

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению практических занятий

по дисциплине «Математика»

для специальности 21.05.03 Технология геологической разведки

Ставрополь
2026

Содержание:

1 семестр	3
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1	3
Элементы линейной алгебры.....	3
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2	5
Основы математического анализа.....	5
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3	8
Первообразная функция, неопределенный интеграл и его свойства	8
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4	10
Основные методы интегрирования	10
2 семестр	13
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1	13
Числовые ряды	13
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2	15
Знакопостоянные и знакопеременные ряды	15
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3	19
Степенные ряды	19
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4	24
Функции нескольких переменных.....	24
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5	26
Предел и непрерывность функции нескольких переменных.....	26
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6	27
Дифференцирование функции нескольких переменных	27

1 семестр
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1

Элементы линейной алгебры

Цель: изучить действия над матрицами и рассмотреть вычисление определителей.

Знать: основные понятия матричной алгебры

Уметь: выполнять основные операции над матрицами и вычислять определители

Владеть: навыками работы с матрицами и определителями

Теоретическая часть

Прямоугольной матрицей порядка $m \times n$ называется таблица из mn чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

с m строками и n столбцами. Сокращенно обозначают $A = (a_{ij})_{mn}$.

Числа a_{ij} называются **элементами матрицы A** ; i, j – индексы элемента, определяющие положение элемента в таблице: i – номер строки, j – номер столбца, на пересечении которых находится. Если $m = n$, то матрица называется **квадратной**, а число n называют **порядком матрицы**.

На множестве матриц определены следующие операции.

Сложение. Суммой двух матриц $A = (a_{ij})_{mn}$ и $B = (b_{ij})_{mn}$ одного порядка называется матрица $C = (c_{ij})_{mn}$ того же порядка, $C = A + B$, элементы которой

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ Из определения следует, что $A + B = B + A$ (коммутативность сложения) и $A + (B + C) = (A + B) + C$ (ассоциативность операции сложения).

Умножение на число. Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{mn}$ на число λ называется матрица $C = (c_{ij})_{mn}$.

Отсюда следует, что общий множитель всех элементов матрицы можно вынести за знак матрицы: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ -6 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Операция умножения матрицы на число обладает свойствами:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)A &= \alpha A + \beta A \\ \alpha(A + B) &= \alpha A + \alpha B \end{aligned} \quad \text{где } \alpha, \beta \text{ — числа.}$$

Примеры решения задач

Пример 1. Найти сумму матриц A и B , если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение $A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 3-3 & 5+4 & 7+0 \\ 1+2 & 4+1 & 2+3 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$

Пример 2. Вычислить матрицу $2A + 5B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$2A + 5B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 11 \\ 9 & 12 & 17 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 11 \\ 9 & 12 & 17 \end{pmatrix}.$

Пример 3. Найти произведение AB матрицы-строки $A = (5 \ 7 \ -2)$ на

матрицы $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$

Решение

$$\begin{aligned} & (5 \ 7 \ -2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \\ & = (5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) \quad 5 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 \quad 5 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1)) = (21 \ 37 \ 21). \end{aligned}$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Даны две матрицы A и B . Найти: а) AB ; б) BA

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2. A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad 4. A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Вычислить $3A + 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

3. Вычислить:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$4. \text{ Вычислить произведение матриц } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2

Основы математического анализа

Цель: изучить производную функции.

Знать: понятие производной, правила дифференцирования и таблицу производных основных элементарных функций

Уметь: находить производные сложных и простых функций

Владеть: техникой дифференцирования

Теоретическая часть

Производные основных элементарных функций

$$1) C' = 0;$$

$$2) (x^m)' = mx^{m-1};$$

$$3) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$4) \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$5) (e^x)' = e^x;$$

$$6) (a^x)' = a^x \ln a;$$

$$7) (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$8) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$9) (\sin x)' = \cos x;$$

$$10) (\cos x)' = -\sin x;$$

$$11) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$12) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$13) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$14) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$15) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$16) (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Найти производные следующих функций:

$$\text{а) } y = \sin x \cdot \log_5 x; \quad \text{б) } y = \frac{2^x + 1}{\cos x - 1}.$$

Решение

$$\begin{aligned} \text{а) } (\sin x \cdot \log_{\sqrt{5}} x)' &= (\sin x)' \cdot \log_{\sqrt{5}} x + \sin x \cdot (\log_{\sqrt{5}} x)' = \\ &= \cos x \cdot \log_{\sqrt{5}} x + \sin x \cdot \frac{1}{x \ln \sqrt{5}} = \cos x \cdot \log_{\sqrt{5}} x + \frac{2 \sin x}{x \ln 5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \left(\frac{2^x + 1}{\cos x - 1} \right)' &= \frac{(2^x + 1)' \cdot (\cos x - 1) - (2^x + 1)(\cos x - 1)'}{(\cos x - 1)^2} = \\ &= \frac{2^x \ln 2 (\cos x - 1) + (2^x + 1) \cdot \sin x}{(\cos x - 1)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: а) } \cos x \cdot \log_{\sqrt{5}} x + \frac{2 \sin x}{x \ln 5}; \text{ б) } \frac{2^x \ln 2 (\cos x - 1) + (2^x + 1) \cdot \sin x}{(\cos x - 1)^2}.$$

Пример 2. Найти производные следующих функций:

$$\text{а) } y = e^{-2x}; \text{ б) } y = \ln \cos x.$$

Решение

$$\text{а) } (e^{-2x})' = |-2x = t| = (e^t)'_t \cdot t'_x = e^t \cdot (-2x)' = -2e^t = -2e^{-2x}.$$

$$\text{б) } (\ln \cos x)' = |\cos x = t| = (\ln t)'_t \cdot t'_x = \frac{1}{t} \cdot (\cos x)' = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\operatorname{tg} x.$$

$$\text{Ответ: а) } -2e^{-2x}; \text{ б) } -\operatorname{tg} x.$$

Пример 3. Найти производные следующих функций:

$$\text{а) } y = x^x; \quad \text{б) } y = (\sin x)^{\cos x}.$$

Решение

$$\text{а) } x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \cdot \ln x}, \text{ ПОЭТОМУ}$$

$$(x^x)' = (e^{x \cdot \ln x})' = e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \ln x)' = x^x \cdot (x' \ln x + x \cdot (\ln x)') = x^x (\ln x + 1).$$

б) Воспользуемся логарифмической производной функции:

$$\begin{aligned} \left(\ln (\sin x)^{\cos x} \right)' &= (\cos x \cdot \ln \sin x)' = (\cos x)' \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot (\ln \sin x)' = \\ &= -\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = -\sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \left((\sin x)^{\cos x} \right)' = (\sin x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right).$$

$$\text{Ответ: а) } x^x (\ln x + 1); \text{ б) } \left(-\sin x \cdot \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) \cdot (\sin x)^{\cos x}.$$

Пример 4. Найти производные и дифференциалы второго порядка следующих функций: а) $y = e^{\sin x}$; б) $y = x^3 \cdot \ln x$.

