  являются интегралами движения (интегралы движения – это связь функции и ее производной, которые при движении механической системы сохраняют свои постоянные, зависящие только от начальных условий.), а также т.к.  $L_{u,t} = u_t$ , то операторное уравнение  $L_{u,t} = [A, L_u]$  есть эволюционное уравнение  $u_t = K[u]$ , в котором  $K[u]$  – это функционал от  $u$ .

Лакс доказал, что начальные данные  $u(x,0)$  однозначно определяют решения упомянутых выше нелинейных эволюционных уравнений. Представление нелинейных эволюционных уравнений в виде «пары Лакса»

$$L_t = [A, L]$$

остается самым мощным методом получения аналитических решений таких уравнений. Заметим, что подомное представление гарантирует постоянство спектра собственных значений, так как если  $A$  кососимметричен, то решение операторного уравнения  $U_t = AU$  унитарно.

С методом Лакса связаны следующие трудности: во-первых, нужно «угадать» подходящий оператор  $L$  и затем найти такой оператор  $A$ , чтобы удовлетворить условиям:

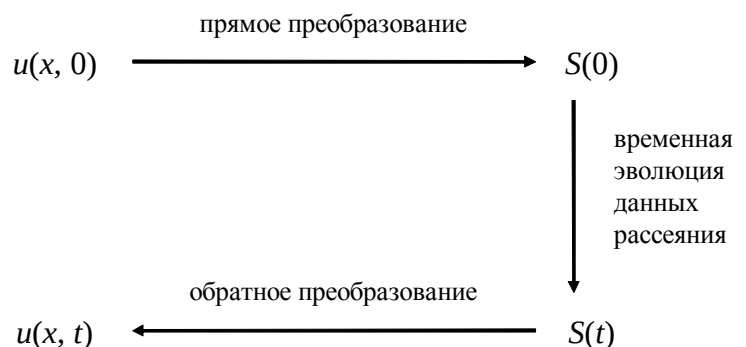
- 1) для оператора  $L$  поставлена спектральная задача  $Lv = \lambda v$ ,
- 2) оператор  $A$  определяет эволюцию собственной функции по времени  $v_t = Av$ ;
- 3) выполняется условие  $L_t = [L, A]$ .

Во-вторых, часто очень неудобно работать с дифференциальными операторами (например, в случае *sin-Гордон*  $u_{xt} = \sin u$ ).

Нелинейные дифференциальные уравнения, эквивалентные уравнению Лакса с указанными операторами  $L$  и  $A$ , являются интегрируемыми методом одномерной задачи рассеяния.

Основная идея МОЗР для решения нелинейных эволюционных уравнений  $u_t = K[u]$  состоит в следующем: поскольку никакого прямого способа построения  $u(t,x)$  по начальным данным обычно нет, можно попытаться связать с данным уравнением некоторую задачу рассеяния с рассеивающим потенциалом  $u(t,x)$ .

Начальное условие  $u(x,0)$  отображается с помощью задачи рассеяния на так называемые «данные рассеяния». Далее оказывается, что эволюция этих данных может быть найдена из нелинейного эволюционного уравнения. Последним шагом является вычисление потенциала  $u(x,t)$  по данным рассеяния в момент времени  $t = 0$ . Это может быть сделано с помощью линейных методов так называемой «обратной» задачи. Итак,  $u(t,x)$  найдено! Схематически это можно изобразить так, как показано на рисунке, где  $S(0)$  – данные рассеяния.



### Вопросы для обсуждения

1. Операторное уравнение Лакса и его связь с методом обратной задачи рассеяния
2. Схема вывода эволюционных уравнений из линейного интегрального уравнения.
3. Примеры построения нелинейных дифференциальных уравнений
4. Конструкция Захарова – Шабата

### Практическое занятие № 5. Связь коэффициента отражения с преобразованием Фурье

**Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- умением понять поставленную задачу;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний

#### Теоретические основы, выносимые на обсуждение

##### *Характеристики непрерывного спектра оператора Шредингера*

Матрица перехода  $T(k)$  предоставляет исчерпывающую информацию о непрерывном спектре оператора Шредингера, она содержится в коэффициентах отражения:

$r(k) = \frac{b(k)}{a(k)}$ . Из (6) следует

$$\left(1 - |r(k)|^2\right)^{-1} = \frac{1}{1 - |r(k)|^2} = \frac{1}{1 - \frac{|b(k)|^2}{|a(k)|^2}} = \frac{1}{\frac{|a(k)|^2 - |b(k)|^2}{|a(k)|^2}} = \frac{|a(k)|^2}{|a(k)|^2 - |b(k)|^2} = |a(k)|^2,$$

$$|a(k)|^2 = \left(1 - |r(k)|^2\right)^{-1}$$

то есть модуль  $r(k)$  однозначно определяет модуль  $a(k)$ . Зная нули аналитической в верхней полуплоскости функции  $a(k)$ , можно однозначно определить аргумент по модулю. Для этого рассмотрим функцию:

$$a_1(k) = a(k) \prod_{n=1}^N \frac{k + i\chi_n}{k - i\chi_n}. \quad (7)$$

Эта функция аналитична при  $\text{Im } k > 0$ , но уже не имеет там нулей, так что  $\ln a_1(k)$  аналитичен в верхней полуплоскости и обращается в нуль при  $|k| \rightarrow \infty$ . При этом на вещественной оси  $|a_1(k)| = |a(k)|$ . Дисперсионное соотношение для функции  $\ln a_1(k) = \ln |a_1(k)| + i \arg a_1(k)$  дает

$$\arg a_1(k) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |a(k')| dk'}{k' - k},$$

таким образом

$$\arg a(k) = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^N \ln \frac{k - i\chi_n}{k + i\chi_n} - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |a(k')| dk'}{k' - k}. \quad (8)$$

Итак,  $a(k)$  восстанавливается по модулю коэффициента отражения. Функция же  $b(k)$  есть просто  $r(k)a(k)$ .

### **Характеристики дискретного спектра оператора Шредингера.**

Собственные функции, соответствующие собственному значению  $\lambda_n = -\chi_n^2$  удовлетворяют уравнению:  $-\psi'' + u(x)\psi = -\chi_n^2\psi$ .

Дискретный спектр – простой, так что все решения этого уравнения получаются из какого либо одного умножением последнего на константу. На бесконечности собственные функции имеют асимптотики  $\psi \rightarrow C_{\pm} e^{\mp \chi_n x}$ ,  $x \rightarrow \pm \infty$ . Фиксируем собственную функцию  $\varphi^{(n)}(x)$  ее асимптотикой на  $-\infty$  по  $x$ :

$$\varphi^{(n)}(x) = e^{\chi_n x} + o(e^{\chi_n x}). \quad (9)$$

При этом при  $x \rightarrow \infty$  функции

$$\varphi^{(n)}(x) = b_n e^{-\chi_n x} + o(e^{-\chi_n x})$$

вещественны и величины  $b_n$  тоже вещественны. Занумеруем собственные значения  $\lambda_n$  обычным образом, в порядке возрастания  $\lambda_n$  (то есть убывания  $\chi_n$ ):  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N < 0$ . При этом  $\lambda_1$  представляет собой энергию основного состояния, а  $\varphi^{(1)}$  – волновую функцию этого состояния;  $\varphi^{(1)}$  не имеет нулей, а  $\varphi^{(n)}$  ровно  $n - 1$  раз проходит через нуль. Поэтому

$$b_n = |b_n|(-1)^{n-1}. \quad (10)$$

Положительные величины  $|b_n|$  составляют дополнительные к собственным значениям характеристики дискретного спектра. Эти характеристики вместе с коэффициентами  $r(k)$  и набором собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  полностью определяют спектр задачи (2).

Полученная совокупность  $S = (r(k), \chi_n, |b_n|, n=1, \dots, N)$  является *данными рассеяния*. Отображение  $u(x) \rightarrow S$  потенциалов  $u(x)$  в данные рассеяния однозначно обратимо. Процедура восстановления  $u(x)$  по  $S$  составляет предмет обратной задачи теории рассеяния.

### **Задания для самостоятельного решения**

1. Показать, что оператор Шредингера  $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u$  является самосопряженным оператором.
2. Показать, что оператор Дирака  $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} q_1(x, t) & 0 \\ 0 & q_2(x, t) \end{pmatrix}$  является самосопряженным оператором.

3. Найти значение коммутатора  $[L, A]$  для операторов  $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u$ ,

$$A = 4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3u \frac{\partial}{\partial x} - 3 \frac{\partial}{\partial x} u.$$

4. Найти значение коммутатора  $[L, A]$  для операторов  $L = -\frac{d^3}{dx^3} + u$ ,

$$A = 4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 3u \frac{\partial}{\partial x} - 3 \frac{\partial}{\partial x} u.$$

5. Найти значение коммутатора  $[L, A]$  для операторов  $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u$ ,

$$A = 4\frac{\partial^2}{\partial x^2} - u\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}u.$$

### Практическое занятие №6 Данные рассеяния и их свойства

**Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- умением понять поставленную задачу;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты; владением проблемно-задачной формой представления математических знаний

### Теоретические основы

При изучении обратной задачи рассеяния основную роль играют свойства введенных спектральных решений уравнения Шредингера. Оказывается, что при любых  $x$  функция  $\varphi(x, k)e^{ikx}$  аналитична в верхней полуплоскости  $k$  и имеет там асимптотику:  $\varphi(x, k)e^{ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right)$ ,  $|k| \rightarrow \infty$ ,  $\text{Im } k > 0$ , а решение  $\varphi(x, k)$  аналитично в нижней полуплоскости  $k$  и так же имеет асимптотику:

$$\psi(x, k)e^{ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), |k| \rightarrow \infty, \text{Im } k < 0.$$

*Доказательство.*

Перейдем от уравнения (2) к эквивалентному интегральному уравнению для  $\varphi(x, k)$ , используя функцию Грина  $G(x, x', k)$  оператора  $-\frac{d^2}{dx^2} + k^2$ :

$\varphi(x, k) = e^{-ikx} - \int_{-\infty}^{\infty} G(x, x', k)u(x')\varphi(x', k)dx$ . Учитывая асимптотику  $\varphi(x, k)$  на  $-\infty$  по  $x$ , функция Грина запишется:

$$G(x, x', k) = \begin{cases} -\frac{\sin k(x - x')}{k}, & x > x', \\ 0, & x < x'. \end{cases}$$

Функция  $\chi_+(x, k) = \varphi(x, k)e^{ikx}$  удовлетворяет уравнению

$$\chi_+(x, k) = 1 + \int_{-\infty}^x \frac{e^{2ik(x-x')} - 1}{2ik} u(x')\chi_+(x', k)dx'. \quad (11)$$

При выходе в верхнюю полуплоскость  $k$  экспонента в ядре уравнения (11) остается ограниченной. Интегрирование ведется по области  $x' < x$ . Функция  $\chi_+(x, k)$  допускает аналитическое продолжение в область  $\text{Im } k > 0$ . Аналогично,

$$\chi_-(x, k) = \psi(x, k)e^{-ikx}, \quad \chi_-(x, k) = 1 - \int_x^{\infty} \frac{e^{2ik(x-x')} - 1}{2ik} u(x')\chi_-(x', k)dx', \quad \chi_-(x, k) \quad \text{аналитически}$$

продолжима в нижнюю полуплоскость  $k$ ; при  $|k| \rightarrow \infty$  имеем

$$\chi_-(x, k) = 1 + \frac{1}{2ik} \int_x^\infty u(x') dx' + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (12)$$

Аналогично, функция  $\bar{\psi}(x, \bar{k})$  - аналитична в верхней полуплоскости  $k$ , что следует из аналитичности  $\psi(x, k)$  в нижней полуплоскости,  $a(k)$  и  $b(k)$  - можно вычислить через  $\varphi(x, k)$  и  $\bar{\psi}(x, \bar{k})$ , используя вронскианы  $W(\varphi, \bar{\psi})$ ,  $W(\varphi, \psi)$  и равенство (5), находим

$$\begin{aligned} a(k) &= (2ik)^{-1} [\bar{\psi}_x(x, k) \varphi(x, k) - \bar{\psi}(x, k) \varphi_x(x, k)] \\ b(k) &= (2ik)^{-1} [\varphi_x(x, k) \psi(x, k) - \varphi(x, k) \psi_x(x, k)] \end{aligned} \quad (13)$$

Из первой формулы следует, что  $a(k)$  аналитична в верхней полуплоскости  $k$  и имеет асимптотику  $a(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right)$ ,  $|k| \leftarrow \infty$ ,  $\text{Im } k < 0$ . Теорема доказана.

Точки верхней полуплоскости, в которых  $a(k)$  обращается в нуль, соответствуют дискретному спектру оператора  $L$ . Действительно, равенство нулю вронскиана функций  $\varphi(x, k_0), \bar{\psi}(x, \bar{k}_0)$ , ( $a(k_0) = 0$ ) означает линейную зависимость:  $\varphi(x, k_0) = c \bar{\psi}(x, \bar{k}_0)$ . Следовательно,  $\varphi(x, k_0)$  экспоненциально убывает при  $x \rightarrow -\infty$  и на  $+\infty$  по  $x$ . Таким образом,  $\varphi(x, k_0)$  является собственной функцией дискретного спектра  $L$ , а  $k_0^2$  - собственным значением  $L$ . Из самосопряженности следует, что  $k_0^2$  вещественно, т. е. все нули  $a(k)$  лежат на мнимой оси.

Пусть  $\lambda_n = -\chi_n^2$  - собственные значения  $L$ . Функция  $\varphi(x, i\chi_n)$  имеет ту же асимптотику при  $x \rightarrow \infty$ , что и собственная функция  $\varphi^{(n)}(x)$ , поэтому они равны. На  $+\infty$  по  $x$   $\varphi^{(n)}(x) = b_n e^{-\chi_n x} + O(e^{-\chi_n x})$ , то есть на мнимой оси функции  $\bar{\psi}(x, -i\chi_n)$  и  $\psi(x, -i\chi_n)$  вещественны

$$\varphi(x, i\chi_n) = b_n \bar{\psi}(x, -i\chi_n) = b_n \psi(x, -i\chi_n). \quad (14)$$

Таким образом,  $a(i\chi_n) = 0$  и между нулями  $a(k)$ , расположенными в верхней полуплоскости  $k$  и собственными значениями  $L$  имеется взаимно однозначное соответствие. Нули  $a(k)$  - простые.

Продифференцируем уравнение:  $L\varphi(x, k) = k^2 \varphi(x, k)$  по  $k$  в точке  $k = i\chi_n$ ,

$$(L + \chi_n^2) \varphi'(x, i\chi_n) = 2i\chi_n \varphi(x, i\chi_n); \quad k^2 = -\chi_n^2.$$

Умножим это соотношение на  $\varphi(x, i\chi_n)$  и проинтегрируем по всем  $x$ , получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, i\chi_n) (L + \chi_n^2) \varphi'(x, i\chi_n) dx, \text{ учитывая, что главный член в асимптотике } \varphi(x, i\chi_n)$$

имеет вид  $a'(i\chi_n) e^{\chi_n x}$  (так как  $a(i\chi_n) = 0$ ), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x, i\chi_n) dx = ia'(i\chi_n) b_n. \quad (15)$$

то есть  $a'(i\chi_n) \neq 0$ . Из этой формулы следует  $ia'(i\chi_n)$  вещественно и имеет тот же знак, что и  $b_n$ .

Вместе с (15) отметим еще формулу для скалярного произведения функций непрерывного спектра:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(x, k) \varphi(x, k') dx = 2\pi |a(k)|^2 \delta(k - k') + 2\pi \bar{a}(k) \bar{b}(k) \delta(k + k').$$

Возвращаемся к обратной задаче. Умножим (5) на  $a^{-1}(k)e^{ikx}$  и используя  $\chi_{\pm}(x, k)$  получим:

$$\frac{\chi_+(x, k)}{a(k)} = (\chi_-(x, k) + r(k)\bar{\chi}_-(x, k))e^{2ikx}. \quad (16)$$

Левая часть (16) является аналитической за исключением точек мнимой оси  $k = i\chi_n$ , в которых  $\chi_+(x, k)a^{-1}(k)$  - имеет простые полюсы, а  $\chi_-(x, k)$  - аналитична при  $\text{Im} k \leq 0$ .

$$\text{Рассмотрим функцию} \quad \Phi(x, k) = \begin{cases} \chi_+(x, k)a^{-1}(k), & \text{Im} k > 0, \\ \chi_-(x, k), & \text{Im} k < 0; \end{cases} \quad (17)$$

**Она имеет простые полюса в верхней полуплоскости и скачек на действительной оси равной (из (16))  $r(k)\chi_-(x, k)e^{2ikx}$ . Во всех остальных точках комплексной плоскости функция  $\Phi$  - аналитична и имеет асимптотику на бесконечности равную 1. Очевидно, что  $\Phi$  представима в виде**

$$\Phi(x, k) = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma_n(x)}{k - i\chi_n} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(k')\bar{\chi}_-(x, k')e^{2ik'x} dk'}{k' - k}, \quad (18)$$

где  $\Gamma_n(x)$  - вычет функции  $\Phi(x, k)$  в точках  $k = i\chi_n$ . Равенство (18) есть следствие формулы Коши:

$$\Phi(x, k) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\Phi(x, k') - 1)dk'}{k' - k},$$

в которой контур интегрирования  $\gamma$ , имеет вид, представленный на рисунке.

Величину  $\Gamma_n(x)$  можно связать со значением  $\Phi(x, k)$  в точках нижней полуплоскости, где  $k = -i\chi_n$  (с  $\bar{\chi}_-(x, -i\chi_n)$ ). Используя (14), найдем:

$$\begin{aligned} \Gamma_n(x) &= \frac{\varphi(x, i\chi_n)e^{-\chi_n x}}{a'(i\chi_n)} = \frac{b_n \psi(x, -i\chi_n)e^{-\chi_n x}}{a'(i\chi_n)} = \\ &= \frac{b_n}{a'(i\chi_n)} \chi_-(x, -i\chi_n)e^{-2\chi_n x}. \end{aligned}$$

Из (18) определяя  $\chi_-(x, -i\chi_n)$ , получаем:

$$\Gamma_n(x) = \frac{b_n e^{-2\chi_n x}}{a'(i\chi_n)} \left\{ 1 + i \sum_{m=1}^N \frac{\Gamma_m(x)}{\chi_n + \chi_m} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(k')\bar{\chi}_-(x, k')e^{2ik'x} dk'}{k' + i\chi_n} \right\}. \quad (19)$$

Устремим  $k$  в формуле (18) к действительной оси снизу, и согласно равенству (17)  $\Phi(x, k - i0) = \chi_-(x, k)$ , тогда

$$\chi_-(x, k) = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{\Gamma_n(x)}{k - i\chi_n} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(k')\bar{\chi}_-(x, k')e^{2ik'x} dk'}{k' - k + i0}. \quad (20)$$

является замкнутой системой линейных уравнений на  $\chi_-(x, k)$  и набор  $\Gamma_n(x)$ , то есть собственные значения оператора  $L$  является единственным вариантом записи уравнения обратной задачи. Остается выразить потенциал  $u(x)$  через решение системы (19, 20).

Проще всего это сделать, сравнив асимптотическое разложение  $\chi_-(x, k)$  по степеням  $\frac{1}{k}$ , следующее из (20), с формулой (12)

$$u(x) = -\frac{d}{dx} \left( 2i \sum_{n=1}^N \Gamma_n(x) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k)\bar{\chi}_-(x, k)e^{2ikx} dk \right). \quad (21)$$

Уравнения (19) и (20) однозначно разрешимы. В качестве собственных значений  $\chi_n$  можно выбирать произвольные положительные числа, величины

$c_n = (-1)^{n-1} b_n$  должны быть положительными. Коэффициентом  $r(k)$  может являться любая комплексная функция, удовлетворяющая условиям:

1.  $r(-k) = \bar{r}(k)$ ;
2.  $|r(k)| < 1, \quad k \neq 0$ ;
3.  $r(k) = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad |k| \rightarrow \infty$ ;
4. Преобразование Фурье коэффициента  $b(k)$ , построенного по  $r(k)$ ,

$$B(x) = \int_{-\infty}^{\infty} b(k) e^{ikx} dk$$

должно удовлетворять условию  $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) \left| \frac{dB}{dx} \right| dx < \infty$ .

Таким образом, мы написали уравнение обратной задачи в форме системы сингулярных интегральных уравнений.