Решение

$$a) y = e^{\sin x}; \quad y' = (e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = e^{\sin x} \cdot \cos x;$$

$$dy = e^{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx;$$

$$y'' = (y')' = (e^{\sin x} \cdot \cos x)' = (e^{\sin x})' \cdot \cos x + e^{\sin x} \cdot (\cos x)' = \\ = (e^{\sin x})' \cdot (\sin x)' \cdot \cos x + e^{\sin x} \cdot (-\sin x) = e^{\sin x} \cdot (\cos^2 x - \sin x); \\ d^2 y = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x) dx^2.$$

$$б) y = x^3 \cdot \ln x; \quad y' = (x^3 \cdot \ln x)' = 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = x^2 (3 \ln x + 1);$$

$$dy = x^2 (3 \ln x + 1) dx;$$

$$y'' = (y')' = 2x \cdot (3 \ln x + 1) + x^2 \cdot \frac{3}{x} = x(6 \cdot \ln x + 5);$$

$$d^2 y = x(6 \ln x + 5) dx^2.$$

$$\text{Ответ: а) } e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x); \quad e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x) dx^2;$$

$$б) x(6 \cdot \ln x + 5); \quad x(6 \cdot \ln x + 5) dx^2.$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Пользуясь определением, найти производные функций:

$$a) y = 6x^3 + 4x - 1;$$

$$б) y = \sqrt{x}.$$

2. Найти производные функций:

$$a) y = x^7 - 2x^5 + 5 - \frac{8}{x^3} + \frac{5}{6} x \sqrt[5]{x}; \quad б) y = \frac{x \ln x}{1+x}; \quad в) y = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^4;$$

$$г) y = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{1-3x}{1+3x} \right)^2}; \quad д) y = \frac{\operatorname{arccotg} x}{\sqrt{1+x^2}}; \quad е) y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

3. Найти производные функций и вычислить их значения при $x = x_0$:

$$a) y = \sin x \cdot e^{\cos x}, x_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$б) y = \ln \sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}}, x_0 = 0.$$

4. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{4t+3}{t+4}$, где s измеряется в метрах, а t - в секундах. Найти его скорость и ускорение в момент $t = 6$.

5. Найти производные следующих функций

$$A) y = 5x^2 - \frac{1}{x} - 3\sqrt{x}; \quad Б) y = 3x^2 \cdot \cos x - \frac{4 \sin x}{\sqrt{x}} \quad B) y = \frac{\log_2 x - 1}{\log_5 x + 1}$$

$$Г) y = \operatorname{arctg} x \cdot \arcsin x. \quad Д) y = \frac{5^x - \operatorname{tg} x}{5^x + \operatorname{ctg} x}.$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

Первообразная функция, неопределенный интеграл и его свойства

Цель: изучить понятие первообразной функции и неопределенного интеграла

Знать: основные правила интегрирования

Уметь: интегрировать с помощью формул и простейших приемов

Владеть: навыками интегрирования

Теоретическая часть

Функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$; 2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$; 3. $\int dF(x) = F(x) + C$;
4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx$; где u, v, w – некоторые функции от x .
5. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int \operatorname{tg} x dx$	$-\ln \cos x + C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int \operatorname{ctg} x dx$	$\ln \sin x + C$	10	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\operatorname{ctg} x + C$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln x + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$

Примеры решения задач

Пример 1. Проверьте справедливость формулы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C (a \neq 0).$$

Решение. Справедливость формулы проверим дифференцированием. Убедимся в том, что производная от правой части формулы равна подынтегральной функции. В самом деле,

$$\left(\ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C \right)' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + a})'}{x + \sqrt{x^2 + a}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a}}}{x + \sqrt{x^2 + a}} = \frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}(x + \sqrt{x^2 + a})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

Таким образом, справедливость формулы доказана.

Пример 2. Вычислите неопределенные интегралы

$$1) \int \frac{5x^2 - 6x + 1}{\sqrt{x}} dx.$$

Решение. Разлагаем подынтегральную функцию на слагаемые, деля числитель почленно на знаменатель. Затем интегрируем каждое слагаемое отдельно, вынося постоянные множители за знаки интегралов:

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2 - 6x + 1}{\sqrt{x}} dx &= 5 \int x^{\frac{3}{2}} dx - 6 \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{5x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{6x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \\ &= 2x^{\frac{5}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2x^2 \sqrt{x} - 4x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

$$2) \int \frac{dx}{x+2}.$$

Решение. Так как $d(x+2) = (x+2)' dx$, то преобразуя дифференциал и применяя теорему об инвариантности формул интегрирования, получим

$$\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{d(x+2)}{x+2} = \ln|x+2| + C.$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Найдите первообразные следующих функций и результаты проверьте дифференцированием: а) $\frac{1}{\sin^2 x}$; б) $x^2 - 2x + 2$.

2. Вычислите методом непосредственного интегрирования:

$$\text{а) } \int (x^5 + 4x^2 - 3x + 1) dx; \text{ б) } \int (1-2x)(1-x)(1-3x) dx; \text{ в) } \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{2x^2 + x - 1}{x^3} dx; \text{ д) } \int \operatorname{ctg}^2 x dx; \text{ е) } \int (1 + \sin x + \cos x) dx.$$

3. Преобразуя дифференциал, сведите интегралы к табличным и вычислите их:

$$\text{а) } \int \sqrt[3]{1-3x} dx; \text{ б) } \int \frac{dx}{5-2x}; \text{ в) } \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx; \text{ г) } \int \frac{dx}{\cos^2 12x}.$$

4. Даны пары функций. Из каждой пары выпишите ту функцию, которая

является первообразной для другой, и обозначьте ее через $F(x)$:

- а) $\cos 3x$ и $-3 \sin 3x$; б) $3x^2 + 5$ и $x^3 + 5x$; в) $\frac{5}{\cos^2 5x}$ и $\operatorname{tg} 5x$;
г) $2e^{2x}$ и e^{2x} ; д) 7^x и $7^x \ln 7$; е) $-\frac{2}{\sin^2 2x}$ и $\operatorname{ctg} 2x$.

5. Найдите первообразные следующих функций и результаты проверьте дифференцированием:

- а) $\frac{2}{x}$; б) $\sqrt{x}$; в) $\sin x + 2 \cos x$; г) $e^x + 3x$.

6. Проверьте справедливость формул интегрирования:

- а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$; б) $\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 + 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})) + C$.

7. Вычислите методом непосредственного интегрирования:

- а) $\int (3 - x^2)^3 dx$; б) $\int (x + \sqrt{x}) dx$; в) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$;

- г) $\int \frac{x^2 + 3x - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$; д) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$; е) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

8. Преобразуя дифференциал, сведите интегралы к табличным и вычислите их:

- а) $\int (2x - 3)^{10} dx$; б) $\int \frac{dx}{1 - x}$; в) $\int \frac{dx}{3x - 7}$; г) $\int 2e^{-3x} dx$; д) $\int (\sin 5x - \cos 7x) dx$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

Основные методы интегрирования

Цель: изучить основные методы интегрирования

Знать: основные правила интегрирования

Уметь: интегрировать путем выполнения замены переменной и методом интегрирования по частям

Владеть: техникой интегрирования

Теоретическая часть

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x) dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t) dt$ получается:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Интегрирование по частям

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$(uv)' = u'v + v'u$, где u и v – некоторые функции от x .

В дифференциальной форме: $d(uv) = u dv + v du$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int u dv + \int v du \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Примеры решения задач

Пример 1. $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$
 $= \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \cos x dx; \\ du = dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$

Пример 2. $\int e^{2x} \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx =$
 $= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \sin x dx; \quad v = -\cos x; \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - 2 \left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx \right] = e^{2x} \sin x +$
 $+ 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} dx$

Пример 3. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.
 Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$.

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

Пример 4. $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$.

Замена $t = x^2 + 1$; $dt = 2x dx$; $dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C;$$

Пример 5. Найти решение

$$\int (2x + 1)^{20} dx = \{2x + 1 = t; \quad dt = 2dx;\} = \int t^{20} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{21} t^{21} \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x + 1)^{21}}{42} + C$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Методом замены переменной вычислите интегралы:

а) $\int \cos^5 4x \cdot \sin 4x dx$; б) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - 1}}$.

2. Вычислите интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int (1 - 3x)e^{2x} dx$; б) $\int (x^2 - 1) \sin 3x dx$; в) $\int x \arctg 3x dx$;

г) $\int e^x \cos x dx$; д) $\int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} dx$.

3. Вычислите интегралы:

а) $\int e^{x+x^2} (1+2x) dx$; б) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$; в) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

4. Разбейте предложенные ниже интегралы на классы

А) – интегралы, вычисляемые непосредственно;

Б) – интегралы, вычисляемые с помощью замены переменных;

В) – интегралы, берущиеся по частям

$\int (3-x^2)^3 dx$; $\int \frac{e^{x/2} dx}{\sqrt{16-e^x}}$; $\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx$; $\int (2^x + 3^x)^2 dx$; $\int \frac{x dx}{(5+9x^2)^3}$; $\int e^{2x} (1-x) dx$;

$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$; $\int e^{5+9x^2} x dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$; $\int (1-3x) \cos 5x dx$; $\int (2x^3 - 1) e^{-x} dx$;

$\int e^{-3x} \cos 4x dx$; $\int \frac{dx}{x^2 - 36}$; $\int x^2 \arccos 2x dx$; $\int (2x-3)^{10} dx$; $\int 2^{3x} \sin 5x dx$;

$\int \sin^4 3x \cos 3x dx$; $\int (2x^3 - 1) \ln(x-1) dx$.

5. Вычислите интегралы, вычисляемые непосредственно, из предложенных в предыдущем задании.

6. В классе Б) укажите интегралы, сводящиеся к интегралам вида

а) $\int t^\alpha dt$; б) $\int \sin t dt$.

7. Для интегралов класса В) определите

а) какую функцию необходимо выбирать в качестве u ;

б) сколько раз необходимо брать интеграл по частям;

в) вычислите по одному интегралу из каждого из трех классов берущихся по частям.

2 семестр

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Числовые ряды

Цель: Формирование умений исследовать числовые ряды на сходимость

Знать: основные понятия теории числовых рядов

Уметь: исследовать вопрос сходимости числового ряда

Владеть: навыками работы с числовыми рядами

Теоретическая часть

Определение. Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называется **числовым рядом**.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

При этом числа $u_1, u_2, \dots$ будем называть членами ряда, а u_n – общим членом ряда.

Определение. Суммы $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k$, $n = 1, 2, \dots$ называются **частными (частичными) суммами** ряда.

Таким образом, возможно рассматривать последовательности частных сумм ряда $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$

Определение. Ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частных сумм. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частных сумм.

$$\lim S_n = S, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Определение. Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

Примеры решения задач

Пример 1. Исследуйте ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5} \left(\frac{1}{3} \right)^n$.

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию и поэтому является сходящимся. Согласно свойств число-

вых рядов данный ряд будет также сходящимся, так как если сходится ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C u_n$, где C - некоторое число.

Пример 2. Определите сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+3n}{1+3n} \right)^{2n-1}$.

Решение. Проверим необходимое условие сходимости числового ряда. Найдем предел n -го члена ряда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+3n}{1+3n} \right)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1+3n} \right)^{2n-1} = \left| \begin{array}{l} 1+3n = t \\ n = \frac{t-1}{3} \\ \text{при } n \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty \end{array} \right| = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1+t} \right)^{\frac{2}{3}(t-1)-1} = e^{\frac{2}{3}} \neq 0, \end{aligned}$$

следовательно, данный ряд расходится.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Найдите пятый член ряда $a_n = \frac{1}{2^n(n+1)}$.
2. Найдите первые четыре члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$.
3. Определите разность между 4-м и 2-м членами ряда, общий член которого имеет вид $a_n = \frac{1}{n!}$.
4. Определите вид общего члена ряда $1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$
5. Проверьте, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда
 - а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1}$;
 - б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$;
 - в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+3}{n^2+1}$.
6. Найти формулу общего члена ряда:
 - а) $1 + \frac{4}{2} + \frac{9}{6} + \frac{16}{24} + \frac{25}{120} + \dots$;
 - б) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$
7. Выяснить вопрос о сходимости и найти суммы рядов:
 - а) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$;
 - б) $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$;
 - в) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) + \dots$
8. Проверить, выполняется ли необходимое условие сходимости для рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

9. Показать, что ряд $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{n+10} \dots$ расходится.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Знакопостоянные и знакопеременные ряды

Цель: изучить сходимость знакопостоянных и знакопеременных рядов.

Знать: признаки сходимости знакопостоянных и знакопеременных рядов

Уметь: применять признаки сходимости знакопостоянных и знакопеременных рядов

Владеть: навыками исследования знакопостоянных и знакопеременных рядов на сходимость

Теоретическая часть

Для того, чтобы последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N , что при $n > N$ и любом $p > 0$, где p – целое число, выполнялось бы неравенство:
 $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$

Теорема. Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S и σ , то ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ тоже сходится и его сумма равна $S \pm \sigma$.

$$\sum (u_n + v_n) = \sum u_n + \sum v_n = S + \sigma$$

Разность двух сходящихся рядов также будет сходящимся рядом.

Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.

О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

Примеры решения задач

Пример 1. Примените признак сравнения для исследования сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \text{ если } p < 1.$$

Решение. Так как $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$ для любых $n > 1$ и гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то, по первому признаку сравнения числовых рядов, данный ряд является расходящимся.

Пример 2. Примените признак сравнения для исследования сходимости рядов

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 5}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 5}.$$

Решение. а) Так как $\frac{1}{3^n + 5} < \frac{1}{3^n}$ для любого n и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ сходящийся, как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, то данный ряд сходится по первому признаку сравнения числовых рядов.

б) Сравним данный ряд вновь с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$. В отличие от предыдущего примера $\frac{1}{3^n - 5} > \frac{1}{3^n}$ для всех n , поэтому первый признак сравнения ответа не даст.

Воспользуемся вторым признаком сравнения числовых рядов. Для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ находим $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$. Если этот предел есть конечное число, отличное от нуля, то ряды сходятся и расходятся одновременно.

$$\text{Находим } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3^n - 5}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^n - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3^n)'}{(3^n - 5)'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot \ln 3}{3^n \cdot \ln 3} = 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Пример 3. Примените признак Даламбера для исследования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^{n-1}}$.