#### Вопросы выносимые на обсуждение

1. Какова асимптотика спектральных решений уравнения Шредингера
2. Проведите доказательство асимптотики спектральной функции

$$\varphi(x, k) e^{ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad |k| \rightarrow \infty, \quad \text{Im } k > 0.$$

3. Построить функцию Грина  $G(x, x', k)$  оператора  $-\frac{d^2}{dx^2} + k^2$ .
4. С использованием функции Грина записать решение линейного уравнения Шредингера
5. Связь данных рассеяния с фундаментальной системой решений уравнения Шредингера
6. Свойства данных рассеяния  $a(k), b(k)$ .
7. Построение  $a(k), b(k), a_n(i\chi_n)$

8. Свойства функции 
$$\Phi(x, k) = \begin{cases} \chi_+(x, k) a^{-1}(k), & \text{Im } k > 0, \\ \chi_-(x, k), & \text{Im } k < 0; \end{cases}$$

### РАЗДЕЛ 3. СВЯЗЬ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ

#### Практическое занятие №7 Обратное преобразование

**Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- умением понять поставленную задачу;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний

#### Теоретический материал

Вторая линейная вспомогательная задача, для уравнения КдФ имеет вид

$$\psi_t - A\psi = \psi_t + 4\psi_{xxx} - 3u\psi_x - 3(u\psi)_x + a_{00}\psi = 0. \quad (9.18)$$

Этому уравнению должна удовлетворять функция

$$\varphi(x, t; \lambda) = a(\lambda, t)\psi(x, t; \lambda) + b(\lambda, t)\overline{\psi(x, t; \lambda)}, \quad (9.19)$$

где по-прежнему

$$\varphi(x, t; \lambda) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} e^{-i\lambda x}, \quad \psi(x, t; \lambda) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-i\lambda x}. \quad (9.20)$$

Подставляя в (9.18) и рассматривая полученное выражение в пределе  $x \rightarrow -\infty$ , с учетом (9.20) получаем

$$\begin{aligned} \psi_t + 4\psi_{xxx} - 3u\psi_x - 3(u\psi)_x + a_{00}\psi &= 0, \\ \varphi_t + 4\varphi_{xxx} - 3u\varphi_x - 3(u\varphi)_x + a_{00}\varphi &= 0, \\ \left(e^{-i\lambda x}\right)_t + 4\left(e^{-i\lambda x}\right)_{xxx} - 3u\left(e^{-i\lambda x}\right)_x - 3\left(ue^{-i\lambda x}\right)_x + a_{00}e^{-i\lambda x} &= 0, \\ 4(-i\lambda)^3 e^{-i\lambda x} + a_{00}e^{-i\lambda x} &= 0, \\ a_{00} &= -4i\lambda^3. \end{aligned} \quad (9.21)$$

При  $x \rightarrow +\infty$ , подставляя (9.19) в (9.18) и учитывая (9.20), находим

$$\begin{aligned} \varphi_t + 4\varphi_{xxx} - 3u\varphi_x - 3(u\varphi)_x + a_{00}\varphi &= 0, \\ (a\psi + b\bar{\psi})_t + 4(a\psi + b\bar{\psi})_{xxx} - 3u(a\psi + b\bar{\psi})_x - 3(u(a\psi + b\bar{\psi}))_x + a_{00}(a\psi + b\bar{\psi}) &= 0 \\ (ae^{-i\lambda x} + be^{i\lambda x})_t + 4(ae^{-i\lambda x} + be^{i\lambda x})_{xxx} + a_{00}(ae^{-i\lambda x} + be^{i\lambda x}) &= 0, \\ a_t e^{-i\lambda x} + b_t e^{i\lambda x} + 4a(-i\lambda)^3 e^{-i\lambda x} + 4b(i\lambda)^3 e^{i\lambda x} + a_{00}(ae^{-i\lambda x} + be^{i\lambda x}) &= 0. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Приравняв коэффициенты при  $e^{\pm i\lambda x}$  нулю, получаем:

$$\begin{aligned} (a_t + 4a(-i\lambda)^3 + a_{00}a)e^{-i\lambda x} + (b_t + 4b(i\lambda)^3 + a_{00}b)e^{i\lambda x} &= 0, \\ a_t + [4(-i\lambda)^3 + a_{00}]a &= 0, \quad a_t = 0, \Rightarrow a(\lambda, t) = a(\lambda, 0); \\ b_t + [4(i\lambda)^3 + a_{00}]b &= 0, \\ b_t + (-4i\lambda^3 - 4i\lambda^3)b &= 0, \end{aligned}$$

$$b_t - 8i\lambda^3 b = 0, \quad b_t = 8i\lambda^3 b, \\ b(\lambda, t) = b(\lambda, 0)e^{8i\lambda^3 t}. \quad (9.23)$$

Аналогичные вычисления можно проделать в случае дискретного спектра. Подставляя в (9.18) волновую функцию

$$\varphi(x, t; i\kappa_n) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} e^{-i(i\kappa_n)x} = e^{\kappa_n x}, \quad (9.24)$$

имеем в пределе  $x \rightarrow -\infty$  с учетом (9.20) при  $\lambda = i\kappa_n$  получаем

$$\begin{aligned} \varphi_t + 4\varphi_{xxx} - 3u\varphi_x - 3(u\varphi)_x + a_{00}\varphi &= 0, \\ (e^{\kappa_n x})_t + 4(e^{\kappa_n x})_{xxx} - 3u(e^{\kappa_n x})_x - 3(ue^{\kappa_n x})_x + a_{00}e^{\kappa_n x} &= 0, \\ 4(e^{\kappa_n x})_{xxx} + a_{00}e^{\kappa_n x} &= 0, \\ (4\kappa_n^3 + a_{00})e^{\kappa_n x} &= 0, \quad 4\kappa_n^3 + a_{00} = 0, \\ a_{00} &= -4\kappa_n^3. \end{aligned}$$

В пределе же  $x \rightarrow +\infty$ , подставляя (9.19) в (9.18) и учитывая (9.20), находим

$$\begin{aligned} \varphi(x, t; i\kappa_n) &= a(i\kappa_n, t)\psi(x, t; i\kappa_n) + b(i\kappa_n, t)\overline{\psi(x, t; i\kappa_n)}, \\ a(i\kappa_n, t) &= 0, \\ \varphi(x, t; i\kappa_n) &= b(i\kappa_n, t)\overline{\psi(x, t; i\kappa_n)}, \\ \psi(x, t; \lambda) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^{-i\lambda x}, \\ \varphi(x, t; i\kappa_n) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} b(i\kappa_n, t)e^{-\kappa_n x}, \quad (9.26) \\ \varphi_t + 4\varphi_{xxx} - 3u\varphi_x - 3(u\varphi)_x + a_{00}\varphi &= 0, \\ (a\psi + b\overline{\psi})_t + 4(a\psi + b\overline{\psi})_{xxx} - 3u(a\psi + b\overline{\psi})_x - 3(u(a\psi + b\overline{\psi}))_x + a_{00}(a\psi + b\overline{\psi}) &= 0 \\ (be^{-\kappa_n x})_t + 4(be^{-\kappa_n x})_{xxx} + a_{00}(be^{-\kappa_n x}) &= 0, \\ b_t e^{-\kappa_n x} - 4b\kappa_n^3 e^{-\kappa_n x} + a_{00}be^{-\kappa_n x} &= 0, \\ (b_t - 4b\kappa_n^3 + a_{00}b)e^{-\kappa_n x} &= 0, \\ b_t - (4\kappa_n^3 - a_{00})b &= 0, \quad b_t - 8\kappa_n^3 b = 0, \quad b_t = 8\kappa_n^3 b, \\ b(i\kappa_n, t) &= b(i\kappa_n, 0)e^{8\kappa_n^3 t}. \quad (9.27) \end{aligned}$$

Из полученных формул (9.23), (9.27) находим зависимость данных обратной задачи  $S$  (9.17) от времени:

$$\begin{aligned} \lambda_t = \lambda_t|_{\lambda=i\kappa_n} &= 0, \quad (n=1, \dots, N), \\ \frac{b(i\kappa_n, t)}{a'(i\kappa_n, t)} &= \frac{b(i\kappa_n, 0)}{a'(i\kappa_n, 0)} e^{8\kappa_n^3 t}, \\ r(\lambda, t) = \frac{b(\lambda, t)}{a(\lambda, t)} &= \frac{b(\lambda, 0)}{a(\lambda, 0)} e^{8i\lambda^3 t} = r(\lambda, 0)e^{8i\lambda^3 t}, \quad (9.28) \end{aligned}$$

здесь первая строка выражает постоянство спектрального параметра линейных вспомогательных задач, что означает изоспектральность деформаций потенциала  $u(x, t)$ , генерируемых эволюцией во времени с помощью второй линейной вспомогательной задачи. Указанная изоспектральность предполагалась изначально при сопоставлении пары Лакса данному нелинейному эволюционному уравнению КдФ.

## Вопросы для обсуждения

1. Какова вторая линейная вспомогательная задача, для уравнения КдФ
2. Каков вид функции удовлетворяющей вторая линейная вспомогательная задача, для уравнения КдФ
3. Какую асимптотику на  $\pm\infty$  имеет функция, удовлетворяющей вторая линейная вспомогательной задачи уравнения КдФ
4. Постройте вывод определения  $a(\lambda, t), b(\lambda, t)$  для непрерывного спектра
5. Постройте вывод определения  $a(\lambda, t), b(\lambda, t)$  для дискретного спектра
6. Какова зависимость данных обратной задачи рассеяния от времени

## Практическое занятие №8

### Односолитонное решение Двухсолитонное взаимодействие.

**Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- умением понять поставленную задачу;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты;

## Теоретические основы

Устойчивость, свойственная солитонам, может быть продемонстрирована проще всего с помощью «прямого метода» Хироты на примере уравнения КдФ с граничными условиями  $u \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Метод этот в значительной степени интуитивен. Заметим, что солитонное решение может быть записано в виде

$$u = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \left[ \cosh \left( \frac{V^{1/2}}{2} (x - Vt) \right) \right]. \quad (7.2.1)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln \left[ \cosh \left( \frac{V^{1/2}}{2} (x - Vt) \right) \right] &= \frac{1}{\left[ \cosh \left( \frac{V^{1/2}}{2} (x - Vt) \right) \right]} \cdot \sinh \left( \frac{V^{1/2}}{2} (x - Vt) \right) \cdot \frac{V^{1/2}}{2} = \\ &= \frac{V^{1/2}}{2} \frac{\sinh \left( \frac{V^{1/2}}{2} (x - Vt) \right)}{\left[ \cosh \left( \frac{V^{1/2}}{2} (x - Vt) \right) \right]} \\ \frac{d}{dx} \frac{V^{1/2}}{2} \frac{\sinh \left( \frac{V^{1/2}}{2} (x - Vt) \right)}{\left[ \cosh \left( \frac{V^{1/2}}{2} (x - Vt) \right) \right]} &= \frac{V^{1/2}}{2} \frac{\cosh^2 \left( \frac{V^{1/2}}{2} (x - Vt) \right) - \sinh^2 \left( \frac{V^{1/2}}{2} (x - Vt) \right)}{\cosh^2 \left( \frac{V^{1/2}}{2} (x - Vt) \right)} \frac{V^{1/2}}{2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{V}{4} \frac{\cosh^2\left(\frac{V^{1/2}}{2}(x-Vt)\right) - \sinh^2\left(\frac{V^{1/2}}{2}(x-Vt)\right)}{\cosh^2\left(\frac{V^{1/2}}{2}(x-Vt)\right)} = \\
&= \frac{V}{4} \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{V^{1/2}}{2}(x-Vt)\right)} = \frac{u}{2}.
\end{aligned}$$

**Двухсолитонное решение.** Выше мы получили односолитонное решение. Чтобы получить более сложное решение, нужно стартовать с общего вида функции  $f_1$ , представленной в виде суммы гармоник (ряд Фурье). Рассмотрим функцию  $f_1$  в виде суммы двух гармоник:

$$f_1 = e^{\omega_1 t - k_1 x + \theta_1} + e^{\omega_2 t - k_2 x + \theta_2}. \quad (12)$$

$$L f_2 = (k_1 - k_2) \left[ (\omega_1 - \omega_2) - (k_1 - k_2)^3 \right] e^{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x + \theta_1 + \theta_2}. \quad (13)$$

У ИР в правой части стоит коэффициент  $1/2$ .

Решение уравнения (13) ищем в виде

$$f_2 = c e^{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x + \theta_1 + \theta_2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (13), получим

$$f_2 = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} e^{(\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x + \theta_1 + \theta_2}. \quad (14)$$

Дальнейшие вычисления показывают, что функции  $f$  с высшими индексами все тождественно равны нулю, так что мы снова получили точное решение.

Ниже мы увидим, что это решение соответствует двум солитонам. Аналогично получается  $N$ -солитонное решение.

Изложенный выше метод принадлежит Хироте. Он также применил свой метод к целому ряду нелинейных уравнений.

С помощью формулы (7.2.2) мы запишем точное решение уравнения КдФ. Для этого заметим, что

$$F = 1 + f_1 + f_2.$$

Введем обозначения

$$f_1 = \varphi_1 + \varphi_2,$$

где

$$\varphi_i = e^{\omega_i t - k_i x + \theta_i}, \quad i = 1, 2.$$

Далее

$$f_2 = A \varphi_1 \varphi_2,$$

где

$$A = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

То есть

$$F = 1 + \varphi_1 + \varphi_2 + A \varphi_1 \varphi_2.$$

Тогда

$$u = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln F(x, t) = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln(1 + \varphi_1 + \varphi_2 + A\varphi_1\varphi_2) = 2 \frac{d}{dx} \frac{\varphi_{1x} + \varphi_{2x} + A(\varphi_{1x}\varphi_2 + \varphi_1\varphi_{2x})}{1 + \varphi_1 + \varphi_2 + A\varphi_1\varphi_2}.$$

но

$$\varphi_{ix} = -k_i \varphi_i,$$

поэтому

$$u = 2 \frac{d}{dx} \frac{-k_1\varphi_1 - k_2\varphi_2 + A(-k_1\varphi_1\varphi_2 - k_2\varphi_1\varphi_2)}{1 + \varphi_1 + \varphi_2 + A\varphi_1\varphi_2} = -2 \frac{d}{dx} \frac{k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + A(k_1 + k_2)\varphi_1\varphi_2}{1 + \varphi_1 + \varphi_2 + A\varphi_1\varphi_2}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} u &= -2 \frac{(1 + \varphi_1 + \varphi_2 + A\varphi_1\varphi_2)[k_1\varphi_{1x} + k_2\varphi_{2x} + A(k_1 + k_2)(\varphi_{1x}\varphi_2 + \varphi_1\varphi_{2x})]}{(1 + \varphi_1 + \varphi_2 + A\varphi_1\varphi_2)^2} + \\ &+ 2 \frac{[\varphi_{1x} + \varphi_{2x} + A(\varphi_{1x}\varphi_2 + \varphi_1\varphi_{2x})][k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + A(k_1 + k_2)\varphi_1\varphi_2]}{(1 + \varphi_1 + \varphi_2 + A\varphi_1\varphi_2)^2} = \\ &= 2 \frac{k_1^2\varphi_1 + k_2^2\varphi_2 + A(k_1 + k_2)^2\varphi_1\varphi_2 + (k_1 - k_2)^2\varphi_1\varphi_2 + A(k_1 + k_2)^2\varphi_1^2\varphi_2}{(1 + \varphi_1 + \varphi_2 + A\varphi_1\varphi_2)^2} + \\ &+ 2 \frac{A(k_1 + k_2)^2\varphi_1\varphi_2^2 + Ak_1^2\varphi_1^2\varphi_2 + Ak_2^2\varphi_1\varphi_2^2}{(1 + \varphi_1 + \varphi_2 + A\varphi_1\varphi_2)^2} + 2 \frac{2Ak_1(k_1 + k_2)\varphi_1^2\varphi_2 + 2Ak_2(k_1 + k_2)\varphi_1\varphi_2^2}{(1 + \varphi_1 + \varphi_2 + A\varphi_1\varphi_2)^2} = \\ &= 2 \frac{k_1^2\varphi_1 + k_2^2\varphi_2 + A\varphi_1\varphi_2(k_1^2\varphi_2 + k_2^2\varphi_1) + 2(k_1 - k_2)^2\varphi_1\varphi_2}{(1 + \varphi_1 + \varphi_2 + A\varphi_1\varphi_2)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, двухсолитонное решение имеет вид

$$u(x, t) = 2 \frac{k_1^2\varphi_1 + k_2^2\varphi_2 + A\varphi_1\varphi_2(k_1^2\varphi_2 + k_2^2\varphi_1) + 2(k_1 - k_2)^2\varphi_1\varphi_2}{(1 + \varphi_1 + \varphi_2 + A\varphi_1\varphi_2)^2}, \quad (15)$$

где

$$\varphi_i = e^{\omega_i t - k_i x + \theta_i}, \quad i = 1, 2, \quad A = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

Чтобы понять природу солитон-солитонного взаимодействия, удобно «сесть» на один из солитонов и наблюдать, как движется другой. Математически это соответствует переход в движущуюся систему координат. Введем новую пространственную координату

$$\xi = x - c_2 t = x - \frac{\omega_2}{k_2} t = x - k_2^2 t,$$

где  $c_2 = k_2^2$  – скорость второго солитона, тогда

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= e^{\omega_1 t - k_1(\xi + k_2^2 t) + \theta_1} = e^{(k_1^3 - k_1 k_2^2)t - k_1 \xi + \theta_1} = e^{k_1[(k_1^2 - k_2^2)t - \xi] + \theta_1}, \\ \varphi_2 &= e^{\omega_2 t - k_2(\xi + k_2^2 t) + \theta_2} = e^{(k_2^3 - k_2 k_2^2)t - k_2 \xi + \theta_2} = e^{-k_2 \xi + \theta_2}. \end{aligned}$$

Положим без потери общности, что  $k_1 > k_2$ . Нас будет вначале интересовать предел  $t \rightarrow -\infty$ . Для конечных  $\xi$  в этом пределе  $\varphi_1 \rightarrow 0$  и

$$\begin{aligned} u(x, t) &\xrightarrow{\varphi_1 \rightarrow 0} 2 \frac{k_2^2 \varphi_2}{(1 + \varphi_2)^2} = 2k_2^2 \frac{e^{-k_2 \xi + \theta_2}}{(1 + e^{-k_2 \xi + \theta_2})^2} = 2k_2^2 \frac{1}{(e^{(-k_2 \xi + \theta_2)/2} + e^{-(k_2 \xi + \theta_2)/2})^2} = \\ &= \frac{k_2^2}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{-k_2 \xi + \theta_2}{2}\right) = \frac{k_2^2}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\theta_2 - k_2(x - k_2^2 t)}{2}\right), \end{aligned} \quad (16)$$

что соответствует простому солитону. С другой стороны, при  $t \rightarrow -\infty$  и  $\xi \approx (k_1^2 - k_2^2)t$  величина  $\varphi_1$  остается ограниченной, а  $\varphi_2 \rightarrow \infty$ . При этом

$$u(x, t) \xrightarrow{\varphi_2 \rightarrow \infty} 2 \frac{Ak_1^2 \varphi_1}{(1 + A\varphi_1)^2} = \frac{k_1^2}{2} \operatorname{sech} \left( \frac{\theta_1 + \ln A - k_1(x - k_1^2 t)}{2} \right). \quad (17)$$

Таким образом, при  $t \rightarrow -\infty$  решение содержит два хорошо разделенных солитона, один из которых (большой, т.к.  $k_1 > k_2$ ) имеет амплитуду  $k_1^2/2$  и находится слева от другого с амплитудой  $k_2^2/2$ .

Рассмотрим теперь предел конечного  $\xi$  и  $t \rightarrow \infty$ . Имеем  $\varphi_1 \rightarrow \infty$  при ограниченном  $\varphi_2$ ; получаем решение

$$u(x, t) \xrightarrow{\varphi_1 \rightarrow \infty} 2 \frac{Ak_2^2 \varphi_2}{(1 + A\varphi_2)^2} = \frac{k_2^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\theta_2 + \ln A - k_2(x - k_2^2 t)}{2} \right). \quad (18)$$

Если положить  $\xi \approx (k_1^2 - k_2^2)t$  и  $t \rightarrow \infty$ , то будем иметь  $\varphi_2 \rightarrow 0$  при ограниченном  $\varphi_1$ , откуда

$$u(x, t) \xrightarrow{\varphi_2 \rightarrow 0} 2 \frac{k_1^2 \varphi_1}{(1 + \varphi_1)^2} = \frac{k_1^2}{2} \operatorname{sech} \left( \frac{\theta_1 - k_1(x - k_1^2 t)}{2} \right). \quad (19)$$

Заметим, что при  $t \rightarrow \infty$  солитон с большей амплитудой оказывается справа от солитона с меньшей амплитудой.

Представленное решение демонстрирует удивительную устойчивость солитонов по отношению к их взаимодействию. Кажется, что они проходят друг сквозь друга, изменяя лишь фазу. Другими словами, нелинейные волны ведут себя почти также как и линейные, которые, как известно, проходят друг через друга, не изменяясь. Фаза большего солитона меняется от  $\theta_1 + \ln A$  до  $\theta_1$  при изменении  $t$  от  $-\infty$  до  $\infty$ , а фаза меньшего солитона — от  $\theta_2$  до  $\theta_2 + \ln A$ . Такая устойчивость взаимодействия солитонов впервые наблюдалась в работе Забуского и Крускала (Zabusky and Kruskal, 1965), где уравнение КдФ исследовалось численными методами. В ситуации, когда солитоны разделены, с каждым из них можно связать траекторию максимума амплитуды. Из приведенных выше асимптотических выражений для решения следует, что максимум большего солитона при  $t \rightarrow -\infty$  движется по закону

$$x = \frac{\theta_1 + \ln A}{k_1} + k_1^2 t,$$

а при  $t \rightarrow \infty$  — по закону  $x = \frac{\theta_1}{k_1} + k_1^2 t$ .

Следовательно, единственным эффектом взаимодействия солитонов является пространственное смещение на  $\frac{\ln A}{k_1}$ .

Из приведенного рассмотрения можно сделать вывод, что солитоны во многом аналогичны частицам. Они участвуют во взаимодействии, но сами при этом существенно не изменяются.

Подобный подход позволил получить ряд новых результатов в статистической механике. Например, при рассмотрении твердых тел колебания атомов обычно описывают при помощи волн малой амплитуды, которые после квантования называются *фононами*. При низких температурах смещения атомов малы и фононы не взаимодействуют; соответствующей статистической моделью будет газ невзаимодействующих фононов. Этот подход оказался чрезвычайно плодотворным (Kittel, 1976). По мере увеличения температуры ангармонические члены в потенциале взаимодействия фононов приобретают все большие значения, что эквивалентно взаимодействию фононов. Статистическое описание при этом усложняется. Альтернативным подходом будет описание атомных смещений не

в терминах линейных волн (фононов), а посредством солитонов. При этом твердое тело рассматривается как газ невзаимодействующих солитонов.

### Вопросы выносимые на обсуждение

1. Записать вид односолитонного решения
2. Записать вид двусолитонного решения
3. Описать природу взаимодействия двух солитонов
4. В чем проявляется устойчивость солитонов при взаимодействии
5. Каково асимптотическое поведение решений при  $t \rightarrow \pm\infty$
6. Какой вывод можно сделать исходя из поведения солитонов при взаимодействии
7. Приведите примеры солитонного взаимодействия для различных природных объектов.

### Практическое занятие №9

#### Решения уравнений семейства Кортевега - де Вриза

**Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников;
- знанием и следование в жизни кодексу профессиональной этики;
- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;

#### Примеры построения точных решений

##### 1. Нелинейное уравнение в частных

$$p_{xxt}p - p_x p_{xt} = 4p^3 p_t \quad (1)$$

производных имеет решение в параметрическом виде

$$\begin{cases} p = \frac{\beta}{\alpha} \sin \phi, \\ \xi = C_3 \pm \alpha \sqrt{2c^2} F(\beta, \phi). \end{cases}$$

где  $p(x, t) = p(\xi)$ ,  $\xi = \varphi(t) + cx$ ,  $c, \alpha, \beta, C_3$  - произвольные постоянные,  $F(\beta, \phi)$  - эллиптический интеграл первого рода.

Доказательство. В уравнении (1) нетрудно заметить, что все члены имеют первую производную по переменной  $t$ , следовательно, можно предположить, что решения уравнения допускают преобразования координат вида:  $t + cx \rightarrow \varphi(t) + cx$ , где  $c$  - const,  $\varphi$  - произвольная функция.