Решение. Выпишем n -й член ряда $u_n = \frac{n}{5^{n-1}}$, тогда $u_{n+1} = \frac{n+1}{5^n}$. Воспользуемся признаком Даламбера.

Вычисляем $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 5^{n-1}}{5^n \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5}$. Так как $D < 1$, то данный ряд сходится.

Пример 4. Исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} \cdot 5^n$ на сходимость.

Решение. Воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} \cdot 5^n} = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = 5 \cdot e^{-2} = \frac{5}{e^2} < 1. \quad \text{Так как } K < 1, \text{ то ряд сходится.}$$

Пример 5. Проверьте, сходится ли ряд $\frac{1}{101} + \frac{2}{104} + \frac{3}{109} + \frac{4}{116} + \dots$?

Решение. Запишем общий член ряда $a_n = \frac{n}{100 + n^2}$. Введем в рассмотрение

функцию $f(n) = \frac{n}{100 + n^2}$. Эта функция непрерывная и невозрастающая при

$n > 10$, так как $f'(n) = \frac{100 + n^2 - 2n^2}{(100 + n^2)^2} = \frac{100 - n^2}{(100 + n^2)^2} = -\frac{(n-10)(n+10)}{(100 + n^2)^2} < 0$ при

$n > 10$. Воспользуемся интегральным признаком Коши:

$$\begin{aligned} \int_{10}^{+\infty} \frac{n}{100 + n^2} dn &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{10}^A \frac{n}{100 + n^2} dn = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_{10}^A \frac{d(100 + n^2)}{100 + n^2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln(100 + n^2) \Big|_{10}^A = \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln(100 + A^2) - \ln 200) = \infty, \text{ следовательно дан-} \\ &\text{ный ряд расходится.} \end{aligned}$$

Пример 6. Найдите сумму ряда $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{4}{n^2 - 12n + 35}$.

Решение. Разложим дробь $\frac{4}{n^2 - 12n + 35}$ на элементарные с помощью метода неопределенных коэффициентов:

$$\begin{aligned} \frac{4}{n^2 - 12n + 35} &= \frac{4}{(n-5)(n-7)} = \frac{A}{n-5} + \frac{B}{n-7} = \frac{An - 7A + Bn - 5B}{(n-5)(n-7)} = \\ &= \frac{(A+B)n - 7A - 5B}{(n-5)(n-7)}, \text{ отсюда } \begin{cases} A+B=0 \\ -7A-5B=4 \end{cases}, \begin{cases} A=-B \\ 7B-5B=4 \end{cases}, \begin{cases} A=-2 \\ B=2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=8}^{\infty} \frac{4}{n^2 - 12n + 35} &= 2 \sum_{n=8}^{\infty} \left(\frac{1}{n-7} - \frac{1}{n-5} \right) = \\ &= 2 \left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-7} - \frac{1}{n-5}\right) + \dots \right) = 2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3. \end{aligned}$$

Пример 7. Проверьте сходимость ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$.

Решение. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ сходится, так как удовлетворяет условиям признака Лейбница:

$$1) 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Данный ряд сходится условно, так как ряд, составленный из его абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - гармонический ряд, расходится.

Пример 8. Исследуйте сходимость ряда $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$.

Решение. Ряд $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$ является знакопеременным.

Этот ряд является абсолютно сходящимся, так как сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:
 $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ (в этом легко убедиться с помощью интегрального признака Коши).

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Исследуйте ряд на сходимость с помощью первого признака сравнения

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{7^n + 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.

2. Исследуйте ряд на сходимость с помощью второго признака сравнения

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{7^n - 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

3. Исследовать с помощью признака Даламбера исследовать, сходятся или расходятся ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3 + 1)}{(n+1)!}$.

4. Запишите шестой член ряда, общий член которого имеет вид $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

5. Исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$ по радикальному признаку Коши.

6. С помощью интегрального признака исследуйте, сходятся или расходятся ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$.

7. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

а) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \dots;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt[3]{n}}{n+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3

Степенные ряды

Цель: Сформировать умения и навыки разложения функций в степенной ряд и находить область сходимости степенного ряда.

Знать: основные понятия степенных рядов

Уметь: раскладывать функции в степенной ряд и находить область сходимости степенного ряда

Владеть: навыками разложения функций в степенной ряд и нахождения области сходимости степенного ряда

Теоретическая часть

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \quad (1)$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ – постоянные действительные числа, называемые **коэффициентами** степенного ряда.

Теорема Абеля

1. Если степенной ряд (1) сходится при некотором $x = x_0 \neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно, при всех x , удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$.
2. Если степенной ряд (1) расходится при некотором $x = x_1$, то он расходится при всех x , удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$.

Область сходимости степенного ряда

Для степенного ряда (1) возможны только три случая сходимости:

- 1) ряд (1) сходится только в одной точке $x = 0$;
- 2) ряд (1) сходится абсолютно на всей числовой прямой, т.е. при $x \in (-\infty; \infty)$;
- 3) существует число $R > 0$ такое, что при $|x| < R$ ряд (1) сходится абсолютно и при $|x| > R$ ряд (1) расходится.

Интервал $(-R; R)$ называется **интервалом сходимости** степенного ряда (1), а число R – **радиусом сходимости** степенного ряда (1).

Разложение некоторых элементарных функций в степенные ряды

Приведем таблицу, содержащую разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций.

$$1. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

$$2. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

$$3. \boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}, x \in (-\infty; \infty).$$

$$4. \boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}}, x \in (-1; 1].$$

$$5. \boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots}, \quad 6)$$

$$\text{где } x \in \begin{cases} [-1; 1], & \alpha \geq 0 \\ (-1; 1], & -1 < \alpha < 0 \\ (-1; 1), & \alpha \leq -1 \end{cases}$$

Ряд (6) называется **биномиальным**. Если $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то все члены ряда (6) с $(n+1)$ -го номера равны 0, так как содержат множитель $\alpha - n = n - n = 0$. В этом случае ряд (6) представляет собой формулу **бинома Ньютона**:

$$\boxed{(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{n!}x^n}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

Решение. Это степенной ряд, все коэффициенты его, за исключением a_0 , отличны от нуля. Найдём радиус и интервал сходимости данного ряда. Здесь $a_n = \frac{1}{n}$ и $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Поэтому

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Следовательно, радиус сходимости $R=1$ и ряд сходится на интервале $(-1, 1)$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости, т.е. в точках $x = \pm 1$. При $x=1$ получаем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, а при $x=-1$ - ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, который сходится в силу признака Лейбница. Таким образом, данный ряд сходится в любой точке полуинтервала $[-1, 1)$ и расходится вне его.

Пример 2. Определить область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+4}{5n+7} \right)^n (x-1)^n.$$

Решение. Воспользуемся формулой Коши – Адамара:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{2n+4}{5n+7} \right)^n \right|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{5n+7}} = \frac{5}{2}. \quad \text{Тогда интервал сходимости}$$

$\left(-\frac{5}{2} + 1; \frac{5}{2} + 1 \right)$, то есть $\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2} \right)$. В точках $-\frac{3}{2}$ и $\frac{7}{2}$ исследуем отдельно.