Перейдем в уравнении (1) к переменной  $\xi = \varphi(t) + cx$ , тогда  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} = c \frac{\partial}{\partial \xi}$ ,

аналогично  $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} = \varphi'(t) \frac{\partial}{\partial \xi}$ , при этом  $p(x, t) = \psi(\xi)$ , тогда оно примет вид обыкновенного дифференциального уравнения

$$c^2 \varphi'(t) \psi''' \psi - c^2 \varphi'(t) \psi' \psi'' = 4\psi^3 \varphi'(t) \psi', \quad (2)$$

которое после сокращения на  $c^2 \varphi'(t) \neq 0$  и выделения полной производной преобразуется к виду

$$\left(\frac{\psi''}{\psi}\right)' = \frac{2}{c^2}(\psi^2)',$$

тогда после однократного интегрирования получим

$$\psi'' = \frac{2}{c^2}\psi^3 + C_1\psi, \quad (3)$$

где  $C_1$  - произвольная постоянная интегрирования.

Уравнение (3) допускает выделение полной производной если предварительно умножить все члены равенства (3) на  $\psi'$ , тогда перепишем его в виде

$$\psi''\psi' = \frac{2}{c^2}\psi^3\psi' + C_1\psi\psi', \quad \text{или} \quad [(\psi')^2]' = \frac{1}{2c^2}(\psi^4)' + C_1(\psi^2)'. \quad (4)$$

Последнее равенство после интегрирования сводится к уравнению первого порядка

$$\psi' = \pm \frac{1}{\sqrt{2c^2}} \sqrt{\psi^4 + 2c^2C_1\psi^2 + C_2}, \quad (5)$$

( $C_2$  - произвольная постоянная) которое приводится к эллиптическому интегралу

$$\sqrt{2c^2} \int \frac{d\psi}{\sqrt{\psi^4 + 2c^2C_1\psi^2 + C_2}} = C_3 \pm \xi, \quad C_3 - \text{const.}$$

Подкоренное выражение имеет вид би-

$$\sqrt{2c^2} \int \frac{d\psi}{\sqrt{(C_4 - \psi^2)(C_5 - \psi^2)}} = C_3 \pm \xi, \quad \text{и сводится к эллиптическому интегралу первого ро-$$

да

$$\alpha\sqrt{2c^2} \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{(1-\vartheta^2)(1-\beta^2\vartheta^2)}} = C_3 \pm \xi, \quad \vartheta = \frac{\psi}{\sqrt{C_4}}, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{C_5}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{C_4}{C_5}},$$

который может быть сведен к следующей лежандровой форме:

$$\vartheta = \sin \phi, \quad \alpha\sqrt{2c^2} F(\beta, \phi) = \alpha\sqrt{2c^2} \int \frac{d\phi}{\sqrt{1-\beta^2 \sin^2 \phi}} = C_3 \pm \xi, \quad \text{где } F(\beta, \phi) \text{ обозначен эл-}$$

липтический интеграл первого рода.

В результате решение можно записать в параметрическом виде

$$\begin{cases} p = \frac{\beta}{\alpha} \sin \phi, \\ \xi = C_3 \pm \alpha\sqrt{2c^2} F(\beta, \phi). \end{cases}$$

## 2. Нелинейное уравнение в частных производных

$$6(\bar{q}^2 + q^2)q_x - q_{xxx} = q_t \quad (6)$$

имеет следующее решение

$$q(\xi) = \alpha \operatorname{ch} \xi \pm i\alpha \operatorname{sh} \xi, \quad \xi = ax + [12\alpha^2 a - a^3]t, \quad a, \alpha - \text{const.}$$

Доказательство. Выполним простую проверку. Осуществим дифференцирование функции, считая аргумент, заданный в виде  $\xi = ax + \beta t$

$$q_x = a\alpha(\operatorname{sh} \xi \pm i\operatorname{ch} \xi), \quad q_{xxx} = a^3\alpha(\operatorname{sh} \xi \pm i\operatorname{ch} \xi), \quad q_t = \alpha\beta(\operatorname{sh} \xi \pm i\operatorname{ch} \xi),$$

$$q^2 + \bar{q}^2 = \alpha^2(\operatorname{ch} \xi \pm i\operatorname{sh} \xi)^2 + \alpha^2(\operatorname{ch} \xi \mp i\operatorname{sh} \xi)^2 = 2\alpha^2(\operatorname{ch}^2 \xi - \operatorname{sh}^2 \xi) = 2\alpha^2$$

выполним подстановку в исходное уравнение

$$12a\alpha^3(\operatorname{sh} \xi \pm i\operatorname{ch} \xi) - a^3\alpha(\operatorname{sh} \xi \pm i\operatorname{ch} \xi) = \beta\alpha(\operatorname{sh} \xi \pm i\operatorname{ch} \xi),$$

откуда определяется постоянная  $\beta$

$$\beta = 12a\alpha^2 - a^3,$$

и равенство выполняется тождественно.

3. Нелинейное уравнение в частных производных (6) имеет следующее решение

$$q(x,t) = \frac{C}{2} - \frac{a^2}{2Cch^2(ax - 4a^3t)} - i \left[ \frac{a^2}{2Cch^2(ax - 4a^3t)} + \frac{C}{2} \right],$$

где  $a, C$  - произвольные постоянные.

Доказательство. Выполним следующие преобразования: распишем функцию, выделив действительную и мнимую части  $q(x,t) = u(x,t) + iv(x,t)$ , тогда уравнение (2.37) после отделения действительной и мнимой части переписывается в виде системы

$$\begin{aligned} 12(u^2 - v^2)u_x - u_{xxx} &= u_t, \\ 12(u^2 - v^2)v_x - v_{xxx} &= v_t. \end{aligned} \quad (7)$$

Полученная система описывает взаимодействие двух действительных функций. Сложим и вычтем полученные равенства

$$\begin{aligned} 12(u^2 - v^2)(u+v)_x - (u+v)_{xxx} &= (u+v)_t, \\ 12(u^2 - v^2)(u-v)_x - (u-v)_{xxx} &= (u-v)_t, \end{aligned}$$

выполним замену функций:  $f(x,t) = u+v$ ,  $g(x,t) = u-v$ , перепишем систему (7)

$$\begin{aligned} 12gff_x - f_{xxx} &= f_t, \\ 12fgg_x - g_{xxx} &= g_t. \end{aligned} \quad (7)$$

Если предположить, что  $g(x,t) = C$  - постоянное возмущение данной системы, то система переходит в уравнение Кортевега - де Вриза

$$12Cff_x - f_{xxx} = f_t,$$

решение которого известно  $f(x,t) = \frac{-a^2}{Cch^2(ax - 4a^3t)}$ ,  $a - \text{const}$ , следовательно решение уравнения (7) имеет вид:

$$q(x,t) = \frac{C}{2} - \frac{a^2}{2Cch^2(ax - 4a^3t)} - i \left[ \frac{a^2}{2Cch^2(ax - 4a^3t)} + \frac{C}{2} \right]. \quad (7)$$

Простой проверкой доказывается, что решениями уравнения также являются следующие функции:

Доказательство. Воспользовавшись системой (3.6) предыдущей теоремы, положим  $\text{Im} q(x,t) = a \text{Re} q(x,t) = au(x,t)$ , где  $a \neq \pm 1$  - любое действительное число, тогда система переходит в одно уравнение  $u_t = 12(1-a^2)u^2u_x - u_{xxx}$ , которое представляет собой модифицированное уравнение Кортевега - де Вриза.

4. Нелинейное уравнение в частных производных  $p_{xxt}p - p_xp_{xt} = 4p^3p_t$  имеет

решение в виде  $p(x,t) = \mp \frac{k+1}{2x} \pm \frac{k^2}{kx \mp a_1x^{k+1}t^m}$ ,  $k, m, a_1$  - произвольные постоянные.

Доказательство. Определим вид автомодельного решения, пусть  $p = x^n \rho(\zeta)$ ,  $\zeta = x^k t^m$ ,  $n, m, k$  - произвольные постоянные определение которых будет дано в ходе построения решения, тогда частные производные определяются по формулам

$$\begin{aligned} p_t &= mx^{n+k}t^{m-1}\rho', \\ p_{xt} &= m(n+k)x^{n+k-1}t^{m-1}\rho' + mkx^{n+2k-1}t^{2m-1}\rho'', \\ p_x &= nx^{n-1}\rho + kx^{n+k-1}t^m\rho', \\ p_{xxt} &= m(n+k)(n+k-1)x^{n+k-2}t^{m-1}\rho' + m(2n+3k-1)kx^{n+2k-2}t^{2m-1}\rho'' + mk^2x^{n+3k-2}t^{3m-1}\rho'''. \end{aligned}$$

Выполним подстановку производных в уравнение (1)

$$x^n \rho [m(n+k)(n+k-1)x^{n+k-2}t^{m-1}\rho' + m(2n+3k-1)kx^{n+2k-2}t^{2m-1}\rho'' + mk^2x^{n+3k-2}t^{3m-1}\rho'''] - \\ - [nx^{n-1}\rho + kx^{n+k-1}t^m\rho'] [m(n+k)x^{n+k-1}t^{m-1}\rho' + mkx^{n+2k-1}t^{2m-1}\rho''] = 4x^{3n}\rho^3mx^{n+k}t^{m-1}\rho',$$

которое после элементарных преобразований и приведения подобных, примет вид

$$\rho m[(n+k)(k-1)x^{2n+k-2}t^{m-1}\rho' + (n+3k-1)kx^{2n+2k-2}t^{2m-1}\rho'' + k^2x^{2n+3k-2}t^{3m-1}\rho'''] - \\ - km\rho'[(n+k)x^{2n+2k-2}t^{2m-1}\rho' + kx^{2n+3k-2}t^{3m-1}\rho''] = 4mx^{4n+k}t^{m-1}\rho^3\rho'.$$

Сократим равенство на  $mx^{2n+2k-2}t^{2m-1}$

$$\rho[(n+k)(k-1)\rho' + (n+3k-1)kx^kt^m\rho'' + k^2x^{2k}t^{2m}\rho'''] - \\ - k\rho'[(n+k)x^kt^m\rho' + kx^{2k}t^{2m}\rho''] = 4x^{2n+2}\rho^3\rho'.$$

Легко заметить, что замена на новую переменную  $\zeta = x^kt^m$  возможна, если  $n = -1$ , в противном случае в члене  $4x^{2n+2}\rho^3\rho'$  невозможна замена  $x^{2n+2}$  на новую переменную. В результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\rho[(k-1)^2\rho' + (3k-2)k\zeta\rho'' + k^2\zeta^2\rho'''] - k\rho'[(k-1)\zeta\rho' + k\zeta^2\rho''] = 4\rho^3\rho'. \quad (4.1)$$

Как видно постоянные  $m, k$  остались произвольными, интегрирование последнего уравнения в общем виде затруднительно, поэтому определение точных решений возможно только при определенных значениях  $k$ . Рассмотрим частный случай, когда

$$\rho = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \zeta^j, \quad a_j - \text{const}, \quad (4.2)$$

определим производные

$$\rho' = \sum_{j=1}^{\infty} a_j j \zeta^{j-1}, \quad \rho'' = \sum_{j=2}^{\infty} a_j j(j-1) \zeta^{j-2}, \quad \rho''' = \sum_{j=3}^{\infty} a_j j(j-1)(j-2) \zeta^{j-3},$$

и подставим в уравнение (4.1)

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \zeta^j \sum_{j=1}^{\infty} [(k-1)^2 + (3k-2)k(j-1) + k^2(j-1)(j-2)] a_j j \zeta^{j-1} - \\ - k \sum_{j=1}^{\infty} a_j j \zeta^{j-1} \sum_{j=1}^{\infty} a_j j [kj-1] \zeta^j = 4 \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j \zeta^j \right)^3 \sum_{j=1}^{\infty} a_j j \zeta^{j-1},$$

упростим первое произведение

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \zeta^j \sum_{j=1}^{\infty} a_j j [kj-1]^2 \zeta^{j-1} - k \sum_{j=1}^{\infty} a_j j \zeta^{j-1} \sum_{j=1}^{\infty} a_j j [kj-1] \zeta^j = 4 \left( \sum_{j=0}^{\infty} a_j \zeta^j \right)^3 \sum_{j=1}^{\infty} a_j j \zeta^{j-1}. \quad (4.3)$$

Определим коэффициенты, выписывая слагаемые при одних степенях  $\zeta$ :

$$\zeta^0: \quad a_0(k-1)^2 a_1 = 4a_0^3 a_1;$$

$$\text{откуда } a_0 = \pm \frac{k-1}{2}. \quad (4.4)$$

$$\zeta^1: \quad 2a_0(2k-1)^2 a_2 + (k-1)^2 a_1^2 - ka_1^2[k-1] = 4(2a_0^3 a_2 + 3a_0^2 a_1^2);$$

после подстановки ранее найденного значения получим равенство с двумя постоянными  $\pm(k-1)(2k-1)^2 a_2 + (1-k)a_1^2 = (k-1)^2(3a_1^2 \pm (k-1)a_2)$ , из которого определяем

$$a_2 = \pm \frac{a_1^2}{k}, \quad (4.5)$$

при этом  $a_1$  - остается произвольным параметром.

$$\zeta^2: \quad 3a_3a_0(3k-1)^2 + 2a_2a_1(2k-1)^2 + a_2a_1(k-1)^2 - 2ka_2a_1(2k-1+k-1) = \\ = 4(3a_0^3a_3 + 6a_0^2a_1a_2 + 3[a_1^3a_0 + a_0^2a_1a_2]);$$

выполним преобразования

$$3(3k-1)^2a_3a_0 + 3a_2a_1(k-1)^2 = 4(3a_0^3a_3 + 9a_0^2a_1a_2 + 3a_1^3a_0),$$

подставим найденные значения (4.3), (4.4)

$$(3k-1)^2a_3 + 2\frac{a_1^3}{k}(k-1) = (k-1)^2a_3 - 6\frac{a_1^3}{k} + 10a_1^3,$$

и находим значение  $a_3$

$$a_3 = \frac{a_1^3}{k^2}. \quad (4.6)$$

$$\zeta^3: \quad 4a_0a_4(4k-1)^2 + 3a_1a_3(3k-1)^2 + 2a_2^2(2k-1)^2 + (k-1)^2a_1a_3 - k[2k-1][6a_1a_3 + 4a_2^2] = \\ = 4[4a_0^3a_4 + 9a_0^2a_1a_3 + 6(a_1^2a_0a_2 + a_0^2a_2^2) + a_1(3a_0^2a_3 + 6a_0a_1a_2 + a_1^3)];$$

приведа подобные, получим

$$2a_0a_4(4k-1)^2 + a_1a_3[8k^2 - 7k + 2] + (1-2k)a_2^2 = 2[4a_0^3a_4 + 12a_0^2a_1a_3 + 12a_1^2a_0a_2 + 6a_0^2a_2^2 + a_1^4],$$

для определения  $a_4$  выполним подстановку ранее найденных постоянных

$$\pm a_4[(4k-1)^2 - (k-1)^2] = 3(5k-2)\frac{a_1^4}{k^2},$$

из последнего равенства

$$a_4 = \pm \frac{a_1^4}{k^3}. \quad (4.7)$$

В полученных коэффициентах прослеживается закономерность, которая позволяет предположить, что все последующие члены будут иметь вид

$$a_N = (\pm k)^{1-N} a_1^N, \quad N = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

Докажем это предположение методом математической индукции.

Для  $N = 1, 2, 3, 4$  это утверждение верно, предполагая, что все коэффициенты до  $N = q$  имеют вид (4.8), покажем, что  $q+1$ -ый коэффициент имеет вид  $a_{q+1} = (\pm k)^{-q} a_1^{q+1}$  при предположении, что все предыдущие имеют заданный вид - (4.8).

Запишем значения членов равенства для произвольной степени  $q$

$$\zeta^q: \quad \sum_{j=0}^q (q+1-j)[(q+1-j)k-1]^2 a_j a_{q+1-j} - \sum_{j=0}^q jk(q+1-j)[k(q+1-j)-1] a_j a_{q+1-j} = \\ = 4 \sum_{j=0}^q b_j (q+1-j) a_{q+1-j}, \quad \text{где} \quad b_j = \sum_{i=0}^j a_i \sum_{l=0}^{j-i} a_l a_{j-l-i}$$

Преобразования приводят к виду

$$\sum_{j=0}^q (q+1-j) a_{q+1-j} \{[(q+1-j)k-1][(q+1-2j)k-1] a_j - 4b_j\} = 0.$$

Выделим слагаемые с  $a_{q+1}$ , этот элемент является сомножителем при  $j = 0$

$$(q+1)qka_{q+1}a_0\{qk+2(k-1)\} + \sum_{j=1}^q (q+1-j) a_{q+1-j} \{[(q+1-j)k-1][(q+1-2j)k-1] a_j - 4b_j\} = 0.$$

Выполним подстановку ранее найденных значений с учетом (4.8) и (4.4), выделив при этом  $a_0$  - отличающееся от общего вида коэффициентов

### Задания для самостоятельной работы

1. Доказать, что уравнение  $p_{xxt}p - p_x p_{xt} = 4p^3 p_t$  имеет решение

$$\begin{cases} p = \frac{\beta}{\alpha} \sin \phi, \\ \xi = C_3 \pm \alpha \sqrt{2c^2} F(\beta, \phi). \end{cases}$$

где  $p(x, t) = p(\xi)$ ,  $\xi = \varphi(t) + cx$ ,  $c, \alpha, \beta, C_3$  - произвольные постоянные,  $F(\beta, \phi)$  - эллиптический интеграл первого рода.

2. Получить частные решения уравнения (1) вида:

$$p(\xi) = \frac{2\sqrt{C_1}C_0}{C_0^2 e^{\mp \sqrt{C_1}\xi} - e^{\pm \sqrt{C_1}\xi}}, \quad C_1 > 0, \quad \text{и} \quad p(\xi) = \frac{\sqrt{|C_1|}}{\cos(C_2 \pm \sqrt{|C_1|}\xi)}, \quad C_1 < 0,$$

где  $\xi = \varphi(t) + cx$ ,  $C_0, C_1$  - произвольные постоянные.

3. Доказать, что уравнение в частных производных  $6(\bar{q}^2 + q^2)q_x - q_{xxx} = q_t$  имеет следующее решение

$$q(\xi) = \alpha \operatorname{ch} \xi \pm i \alpha \operatorname{sh} \xi, \quad \xi = ax + [12\alpha^2 a - a^3]t, \quad a, \alpha - \text{const}.$$

4. Построить для уравнения  $6(\bar{q}^2 + q^2)q_x - q_{xxx} = q_t$  следующее решение

$$q(\xi) = \alpha \operatorname{sh} \xi \pm i \alpha \operatorname{ch} \xi, \quad \xi = ax - [12\alpha^2 a + a^3]t, \quad a, \alpha - \text{const}.$$

5. Доказать, что уравнение в частных производных  $6(\bar{q}^2 + q^2)q_x - q_{xxx} = q_t$  имеет

$$q(x, t) = \frac{C}{2} - \frac{a^2}{2C \operatorname{ch}^2(ax - 4a^3 t)} - i \left[ \frac{a^2}{2C \operatorname{ch}^2(ax - 4a^3 t)} + \frac{C}{2} \right].$$

6. Построить для уравнения  $6(\bar{q}^2 + q^2)q_x - q_{xxx} = q_t$  следующие решения

$$\begin{aligned} q(x, t) &= \frac{a^2}{2C \operatorname{sh}^2(ax - 4a^3 t)} + \frac{C}{2} + i \left[ \frac{a^2}{2C \operatorname{sh}^2(ax - 4a^3 t)} - \frac{C}{2} \right], \\ q(x, t) &= \frac{a^2}{2C \cos^2(ax + 4a^3 t)} + \frac{C}{2} + i \left[ \frac{a^2}{2C \cos^2(ax + 4a^3 t)} - \frac{C}{2} \right], \\ q(x, t) &= \frac{C}{2} - \frac{a^2}{2C \sin^2(ax + 4a^3 t)} - i \left[ \frac{a^2}{2C \sin^2(ax + 4a^3 t)} + \frac{C}{2} \right], \end{aligned}$$

где  $a, C$  - произвольные постоянные.

7. Показать, что уравнение в частных производных  $6(\bar{q}^2 + q^2)q_x - q_{xxx} = q_t$  имеет решение вида  $q(x, t) = (1 + ai)u(x, t)$ , где  $a \neq \pm 1$ ,  $u(x, t)$  - решение модифицированного уравнения Кортевега - де Вриза:  $u_t = 12(1 - a^2)u^2 u_x - u_{xxx}$ .

8. Найти автомodelное решение для уравнения Кортевега - де Вриза  $u_t = 6uu_x - u_{xxx}$

9. Найти автомodelное решение для модифицированного уравнения Кортевега - де Вриза:  $u_t = 12(1 - a^2)u^2 u_x - u_{xxx}$ .

## РАЗДЕЛ 4. МНОГОСОЛИТОННЫЕ, РАЦИОНАЛЬНЫЕ И КОНЕЧНОЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ

### Практическое занятие №10 Многосолитонные решения

**Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников;
- знанием и следование в жизни кодексу профессиональной этики;
- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний;

**По данной теме планируется подготовка докладов.**

### Практическое занятие №11 Бегущие волны, автомодельные решения

**Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников;
- знанием и следование в жизни кодексу профессиональной этики;
- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;

**Теоретические вопросы выносимые на обсуждение**

#### Задания для самостоятельного решения

6. Найти волновое решение уравнения  $p_{xxt}p - p_x p_{xt} = 4p^3 p_t$ .
7. Найти волновое решение уравнения  $6(\bar{q}^2 + q^2)q_x - q_{xxx} = q_t$ .
8. С помощью подстановки  $p(x, t) = u(\xi)$ ,  $\xi = x + at$ , свести уравнение  $6pp_x - p_{xxx} = p_t$  к обыкновенному дифференциальному уравнению.
9. С помощью подстановки  $p(x, t) = u(\xi)$ ,  $\xi = x + at$ , свести уравнение  $6(\bar{p}^2 + p^2)p_x - p_{xxx} = p_t$  к обыкновенному дифференциальному уравнению.
10. С помощью подстановки  $p(x, t) = u(\xi)$ ,  $\xi = x + at$ , свести уравнение  $p_{xxt}p - p_x p_{xt} = 4p^3 p_t$  к обыкновенному дифференциальному уравнению.
11. Проверить является ли функция  $p = \frac{\sqrt{|C_1|}}{\cos(C_0 \pm \sqrt{|C_1|}\xi)}$ , где  $\sqrt{|C_1|}C_3 = C_0$  решением уравнения  $p_{xxt}p - p_x p_{xt} = 4p^3 p_t$ .

## Практическое занятие №12

### Рациональные и конечнозонные решения

**Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников;
- знанием и следование в жизни кодексу профессиональной этики;
- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;

### Примеры получения точных решений

#### 1. Уравнение

$$v_{\chi\chi} - v_{\zeta\zeta} = \frac{ak}{\alpha\gamma^2} e^v (\gamma v_\zeta + v_t), \quad (1)$$

имеет частное решение представленное в неявном виде

$$C(\chi + \beta_1\zeta + \beta_2 t) = v - \ln \left( \frac{ak(\gamma\beta_1 + \beta_2)}{\alpha\gamma^2(1 - \beta_1^2)} e^v + C \right), \quad (2)$$

где  $\beta_1, \beta_2, C$  – произвольные постоянные.

Доказательство. Выполним в уравнении (1) замену  $v(\tau)$  с линейной связью независимых переменных  $\tau = \chi + \beta_1\zeta + \beta_2 t$ , где  $\beta_1, \beta_2$  – произвольные параметры. Уравнение (1) примет вид обыкновенного дифференциального уравнения

$$(1 - \beta_1^2)v'' = \frac{ak(\gamma\beta_1 + \beta_2)}{\alpha\gamma^2} e^v v', \quad (3)$$

причем будем считать  $\beta_1 \neq \pm 1$ ,  $\gamma\beta_1 + \beta_2 \neq 0$ .

Уравнение (3) сводится к уравнению первого порядка, если положить  $v'(\tau) = p(v)$ , где  $v$  становится независимой переменной, тогда решение примет вид ( $C$  – постоянная интегрирования)

$$v'(\tau) = p(v) = \frac{ak(\gamma\beta_1 + \beta_2)}{\alpha\gamma^2(1 - \beta_1^2)} e^v + C.$$

В результате разделения переменных и интегрирования получим неявный вид решения (2)

Очевидно, что если в (3) положить  $\beta_1 = \pm 1$ ,  $\beta_2 = \mp \gamma$ , то равенство выполняется тождественно при произвольной функции  $v(\tau)$ . Поэтому имеем

2. Выполним в уравнении (1) преобразования позволяющие избавиться от показательной функции. Положим

$$e^{v(\chi, \zeta, t)} = q(\chi, \zeta, t),$$

тогда уравнение (1) примет вид

$$q_{\chi\chi}q - q_\chi^2 - q_{\zeta\zeta}q + q_\zeta^2 = \frac{ak}{\alpha\gamma^2} q^2 (\gamma q_\zeta + q_t). \quad (4)$$

Проведем анализ, позволяющий сказать, существует автомодельное решение или нет. Автомодельные решения существуют, если растяжение независимых и зависимых переменных по правилу

$$\chi = C^n \tilde{\chi}, \quad \zeta = C^k \tilde{\zeta}, \quad q = C^m \tilde{q}, \quad t = C\tilde{t},$$

где  $C > 0$  – произвольная постоянная, при соответствующем выборе  $k, m, n$  эквивалентно тождественному преобразованию, т.е. исходное уравнение переходит само в себя

$$C^{2m-2n}(q_{\chi\chi}q - q_\chi^2) + C^{2m-2k}(q_\zeta^2 - qq_{\zeta\zeta}) = \frac{ak}{\alpha\gamma^2} C^{2m} q^2 (\gamma C^{m-k} q_\zeta + C^{m-1} q_t),$$

поэтому должны выполняться равенства

$$2m - 2n = 2m - 2k = 3m - k = 3m - 1,$$

которые дают  $k = n = -m = 1$ . Это означает что все переменные уравнения (4) имеют одинаковый вес. Кроме этого все слагаемые исследуемого уравнения (4) имеют одинаковый суммарный вес равный  $-4$ . Если предположить, что уравнение стационарное и  $\chi, \zeta, t$  - пространственные переменные, то размерности соотносятся в виде  $\chi \sim \zeta \sim t \sim \frac{1}{q}$ .

Определим, в каком соотношении необходимо брать автомодельную связь между независимыми переменными, положим

$$q(\chi, \zeta, t) = t^s p(\xi), \quad \xi = \chi^n (\zeta + \beta t)^m,$$

где  $s, n, m, \beta$  - произвольные параметры, тогда производные примут вид

$$\begin{aligned} q_\chi &= n \chi^{n-1} t^s p'(\xi) (\zeta + \beta t)^m, \\ q_{\chi\chi} &= n(n-1) \chi^{n-2} t^s p'(\xi) (\zeta + \beta t)^m + n^2 \chi^{2n-2} t^s p''(\xi) (\zeta + \beta t)^{2m}, \\ q_\zeta &= m \chi^n t^s p'(\xi) (\zeta + \beta t)^{m-1}, \\ q_{\zeta\zeta} &= m(m-1) \chi^n t^s p'(\xi) (\zeta + \beta t)^{m-2} + m^2 \chi^{2n} t^s p''(\xi) (\zeta + \beta t)^{2m-2}, \\ q_t &= m \beta \chi^n p'(\xi) t^s (\zeta + \beta t)^{m-1} + s t^{s-1} p(\xi). \end{aligned}$$

Выполним подстановку найденных производных в (4)

$$\begin{aligned} & t^s p [n(n-1) \chi^{n-2} t^s p'(\zeta + \beta t)^m + n^2 \chi^{2n-2} t^s p''(\zeta + \beta t)^{2m} - m(m-1) \chi^n t^s p'(\zeta + \beta t)^{m-2} - \\ & - m^2 \chi^{2n} t^s p''(\zeta + \beta t)^{2m-2}] + t^{2s} (p')^2 \{m^2 \chi^{2n} (\zeta + \beta t)^{2m-2} - n^2 \chi^{2n-2} (\zeta + \beta t)^{2m}\} = \\ & = \frac{ak}{\alpha \gamma^2} p^2 t^{2s} (\gamma m \chi^n p' t^s (\zeta + \beta t)^{m-1} + m \beta \chi^n p' t^s (\zeta + \beta t)^{m-1} + s t^{s-1} p). \end{aligned}$$

Сократим равенство на  $t^{2s} \neq 0$  и сгруппируем подобные

$$\begin{aligned} & \{n(n-1) \chi^{-2} - m(m-1) (\zeta + \beta t)^{-2}\} p p' (\zeta + \beta t)^m \chi^n + \{m^2 (\zeta + \beta t)^{-2} - \\ & - n^2 \chi^{-2}\} [(p')^2 - p'' p] \chi^{2n} (\zeta + \beta t)^{2m} = \frac{ak}{\alpha \gamma^2} p^2 ([\gamma + \beta] m \chi^n (\zeta + \beta t)^{m-1} t^s p' + s t^{s-1} p). \end{aligned} \quad (5)$$

Полная замена на переменную  $\xi$  в полученном равенстве (5) возможна если  $s = 0$ ,

$$\begin{aligned} & \{n(n-1) \chi^{-2} (\zeta + \beta t)^2 - m(m-1)\} p p' (\zeta + \beta t)^m \chi^n + \{m^2 - \\ & - n^2 \chi^{-2} (\zeta + \beta t)^2\} [(p')^2 - p'' p] \chi^{2n} (\zeta + \beta t)^{2m} = \frac{ak}{\alpha \gamma^2} [\gamma + \beta] m \chi^n (\zeta + \beta t)^{m+1} p^2 p', \end{aligned} \quad (6)$$

или при  $\beta = -\gamma, s = 1$

$$\begin{aligned} & \{n(n-1) \chi^{-2} - m(m-1) (\zeta + \beta t)^{-2}\} p p' (\zeta + \beta t)^m \chi^n + \{m^2 (\zeta + \beta t)^{-2} - \\ & - n^2 \chi^{-2}\} [(p')^2 - p'' p] \chi^{2n} (\zeta + \beta t)^{2m} = \frac{ak}{\alpha \gamma^2} p^3. \end{aligned} \quad (7)$$

Кроме этого связь (6) приводит к необходимости потребовать выполнение равенства (так как  $m \neq m+1$ )

$$\beta = -\gamma.$$

Оставшаяся часть выражения (6) принимает вид

$$\{n(n-1) \chi^{-2} (\zeta + \beta t)^2 - m(m-1)\} p p' + \{m^2 - n^2 \chi^{-2} (\zeta + \beta t)^2\} [(p')^2 - p'' p] \chi^n (\zeta + \beta t)^m = 0,$$

тогда возможны два варианта:

1. Если положить

$$ln = -2, \quad lm = 2, \quad (8)$$

где  $l$  - коэффициент пропорциональности, любое действительное число отличное от нуля ( $n = -m = -\frac{2}{l}$ ).

2. Для сокращения в (6) на выражения, зависящие от  $\chi^{-2} (\zeta + \beta t)^2$  достаточно, чтобы коэф-

коэффициенты  $n(n-1)$ ,  $m(m-1)$  и  $n^2, m^2$  были пропорциональны, тогда получим

$$n(n-1) = ln^2, \quad m(m-1) = lm^2, \quad (9)$$

где  $l$  - коэффициент пропорциональности, любое действительное число отличное от нуля. Из (9) определим

$$n = m = \frac{1}{1-l}. \quad (10)$$

Выполним интегрирование в каждом случае.

1. Положив теперь:  $q(\chi, \varsigma, t) = p(\xi)$ ,  $\xi = \left( \frac{\varsigma - \eta t}{\chi} \right)^{\frac{2}{l}}$  приходим к уравнению

$$-\left(1 + \frac{l}{2}\right) \frac{1}{\xi} + \frac{l}{(1 - \xi^l)\xi} = [\ln(\ln p)]'. \quad (11)$$

Решение, которого принимает вид:

$$C_1 \ln \frac{1 + \sqrt{\xi^l}}{1 - \sqrt{\xi^l}} + C_2 = \ln p,$$

$C_1, C_2$  - произвольные постоянные интегрирования. Исходная функция, с учетом выполненных преобразований, примет вид

$$v(\chi, \varsigma, t) = C_1 \ln \frac{\chi + \varsigma - \eta t}{\chi - \varsigma + \eta t} + C_2. \quad (12)$$

2. В результате наложения условий:  $s = 0$ ,  $\beta = -\gamma$ ,  $q(\chi, \varsigma, t) = p(\xi)$ ,  $\xi = [(\varsigma - \eta t)\chi]^{\frac{1}{1-l}}$ , и сокращения, (6) преобразуется к виду

$$lpp' + [p''p - (p')^2]\xi = 0,$$

Уравнение сводится к виду

$$[\ln(\ln p)]' = -\frac{l}{\xi},$$

которое после двукратного интегрирования дает

$$C_1 p = e^{\frac{C}{1-l} \xi^{1-l}}.$$

Возвращаясь к старой функции, получим решение

$$v(\chi, \varsigma, t) = C_1 + C_2(\varsigma - \eta t)\chi. \quad (13)$$

**Вывод:** Уравнение (1), имеет частные решения (12), (13), где  $C_1, C_2$  - произвольные постоянные.

### Задания для самостоятельного решения

1. Проверить является ли функция  $q(\xi) = \alpha \operatorname{ch} \xi \pm i \alpha \operatorname{sh} \xi$ ,  $\xi = ax + [12\alpha^2 a - a^3]t$ ,  $a, \alpha - \text{const}$  решением уравнения  $6(\bar{q}^2 + q^2)q_x - q_{xxx} = q_t$ .
2. Проверить является ли функция  $q(x, t) = \frac{C}{2} - \frac{a^2}{2Cch^2(ax - 4a^3t)} - i \left[ \frac{a^2}{2Cch^2(ax - 4a^3t)} + \frac{C}{2} \right]$ ,  $a, C - \text{const}$  решением уравнения  $6(\bar{q}^2 + q^2)q_x - q_{xxx} = q_t$ .
3. Проверить является ли функция  $p(x, t) = \mp \frac{k+1}{2x} \pm \frac{k^2}{kx \mp a_1 x^{k+1} t^m}$ ,  $k, m, a_1 - \text{const}$  решением уравнения  $p_{xxt}p - p_x p_{xt} = 4p^3 p_t$ .

4. Проверить является ли функция  $p = \frac{\pm 2i\alpha\sqrt{c_1c_2}}{c_1e^{\alpha x + \beta t} + c_2e^{-\alpha x - \beta t}}$ ,  $\alpha, \beta, c_1, c_2 - const$  решением уравнения  $p_{xxt}p - p_x p_{xt} = 4p^3 p_t$ .

5. Доказать, что уравнение  $v_{\chi\chi} - v_{\varsigma\varsigma} = \frac{ak}{\alpha\gamma^2} e^v (\gamma v_\varsigma + v_t)$  имеет частное рациональное решение вида

$$v(\chi, \varsigma, t) = \beta_1[\chi^2 + (\varsigma - \gamma t)^2] + \beta_2(\chi + \varsigma - \gamma t) + C, \quad (1)$$

где  $\beta_1, \beta_2, C$  – произвольные постоянные.

6. Для уравнения  $v_{\chi\chi} - v_{\varsigma\varsigma} = \frac{ak}{\alpha\gamma^2} e^v (\gamma v_\varsigma + v_t)$  построить решение вида

$$v(\chi, \varsigma, t) = f_1(\chi + \varsigma - \gamma t) + f_2(\chi - \varsigma + \gamma t),$$

где  $f_1, f_2$  – произвольные функции.

7. Доказать, что уравнение  $q_{\chi\chi}q - q_\chi^2 - q_{\varsigma\varsigma}q + q_\varsigma^2 = \frac{ak}{\alpha\gamma^2} q^2(\gamma q_\varsigma + q_t)$  имеет частное рациональное решение вида  $C_1 \ln \frac{1 + \sqrt{\xi^t}}{1 - \sqrt{\xi^t}} + C_2 = \ln q$ , где  $\xi = \left( \frac{\varsigma - \gamma t}{\chi} \right)^{\frac{2}{i}}$ .

## РАЗДЕЛ 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХИРОТЫ И ПЕНЛЕВЕ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

### Практическое занятие №13

#### Преобразования Хироты $\tau$ - функция, метод Хироты

**Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников;
- знанием и следование в жизни кодексу профессиональной этики;
- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;

#### Теоретические основы выносимые на обсуждение

Хирота впервые открыл  $\tau$  - функцию, как средство порождения солитонных решений. Однако ее подлинная значимость (и центральная роль в теории солитонов) не была понята до появления работы группы из Университета в Кито, включающей М.Сато, Миву, Дзимбо, Касиверу, но даже сейчас значение этой функции не понята до конца. Иногда она является простым многочленом (рациональные решения уравнения КдВ), иногда – конечной суммой экспонент (многосолитонное решение). В других случаях она становится более сложной, например,  $\theta$  - функцией Римана.

Сначала познакомимся с ней как с *потенциальной функцией*, вторая логарифмическая производная которой позволяет вычислить все сохраняющиеся плотности и потоки. Рассмотрим семейство потоков КдВ.

$$q_{t_{2n+1}} = \frac{\partial}{\partial x} L^n q = 2 \frac{\partial}{\partial x} B_{n+1} \quad (1.1)$$

Для удобства введем

$$w = \int^x q dx,$$

тогда (1.1) имеет вид

$$w_{t_{2n+1}} = L^n q = 2B_{n+1}$$

Следовательно, функцию  $w(x, t_3, \dots)$ , можно рассматривать как потенциальную функцию для бесконечной последовательности  $\{L^n q = 2B_{n+1}\}_0^\infty$ . Сейчас известно, что производные

всех этих функций относительно различных времен, а именно  $\left(\frac{\partial}{\partial t_{2n+1}}\right) L^n q$ , могут быть

записаны как производные по  $x$  или  $t_1$  от локальных величин. Поэтому естественно использовать потенциальную функцию  $\tau(t_1, t_3, \dots)$ , определенную формулой

$w = \frac{\partial}{\partial t_1} \ln \tau(t_1, t_3, \dots)$ , вместо самой  $w$ . Тем самым видим, что

$$\frac{\partial}{\partial t_{2m+1}} L^n q = \frac{\partial}{\partial t_1} 2 \frac{\partial^2 \ln \tau}{\partial t_{2m+1} \partial t_{2n+1}}$$

и, таким образом, все производные по времени последовательности  $(L^n q)$  заданы одним уравнением в форме закона сохранения по отношению к выделенной переменной  $x$ . Заметим, однако, что выражение для потока, соответствующее скорости изменения плотности  $L^n q$  потоке (КдВ)<sub>3</sub>, наиболее удобно задать в виде производной относительно времени  $t_{2n+1}$ , соответствующему потоку  $(n+1)$  в иерархии КдВ. Этим подчеркивается тот факт, что

когда ищутся решения интегрируемого уравнения, полезно понимать, что в действительности ищутся общие решения для всей иерархии потоков данного семейства.

### Оператор $D_x$ . Свойства $D_x$ - оператора.

Хирота изобрел новый оператор  $D$ , определенный на упорядоченной паре функций  $\sigma(x)$ ,  $\tau(x)$  следующим образом:

$$D_x \sigma \cdot \tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \sigma(x+\varepsilon) \tau(x-\varepsilon) = \sigma_x \tau - \sigma \tau_x.$$

Пусть мы имеем два оператора  $D_t$ ,  $D_x$ . Определим некоторые свойства этих операторов.

Имеем

$$D_t^n D_x^m a \cdot b = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m a(t, x) b(t', x') \Big|_{t=t', x=x'}$$

Введем оператор  $D_z$  и дифференцирование  $\frac{\partial}{\partial z}$ , полагая

$$D_z = \sigma D_t + \varepsilon D_x, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \sigma \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x},$$

где  $\sigma$  и  $\varepsilon$  - постоянные. Из определения очевидны следующие свойства:

$$(I) \quad D_z^m a \cdot 1 = \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)^m a,$$

$$(II) \quad D_z^m a \cdot b = (-1)^m D_z^m b \cdot a,$$

$$(II.1) \quad D_z^m a \cdot a = 0 \text{ для нечетных } m,$$

$$(III) \quad D_z^m a \cdot b = D_z^{m-1} (a_z \cdot b - a \cdot b_z),$$

$$(III.1) \quad D_z^m a \cdot a = 2 D_z^{m-1} a_z \cdot a \text{ для четных } m,$$

$$(III.2) \quad D_x D_t a \cdot a = 2 D_x a_t \cdot a = 2 D_t a_x \cdot a,$$

$$(IV) \quad D_x^m \exp(p_1 x) \cdot \exp(p_2 x) = (p_1 - p_2)^m \exp[(p_1 + p_2)x]$$

Пусть  $(D_t, D_x)$  есть полином от  $D_t$  и  $D_x$ , тогда

$$(IV.1) \quad F(D_t, D_x) \exp(q_1 t + p_1 x) \cdot \exp(q_2 t + p_2 x) = \\ = (F(q_1 - q_2, p_1 - p_2) / F(q_1 + q_2, p_1 + p_2)) \exp[(q_1 + q_2)t + (p_1 + p_2)x] \cdot 1,$$

$$(V) \quad \exp(\varepsilon D_x) \cdot a(x) \cdot b(x) = a(x + \varepsilon) \cdot b(x - \varepsilon),$$

$$(VI) \quad \exp(\varepsilon D_z) a b \cdot c d = [\exp(\varepsilon D_z) a \cdot c] [\exp(\varepsilon D_z) b \cdot d] = [\exp(\varepsilon D_z) a \cdot d] [\exp(\varepsilon D_z) b \cdot c],$$

$$(VI.1) \quad D_z a b \cdot c = \left( \frac{\partial a}{\partial z} \right) b c - a (D_z b \cdot c)$$

$$(VI.2) \quad D_z^2 a b \cdot c = \left( \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} \right) b c + 2 \left( \frac{\partial a}{\partial z} \right) D_z b \cdot c + a (D_z^2 b \cdot c),$$

$$(VI.3) \quad D_z^3 a c \cdot b c = (D_z^3 a \cdot b) c^2 + 3 (D_z a \cdot b) D_z^2 c \cdot c,$$

$$(VI.4) \quad D_x^m \exp(p x) a \cdot \exp(p x) b = \exp(2 p x) D_x^m a \cdot b,$$

$$(VII) \quad \exp(\sigma D_t) [\exp(\varepsilon D_x) a \cdot b] [\exp(\varepsilon D_x) c \cdot d] = \exp(\varepsilon D_x) [\exp(\sigma D_t) a \cdot c] [\exp(\sigma D_t) b \cdot d] = \\ = [\exp(\sigma D_t + \varepsilon D_x) a \cdot d] [\exp(-\sigma D_t + \varepsilon D_x) c \cdot b].$$

### **Пример применения теории для уравнения КдВ**

Пусть  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению КдФ

$$u_t + 12 u u^2 + u_{xxx} = 0. \quad (3.1)$$

Перепишем его в дивергентном виде

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x} (6 u^2 + u_{xx}) = 0$$

и будем искать его решение в следующей форме:

$$u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{f} = \frac{f_{xx} f - f_x^2}{f^2} = \frac{f_{xx}}{f} - \left( \frac{f_x}{f} \right)^2. \quad (3.2)$$

Выразим производные, входящие в уравнение КдФ, через функцию  $f(x, t)$

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \frac{f_x}{f} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{f_{xt}}{f} - \frac{f_x f_t}{f^2} \right), \\ u_x &= \frac{f_{xxx} f - f_{xx} f_x}{f^2} - \frac{2 f_x}{f} \left( \frac{f_{xx} f - f_x^2}{f^2} \right) = \frac{f_{xxx}}{f} - 3 \frac{f_{xx} f_x}{f^2} + 2 \left( \frac{f_x}{f} \right)^3, \\ u_{xx} &= \frac{f_{xxxx} f - f_{xxx} f_x}{f^2} - 3 \frac{f_{xxx} f_x + f_{xx}^2}{f^2} + 6 \frac{f_{xx} f_x^2}{f^3} + 6 \left( \frac{f_x}{f} \right)^2 \frac{f_{xx} - f_x^2}{f^2}, \\ 6u^2 &= 6 \left( \frac{f_{xx} f - f_x^2}{f^2} \right)^2 = 6 \left( f_{xx}^2 - 2 \frac{f_{xx} f_x^2}{f^3} + \frac{f_x^4}{f^4} \right). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение КдФ, получим

$$\frac{f_{xt}}{f} - \frac{f_x f_t}{f^2} + 3 \frac{f_{xx}^2}{f^2} + \frac{f_{xxxx}}{f} - 4 \frac{f_{xxx} f_x}{f^2} = 0,$$

или (считая, что  $f \neq 0$ )

Это уравнение носит название *билинейного уравнения Хироты* в честь японского физика R. Hirota, предложившего его в 1971 году. Казалось бы, уравнение (3.3) ничем не проще исходного уравнения КдФ. Однако оно имеет билинейную структуру, то есть каждое слагаемое содержит два множителя вида  $f$  или ее производной. Будем искать решение в виде ряда теории возмущений по некоторому малому параметру  $\varepsilon$ :

$$f = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i f^{(i)} = 1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots \quad (3.4)$$

Тогда билинейное уравнение Хироты распадается на серию линейных уравнений на коэффициенты  $f^{(i)}$  при одинаковых степенях  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon f^{(2)} + \dots)(\varepsilon f_{xt}^{(1)} + \varepsilon f_{xxxx}^{(1)} + \varepsilon^2(f_{xt}^{(2)} + \varepsilon f_{xxxx}^{(2)}) + \dots) - \\ - \varepsilon^2(f_x^{(1)} + \varepsilon f_x^{(2)} + \dots)(f_t^{(1)} + \varepsilon f_t^{(2)} + \dots) + 3\varepsilon^2(f_{xx}^{(1)} + \varepsilon f_{xx}^{(2)} + \dots)^2 - \\ - 4\varepsilon^2(f_{xxx}^{(1)} + \varepsilon f_{xxx}^{(2)} + \dots)(f_x^{(1)} + \varepsilon f_x^{(2)} + \dots) = 0, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: f_{xt}^{(1)} + f_{xxxx}^{(1)} &= 0, \\ \varepsilon^2: f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} &= f_x^{(1)} f_t^{(1)} - 3(f_{xx}^{(1)})^2 + 4f_{xxx}^{(1)} f_x^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\varepsilon^{N+1}: f_{xt}^{(N+1)} + f_{xxxx}^{(N+1)} = \dots (f^{(1)}, \dots, f^{(N)}) = 0.$$

Оказывается, что структура правых частей этой системы такова, что ряд (3.4) допускает обрыв на любом номере  $N$ , то есть, полагая  $f^{(N+1)} \equiv 0$ , получим, что все последующие уравнения с номерами  $N+2, N+3, \dots$  допускают тождественно нулевое решение:

$$f^{(N+2)} = f^{(N+3)} = \dots \equiv 0.$$

В этом нетрудно убедиться, глядя на первые два уравнения при  $N=2$ , а для всех остальных  $N$  следует применить метод математической индукции.