При $x = -\frac{3}{2}$ имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+4}{5n+7} \right)^n \left(-\frac{5}{2} \right)^n$.

При $x = \frac{7}{2}$ имеем знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+4}{5n+7} \right)^n \left(\frac{5}{2} \right)^n$.

Применим необходимый признак сходимости рядов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n+4}{5n+7} \cdot \frac{5}{2} \right|^n \geq 1 \neq 0,$$

так как $\frac{2n+4}{5n+7} > \frac{2}{5}$, $\left(\frac{10n+20-10n-14}{(5n+7)5} = \frac{6}{5(5n+7)} > 0 \right)$, следовательно при $x = -\frac{3}{2}$ и $x = \frac{7}{2}$ ряд расходится. Таким образом, $\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2} \right)$ - интервал сходимости данного ряда.

Пример 3. Определите интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+4}{5n+7} \right)^n (x-1)^n$.

Решение. Для нахождения интервала сходимости ряда воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+4}{5n+7} \right)^n (x-1)^n} = |x-1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{5n+7} = \frac{2}{5} |x-1| < 1,$$

отсюда $|x-1| < \frac{5}{2}$, $-\frac{5}{2} < x-1 < \frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2} < x < \frac{7}{2}$ - интервал сходимости данного ряда.

Пример 4. Определите интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1} \sqrt{n}}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Выпишем n -й и $(n+1)$ -й

члены ряда: $u_n = \frac{(-x)^n}{3^{n-1} \sqrt{n}}$, $u_{n+1} = \frac{(-x)^{n+1}}{3^n \sqrt{n+1}}$. Тогда находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} 3^{n-1} \sqrt{n}}{3^n \sqrt{n+1} x^n} \right| = \frac{|x|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{|x|}{3} < 1, \quad -3 < x < 3 \quad - \text{ интервал}$$

сходимости ряда.

При $x = -3$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$ – ряд с положительными членами. Так как $\frac{3}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$ для любого натурального n ($\sqrt{n} < 3n$, $9n^2 - n > 0$, $n(9n-1) > 0$), следовательно, ряд расходится.

При $x = 3$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{\sqrt{n}}$ – ряд сходится, но условно.

Заметим, что так как среди коэффициентов данного ряда $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – нет равных нулю, то для нахождения радиуса сходимости можно было воспользоваться формулой $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)$. Тогда вычисляем

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \sqrt{n+1}}{3^{n+1} \sqrt{n}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно $(-3; 3)$ – интервал сходимости.

Пример 5. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x) = e^x$.

Решение. Если функция $f(x)$ на интервале $(-R, R)$ разлагается в степенной ряд $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$, то коэффициенты этого ряда определяются по формулам $a_0 = f(0), a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Подставляя выражения коэффициентов, получаем ряд

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots, \quad (*)$$

который называется *рядом Маклорена* для функции $f(x)$.

Имеем $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$, откуда при $x = 0$ получаем $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$. Подставляя полученные числа в формулу

$$(*), \text{ находим } e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Так как $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)}{n!} = \infty$, то ряд сходится на всей числовой прямой.

Пример 6. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x) = e^{-x^2}$.

Решение. Воспользуемся разложением функции e^x , полученным выше. Положим $t = -x^2$, тогда $e^{-x^2} = e^t$. Имеем $e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots$

При $t = -x^2$ находим искомое разложение

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \dots,$$

которое справедливо, очевидно, для всех значений x .

Пример 7. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x) = \cos^2 x$.

Решение. Имеем $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$. Используя формулу

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, |x| < +\infty;$$

запишем разложение функции $\cos 2x$, заменив там x на $2x$:

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \dots,$$

или

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \dots$$

Таким образом,

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \dots \right) \right].$$

Окончательно получаем

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \dots$$

Полученный ряд сходится при всех x .

Пример 8. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

Решение. Имеем $\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$. Воспользовавшись известным

$$\text{разложением } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots,$$

$$\text{можем записать } \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

Отсюда получаем

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \right).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, находим искомое разложение: $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots + \frac{2x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$

Очевидно, ряд сходится в интервале $(-1,1)$.

Пример 9. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Решение. Имеем $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$. Воспользовавшись разложением

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n + \dots, -1 < x \leq 1,$$

нетрудно получить разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1 \cdot x}{2 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^3}{2^3 \cdot 3!} + \dots + \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)x^n}{2^n \cdot n!} + \dots,$$

справедливое для интервала $(-1,1)$.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Найдите радиус и интервал сходимости ряда и исследуйте его сходимость на границах интервала:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$; г) $1 + \frac{2x}{\sqrt{5 \cdot 5}} + \frac{4x^2}{\sqrt{9 \cdot 5^2}} + \frac{8x^3}{\sqrt{13 \cdot 5^3}} + \dots$

2. Разложите в ряд Маклорена следующие функции и найдите интервалы сходимости полученных рядов

а) $f(x) = x^2 e^{-2x}$; б) $f(x) = \sin x^2$; в) $f(x) = \sqrt[3]{27+x}$; г) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 4

Функции нескольких переменных

Цель: изучение функций нескольких переменных.

Знать: основные понятия теории функции нескольких переменных

Уметь: находить область определения и линии уровня

Владеть: аппаратом анализа функций нескольких переменных

Теоретическая часть

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных. Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому-либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z , то переменная z называется функцией двух переменных.

$$z = f(x, y)$$

Если паре чисел (x, y) соответствует одно значение z , то функция называется однозначной, а если более одного, то – многозначной.

Областью определения функции z называется совокупность пар (x, y) , при которых функция z существует.

Примеры решения задач

Пример 1. Укажите область определения функции $z = 2x - y$.

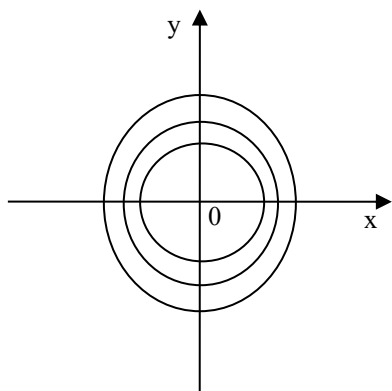
Решение. Аналитическое выражение $2x - y$ имеет смысл при любых значениях x и y . Следовательно, областью определения функций является вся плоскость Oxy .

Пример 2. Найдите область определения функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Решение. Для того чтобы z имело действительное значение, нужно, чтобы под корнем стояло неотрицательное число, т.е. x и y должны удовлетворять неравенству $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, или $x^2 + y^2 \leq 1$.

Все точки $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют указанному неравенству, лежат в круге радиуса 1 с центром в начале координат и на границе этого круга.

Пример 3. Найти линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.



Решение

$x^2 + y^2 = C$ ($C \geq 0$) – линиями уровня является семейство концентрических окружностей с центром в начале координат.

$z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения (его проекции на плоскость Oxy – окружности)

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Найти области определения данных функций:

а) $z = \frac{1}{x + y}$;

б) $z = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$;

в) $z = \sqrt{xy}$; г)

$z = \arcsin x + \arccos x$.