Из этого наблюдения следует вывод о том, что параметр  $\varepsilon$  можно выбирать произвольным (а не обязательно малым), если хотим оборвать ряд на конечном номере  $N$ . Выберем в этом случае  $\varepsilon=1$  и будем последовательно решать линейные уравнения для  $f^{(i)}$ , считая, что  $f^{(N+1)} \equiv 0$ .

Первое уравнение в силу линейности допускает решение в виде суммы простых волн

$$f^{(i)} = \sum_{i=1}^N e^{\theta_i},$$

где

$$\theta_i = a_i(x - a_i^2 t) + \delta_i.$$

Полагая N=1, имеем из системы (3.5)

$$f^{(1)} = e^{\theta_1}, \quad f = 1 + e^{\theta_1},$$

откуда, возвращаясь к и посредством замены (3.2), получим формулу для одиночного солитона

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{f_x}{f} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{a_1 e^{\theta_1}}{1 + e^{\theta_1}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{a_1}{e^{-\theta_1} + 1} \right) = \\ &= -a_1^2 \frac{e^{-\theta_1}}{(e^{-\theta_1} + 1)^2} = -\frac{a_1^2}{4} \frac{1}{\left( \frac{e^{\theta/2} + e^{-\theta/2}}{2} \right)^2} = -\frac{a_1^2}{4} \frac{1}{ch^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= a_1 x + \beta_1 t + \delta_1, \quad f = 1 + e^{\theta_1}, \quad f_x = a_1 e^{\theta_1}, \quad f_{xxxx} = a_1^4 e^{\theta_1}, \quad f_{xt} = -a_1 \beta_1 e^{\theta_1}. \\ \varepsilon^1: \quad &a_1 \beta_1 e^{\theta_1} + a_1^4 e^{\theta_1} = 0, \quad a_1^3 = -\beta_1, \quad \theta_1 = a_1 x - a_1^3 t + \delta_1, \\ \varepsilon^2: \quad &f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} = f_x^{(1)} f_t^{(1)} - 3(f_{xx}^{(1)})^2 + 4f_{xxx}^{(1)} f_x^{(1)} \\ &- a_1^4 e^{2\theta_1} - 3a_1^4 e^{2\theta_1} + 4a_1^4 e^{2\theta_1} = 0 \Rightarrow f_2 = 0 \\ &ff_{xt} - f_x f_t + 3f_{xx}^2 + ff_{xxxx} - 4f_{xxx} f_x = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$D_x a \cdot b = a_x b - ab_x$$

$$D_t a \cdot b = a_t b - ab_t$$

$$D_x D_t a \cdot b = a_{xt} b - a_x b_t - a_t b_x + ab_{xt},$$

$$D_x D_t a \cdot a = 2a_{xt} a - 2a_x a_t$$

$$D_x^2 a \cdot b = a_{xx} b - 2a_x b_x + ab_{xx},$$

$$D_x^2 a \cdot a = 2a_{xx} a - 2a_x^2$$

$$D_x^3 a \cdot b = a_{xxx} b - 3a_{xx} b_x + 3a_x b_{xx} - ab_{xxx}$$

$$D_x^4 a \cdot b = a_{xxxx} b - 4a_{xxx} b_x + 6a_{xx} b_{xx} - 4a_x b_{xxx} + ab_{xxxx}, \quad D_x^4 a \cdot a = 2a_{xxxx} a - 8a_{xxx} a_x + 6a_{xx}^2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (D_x D_t f \cdot f + D_x^4 f \cdot f) &= 0, \quad (D_x D_t + D_x^4) f \cdot f = 0. \\ (D_x D_t + D_x^4) (1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots) \cdot (1 + \varepsilon f^{(1)} + \varepsilon^2 f^{(2)} + \dots) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\varepsilon: \quad (D_x D_t + D_x^4) (1 \cdot f^{(1)} + f^{(1)} \cdot 1) = 0,$$

$$\varepsilon^2: \quad (D_x D_t + D_x^4) (1 \cdot f^{(2)} + 2f^{(1)} \cdot f^{(1)} + f^{(2)} \cdot 1) = 0$$

$$\varepsilon^3: \quad (D_x D_t + D_x^4) (1 \cdot f^{(3)} + f^{(1)} \cdot f^{(2)} + f^{(2)} \cdot f^{(1)} + f^{(3)} \cdot 1) = 0$$

$$\varepsilon^n: \quad (D_x D_t + D_x^4) \left( 1 \cdot f^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} f^{(i)} \cdot f^{(n-i)} + f^{(n)} \cdot 1 \right) = 0$$

$$\varepsilon: \quad f_{xt}^{(1)} + f_{xxxx}^{(1)} = 0,$$

$$\varepsilon^2: \quad f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} = -(D_x D_t + D_x^4) f^{(1)} \cdot f^{(1)}$$

$$\varepsilon^3: \quad 2f_{xt}^{(3)} + 2f_{xxxx}^{(3)} = -(D_x D_t + D_x^4) (f^{(1)} \cdot f^{(2)} + f^{(2)} \cdot f^{(1)})$$

$$\varepsilon^n: \quad 2f_{xt}^{(n)} + 2f_{xxxx}^{(n)} = -(D_x D_t + D_x^4) \sum_{i=1}^{n-1} f^{(i)} \cdot f^{(n-i)}$$

Для N=2 можно взять  $f = 1 + \varepsilon(e^{\theta_1} + e^{\theta_2}) + \varepsilon^2(Be^{2\theta_1} + Ae^{\theta_1+\theta_2} + Ce^{2\theta_2})$

$$f^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2}, \quad f^{(2)} = Be^{2\theta_1} + Ae^{\theta_1+\theta_2} + Ce^{2\theta_2},$$

$$\theta_1 = a_1 x - a_1^3 t + \delta_1, \quad \theta_2 = a_2 x - a_2^3 t + \delta_2.$$

Очевидно, что такой  $\theta_i$   $i=1,2$ , гарантирует выполнение равенства при  $\varepsilon$ .

Оценим правую часть при  $\varepsilon^2$ , тогда для  $f^{(2)}$  нужно решить линейное уравнение справа в виде:

$$\begin{aligned} (D_x D_t + D_x^4) f^{(1)} \cdot f^{(1)} &= (D_x D_t + D_x^4) (e^{\theta_1} + e^{\theta_2}) \cdot (e^{\theta_1} + e^{\theta_2}) = \\ &= (D_x D_t + D_x^4) (e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_1} + e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_2} + e^{\theta_2} \cdot e^{\theta_1} + e^{\theta_2} \cdot e^{\theta_2}) = \\ &= 2(-[a_1^4 - a_1 a_2^3 - a_1^3 a_2 + a_2^4] + a_1^4 - 4a_1^3 a_2 + 6a_1^2 a_2^2 - 4a_2^3 a_1 + a_2^4) e^{\theta_1 + \theta_2} = 2(-3a_1^3 a_2 + 6a_1^2 a_2^2 - 3a_2^3 a_1) e^{\theta_1 + \theta_2} \\ &\text{Следовательно } B=C=0 \\ f &= 1 + \varepsilon(e^{\theta_1} + e^{\theta_2}) + \varepsilon^2 A e^{\theta_1 + \theta_2} \\ f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} &= 3a_1 a_2 (a_1 - a_2)^2 e^{\theta_1 + \theta_2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Решение находится в виде

$$f^{(2)} = A \cdot e^{\theta_1 + \theta_2}, \theta_1 + \theta_2 = (a_1 + a_2)x - (a_1^3 + a_2^3)t + \delta_1 + \delta_2$$

подставим в левую часть (3.9)

$$\begin{aligned} f_{xt}^{(2)} + f_{xxxx}^{(2)} &= -A(a_1^3 + a_2^3)(a_1 + a_2) e^{\theta_1 + \theta_2} + A(a_1 + a_2)^4 e^{\theta_1 + \theta_2} = \\ &= A(a_1 + a_2)^2 e^{\theta_1 + \theta_2} [a_1^2 + 2a_2 a_1 + a_2^2 - a_1^2 + a_2 a_1 - a_2^2] = 3a_1 a_2 A(a_1 + a_2)^2 e^{\theta_1 + \theta_2} \end{aligned}$$

где константа  $A$  должна удовлетворять соотношению

$$A(a_1 + a_2)^2 = (a_1 - a_2)^2$$

то есть

$$A = \left( \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2.$$

Таким образом

$$f = 1 + f^{(1)} + f^{(2)} = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + \left( \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right)^2 e^{\theta_1 + \theta_2}, \quad (3.10)$$

откуда получается *двухсолитонное решение* уравнения КдФ

$$u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \left( 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A e^{\theta_1 + \theta_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{a_1 e^{\theta_1} + a_2 e^{\theta_2} + A(a_1 + a_2) e^{\theta_1 + \theta_2}}{1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A e^{\theta_1 + \theta_2}}. \quad (3.11)$$

Покажем, ряд обрывается, для этого подставим найденные значения в правую часть выражения при  $\varepsilon^3$

$$\begin{aligned} (D_x D_t + D_x^4) (f^{(1)} \cdot f^{(2)} + f^{(2)} \cdot f^{(1)}) &= A(D_x D_t + D_x^4) ([e^{\theta_1} + e^{\theta_2}] \cdot e^{\theta_1 + \theta_2} + e^{\theta_1 + \theta_2} \cdot [e^{\theta_1} + e^{\theta_2}]) = \\ &= 2A(D_x D_t + D_x^4) (e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_1 + \theta_2} + e^{\theta_2} \cdot e^{\theta_1 + \theta_2}) = 2A[-a_1^4 + a_1(a_1^3 + a_2^3) + a_1^3(a_1 + a_2) - (a_1 + a_2)(a_1^3 + a_2^3) + \\ &+ a_1^4 - 4a_1^3(a_1 + a_2) + 6a_1^2(a_1 + a_2)^2 - 4a_1(a_1 + a_2)^3 + (a_1 + a_2)^4] e^{2\theta_1 + \theta_2} + \\ &+ 2A[-a_2^4 + a_2(a_1^3 + a_2^3) + a_2^3(a_1 + a_2) - (a_1 + a_2)(a_1^3 + a_2^3) + a_2^4 - 4a_2^3(a_1 + a_2) + 6a_2^2(a_1 + a_2)^2 - \\ &- 4a_2(a_1 + a_2)^3 + (a_1 + a_2)^4] e^{\theta_1 + 2\theta_2} = 0 \end{aligned}$$

Продолжая указанным образом, легко найти все остальные  $f^{(i)}$ ,  $i=3, 4, \dots, N$ . Соответствующее решение  $u$  уравнения КдФ, отвечающее сумме  $N$  членов ряда (3.3), называется  $N$ -солитонным решением.

Покажем в случае  $N=2$ , что формула (3.7) действительно описывает процесс взаимодействия двух одиночных солитонов. Предположим для определенности, что  $a_1 > a_2 > 0$ , и проследим за эволюцией первого солитона, то есть будем считать, что  $x$  и  $t$  связаны соотношением  $\theta_1 \sim 0$ , или  $x \sim a_1 t + \delta_1/a_1$ . В пределе  $|t| \gg 1$  имеем

$$\theta_2 = a_2 \left[ (a_1^2 - a_2^2)t - \frac{\delta_1}{a_1} \right] + \delta_2,$$

так что  $\theta_2 \rightarrow \pm\infty$ ,  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Таким образом,  $e^{\theta_2} \rightarrow 0$ , если  $t \rightarrow -\infty$ , и тогда формула (2.7) дает

$$u(x,t) \sim \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(1 + e^{\theta_1}) = \frac{a_1^2}{4ch^2 \frac{\theta_1}{2}}.$$

### Задания для самостоятельного решения

1. С помощью подстановки  $p(x,t) = \frac{R(x,t)}{Q(x,t)}$  записать  $p_{xt}$  в виде действия оператора Хироты.
2. С помощью подстановки  $p(x,t) = \frac{R(x,t)}{Q(x,t)}$  записать  $p_x p_{xt}$  в виде действия оператора Хироты.
3. С помощью подстановки  $p(x,t) = \frac{R(x,t)}{Q(x,t)}$  записать  $p_{xx} p_{xt}$  в виде действия оператора Хироты.
4. Записать результат применения операторов Хироты  $D_x^2 Q \circ Q$ ,  $D_t R \circ Q$ , где  $R = a\epsilon e^{\vartheta}$ ,  $Q = b + b_1 \epsilon^2 e^{\theta}$ ,  $\theta = \alpha x + \beta t$ ,  $\vartheta = k(\alpha x + \beta t)$ ,  $\alpha, \beta, k - \text{const}$ .
5. Записать результат применения операторов Хироты  $D_t D_x Q \circ Q$ ,  $D_x R \circ Q$ , где  $R = a\epsilon e^{\vartheta}$ ,  $Q = b + b_1 \epsilon^2 e^{\theta}$ ,  $\theta = \alpha x + \beta t$ ,  $\vartheta = k(\alpha x + \beta t)$ ,  $\alpha, \beta, k - \text{const}$ .
6. Записать результат применения операторов Хироты  $D_t D_x R \circ Q$ ,  $D_t^2 Q \circ Q$ , где  $R = a\epsilon e^{\vartheta}$ ,  $Q = b + b_1 \epsilon^2 e^{\theta}$ ,  $\theta = \alpha x + \beta t$ ,  $\vartheta = k(\alpha x + \beta t)$ ,  $\alpha, \beta, k - \text{const}$ .
7. Записать результат применения операторов Хироты  $D_t D_x^2 R \circ Q$ ,  $D_t Q \circ Q$ , где  $R = a\epsilon e^{\vartheta}$ ,  $Q = b + b_1 \epsilon^2 e^{\theta}$ ,  $\theta = \alpha x + \beta t$ ,  $\vartheta = k(\alpha x + \beta t)$ ,  $\alpha, \beta, k - \text{const}$ .

### Практическое занятие №14

#### Идеи Абловица, Рамани, Сегура Об обладании свойством Пенлеве

**Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников;
- знанием и следование в жизни кодексу профессиональной этики;
- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;
- 

#### Теоретические основы

Свойство Пенлеве было впервые введено в связи с обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка. Оно означает, что единственным типом сингулярностей решений таких уравнений, положение которых зависит от начальных данных, являются полюса. Однако в последнее время становится ясно, что свойство Пенлеве не является ни необходимым, ни достаточным условием для полной интегрируемости уравнения в частных производных.

#### Классический случай

Рассмотрим систему фуксовых дифференциальных уравнений

$$\frac{dV}{dz} = \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{z-a_j} V, \quad (1)$$

где  $V$  есть  $m$ -мерный вектор, а  $A_j$  являются постоянными  $(m \times m)$ -матрицами. В общем случае фундаментальным решением уравнения (1) является многозначная функция комплексной переменной  $z$ . Действительно, если мы обойдём регулярную особенность в точке  $a_j$ , то после обхода  $\Phi = \Phi(a_j + (z-a_j)e^{2\pi i})$ , причем фундаментальная матрица решений (1) не равна  $\Phi(z)$ ; вместо этого ее столбцы являются линейной комбинацией столбцов  $\Phi(z)$ . Матрица  $M_j$ , связывающая  $\Phi(z)$  и  $\Phi(a_j + (z-a_j)e^{2\pi i})$ ,

$$\Phi(a_j + (z-a_j)e^{2\pi i}) = \Phi(z)M_j, \quad (2)$$

называется матрицей монодромии. Можно поставить следующий вопрос. Как можно представить  $A_j$  в виде функции положения полюсов  $a_r$  так, чтобы группа матриц монодромии не изменялась? Общий ответ на этот вопрос был дан Шлезингером:

$$\frac{\partial A_j}{\partial a_r} = \frac{[A_r, A_j]}{a_j - a_r}, \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_j}{\partial a_j} = 0. \quad (3)$$

для  $m=2$  линейным уравнением является система  $2 \times 2$ , ее регулярные особенности могут быть локализованы в фиксированных токах  $z=0,1,\infty$  и одна точка  $z=s$  подвижна. Существуют 12 подгоночных параметров – элементов матриц  $A_j$ ,  $j=1,2,3$ , но все они могут быть выражены в терминах одной функции  $y(s)$ , которая удовлетворяет уравнению

$$y'' + \left( \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{y-s} \right) y' - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-s} \right) (y')^2 - \\ - 2 \frac{y(y-1)(y-s)}{s^2(s-1)^2} \left( \alpha - \beta \frac{s}{y^2} + \gamma \frac{s-1}{(y-1)^2} - \delta \frac{y(y-1)}{(y-s)^2} \right) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) является наиболее общим уравнением второго порядка вида

$$y'' = R(y, y', s), \quad (5)$$

где  $R$  – рациональная функция по  $y, y'$ , аналитична по  $s$ , которая имеет следующее свойство.

*Свойство Пенлеве.* Положение любой алгебраической, логарифмической или существенной особенности решений уравнения не зависит от начальных условий. Это означает, что от произвольных констант интегрирования может зависеть только положение полюсов.

Уравнения второго порядка вида (5) с такими свойствами (условия на  $R$  и свойства Пенлеве) были изучены с подробностью Пенлеве и Гамбье. Существуют 50 канонических типов уравнений, которые включают такие уравнения, как  $y'' = y$ , разрешаемых в эллиптических функциях и имеющих вид

$$y'' = 2y^3 + cy - v, \quad (6)$$

и шесть типов уравнений, решения которых не могут быть выражены в терминах известных специальных функций. Эти шесть уравнений названы уравнениями Пенлеве и их решения – трансцендентами Пенлеве. Два уравнения, это второе,

$$q_{xx} = xq + 2q^2 - v, \quad (7)$$

и третье (после преобразования  $z = e^u$ ),

$$(xu_x)_x = -shu, \quad (8)$$

уравнения Пенлеве.

Используя преобразование  $z = e^u$ , получим (8):

$$u = \ln z, \quad shu = \frac{e^z - e^{-z}}{2i},$$

$$u_x + xu_{xx} = \frac{-e^u + e^{-u}}{2i}, \quad u_x = \frac{1}{z} z', \quad u_{xx} = -\frac{1}{z^2} (z')^2 + \frac{1}{z} z'',$$

$$\frac{1}{z} z' - x \frac{1}{z^2} (z')^2 + x \frac{1}{z} z'' = \frac{-e^{\ln z} + e^{-\ln z}}{2i} = \frac{\frac{1}{z} - z}{2i}, \quad zz' - x(z')^2 + zz''x = \frac{1}{2i} (z - z^3),$$

$$zz''x = \frac{1}{2i} (z - z^3) - zz' + x(z')^2, \quad z'' = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{x} - \frac{z^2}{x} \right) - \frac{z'}{x} + \frac{(z')^2}{z}$$

$$w'' = \frac{1}{w} (w')^2 - \frac{1}{x} w' + \frac{1}{x} (\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w}.$$

Итак, получили третий тип уравнения

$$P_{III}: \quad w'' = \frac{1}{w} (w')^2 - \frac{1}{z} w' + \frac{1}{z} (\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w}.$$

### Теоретические вопросы выносимые на обсуждение

1. Классический случай фуксовых дифференциальных уравнений
2. 50 типов обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, обладающих свойством Пенлеве.
3. Гипотеза Абловица, Рамани, Сегура.
4. Алгебраические, логарифмические и существенные особенности решений уравнений
5. Свойством Пенлеве для нелинейных уравнений в частных производных
6. Полюсные особенности

### Пример применения теории для уравнения КдВ

В 1977г. Абловиц и Сегур отметили, что после того как была установлена точная разрешимость уравнений

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0, \quad (9)$$

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0. \quad (10)$$

(при определенных граничных условиях), можно также решить нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, полученные наложением различных свойств симметрии на эти уравнения. Например, галилеева инвариантность означает, что (9) имеет решения вида  $q(x, t) = f(X = x - ct)$ , удовлетворяющие уравнению

$$-cf_X + 6ff_X + f_{XXX} = 0.$$

Масштабная инвариантность означает, что если  $q(x, t)$  удовлетворяет (9), то же имеет место для  $\beta^2 q(\beta x, \beta^3 t)$  и, если  $v(x, t)$  удовлетворяет (10), то это верно и для  $\beta v(\beta x, \beta^3 t)$ . Полагая

$$v(x, t) = \frac{1}{(3t)^{1/3}} f\left(X = \frac{x}{(3t)^{1/3}}\right),$$

после однократного интегрирования мы получаем

$$f_{XX} = Xf + 2f^3 - v, \quad (11)$$

т.е. второе уравнение Пенлеве (7).

Абловиц и Сегур указали, что однопараметрическое семейство решений (11) при  $v=0$ , убывающих экспоненциально при  $x \rightarrow \infty$  и алгебраически при  $x \rightarrow -\infty$ , может быть найдено непосредственным применением метода обратной задачи. Основание для

этих ограничений состоит в том, что метод обратной задачи требует, чтобы решения  $q(x, t)$  стремились к нулю на обеих бесконечностях.

Зная специфические свойства решений уравнения Пенлеве и заметив, что все обыкновенные дифференциальные уравнения, выводимые из известных полностью интегрируемых уравнений, обладают этим свойством, Абловиц и Сегур, к которым на этом этапе присоединился Рамани, высказали предположение, что это верно всегда: а именно, все обыкновенные дифференциальные уравнения, полученные из полностью интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных, обладают свойством Пенлеве. В некоторых случаях может понадобиться некоторая изобретательность при выборе зависимой переменной (см. (8)). Большим преимуществом этой идеи является то, что она даёт простой и конструктивный тест на интегрируемость.

Проиллюстрируем это на примере (11) с  $v=0$ . Предположим, что  $X_0$  является полюсной сингулярностью функции  $f(X)$ . Теперь мы должны построить ряд Лорана для  $f$  в окрестности  $X_0$

$$f(X) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n (X - X_0)^n. \quad (12)$$

Легко показать, что для того, чтобы (12) удовлетворяло уравнению (11),  $N$  должно быть единицей. Подстановка (12) в (11) даёт систему нелинейных алгебраических уравнений

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} = a_{n-1} + X_0 a_n + 2 \sum_{j,k,l=-1} a_j a_k a_l, \quad j+k+l=n, \quad (13)$$

для  $n \geq 3$ , ( $a_n = 0$ ,  $n < -1$ ), к решению которой мы переходим методом итераций, выражая  $a_{n+2}$  через коэффициенты более низкого порядка. Это можно сделать только в том случае, если существует совместность при значениях  $n = -3$ ,  $n = 1$ , что необходимо, поскольку в каждом случае мы получим коэффициенты  $a_{n+2}$  равными нулю, если не будут выполнены условия

$$a_{-1}^2 = 1, \quad (14)$$

$$a_0 + X_0 a_1 + 6a_{-1} a_1^2 = 0. \quad (15)$$

Мы находим, что для  $n = -2, -1, 0$

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -\frac{X_0 a_{-1}}{6}, \quad a_2 = -\frac{a_{-1}}{4}; \quad (16)$$

(14) и (15) при этом удовлетворяют выбором  $a_{-1} = \pm 1$ . После этого все  $a_n$  определены однозначно, и нетрудно показать, что полученный в результате ряд сходится для достаточно малых значений  $X - X_0 \neq 0$ . Данное семейство решений имеет два свободных параметра  $X_0$  и  $a_3$ , что и следовало ожидать, поскольку уравнение имело второй порядок. Если бы условие совместности (16) не было выполнено, то в локальное разложение для  $f(X)$  следовало включить слагаемое  $\ln(X - X_0)$ , которое означало бы, что  $X_0$  является точкой ветвления решения. Если бы это имело место, положение точки ветвления зависело бы от начальных условий и уравнение не имело бы свойства Пенлеве.

Большим преимуществом гипотезы АРС является простота в применении. Ее недостаток состоит в том, что для тестирования на интегрируемость необходимо проверить все обыкновенные дифференциальные уравнения, связанные с симметриями дифференциального уравнения в частных производных. Было бы лучше, если бы существовала возможность непосредственно изучать и тестировать само исходное уравнение. Прделаем это для (9), используя разложение

$$q(x, t) = \frac{a_{-2}}{(x - x_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(x - x_0)} + a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0) + \dots, \quad (17)$$

где  $x_0$  и все коэффициенты могут быть функциями от  $t$ .

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0; \quad q_{xxx} = \frac{-24a_{-2}}{(x - x_0)^5} + \frac{-6a_{-1}}{(x - x_0)^4} + 6a_3 + \dots;$$

$$\begin{aligned} q_t + 6 \left[ \frac{a_{-2}}{(x - x_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(x - x_0)} + a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots \right] \times \\ \times \left[ \frac{-2a_{-2}}{(x - x_0)^3} + \frac{-a_{-1}}{(x - x_0)^2} + a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots \right] + \\ + \left[ \frac{-24a_{-2}}{(x - x_0)^5} + \frac{-6a_{-1}}{(x - x_0)^4} + 6a_3 + \dots \right] = 0; \\ q_t + 6 \left[ \frac{-2a_{-2}^2}{(x - x_0)^5} + \frac{-a_{-1}a_{-2}}{(x - x_0)^4} + \frac{a_1a_{-2}}{(x - x_0)^2} + \frac{2a_2a_{-2}}{x - x_0} + 3a_3a_{-2} + \dots + \frac{-2a_{-1}a_{-2}}{(x - x_0)^4} + \frac{-a_{-1}^2}{(x - x_0)^3} + \right. \\ + \frac{a_{-1}a_1}{x - x_0} + 2a_2a_{-1} + 3a_3a_{-1}(x - x_0) + \dots + \frac{-2a_0a_{-2}}{(x - x_0)^3} + \frac{-a_1a_0}{(x - x_0)^2} + a_1a_0 + 2a_2a_0(x - x_0) + \\ + 3a_3a_0(x - x_0)^2 + \dots + \frac{-2a_{-2}a_1}{(x - x_0)^2} + \frac{-a_{-1}a_1}{x - x_0} + a_1^2(x - x_0) + 2a_2a_1(x - x_0)^2 + 3a_3a_1(x - x_0)^3 + \dots + \\ + \frac{-2a_{-2}a_2}{x - x_0} - a_{-1}a_2 + a_1a_2(x - x_0)^2 + 2a_2^2(x - x_0)^3 + \dots + (-2)a_{-2}a_3 - a_{-1}a_3(x - x_0) + \\ \left. a_1a_3(x - x_0)^3 + \dots + \frac{-24a_{-2}}{(x - x_0)^5} + \frac{-6a_{-1}}{(x - x_0)^4} + 6a_3 + \dots \right] = 0; \end{aligned}$$

Найдём  $a_n$  при  $n = -2; -1; 0; 1; 2; 3$ .

$$\begin{aligned} n = -2: \quad & 6(-2)a_{-2}^2 - 24a_{-2} = 0, \\ & a_{-2}^2 + 2a_{-2} + 0, \\ & a_{-2} = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = -1: \quad & -6a_{-1}a_{-2} - 6a_{-1} - 12a_{-1}a_{-2} = 0, \\ & 12a_{-1} - 6a_{-1} + 24a_{-1} = 0, \\ & a_{-1} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 0: \quad & 2a_{-2}x_{0t} - 6a_{-1}^2 - 12a_0a_{-2} = 0, \\ & -4x_{0t} - 6a_{-1}^2 + 24a_0 = 0, \\ & x_{0t} - 6a_0 = 0, \\ & a_0 = \frac{1}{6}x_{0t}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 1: \quad & a_{-1t} + a_{-1}x_{0t} + 6(a_1a_{-2} - a_1a_0 - 2a_{-2}a_1) = 0, \\ & -12a_1 - \frac{1}{6}x_{0t}a_1 + 4a_1 = 0, \\ & a_1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 2: \quad & 6(2a_2a_{-2} + a_{-1}a_1 - a_{-1}a_1 - 2a_{-2}a_2) = 0, \\ & -4a_2 + 4a_2 = 0, \\ & a_2 - \text{любое действительное число}, \end{aligned}$$

$$n=3: \quad -\frac{1}{6}x_{0tt} + 6a_3 + 6(-6a_3 + 4a_3) = 0,$$

$$a_3 = \frac{1}{36}x_{0tt}.$$

То есть, подстановкой в (9) мы находим уравнение

$$n(n-1)(n-2)a_n + 6 \sum_{\substack{-2 \\ r+s=n-2}}^{\infty} r a_r a_s + a_{n-3,t} - (n-2)a_{n-2}x_{0t}, \quad n \geq -2, \quad (18)$$

которое решаем для  $a_n$ , выражая его через  $a_{n-r}$ . Для  $n = -2, -1, 0, 1$  мы находим

$$a_{-2} = -2, \quad a_{-1} = 0, \quad a_0 = (1/6)x_{0t}, \quad a_1 = 0.$$

При  $n=2$  коэффициент  $a_2$  равен нулю, но тем же является сумма других слагаемых в уравнении. Следовательно,  $a_2(t)$  - произвольная функция. Для  $n=3$  находим

$a_3 = \frac{1}{36}x_{0tt}$ . Если  $n=4$ , вновь равен нулю коэффициент при  $a_4$ , но уравнение при этом имеет вид

$$24a_4 + 6(2a_0a_2 + 2a_{-2}a_4) + a_{4t} - 2a_2x_{0t} = 0$$

и удовлетворяется тождественно. Все последующие  $a_n$  определяются однозначно. Поэтому  $q(x,t)$  имеет локальное решение, которое может быть записано в виде ряда Лорана с тремя произвольными функциями от  $t$ ,  $x_0(t)$ ,  $a_2(t)$ ,  $a_4(t)$ . Этот подход был развит Вейссом, Табором и Карнивейлем и модифицирован Крускалом. Гипотеза АРС была модифицирована так, что теперь она означает существование локального разложения функции  $q(x,t)$  в ряд Лорана в окрестности тех поверхностей в  $(x,t)$  - пространстве, на которых она имеет полюсное поведение.

### Задания для самостоятельного решения

1. Определить каков порядок полюса имеет решение  $p(x,t) = \sum_{n=-N}^{\infty} a_n(t)(x-\zeta(t))^n$  уравнения  $p_{xxt}p - p_x p_{xt} = 4p^3 p_t$ .
2. Найти производные  $p_{xx}$ ,  $p_t$  для ряда  $p(x,t) = \frac{a_{-1}(t)}{x-\zeta(t)} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t)(x-\zeta(t))^j$ .
3. Найти производные  $p_{xt}$ ,  $p_x$  для ряда  $p(x,t) = \frac{a_{-1}(t)}{x-\zeta(t)} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t)(x-\zeta(t))^j$ .
4. Найти производные  $p_{xxt}$ ,  $p_x$  для ряда  $p(x,t) = \frac{a_{-1}(t)}{x-\zeta(t)} + \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t)(x-\zeta(t))^j$ .

### Практическое занятие №15

#### Законы сохранения и интегралы движения

**Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- умением понять поставленную задачу;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;

- умением публично представить собственные и известные научные результаты;

### Теоретическая база занятия

В начале построим бесконечный набор сохраняющихся величин для нелинейного уравнения Шредингера и всех остальных уравнений, связанных с задачей

$$v_{1x} = -i\xi v_1 + qv_2, \quad (1a)$$

$$v_{2x} = i\xi v_2 + rv_1, \\ v_{1t} = Av_1 + Bv_2, \quad (1б)$$

$$v_{2t} = Cv_1 + Dv_2,$$

(модификацией задачи рассеяния Захарова-Шабата). Напомним, что если  $(\varphi_1, \varphi_2)$  является решением уравнения 1a, удовлетворяющим граничному условию

$$\left. \begin{aligned} \varphi &\sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ \bar{\varphi} &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \end{aligned} \right\}, \text{ при } x \rightarrow -\infty \\ \left. \begin{aligned} \psi &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \\ \bar{\psi} &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\xi x} \end{aligned} \right\}, \text{ при } x \rightarrow +\infty$$

То при  $Im\xi \geq 0$  функция  $\varphi_1 e^{i\xi x}$  аналитична и стремится к 1 при  $|\xi| \rightarrow \infty$ , кроме того, существует предел

$$a(\xi) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_1 e^{i\xi x}, \quad (1.1)$$

обладающий этими двумя свойствами, и не зависящий от времени. Исключим  $\varphi_2$  из 1a и подставим

$$\varphi_1 = \exp\{-i\xi x + \varphi\} \quad (1.2)$$

в уравнение. В результате мы получим уравнение Риккати для  $\mu = \varphi_x$

$$2i\xi\mu = \mu^2 - qr + q\left(\frac{\mu}{q}\right)_x \quad (1.3)$$

Поскольку  $\varphi$  стремится к нулю при  $|\xi| \rightarrow \infty$  ( $Im\xi > 0$ ), мы можем представить

$$\mu = (2i\xi)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n(x, t)}{(2i\xi)^n} \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.3), получим

$$\mu_0 = -qr, \quad \mu_1 = -qr_x, \\ \mu_{n+1} = q\left(\frac{\mu_n}{q}\right)_x + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k \mu_{n-k-1}, \quad n \geq 1. \quad (1.5)$$

Из (1.1) и того факта, что  $\varphi$  стремится к нулю при  $x \rightarrow -\infty$ , следует, что

$$\ln a(\xi) = \varphi(x = +\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{(2i\xi)^{n+1}}, \quad (1.6a)$$

$$C_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_n dx \quad (1.6б)$$

Но  $\ln a(\xi)$  не зависит от времени (при всех  $\xi$ ,  $Im\xi > 0$ ), так что  $C_n$  также должны быть независимыми от времени. Таким образом, несколько первых (глобальных) интегралов движения имеют вид

$$\begin{aligned}
C_0 &= \int \{-qr\} dx, C_1 = \int \{-qr\}_x dx, \\
C_2 &= \int \{-qr_{xx} + (qr)^2\} dx, \\
C_3 &= \int \{-qr_{xxx} + 4q^2 rr_x + r^2 qq_x\} dx,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

### Вопросы для обсуждения

1. Первые интегралы
2. Асимптотическое разложение для  $v(x, \xi)$  при  $\xi \rightarrow \infty$ .
3. Закон сохранения для уравнения Шредингера.
4. Закон сохранения для уравнения sin-Gordon.
5. Законы сохранения для уравнения Кортевега - де Вриза

### Пример построения законов сохранения для оператора Шредингера

Алгоритм построения интегралов движения состоит в следующем. Положим для собственной функции  $v(x, t, \xi)$  задачи на собственные значения – уравнения Шредингера:

$$v_{xx} + (\lambda + q(x, t))v = 0 \tag{14}$$

где  $\lambda = \xi^2$  и  $v = e^{i\xi x + \Phi}$ , тогда

$$\begin{aligned}
v_x &= (\Phi_x + i\xi) e^{i\xi x + \Phi} \\
v_{xx} &= \Phi_{xx} e^{i\xi x + \Phi} + (i\xi + \Phi_x)^2 e^{i\xi x + \Phi}
\end{aligned}$$

Подставив в уравнение (9):

$$\begin{aligned}
\Phi_{xx} e^{i\xi x + \Phi} + (i\xi + \Phi_x)^2 e^{i\xi x + \Phi} + (\lambda^2 + q(x, t)) e^{i\xi x + \Phi} &= 0. \\
\Phi_{xx} e^{i\xi x + \Phi} - (\xi^2 + 2i\xi\Phi_x + \Phi_x^2) e^{i\xi x + \Phi} + (q + \xi^2) e^{i\xi x + \Phi} &= 0. \\
e^{i\xi x + \Phi} (\Phi_{xx} - \xi^2 + 2i\xi\Phi_x + \Phi_x^2 + q + \xi^2) &= 0. \\
2i\xi\Phi_x + \Phi_{xx} + \Phi_x^2 + q &= 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Будем искать решение в виде ряда

$$\Phi_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{(2i\xi)^n} = \frac{R_1}{2i\xi} + \frac{R_2}{(2i\xi)^2} + \dots + \frac{R_n}{(2i\xi)^n} + \dots$$

$$\Phi_x^2 = \frac{R_1^2}{(2i\xi)^2} + 2 \frac{R_1 R_2}{(2i\xi)^3} + \frac{R_2^2}{(2i\xi)^4} + \dots$$

При

$$\begin{aligned}
n=0 \quad R_1 + q &= 0 \Rightarrow R_1 = -q \\
n=1 \quad R_2 + R_{1x} &= 0 \Rightarrow R_2 = q_x \\
n=2 \quad R_3 + R_{2x} + R_1^2 &= 0 \Rightarrow R_3 = -R_{2x} - R_1^2 = -q_{xx} - q^2 \\
n=3 \quad R_4 + R_{3x} + 2R_1 R_2 &= 0 \Rightarrow R_4 = -R_{3x} - 2R_1 R_2 = -q_{xxx} + 2qq_x + 2qq_x = q_{xxx} + 4qq_x \\
n=4 \quad R_5 + R_{4x} + 2R_1 R_3 R_2^2 &= -q_{xxxx} - 4q_x^2 - 4qq_{xx} - q_x^2 - 2qq_{xx} - 2q^3 = \\
&= -q_{xxxx} - 5q_x^2 - 6qq_{xx} - 2q^3.
\end{aligned}$$

В результате получили рекуррентное соотношение

$$R_{n+1} = -R_{nx} - \sum_{i=1}^{n-1} R_i R_{n-i}, \quad n \geq 1.$$

Итак, получили асимптотическое разложение

$$ve^{-i\xi x} \approx 1 - \frac{1}{2i\xi} \int_{-\infty}^x \frac{1}{(2i\xi)^n} R_n dx,$$

где

$$\ln a(\xi) \approx -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2i\xi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} R_n dx$$

Таким образом, пришли к следующим законам сохранения

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} R_1 dx = - \int_{-\infty}^{\infty} q dx$$

- первый закон сохранения (закон сохранения массы).

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} q_x dx = 0.$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (q_{xx} + q^2) dx + \int_{-\infty}^{\infty} q^2 dx$$

- второй закон сохранения (закон сохранения энергии).

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} (q_{xxx} + 4qq_x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (q_{xx} + 2q^2)_x dx = 0$$

$$I_5 = \int_{-\infty}^{\infty} (-q_{xxxx} - 5q_x^2 - 6qq_{xx} - 2q^3) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} ((-6q^2)_{xx} + q_x^2 - 2q^3) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (q_x^2 - 2q^3) dx$$

- третий закон сохранения (закон сохранения импульса).

### Задачи для самостоятельного решения

1. Построить законы сохранения для уравнения Кортевега –де Вриза, оператор рассеяния для которого имеет вид  $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u$ .
2. Построить законы сохранения для уравнения sin-Gordon

## РАЗДЕЛ 6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕКЛУНДА

### Практическое занятие №16 Симметрии для нелинейных уравнений

**Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- умением понять поставленную задачу;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты;

По данной теме планируется подготовка докладов

### Практическое занятие №17 Преобразование Беклунда. КДВ, НУШ, sin-Гордон

**Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- умением понять поставленную задачу;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты

### Пример применения теоретического материала (преобразования Миуры)

В уравнении КДВ

$$q_t + 6qq_x + \delta^2 q_{xxx} = 0. \quad (1)$$

попытаемся описать решение при малом  $\delta^2$  усреднением по осцилляциям тонкой структуры решения. Важно найти законы сохранения, для того, чтобы можно было записать условия на скачках в областях резких изменений решения. Нужно знать четыре таких величины (число характеристических скоростей до и после скачка плюс положение самого скачка) вместо трех для обычной газовой динамики. Два закона сохранения

$$q_t + (3q^2 + \delta^2 q_{xx})_x = 0, \quad (2)$$

$$(1/2 q^2)_t + (2q^3 + \delta^2 (qq_x - 1/2 q_x^2))_x = 0, \quad (3)$$

соответствующие сохранению массы и импульса (2) и (3) для волн на воде и сохранению импульса и энергии для нелинейной пружины были уже известны.

Закон сохранения импульса векторная сумма импульсов тел, входящих в замкнутую систему, остается постоянной при любых взаимодействиях тел этой системы между собой.

Закон сохранения механической энергии полная механическая энергия замкнутой системы тел, взаимодействующих силами тяготения и упругости, остается неизменной. При любых физических взаимодействиях энергия не исчезает и не возникает, а только превращается из одной формы в другую.

Уизем, развивший к этому времени плодотворную теорию для изучения модулированных периодических волн, нашел третий, соответствующий знаменитому моменту неустойчивости Буссинеска. Забуски и Крускал искали и нашли четвертый, и их метод поиска (нахождения уравнения для коэффициентов всех членов веса 4,5,6 и так далее при

условии, что вес  $q$  есть 1, а вес  $\frac{\partial}{\partial x}$  равен  $\frac{1}{2}$ ) указал, что уравнения для коэффициентов на стадии 6 (как и для следующих) переопределены, и поэтому они были не очень удивлены, когда не нашли закона сохранения этого веса. Однако они сделали алгебраическую ошибку, и прошло более года, прежде чем они вновь двинулись по этому пути.

Следующий шаг вперед был сделан с привлечением Роберта Миуры, которого Крускал попросил попытаться отыскать закон сохранения для веса 7. Он нашел его и быстро получил пропущенный вес 6. Вскоре были найдены восьмой и девятый, и Крускал и Миура стали вполне уверены, что их бесконечное число. Однако из Института Куранта пришел слух, что девятый – это предел. Миура после этого почувствовал себя обязанным найти десятый. Он сделал это в течение двух недель каникул в Канаде летом 1966 году. Теперь было ясно, что есть законы сохранения любого веса. (Каждый закон сохранения имеет вид

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0$$

$U$  – называется сохраняющейся плотностью, а  $F$  – соответствующим потоком. Им может быть приписан вес, получающийся сложением степени  $q$  с половиной числа операций  $\delta\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$  в каждом члене в этих величинах. Например, вес  $q$  – единица веса  $2q^3$ ,  $\delta^2 q q_{xx}$ ,  $\delta^2 q_x^2$  все имеют вес  $t$  и так далее. Вес закона сохранения определяется по весу сохраняющейся плотности.) Как их найти и к какому роду ограничениям на решения уравнения КдФ они могут привести – эти вопросы волновали исследователи. Первоначальная мотивировка поиска законов сохранения временно стала неактуальной. Внезапно появилось слишком много независимых законов сохранения, и все условия на скачке (соотношение Рэнкина - Погонио), выводящиеся из этих законов, должны были быть совместными. Как часто бывает с новыми открытиями, этот вопрос уже не казался таким важным как раньше.