2. Найти уравнения и построить линии уровня следующих функций:

а) $z = xy$;

б) $z = \frac{x}{y}$;

в) $z = e^{xy}$;

г) $z = (1 + x + y)^2$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 5

Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Цель: научиться вычислять предел функций двух переменных.

Знать: предел и непрерывность функции двух переменных

Уметь: вычислять пределы функций двух переменных и исследовать их на непрерывность

Владеть: аппаратом анализа функций нескольких переменных

Теоретическая часть

Число A называется **пределом** функции $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для любой точки $M(x, y)$, для которых верно условие

$$MM_0 < r$$

также верно и условие $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции $f(x, y)$. Тогда функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (1)$$

причем точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие (1) не выполняется, то эта точка называется точкой разрыва функции $f(x, y)$. Это может быть в следующих случаях:

- 1) Функция $z = f(x, y)$ не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.
- 2) Не существует предел $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$.
- 3) Этот предел существует, но он не равен $f(x_0, y_0)$.

Примеры решения задач

Пример 1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (x^2 y + y^2 x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} x^2 y + \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} y^2 x = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 \cdot \lim_{y \rightarrow 2} y + \lim_{y \rightarrow 2} y^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} x = 2 + 2^2 = 6.$

Пример 2. Доказать, что функция $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ не имеет предела в точке $O(0,0)$.

Решение

Будем приближаться к точке $O(0,0)$ по прямой $y = kx$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x \cdot kx}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2(1 + k^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{1 + k^2}.$$

Пример 3. Исследовать на непрерывность функцию $z = \frac{2}{y-x}$.

Решение

$D(z): y - x \neq 0 \Rightarrow y = x$ – линия разрыва данной функции (биссектриса I-го и III-го координатных углов). В точках данной прямой функция терпит разрыв.

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Вычислить пределы, полагая, что независимые переменные произвольно стремятся к своим предельным значениям:

а) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x^2 + 4y}{2xy - 1}$; (Ответ: 3)

в) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$; (Ответ: - 1/4)

б) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(2xy)}{xy}$; (Ответ: 2)

г) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} (1 + xy^2)^{y/(x^2y + xy^2)}$. (Ответ: e^3)

2. Показать, что функция $z = \frac{x-y}{x+y}$ не имеет в точке $O(0,0)$ предела.

3. Используя определение непрерывности, показать, что функция $z = x^2y$ непрерывна в любой точке плоскости.

4. Найти точки разрыва следующих функций:

а) $z = \frac{\sin x \sin y}{xy}$; б) $z = \sin \frac{1}{x+y}$; в) $z = \cos \frac{1}{x^2 + y^2 - 4}$; г) $z = \frac{x}{|y|}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 6

Дифференцирование функции нескольких переменных

Цель: изучить определения частных производных и правила их нахождения.

Знать: определения частных производных и правила их нахождения

Уметь: уметь находить частные производные

Владеть: аппаратом анализа функций нескольких переменных

Теоретическая часть

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx , оставляя значение y неизменным. Тогда функция $z = f(x, y)$ изменится на величину $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, которая называется **частным приращением функции $z = f(x, y)$ по переменной x** .

Аналогично определяется **частное приращение функции $z = f(x, y)$ по переменной y** : $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ **по переменной x (по переменной y)** называется предел отношения соответствующего частного приращения функции $\Delta_x z$ ($\Delta_y z$) к приращению рассматриваемой независимой переменной Δx (Δy) при $\Delta x \rightarrow 0$ ($\Delta y \rightarrow 0$), если этот предел существует.

Существуют следующие обозначения частных производных функции $z = f(x, y)$:

$$\text{по } x: \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial x}; z'_x; f'_x(x, y). \quad \text{по } y: \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial y}; z'_y; f'_y(x, y).$$

По определению

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Пусть $z = f(x, y)$ - функция двух переменных x и y , каждая из которых является функцией одной независимой переменной t , т.е. $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда функция $z = f(x(t), y(t))$ является **сложной функцией** независимой переменной t , а x и y - промежуточные переменные.

Теорема. Если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы в точке t , а функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в соответствующей точке $M(x(t), y(t))$, то сложная функция $z = f(x(t), y(t))$ так же дифференцируема в точке t , причем ее производная вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (1).$$

Частный случай теоремы.

Пусть $z = f(x, y)$, где $y = y(x)$, т.е. $z = f(x, y(x))$ – сложная функция одной независимой переменной x . Тогда получим

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (2)$$

Формула (2) называется **формулой полной производной**.

Общий случай теоремы.

Пусть $z = f(x, y)$, где $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$. Тогда $z = f[x(u, v), y(u, v)]$ – сложная функция двух независимых переменных u и v . Частные производные данной функции $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$ находятся из формулы (1) следующим образом.

Зафиксировав v , заменяем в формуле (1) производные $\frac{dz}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ на соответствующие частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

Аналогично получаем формулу для $\frac{\partial z}{\partial v}$: $\boxed{\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}}$

Примеры решения задач

Пример 1. Найдите частные производные первого порядка для функции $f(x, y) = 3xy^2 + x^3y - 2x$.

Решение. Вычисляем частную производную функции по переменной x при этом считаем, что y - постоянная величина: $f'_x(x, y) = 3y^2 + 3x^2y - 2$.

Аналогично, считая, что x - постоянная вычисляем частную производную по переменной y : $f'_y(x, y) = 6yx + x^3$.

Пример 2. Вычислите частные производные второго порядка для функции $f(x, y) = 3xy^2 + x^3y - 2x$.

Решение. Воспользуемся найденными частными производными первого порядка $f'_x(x, y) = 3y^2 + 3x^2y - 2$ и $f'_y(x, y) = 6yx + x^3$, которые сами являются функциями двух переменных x и y . Далее дифференцируем каждую из частных производных первого порядка по каждой из двух переменных. В результате получаем четыре частные производные второго порядка:

$$f''_{x^2}(x, y) = (f'_x(x, y))'_x = (3y^2 + 3x^2y - 2)'_x = 6xy;$$

$$f''_{xy}(x, y) = (f'_x(x, y))'_y = (3y^2 + 3x^2y - 2)'_y = 6y + 3x^2;$$

$$f''_{yx}(x, y) = (f'_y(x, y))'_x = (6yx + x^3)'_x = 6y + 3x^2;$$

$$f''_{y^2}(x, y) = (f'_y(x, y))'_y = (6yx + x^3)'_y = 6x.$$

Заметим, что смешанные частные производные равны, т.е. $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Пример 3. Для сложной функции $z = \ln(u^2 + v)$, $u = e^{x+y^2}$, $v = x^2 + y$ вычислите частные производные первого порядка.

Решение. Для нахождения частных производных для сложной формулы воспользуемся формулами $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$. Вычис-

ляем частные производные входящие $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2 + v}$, $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2 + v}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

Тогда получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2 + v} \cdot e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} 2x = \frac{2}{u^2 + v} (ue^{x+y^2} + x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2 + v} \cdot 2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2 + v} = \frac{2}{u^2 + v} (4ue^{x+y^2} + 1).$$

В последние выражения вместо u и v необходимо поставить e^{x+y^2} и $x^2 + y$ соответственно.

Пример 4. Вычислите полную производную функции $z = x^2 + \sqrt{y}$, если $y = \sin x$.