Роберт Миура обнаружил, что модифицированное уравнение КдФ

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \quad (4)$$

тоже имеет бесконечное число законов сохранения, и ему удалось установить соответствие между ними и соответствующими законами сохранения КдФ с помощью преобразования, носящего теперь его имя:

$$q = v^2 - i v_x. \quad (5)$$

Начиная с этого места, мы будем писать  $x, t$  вместо  $\xi, \tau$  и причем  $\delta^2 = 1$ . В действительности Миура показал, что

$$\begin{aligned} q_t + 6qq_x + q_{xxx} &= 2vv_t - i v_{xt} + 6(v^2 - i v_x)(2vv_x - i v_{xx}) + 2v_{xx}v_x + 4v_x v_{xx} + 2vv_{xxx} - i v_{xxx} = \\ &= 2v(v_t + v_{xxx}) - i \frac{\partial}{\partial x} (v_t + v_{xxx} + 6v^2 v_x) + 12v^3 v_x = (2v - i \frac{\partial}{\partial x})(v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx}), \end{aligned}$$

то есть

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = (2v - i \frac{\partial}{\partial x})(v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx}) \quad (6)$$

И поэтому, если  $v(x, t)$  – решение (4), то  $q(x, t)$  – решение (1).

Далее, так как (5) представляет собой уравнение Риккати, преобразование Миуры может быть линеаризовано:

$$v(x, t) = -i \frac{\varphi_x}{\varphi}, \quad (7)$$

в результате чего возникает уравнение Шредингера с нулевой энергией

$$q = - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi}. \quad (8)$$

В силу галилеевской инвариантности уравнения (1) ничего не изменится, если к  $q$  прибавить постоянную скорость  $\lambda$ , после чего (8) принимает вид

$$\varphi_{xx} + (\lambda + q(x, t))\varphi = 0 \quad (9)$$

то есть, становится стационарным уравнением Шредингера с потенциалом  $V(x)=-q(x, t)$  и энергией  $E=\lambda$ . Теперь уже в наличии имеются все составляющие, из которых должно появиться обратное преобразование рассеяния. На этой стадии Гарднер и Грин объединили свои усилия.

Перед описанием дальнейших событий имеет смысл описать гарднеровскую модификацию преобразования Миуры, автоматически включающую  $\lambda$  и приведенную к идее, что бесконечное число сохраняющихся величины для другого уравнения, если только их решения связаны преобразованием специального вида (вариантом преобразования Бэклунда). Гарднер предположил:

$$q = \omega + i\varepsilon\omega_x + \varepsilon^2\omega^2 \quad (10)$$

и получил эквивалент (6)

$$\begin{aligned} q_t + 6qq_x + q_{xxx} &= \omega_t + i\varepsilon\omega_{xt} + 2\varepsilon^2\omega\omega_t + (6\omega + 6i\varepsilon\omega_x + 6\varepsilon^2\omega^2)(\omega_x + \\ &+ i\varepsilon\omega_x + 2\varepsilon^2\omega\omega_x) + \omega_{xxx} + i\varepsilon\omega_{xxx} + 2\varepsilon^2\omega\omega_{xxx} = \omega_t + i\varepsilon\omega_{xt} + 2\varepsilon^2\omega\omega_t + \\ &+ 6\omega\omega_x + 6i\varepsilon\omega\omega_x + 12\varepsilon^2\omega^2\omega_x + 6i\varepsilon\omega_x^2 - 6\varepsilon^2\omega_x^2 + 12i\varepsilon^3\omega\omega_x^2 + 6\varepsilon^2\omega^2\omega_x + \\ &+ 6i\varepsilon^3\omega^2\omega_x + 12\varepsilon^4\omega^3\omega_x + \omega_{xxx} + i\varepsilon\omega_{xxx} + 2\varepsilon^2\omega\omega_{xxx} = 2\varepsilon^2\omega(\omega_t + \omega_{xxx} + \\ &+ 6\omega\omega_x + 6\varepsilon^2\omega^2\omega_x) + i\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}(\omega_t + \omega_{xxx} + 6\omega\omega_x + 6\varepsilon^2\omega^2\omega_x) + (\omega_t + \omega_{xxx} + \\ &+ 6\omega\omega_x + 6\varepsilon^2\omega^2\omega_t) = (1 + 2\varepsilon^2\omega + i\varepsilon\frac{\partial}{\partial x})(\omega_t + 6(\omega + \varepsilon^2\omega^2)\omega_x + \omega_{xxx}) \\ q_t + 6qq_x + q_{xxx} &= (1 + 2\varepsilon^2\omega + i\varepsilon\frac{\partial}{\partial x})(\omega_t + 6(\omega + \varepsilon^2\omega^2)\omega_x + \omega_{xxx}) \end{aligned} \quad (11)$$

После линеаризации (10) подстановкой

$$\omega + \frac{1}{2\varepsilon^2} = \frac{i}{\varepsilon} \frac{\varphi_x}{\varphi} \quad (12)$$

(10) принимает вид

$$\varphi_{xx} + (q + \frac{1}{4\varepsilon^2})\varphi = 0 \quad (13)$$

Теперь выразим  $\omega$  через  $q$  и его производные в виде асимптотического ряда по  $\varepsilon$  при малых  $\varepsilon$  и найдем, что

$$\omega = q - i\varepsilon q_x - \varepsilon^2(q_{xx} + q^2) + \dots$$

Так как  $\int \omega dx$  постоянно во времени, если интеграл берется по бесконечной прямой и  $q$  стремится к нулю вместе со всеми своими производными при  $x \rightarrow \pm\infty$ , или по интервалу при периодически граничных условиях, то не зависят от времени

$$\int q dx, \quad \int q^2 dx, \quad \int (q^3 - \frac{1}{2}q^2 x) dx \quad \text{и т. д.}$$

Таким образом, из первого закона сохранения для уравнения

$$\omega_t + t(\omega + \varepsilon^2\omega^2)\omega_x + \omega_{xxx} = 0.$$

получается бесконечное число законов сохранения для уравнения КдФ.

### Практическое занятие №18 Автопреобразования Бэклунда

**Цель** занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение компетенциями: ОПК-1, ОПК-2, ОПК-3

- умением понять поставленную задачу;

- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;

### Теоретический базовый материал

Кроме рассмотренного выше метода Хироты для построения явных решений солитонных уравнений, имеется еще один прямой метод, связанный со специальными нелинейными преобразованиями, отображающими класс решений исходного уравнения в себя. Эти преобразования, как правило, содержат дополнительные произвольные постоянные, так что на каждом шаге получаются новые решения. При этом можно начинать с какого-нибудь тривиального, например, нулевого решения и получить за  $N$  шагов  $N$ -солитонное решение.

В качестве примера рассмотрим уравнение Кортевега – де Фриза в виде

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1)$$

Введем новую неизвестную функцию  $v = v(x, t)$ , такую что

$$u = v_x + v^2 + \lambda, \quad (2)$$

где  $\lambda$  – некоторая произвольная постоянная. Подставляя (2) в уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} u_t &= v_{xt} + 2vv_t = \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) v_t, \\ u_{xxx} &= (v_x + v^2 + \lambda)_{xxx} = v_{xxx} + (v^2)_{xxx} = v_{xxx} + (2vv_x)_{xx} = \\ &= v_{xxx} + 2(vv_{xx} + v_x^2)_x = v_{xxx} + 2(vv_{xxx} + v_x v_{xx} + 2v_x v_{xx}) = v_{xxx} + 2vv_{xxx} + 6v_x v_{xx}, \\ -6uu_x + u_{xxx} &= -6(v_x + v^2 + \lambda)(v_{xx} + 2vv_x) + (v_{xx} + 2vv_x)_{xx}, \\ -6uu_x + u_{xxx} &= -6(v_x + v^2 + \lambda)(v_{xx} + 2vv_x) + 2(v_x v_{xx} + vv_{xxx} + 2v_x v_{xx}) + v_{xxx}, \\ -6uu_x + u_{xxx} &= -6(v_x + v^2 + \lambda) \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) v_x + 6v_x v_{xx} + \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) v_{xxx} \end{aligned}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) [6v_x(v_x + v^2 + \lambda)] &= \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) (6v_x^2 + 6v^2 v_x + 6\lambda v_x) = \\ &= 6(2v_x v_{xx} + 2vv_x^2 + v^2 v_{xx} + \lambda v_{xx}) + 12vv_x^2 + 12v^3 v_x + 12\lambda vv_x = \\ &= 6 \left( 2v_x \frac{\partial}{\partial x} + 2vv_x + v^2 \frac{\partial}{\partial x} + \lambda \frac{\partial}{\partial x} + 2v^3 + 2vv_x + 2\lambda v \right) v_x = \\ &= 6(v_x + v^2 + \lambda) \left( 2v + \frac{\partial}{\partial x} \right) v_x + 6v_x \left( 2v + \frac{\partial}{\partial x} \right) v_x. \end{aligned}$$

Отсюда

$$-6(v_x + v^2 + \lambda) \left( 2v + \frac{\partial}{\partial x} \right) v_x = - \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) [6v_x(v_x + v^2 + \lambda)] + 6v_x \left( 2v + \frac{\partial}{\partial x} \right) v_x.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} -6uu_x + u_{xxx} &= - \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) [6v_x(v_x + v^2 + \lambda)] + 6v_x \left( 2v + \frac{\partial}{\partial x} \right) v_x + 6v_x v_{xx} + \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) v_{xxx} = \\ &= - \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) [6v_x(v^2 + \lambda) - v_{xxx}] - \frac{\partial}{\partial x} 6v_x^2 - 12vv_x^2 + 12vv_x^2 + 6v_x v_{xx} + 6v_x v_{xx} = \\ &= - \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) [6v_x(v^2 + \lambda) - v_{xxx}]. \end{aligned}$$

Тогда

$$-6uu_x + u_{xxx} = - \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) [6v_x(v^2 + \lambda) - v_{xxx}].$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_t - 6uu_x + u_{xxx} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) v_t - \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) [6v_x(v^2 + \lambda) - v_{xxx}] = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) [v_t - 6v_x(v^2 + \lambda) + v_{xxx}] = 0. \end{aligned}$$

Откуда для  $v$  получается модифицированное уравнение КдФ

$$v_t - 6v_x(v^2 + \lambda) + v_{xxx} = 0. \quad (3)$$

Заметим, что если  $v$  – решение уравнения (3), то  $(-v)$  – тоже его решение:

$$\begin{aligned} (-v)_t - 6(-v)_x((-v)^2 + \lambda) + (-v)_{xxx} &= 0, \\ v_t - 6v_x(v^2 + \lambda) + v_{xxx} &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функция

$$u_1 = -v_x + v^2 + \lambda$$

будет удовлетворять уравнению КдФ (1). При этом функция  $u_1$ , вообще говоря, не совпадает с исходным решением  $u$ .

Для того чтобы исключить промежуточную функцию  $v$  из преобразования  $u \rightarrow u_1$ , сделаем замену

$$u = 2w_x, \quad u_1 = 2w_{1x}. \quad (4)$$

Тогда

$$\frac{u - u_1}{2} = v_x = (w - w_1)_x, \quad v = w - w_1, \quad v^2 + \lambda = \frac{u + u_1}{2} = (w + w_1)_x,$$

так что для функций  $w$  и  $w_1$  получается пара уравнений

$$(w + w_1)_x = (w - w_1)^2 + \lambda, \quad (5a)$$

$$(w - w_1)_t - 6(w - w_1)_x(w + w_1)_x + (w - w_1)_{xxx} = 0. \quad (5b)$$

Формулы (5) носят название *преобразований Беклунда*.

Для иллюстрации применения этих преобразований положим

$$u = w = 0$$

и вычислим  $u_1$ . Система (5) преобразуется к виду

$$w_{1x} = w_1^2 + \lambda, \quad -w_{1t} + 6w_{1x}^2 - w_{1xxx} = 0.$$

Выполняя замену

$$w_1 = -\frac{f_x}{f},$$

получим

$$w_{1x} = -\frac{ff_{xx} - f_x^2}{f^2} = -\frac{f_{xx}}{f} + \frac{f_x^2}{f^2}.$$

получим для  $f$  уравнение

$$-\frac{f_{xx}}{f} + \frac{f_x^2}{f^2} = \left( -\frac{f_x}{f} \right)^2 + \lambda, \quad -\frac{f_{xx}}{f} = \lambda$$

Его общее решение имеет вид

$$f = e^{a(x+c)} + e^{-a(x+c)}, \quad \lambda = -a^2, \quad c = c(t).$$

Тогда для  $w_1$  получаем

$$\begin{aligned} w_1 = -\frac{f_x}{f} &= -\frac{ae^{a(x+c)} - ae^{-a(x+c)}}{e^{a(x+c)} + e^{-a(x+c)}} = -a \frac{e^{a(x+c)} - e^{-a(x+c)}}{e^{a(x+c)} + e^{-a(x+c)}} = \\ &= -a \cdot \text{th}[a(x+c)] = -a \cdot \text{th}\theta, \end{aligned}$$

$$w_{1t} = -a \frac{\left[ e^{a(x+c)} + e^{-a(x+c)} \right]^2 ac_t - \left[ e^{a(x+c)} - e^{-a(x+c)} \right]^2 ac_t}{\left[ e^{a(x+c)} + e^{-a(x+c)} \right]^2} = -a^2 c_t (1 - \text{th}^2 \theta).$$

Из тождества

$$\text{ch}^2 \theta - \text{sh}^2 \theta = 1, \quad 1 - \text{th}^2 \theta = \frac{1}{\text{ch}^2 \theta},$$

запишем

$$\begin{aligned} w_{1t} &= -a^2 c_t \frac{1}{\text{ch}^2 \theta}, & w_{1x} &= -a^2 \frac{1}{\text{ch}^2 \theta}, & w_{1xx} &= 2a^2 \frac{a \cdot \text{sh} \theta}{\text{ch}^3 \theta} = 2a^3 \frac{\text{sh} \theta}{\text{ch}^3 \theta}, \\ w_{1xxx} &= 2a^3 \frac{\text{ch}^3 \theta \cdot a \cdot \text{ch} \theta - \text{sh} \theta \cdot 3a \cdot \text{ch}^2 \theta \cdot \text{sh} \theta}{\text{ch}^6 \theta} = 2a^4 \frac{\text{ch}^4 \theta - 3\text{sh}^2 \theta \cdot \text{ch}^2 \theta}{\text{ch}^6 \theta} = 6a^4 \frac{1}{\text{ch}^4 \theta} - 4a^4 \frac{1}{\text{ch}^2 \theta} \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} -w_{1t} + 6w_{1x}^2 - w_{1xxx} &= 0, \\ a^2 c_t \frac{1}{\text{ch}^2 \theta} + 6 \left( \frac{a^2}{\text{ch}^2 \theta} \right)^2 - 6a^4 \frac{1}{\text{ch}^4 \theta} + 4a^4 \frac{1}{\text{ch}^2 \theta} &= 0, \\ a^2 (c_t + 4a^2) &= 0, \quad c = -4a^2 t + \delta. \end{aligned}$$

Тем самым окончательно получается односолитонное решение

$$u_1 = 2w_{1x} = -\frac{2a^2}{\text{ch}^2(-4a^2 t + \delta)}.$$

Заметим, что в процессе интегрирования мы получили здесь две произвольных постоянных  $\lambda = -a^2$  и  $\delta$ . Ясно, что эти константы возникнут после применения преобразования Беклунда к произвольному (а не только к нулевому, как выше) решению. Можно показать, что последовательное применение указанной процедуры к вновь полученному решению

$$0 \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_n$$

даст на  $N$ -м шаге  $N$ -солитонное решение, содержащее  $2N$  произвольных постоянных. (Как это сделать?).

### Вопросы для обсуждения

1. Дать определение преобразованиям Беклунда
2. Что означает автопреобразование Беклунда
3. Как преобразования Беклунда помогают найти точные решения нелинейных уравнений в частных производных
4. Какой вид имеет преобразование Миуры
5. Каких два уравнения связывает преобразование Миуры
6. Как исключить промежуточную функцию  $v$  из преобразования  $u \rightarrow u_1$
7. Выполнить преобразование  $0 \rightarrow u_1$
8. Выполнить преобразование  $u_1 \rightarrow u_2$
9. Возможно ли выполнить всю цепочку преобразований  $0 \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_n$

- **МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ**
- **ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬ-  
НОЕ**
  - **УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**
  - **«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

### **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы  
по дисциплине «Нелинейные дифференциальные уравнения»

для студентов направления подготовки  
01.04.02 «Прикладная математика и информатика»  
Направленность (профиль)  
«Математическое моделирование»

Ставрополь, 2023

## **Содержание**

Введение

Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Методические рекомендации по написанию и оформлению доклада

Методические рекомендации по конспектированию первоисточников

Методические указания по подготовке к экзамену

Список рекомендуемой литературы

## ВВЕДЕНИЕ

Современные стандарты подготовки бакалавров предусматривают значительный объем внеаудиторной работы. Освоение программы курса предполагает получение как теоретических знаний по проблемам солитонного исчисления, так и формирование навыков практической работы. Поэтому самостоятельная работа в рамках курса ориентирована как на теоретический, так и на практический аспект.

Самостоятельная работа студентов – это выполнение теоретических и практических заданий студентами по усвоению изучаемой дисциплины «Нелинейные дифференциальные уравнения».

**Целью** самостоятельной работы является закрепление и углубление знаний, полученных студентами на лекциях, подготовке к текущим практическим занятиям, промежуточным формам контроля знаний и к итоговому контролю.

**Дидактические цели самостоятельных занятий:**

- формирование профессиональных умений;
- формирование умений и навыков самостоятельного умственного труда;
- мотивирование регулярной целенаправленной работы по освоению специальности;
- развитие самостоятельности мышления;
- формирование убежденности, волевых черт характера, способности к самоорганизации;
- овладение технологическим учебным инструментом.

### 1. Общая характеристика самостоятельной работы студента при изучении дисциплины

Самостоятельная работа включает те разделы курса, которые не получили достаточного освещения на лекциях по причине ограниченности лекционного времени и большого объема изучаемого материала.

Методическое обеспечение самостоятельной работы по дисциплине состоит из:

- 1) Определения учебных вопросов, которые студенты должны изучить самостоятельно;
- 2) Подбора необходимой учебной литературы, обязательной для проработки и изучения;
- 3) Поиска дополнительной научной литературы, к которой студенты могут обращаться по желанию, если у них возникает интерес в данной теме;
- 4) Определения контрольных вопросов, позволяющих студентам самостоятельно проверить качество полученных знаний;
- 5) Организации консультаций преподавателя со студентами для разъяснения вопросов, вызвавших у обучающихся затруднения при самостоятельном освоении учебного материала.

Самостоятельная работа студента – это особым образом организованная деятельность, включающая в свою структуру такие компоненты, как:

- уяснение цели и поставленной учебной задачи;
- четкое и системное планирование самостоятельной работы;
- поиск необходимой учебной и научной информации;
- освоение собственной информации и ее логическая переработка;
- использование методов исследовательской, научно-исследовательской работы для решения поставленных задач;
- выработка собственной позиции по поводу полученной задачи;
- представление, обоснование и защита полученного решения;
- проведение самоанализа и самоконтроля

**К основным видам самостоятельной работы студентов относится:**

- работа с понятийным аппаратом;
- конспектирование первоисточников;
- проектирование фрагментов исследовательской деятельности;
- анализ научных исследований по дисциплине;
- подготовка научного проекта по теме.

Контроль знаний студентов включает формы текущего и итогового контроля. Текущий контроль осуществляется в процессе изучения курса и включает в себя оценку работы студентов на практических занятиях (собеседование, групповые научные проекты, тестирование), а также подготовку домашнего задания.

## 2. Технологическая карта самостоятельной работы студента

| Коды реализующих компетенций, индикатора(ов)                                                                   | Вид деятельности студентов                                                  | Средства и технологии оценки | Объем часов, в том числе |                                    |       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------------|--------------------------|------------------------------------|-------|
|                                                                                                                |                                                                             |                              | СРС                      | Контактная работа с преподавателем | Всего |
| 3 семестр                                                                                                      |                                                                             |                              |                          |                                    |       |
| ОПК-1<br>ИД-1,2,3 <sub>ОПК-1</sub><br>ОПК-2<br>ИД-1,2,3 <sub>ОПК-2</sub><br>ОПК-3<br>ИД-1,2,3 <sub>ОПК-3</sub> | Подготовка к практическому занятию                                          | Собеседование                | 3                        | 1,5                                | 4,5   |
| ОПК-1<br>ИД-1,2,3 <sub>ОПК-1</sub><br>ОПК-2<br>ИД-1,2,3 <sub>ОПК-2</sub><br>ОПК-3<br>ИД-1,2,3 <sub>ОПК-3</sub> | Решение разноуровневых задач, выполнение индивидуальных и групповых заданий | Проверка письменных отчетов  | 9,75                     | 4,00                               | 13,75 |
| ОПК-1<br>ИД-1,2,3 <sub>ОПК-1</sub><br>ОПК-2<br>ИД-1,2,3 <sub>ОПК-2</sub><br>ОПК-3<br>ИД-1,2,3 <sub>ОПК-3</sub> | Самостоятельное изучение литературы                                         | Собеседование                | 3                        | 1,25                               | 4,25  |
| ОПК-1<br>ИД-1,2,3 <sub>ОПК-1</sub><br>ОПК-2<br>ИД-1,2,3 <sub>ОПК-2</sub><br>ОПК-3<br>ИД-1,2,3 <sub>ОПК-3</sub> | Подготовка к экзамену                                                       | Вопросы к экзамену           | 33,75                    | 33,75                              | 67,5  |
| Итого за 3 семестр                                                                                             |                                                                             |                              | 49,5                     | 40,5                               | 90    |
| Итого                                                                                                          |                                                                             |                              | 49,5                     | 40,5                               | 90    |

## 3. Порядок выполнения самостоятельной работы

### 3.1 Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Комплексное изучение предлагаемой студентам учебной дисциплины «Нелинейные дифференциальные уравнения» предполагает овладение материалами лекций, учебников, программы, творческую работу студентов в ходе проведения практических занятий, а также систематическое выполнение заданий для самостоятельной работы.