Решение. Воспользуемся формулой вычисления полной производной $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$. Вычисляем $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, $\frac{dy}{dx} = \cos x$. Тогда подставляя в формулу, получаем следующий результат:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cos x = 2x + \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x.$$

Задания для работы в аудитории и самостоятельной работы

1. Найдите частные производные первого порядка для следующих функций

а) $z = x^2 \sin^2 y$; б) $u = e^{x^2 + y^2 + z^2}$; в) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; г) $z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$;

д) $z = \operatorname{arctg}(x + y)$.

2. Вычислите $f'_x(2,3)$ и $f'_y(2,3)$, если $f(x,y) = x^2 + y^3$

3. Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = e^{u-2v}$, $u = \sin x$, $v = x^3 + y^2$

4. Вычислите частные производные второго порядка для функции $z = x^3 - 4x^2y + 5y^2$.

5. Докажите, что если $z = \ln(x^2 + y^2)$, то $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

6. Для функции $z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}$, где $y = 3x + 1$, найдите $\frac{dz}{dx}$.

Список литературы:

1. Шипачев В. С. Высшая математика. Полный курс: учебник для академического бакалавриата: для студентов высших учебных заведений, обучающихся по всем направлениям и специальностям / В. С. Шипачев; под ред. А. Н. Тихонова. - 4-е изд., испр. и доп. – Москва: Юрайт, 2015. – 608 с. : ил., табл. – (Бакалавр. Академический курс). - Гриф: Рек. УМО. - ISBN 978-5-9916-4358-0
2. Гулиян Б.Ш. Математика. Базовый курс [Электронный ресурс]: учебник / Б.Ш. Гулиян, Р.Я. Хамидуллин. – Электрон. текстовые данные. – М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2013. – 712 с. – 978-5-4257-0109-1. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/17023.html>
3. Гусак А.А. Высшая математика. Том 1 [Электронный ресурс]: учебник / А.А. Гусак. – Электрон. текстовые данные. — Минск: ТетраСистемс, 2009. – 544 с. – 978-985-470-938-3. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28059.html>
4. Гусак А.А. Высшая математика. Том 2 [Электронный ресурс]: учебник / А.А. Гусак. – Электрон. текстовые данные. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – 446 с. – 978-985-470-939-0. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/28060.html>

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания
по выполнению самостоятельной работы
по дисциплине «Математика»
для специальности 21.05.03 Технология геологической разведки

Ставрополь
2026

Методические указания разработаны в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математика» и содержат задания к самостоятельной работе, порядок их выполнения и методические рекомендации к ним. Предназначены для студентов специальности 21.05.03 - Технология геологической разведки.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Общая характеристика самостоятельной работы
2. План – график выполнения самостоятельной работы
3. Контрольные точки и виды отчетности по ним
4. Задания для самостоятельного решения

Список рекомендуемой литературы

ВВЕДЕНИЕ

Данный курс способствует воспитанию у студентов достаточно высокой математической культуры, привитию навыков современных видов математического мышления, использования математических методов и основ математического моделирования в междисциплинарных связях и практической деятельности. Воспитание у студентов математической культуры включает в себя ясное понимание необходимости математической составляющей в общей подготовке студента, выработку представления о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре.

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Самостоятельная работа студентов (СРС) - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Целью СРС является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

- а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;
- б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое

эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуальное обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы - это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, гра-

фические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

2. ПЛАН – ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Виды и содержание самостоятельной работы студента и формы контроля

Технологическая карта самостоятельной работы студента

Код реализуемой компетенции	Вид деятельности студентов	Итоговый продукт самостоятельной работы	Средства и технологии оценки	Объем часов
1 семестр				
ОПК-1	Изучение литературы по темам № 1 – 2	Конспект	Собеседование	13,5
ОПК-1	Подготовка к лекциям	Конспект	Опрос	13,5
ОПК-1	Подготовка к практическому занятию	Индивидуальные задания	Защита индивидуальных заданий	13,5
ОПК-1	Подготовка к контрольной работе	Индивидуальные задания	Защита индивидуальных заданий	13,5
Итого за 1 семестр				54
2 семестр				
ОПК-1	Изучение литературы по темам № 3– 6	Конспект	Собеседование	18
ОПК-1	Подготовка к лекциям	Конспект	Опрос	18
ОПК-1	Подготовка к практическому занятию	Индивидуальные задания	Защита индивидуальных заданий	18
ОПК-1	Подготовка к экзамену	Вопросы и задачи	Экзамен	30
Итого за 2 семестр				84
3 семестр				
ОПК-1	Изучение литературы по темам № 6– 10	Конспект	Собеседование	8
ОПК-1	Подготовка к лекциям	Конспект	Опрос	8
ОПК-1	Подготовка к практическому занятию	Индивидуальные задания	Защита индивидуальных заданий	8
ОПК-1	Подготовка к экзамену	Вопросы и задачи	Экзамен	30
Итого за 3 семестр				54
Итого				192

Необходимые рекомендации по проведению практических занятий отражены в Методических указаниях для практических работ по дисциплине «Математика» для студентов специальности 21.05.03 Технология геологической разведки.

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ТОЧКИ И ВИДЫ ОТЧЕТНОСТИ ПО НИМ

№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки выполнения	Количество баллов
1 семестр			
1	Контрольная работа по теме «Системы линейных уравнений»	5 неделя	20
2	Контрольная работа по теме «Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве»	17 неделя	35
	Итого за 1 семестр:		55
	Итого:		55
2 семестр			
1	Контрольная работа по теме «Пределы функций одной переменной»	4 неделя	15
2	Контрольная работа по теме «Дифференцирование функций одной и нескольких переменных»	10 неделя	20
3	Контрольная работа по теме «Неопределенный интеграл»	17 неделя	20
	Итого за 2 семестр:		55
	Итого:		55
3 семестр			
1	Контрольная работа по теме «Дифференциальные уравнения»	6 неделя	15
2	Контрольная работа по теме «Числовые ряды»	11 неделя	20
3	Контрольная работа по теме «Кратные интегралы»	17 неделя	20
	Итого за 3 семестр:		55
	Итого:		55

4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Самостоятельная работа № 1

Тема: «Элементы векторной, линейной алгебры и аналитической геометрии»

1 – 10. Даны координаты вершин пирамиды A_1, A_2, A_3, A_4 . Найти:

- 1) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$;
- 2) площадь грани $A_1A_2A_3$;
- 3) объем пирамиды;
- 4) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

5) уравнения и длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, а также координаты точки пересечения высоты с плоскостью $A_1A_2A_3$.

Сделать чертеж.