В ходе лекций раскрываются основные вопросы в рамках рассматриваемых тем, делаются акценты на наиболее сложные и интересные положения изучаемого материала,

которые должны быть приняты студентами во внимание. Материалы лекций являются основой для подготовки студентов к практическим занятиям.

#### ***Работа с конспектом лекций***

Просмотрите конспект сразу после занятий. Отметьте материал конспекта лекций, который вызывает затруднения для понимания. Попытайтесь найти ответы на затруднительные вопросы, используя предлагаемую литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, сформулируйте вопросы и обратитесь на текущей консультации или на ближайшей лекции за помощью к преподавателю.

Каждую неделю отводите время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам и тестам.

#### ***Выполнение практических занятий по дисциплине «Нелинейные дифференциальные уравнения»***

На первом занятии получите у преподавателя задания по курсу, планы подготовки к практическим занятиям. Обзаведитесь всем необходимым методическим обеспечением.

Перед практическими занятиями изучите теорию вопроса, предполагаемого к исследованию, ознакомьтесь с опытом других исследователей в этом направлении.

Целью практических занятий является:

- проверка уровня понимания студентами вопросов, рассмотренных на лекциях и по учебной литературе, степени и качества усвоения материала;
- обучение навыкам освоения методики эксперимента и работы с нормативно-справочной литературой;
- закрепление методов приложения теории к решению практических задач анализа и синтеза полученного знания;
- восполнение пробелов в пройденной теоретической части курса и оказание помощи в его усвоении.

### ***3.2 Методические рекомендации по написанию и оформлению доклада***

#### ***1. Общие положения***

1.1. Доклад, как вид самостоятельной работы в учебном процессе, способствует формированию навыков исследовательской работы, расширяет познавательные интересы, учит критически мыслить.

1.2. При написании доклада по заданной теме студент составляет план, подбирает основные источники.

1.3. В процессе работы с источниками систематизирует полученные сведения, делает выводы и обобщения.

1.4. К докладу по крупной теме могут привлекать несколько студентов, между которыми распределяются вопросы выступления.

#### ***2. Выбор темы доклада***

2.1. Тематика доклада обычно определяется преподавателем, но в определении темы инициативу может проявить и студент.

2.2. Прежде чем выбрать тему доклада, автору необходимо выявить свой интерес, определить, над какой проблемой он хотел бы поработать, более глубоко ее изучить.

#### ***3. Этапы работы над докладом***

3.1. Формулирование темы, причем она должна быть не только актуальной по своему значению, но и оригинальной, интересной по содержанию.

3.2. Подбор и изучение основных источников по теме (как правильно, при разработке доклада используется не менее 8-10 различных источников).

3.3. Составление списка использованных источников.

3.4. Обработка и систематизация информации

3.5. Разработка плана доклада.

3.6. Написание доклада.

3.7. Публичное выступление с результатами исследования.

#### 4. Структура доклада:

- титульный лист
- оглавление (в нем последовательно излагаются названия пунктов доклада, указываются страницы, с которых начинается каждый пункт);
- введение (формулирует суть исследуемой проблемы, обосновывается выбор темы, определяются ее значимость и актуальность, указываются цель и задачи доклада, дается характеристика используемой литературы);
- основная часть (каждый раздел ее, доказательно раскрывая отдельную проблему или одну из ее сторон, логически является продолжением предыдущего; в основной части могут быть представлены таблицы, графики, схемы);
- заключение (подводятся итоги или дается обобщенный вывод по теме доклада, предлагаются рекомендации);
- список использованных источников

#### 5. Структура и содержание доклада

5.1. Введение - это вступительная часть научно-исследовательской работы. Автор должен приложить все усилия, чтобы в этом небольшом по объему разделе показать актуальность темы, раскрыть практическую значимость ее, определить цели и задачи эксперимента или его фрагмента.

5.2. Основная часть. В ней раскрывается содержание доклада. Как правило, основная часть состоит из теоретического и практического разделов. В теоретическом разделе раскрываются история и теория исследуемой проблемы, дается критический анализ литературы и показываются позиции автора. В практическом разделе излагаются методы, ход, и результаты самостоятельно проведенного эксперимента или фрагмента.

В основной части могут быть также представлены схемы, диаграммы, таблицы, рисунки и т.д.

5.3. В заключении содержатся итоги работы, выводы, к которым пришел автор, и рекомендации. Заключение должно быть кратким, обязательным и соответствовать поставленным задачам.

5.4. Список использованных источников представляет собой перечень использованных книг, статей, фамилии авторов приводятся в алфавитном порядке, при этом все источники даются под общей нумерацией литературы. В исходных данных источника указываются фамилия и инициалы автора, название работы, место и год издания.

5.5. Приложение к докладу оформляются на отдельных листах, причем каждое должно иметь свой тематический заголовок и номер, который пишется в правом верхнем углу, например: «Приложение 1»

#### 6. Требования к оформлению доклада

6.1. Объем доклада может колебаться в пределах 5-15 печатных страниц; все приложения к работе не входят в ее объем.

6.2. Доклад должен быть выполнен грамотно, с соблюдением культуры изложения.

6.3. Обязательно должны иметься ссылки на используемую литературу.

6.4. Должна быть соблюдена последовательность написания библиографического аппарата.

#### 7. Критерии оценки доклада

- актуальность темы исследования;
- соответствие содержания теме;
- глубина проработки материала; правильность и полнота использования источников;
- соответствие оформления доклада стандартам.

По усмотрению преподавателя доклады могут быть представлены на семинарах, научно-практических конференциях, а также использоваться как зачетные работы по пройденным темам.

### **3.3 Методические рекомендации по конспектированию первоисточников**

Изучение и анализ литературных источников является обязательным видом самостоятельной работы студентов. Изучение литературы по избранной теме имеет своей задачей проследить характер постановки и решения определенной проблемы различными авторами, аргументацию их выводов и обобщений, провести анализ и систематизировать полученный материал на основе собственного осмысления с целью выяснения современного состояния вопроса.

Проработка отобранного материала обязательно должна идти с одновременным ведением записей прочитанного и своих замечаний. Запись может иметь как форму конспекта, так и выписок, а также картотеку положений, тезисов, идей, методик, что в дальнейшем облегчит классификацию и систематизацию полученного материала. Такого рода записи являются лучшим способом накопления и первичной обработки материала, одной из обязательных форм организации умственного труда.

**Планом** удобно пользоваться при подготовке к устному выступлению по выбранной теме. Каждый пункт плана должен раскрывать одну из сторон избранной темы, а весь план должен охватывать ее целиком.

**Тезисы** предполагают сжатое изложение основных положений текста в форме утверждения или отрицания. Они являются более совершенной формой записей и представляют основу для дискуссии. К тому же их легко запомнить.

**Конспектирование** – процесс мысленной переработки и письменной фиксации информации, в виде краткого изложения основного содержания, смысла какого-либо текста.

Результат конспектирования – запись, позволяющая конспектирующему немедленно или через некоторый срок с нужной полнотой восстановить полученную информацию. Конспект в переводе с латыни означает «обзор». По существу его и составлять надо как обзор, содержащий основные мысли текста без подробностей и второстепенных деталей. Конспект носит индивидуализированный характер: он рассчитан на самого автора и поэтому может оказаться малопонятным для других.

Для того чтобы осуществлять этот вид работы, в каждом конкретном случае необходимо грамотно решить следующие задачи:

1. Сориентироваться в общей композиции текста (уметь определить вступление, основную часть, заключение).
2. Увидеть логико-смысловую канву сообщения, понять систему изложения автором информации в целом, а также ход развития каждой отдельной мысли.
3. Выявить «ключевые» мысли, т. е. основные смысловые вехи, на которые «нанизано» все содержание текста.
4. Определить детализирующую информацию.
5. Лаконично сформулировать основную информацию, не перенося на письмо все целиком и дословно.

Во всяком научном тексте содержится информация 2-х видов: основная и вспомогательная. Основной является информация, имеющая наиболее существенное значение для раскрытия содержания темы или вопроса. К ней относятся: определения научных понятий, формулировки законов, теоретических принципов и т. д. Назначение вспомогательной информации – помочь читателю лучше усвоить предлагаемый материал. К этому типу информации относятся разного рода комментарии. Основную – записываем как можно полнее, вспомогательную, как правило, опускаем. Содержание конспектирования составляет переработка основной информации в целях ее обобщения и сокращения. Обобщить – значит представить ее в более общей, схематической форме, в виде тезисов, выводов, отдельных заголовков, изложения основных результатов и т. п. Читая, мы интуитивно используем некоторые слова и фразы в качестве опорных. Такие

опорные слова и фразы называются ключевыми. Ключевые слова и фразы несут основную смысловую и эмоциональную нагрузку содержания текста.

Выбор ключевых слов – это первый этап смыслового свертывания, смыслового сжатия материала.

Важными требованиями к конспекту являются наглядность и обозримость записей и такое их расположение, которое давало бы возможность уяснить логические связи и иерархию понятий.

**По форме конспекты подразделяются на формализованные и графические.**

**1. Формализованные** (все записи вносятся в заранее подготовленные таблицы).

Это удобно, во-первых, при конспектировании материалов, когда перечень характеристик описываемых предметов или явлений более или менее постоянен, во-вторых, при подготовке единого конспекта по нескольким источникам. Особенно если есть необходимость сравнения отдельных данных. Разновидностью формализованного конспекта является запись, составленная в форме ответов на заранее подготовленные вопросы, обеспечивающие исчерпывающие характеристики однотипных предметов или явлений.

**2. Графические** (элементы конспектируемой работы располагаются в таком виде, при котором видна иерархия понятий и взаимосвязь между ними).

По каждой работе может быть не один, а несколько графических конспектов, отображающих книгу в целом и отдельные ее части. Ведение графического конспекта – наиболее совершенный способ изображения внутренней структуры книги, а сам этот процесс помогает усвоению ее содержания.

Можно выделить следующие основные **типы конспектов: плановый, текстовый, сводный, тематический.**

**Плановый** – легко получить с помощью предварительно сделанного плана произведения, каждому вопросу плана отвечает определенная часть конспекта:

а) вопросно-ответный (на пункты плана, выраженные в вопросительной форме, конспект дает точные ответы);

б) схематичный плановый конспект (отражает логическую структуру и взаимосвязь отдельных положений).

**Текстовый** – это конспект, созданный в основном из цитат.

**Сводный конспект** – сочетает выписки, цитаты, иногда тезисы; часть его текста может быть снабжена планом.

**Тематический** – дает более или менее исчерпывающий ответ (в зависимости из числа привлеченных источников и другого материала, например, своих же записей) на поставленный вопрос – тему: обзорный; хронологический.

Роль конспекта – чисто учебная: он помогает зафиксировать основные понятия и положения первичного текста и в нужный момент их воспроизвести, например, при написании реферата или подготовке к экзамену.

**Способы конспектирования.**

- **Тезисы** – это кратко сформулированные основные мысли, положения изучаемого материала. Тезисы лаконично выражают суть читаемого, дают возможность раскрыть содержание. Приступая к освоению записи в виде тезисов, полезно в самом тексте отмечать места, наиболее четко формулирующие основную мысль, которую автор доказывает (если, конечно, это не библиотечная книга). Часто такой отбор облегчается шрифтовым выделением, сделанным в самом тексте.

- **Линейно-последовательная запись текста.** При конспектировании линейно – последовательным способом целесообразно использование плакатно-оформительских средств, которые включают в себя следующие:

- сдвиг текста конспекта по горизонтали, по вертикали;
- выделение жирным (или другим) шрифтом особо значимых слов;
- использование различных цветов;
- подчеркивание;

- заключение в рамку главной информации.

- **Способ «вопросов – ответов».** Он заключается в том, что, поделив страницу тетради пополам вертикальной чертой, конспектирующий в левой части страницы самостоятельно формулирует вопросы или проблемы, затронутые в данном тексте, а в правой части дает ответы на них.

Одна из модификаций способа «вопросов – ответов» - таблица, где место вопроса занимает формулировка проблемы, поднятой автором (лектором), а место ответа – решение данной проблемы. Иногда в таблице могут появиться и дополнительные графы: например, «мое мнение» и т. п.

- **Схема с фрагментами** – способ конспектирования, позволяющий ярче выявить структуру текста, - при этом фрагменты текста (опорные слова, словосочетания, пояснения всякого рода) в сочетании с графикой помогают созданию рационально - лаконичного конспекта.

- **Простая схема** – способ конспектирования, близкий к схеме с фрагментами, объяснений к которой конспектирующий не пишет, но должен уметь давать их устно. Этот способ требует высокой квалификации конспектирующего. В противном случае такой конспект нельзя будет использовать.

- **Параллельный способ** конспектирования. Конспект оформляется на двух листах параллельно или один лист делится вертикальной чертой пополам и записи делаются в правой и в левой части листа.

**Однако** лучше использовать разные способы конспектирования для записи одного и того же материала.

**Комбинированный конспект** – вершина овладения рациональным конспектированием. При этом умело используются все перечисленные способы, сочетая их в одном конспекте (один из видов конспекта свободно перетекает в другой в зависимости от конспектируемого текста, от желания и умения конспектирующего). Именно при комбинированном конспекте более всего проявляется уровень подготовки и индивидуальность студента.

### **Принципы составления конспекта прочитанного.**

1. Записать все выходные данные источника: автор, название, год и место издания. Если текст взят из периодического издания (газеты или журнала), то записать его название, год, месяц, номер, число, место издания.

2. Выделить поля слева или справа, можно с обеих сторон. Слева на полях отмечаются страницы оригинала, структурные разделы статьи или книги (названия параграфов, подзаголовки и т. п.), формулируются основные проблемы. Справа – способы фиксации прочитанной информации.

Один из видов чтения – углубленное – предполагает глубокое усвоение прочитанного и часто сохранение информации в целях последующего обращения к ней. Эффективность такого чтения повышается, если прочитанное зафиксировано не только в памяти, но и на бумаге. Психологи утверждают, что записанное лучше и полнее усваивается, прочнее откладывается в памяти. Установлено, что если прочитать 1000 слов и затем записать 50, подытоживающих прочитанное, то коэффициент усвоения будет выше, чем, если прочитать 10000 слов, не записав ни одного. Кроме того, при записи прочитанного формируется навык свертывания информации. И, наконец, чередование чтения и записывания уменьшает усталость, повышает работоспособность и производительность умственного труда.

#### **1. Резюмирование.**

**Резюме** – краткий итог прочитанного, содержащий его оценку. Резюме характеризует основные выводы книги, главные итоги.

Выбор языковых средств для построения резюме-выводов подчинен основной задаче свертывания информации: минимум языковых средств – максимум информации.

Это обычно одно – три четких, кратких, выразительных предложения, раскрывающих, по мнению автора, самую суть описываемого объекта.

## **2. Аннотация.**

*Аннотация* – краткая обобщенная характеристика печатной работы (книги, статьи), включающая иногда и его оценку. Это наикратчайшее изложение содержания первичного документа, дающее общее представление о теме.

Основное ее назначение – дать некоторое представление о книге (статье, научной работе) с тем, чтобы рекомендовать ее определенному кругу читателей или воспользоваться своими записями при выполнении работы исследовательского, реферативного характера. Поэтому аннотации не требуются изложения содержания произведения, в ней лишь перечисляются вопросы, которые освещены в первоисточнике (содержание этих вопросов не раскрывается). Аннотация отвечает на вопрос: «О чем говорится в первичном тексте?», дает представление только о главной теме и перечне вопросов, затрагиваемых в тексте первоисточника.

Текст аннотации не стандартизирован. В научной литературе можно встретить различные требования к составлению аннотаций. Например, текст справочной аннотации может включать следующие сведения:

- тип и название аннотируемого документа (монография, диссертация, сборник, статья и т. п.)
- задачи, поставленные автором аннотируемого документа
- метод, которым пользовался автор (эксперимент, сравнительный анализ, компиляция других источников)
- принадлежность автора к определенной научной школе или направлению
- структуру аннотируемого документа
- предмет и тему произведения, основные положения и выводы автора
- характеристику вспомогательных иллюстративных материалов, дополнений, приложений, справочного аппарата, включая указатели и библиографию.

## **Примерные задания для конспектирования:**

- Тема 1. N-солитонные решения нелинейных эволюционных уравнений
- Тема 2. Наблюдения Джона Скотта Рассела за уединенной волной.
- Тема 3. Формальный вывод уравнений Марченко
- Тема 4. Обобщенная задача Захарова — Шабата на собственные значения
- Тема 5. Метод отыскания L-A пар по Захарову - Шабату
- Тема 6. Применение нелинейного уравнения Шредингера
- Тема 7. Опрокидывающиеся солитоны.

## **3.4 Методические указания по подготовке к экзамену**

Контроль и оценка знаний студентов является неотъемлемой составной частью учебно-воспитательного процесса в вузе. Экзаменационная сессия – самая ответственная пора в студенческой жизни: она является итогом большой работы студентов в семестре. Экзамен – это метод проверки знаний студентов по части или полному курсу учебной дисциплины, произведенный путем постановки устных или письменных вопросов. Он дает объективную официально фиксируемую оценку успехов студентов за определенный отрезок времени.

Экзамен преследует многогранную цель: во-первых, это – проверка знаний студента, во-вторых, они сами по себе являются важным звеном в овладении наукой, в-третьих, это продолжение учебного процесса; наконец, он имеет большое значение как фактор стимулирования глубокого изучения предмета.

Подготовка к экзамену состоит из двух взаимосвязанных этапов. Первый – систематический труд на протяжении семестра, учебного года, охватывающий все формы учебного процесса: лекции, изучение и конспектирование рекомендованной литературы, активное участие в семинарских (практических) и лабораторных занятиях.

Второй – подготовка непосредственно перед экзаменом. Она позволяет студентам за сравнительно короткий отрезок времени охватить всю перспективу изученного и лучше понять основные закономерности и явления.

Ограниченность времени (3-4 дня) для непосредственной подготовки к экзамену по предмету требует от студентов спокойно, без нервной суеты и спешки еще раз внимательно продумать изученный в течение семестра материал, тщательно отработать вопросы, недостаточно изученные или плохо понятые, с тем, чтобы по возможности устранить все пробелы в своих знаниях.

Готовиться надо по строго продуманному графику, последовательно переходя от темы к теме, не пропуская ни одну из них.

Сложные вопросы, недостаточно уясненные в процессе подготовки к экзамену, необходимо записать и получить на них разъяснения у преподавателей во время предэкзаменационных консультаций.

Следует заметить, что студенты, которые не ходят на консультации из-за отсутствия, по их мнению, сложных вопросов, поступают опрометчиво. На консультациях очень часто лектор не только отвечает на заданные вопросы, но и по собственной инициативе разъясняет наиболее трудные разделы курса.

Итак, основной задачей подготовки студентов к экзамену является систематизация знаний учебного материала, его творческое осмысливание. Важнейшим учебным пособием на этом этапе работы студента является собственный конспект прослушанных лекций и самостоятельно проработанных тем курса.

В соответствии с положением об экзаменах их, как правило, принимают преподаватели, читающие курс лекций.

Получив билет, студент должен хорошо продумать содержание поставленных вопросов. Значительное число неудачных ответов объясняется неясным пониманием поставленной проблемы. Правильное понимание вопроса обеспечит успех при ответе на него. При подготовке к ответу на билет нужно составить развернутый план по каждому вопросу.

Отвечая на вопросы экзаменационного билета, не следует спешить. Надо излагать материал спокойно, не торопясь, владеть собой, следить за построением фраз. Следует избегать подходов издалека, общих рассуждений. Рекомендуется строить ответы четко, последовательно, конкретно, по возможности исчерпывающе. Вместе с тем весьма желательно быстро и правильно иллюстрировать свой ответ примерами.

От экзаменуемого требуется: определение понятий, обоснование выдвинутых положений, свободное оперирование фактическим материалом, дать альтернативные подходы по отдельным проблемам. Логичность, стройность, литературная грамотность изложения являются неотъемлемыми чертами полноценного ответа. Нельзя при ответе допускать ни излишней краткости, переходящей в схематизм, ни многословия. И то, и другое не оправдано. Краткость не дает преподавателю возможности понять, владеет ли студент учебным материалом, а многословие может показать, что студент не умеет акцентировать внимание на главном и говорит слишком расплывчато.

## Литература

### Перечень основной литературы:

1. Богоявленский, О. И. Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. - М. : Наука, 2009. - 320с экземпляров 10
2. Филиппов, А. Т. Многоликий солитон. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Наука, 2010. - 287с. экземпляров 1
3. Новокшенов, В. Ю.   
   
   
 Введение в теорию солитонов Электронный ресурс / В. Ю. Новокшенов. - Введение в теорию солитонов, 2019-10-01. - Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2002. - 96 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 5-93972-100-1, экземпляров неограниченно

### Перечень дополнительной литературы:

1. Губанков, В. Н. Солитоны. - М. : Знание, 2003. - 64 с. - (Новое в жизни, науке, технике. "Физика", № 12) экземпляров 10
2. Киселева, Н. В. Нелинейные дифференциальные уравнения высших порядков Электронный ресурс / Киселева Н. В. : учебно-методическое пособие. - Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2019. - 32 с. - Рекомендовано методической комиссией Института информационных технологий математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и 09.03.03 «Прикладная информатика» экземпляров неограниченно
3. Кудряшов, Н. А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений Электронный ресурс / Н. А. Кудряшов. - Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений, 2019-10-01. - Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2004. - 360 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 5-93972-285-7, экземпляров неограниченно

## Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики / отв. ред. А.А. Самарский, С.П. Курдюмов, В.И. Мажукин ; Ин-т приклад. математики им. М.В. Келдыша. - М. : Наука, 2007. - 280 с. - Библиогр.: с. 278, экземпляров 10
2. Редькина, Т. В. (СКФУ). Комплексификация иерархии уравнения Кртевега-де Вриза : монография / Т. В. Редькина ; Сев.-Кав. федер. ун-т. - Ставрополь : СКФУ, 2015. - 167 с. - ISBN 978-5-9296-0736-3
3. Редькина, Т. В. Комплексификация иерархии уравнения Кортвега - де Вриза : монография / Т.В. Редькина ; Министерство образования и науки Российской Федерации ; Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Северо-Кавказский федеральный университет». - Ставрополь : СКФУ, 2015. - 167 с.  
<http://biblioclub.ru/>. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-9296-0736-3

## Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

<http://www.allmath.ru> Вся высшая математика

<http://www.exponenta.ru> Образовательный математический сайт

www.biblioclub.ru - Электронная библиотечная система «Университетская библиотека онлайн»