1. $A_1 (4; 2; 5), A_2 (0; 7; 2), A_3 (0; 2; 7), A_4 (1; 5; 0)$.
2. $A_1 (4; 4; 10), A_2 (4; 10; 2), A_3 (2; 8; 4), A_4 (9; 6; 4)$.
3. $A_1 (4; 6; 5), A_2 (6; 9; 4), A_3 (2; 10; 10), A_4 (7; 5; 9)$.
4. $A_1 (3; 5; 4), A_2 (8; 7; 4), A_3 (5; 10; 4), A_4 (4; 7; 8)$.
5. $A_1 (10; 6; 6), A_2 (-2; 8; 2), A_3 (6; 8; 9), A_4 (7; 10; 3)$
6. $A_1 (1; 8; 2), A_2 (5; 2; 6), A_3 (5; 7; 4), A_4 (4; 10; 9)$.
7. $A_1 (6; 6; 5), A_2 (4; 9; 5), A_3 (4; 6; 11), A_4 (6; 9; 3)$.
8. $A_1 (7; 2; 2), A_2 (5; 7; 7), A_3 (5; 3; 1), A_4 (2; 3; 7)$.
9. $A_1 (8; 6; 4), A_2 (10; 5; 5), A_3 (5; 6; 8), A_4 (8; 10; 7)$.
10. $A_1 (7; 7; 3), A_2 (6; 5; 8), A_3 (3; 5; 8), A_4 (8; 4; 1)$.

11. Прямые $2x+y-1=0$ и $4x-y-11=0$ являются сторонами треугольника, а точка $P(1; 2)$ – точкой пересечения третьей стороны с высотой, опущенной на нее. Составить уравнение третьей стороны. Сделать чертеж.

12. Прямая $5x-3y+4=0$ является одной из сторон треугольника, а прямые $4x-3y+2=0$ и $7x+2y-13=0$ его высотами. Составить уравнения двух других сторон треугольника. Сделать чертеж.

13. Точки $A (3; -1)$ и $B (4; 0)$ являются вершинами треугольника, а точка $D (2; 1)$ – точкой пересечения его медиан. Составить уравнение высоты, опущенной из третьей стороны. Сделать чертеж.

14. Прямые $3x-4y+17=0$ и $4x-y-12=0$ являются сторонами параллелограмма, а точка $P (2; 7)$ – точкой пересечения его диагоналей. Составить уравнения двух других сторон параллелограмма. Сделать чертеж.

15. Прямые $x-2y+10=0$ и $7x+y-5=0$ являются сторонами треугольника, а точка $D (1; 3)$ – точкой пересечения его медиан. Составить уравнение третьей стороны. Сделать чертеж.

16. Прямые $5x-3y+14=0$ и $5x-3y-20=0$ являются сторонами ромба, а прямая $x-4y-4=0$ – его диагональю. Составить уравнения двух других сторон ромба. Сделать чертеж.

17. На прямой $4x+3y-6=0$ найти точку, равноудаленную от точек $A(1; 2)$ и $B(-1; -4)$. Сделать чертеж.

18. Найти координаты точки, симметричной точке $A(5; 2)$ относительно прямой $x+3y-1=0$. Сделать чертеж.

19. Прямые $x-3y+3=0$ и $3x+5y+9=0$ являются сторонами параллелограмма, а точка $P(34; -1)$ – точкой пересечения его диагоналей. Составить уравнения двух других сторон параллелограмма. Сделать чертеж.

20. Точки $A(4; 5)$ и $C(2; -1)$ являются двумя противоположными вершинами ромба, а прямая $x-y+1=0$ – одной из его сторон. Составить уравнения остальных сторон ромба. Сделать чертеж.

21–30. Даны векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, $\vec{d}(d_1, d_2, d_3)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис, а также найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

21. $\vec{a}(1; 2; 3)$, $\vec{b}(-1; 3; 2)$, $\vec{c}(7; -3; 5)$, $\vec{d}(6; 10; 17)$.

22. $\vec{a}(4; 7; 8)$, $\vec{b}(9; 1; 3)$, $\vec{c}(2; -4; 1)$, $\vec{d}(1; -13; -13)$.

23. $\vec{a}(8; 2; 3)$, $\vec{b}(4; 6; 10)$, $\vec{c}(3; -2; 1)$, $\vec{d}(7; 4; 11)$.

24. $\vec{a}(10; 3; 1)$, $\vec{b}(1; 4; 2)$, $\vec{c}(3; 9; 2)$, $\vec{d}(19; 30; 7)$.

25. $\vec{a}(2; 4; 1)$, $\vec{b}(1; 3; 6)$, $\vec{c}(5; 3; 1)$, $\vec{d}(24; 20; 6)$.

26. $\vec{a}(1; 7; 3)$, $\vec{b}(3; 4; 2)$, $\vec{c}(4; 8; 5)$, $\vec{d}(7; 32; 14)$.

27. $\vec{a}(1; -2; 3)$, $\vec{b}(4; 7; 2)$, $\vec{c}(6; 4; 2)$, $\vec{d}(14; 18; 6)$.

28. $\vec{a}(1; 4; 3)$, $\vec{b}(6; 8; 5)$, $\vec{c}(3; 1; 4)$, $\vec{d}(21; 18; 33)$.

29. $\vec{a}(2; 7; 3)$, $\vec{b}(3; 1; 8)$, $\vec{c}(2; -7; 4)$, $\vec{d}(16; 14; 27)$.

30. $\vec{a}(7; 2; 1)$, $\vec{b}(4; 3; 5)$, $\vec{c}(3; 4; -2)$, $\vec{d}(2; -5; -13)$.

31–40. Дана матрица A . Найти матрицу A^{-1} обратную данной. Сделать проверку, вычислив произведение $A \cdot A^{-1}$.

$$31. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$32. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$33. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$34. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$35. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$36. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$37. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$38. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$39. \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$40. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

41 – 50. Применяя метод исключения неизвестных (метод Гаусса), решить систему линейных уравнений.

$$41. \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -2, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

$$42. \quad \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

$$43. \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

$$44. \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_3 + 3x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
45. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases} & 46. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases} \\
47. \begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -1, \\ x_2 - 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 1. \end{cases} & 48. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -3. \end{cases} \\
49. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -3. \end{cases} & 50. \begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4. \end{cases}
\end{array}$$

Самостоятельная работа №2

Тема; «Введение в математический анализ.

Производная и ее приложения»

1 – 10. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталья.

$$\begin{array}{ll}
1. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x + 4}; & б) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - x - 6}; \\
\quad в) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x + 1} - 5}; & \quad г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 4x}; \\
2. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{2x^2 + x - 3}; & б) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 15x + 25}{5 - 4x - x^2}; \\
\quad в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + x} - \sqrt{9 - x}}{x^2 + 6x}; & \quad г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{6x}; \\
3. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2x - x^2}{x^2 + 4x + 1}; & б) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 7x + 3}{2x^2 + x - 1};
\end{array}$$

- $$\begin{array}{ll} \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}; & \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x^2}{1-\cos x}; \\ 4. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}; & \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}; \\ \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{x-x^2}; & \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \operatorname{tg} x}{\sin^2 x}; \\ 5. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x-4}{3+x-4x^2}; & \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}; \\ \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{5x}; & \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \operatorname{tg} x}{1-\cos x}; \\ 6. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-7x+1}{3x^2+x+3}; & \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-2x+8}{2x^2+5x+2}; \\ \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x^2+x}; & \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^5 x}{4x^2}; \\ 7. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5x+4}{2x^2-x+1}; & \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}; \\ \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-4x}; & \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{1-\cos 4x}; \\ 8. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3-2x+1}{3x^2+4x+2}; & \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}; \\ \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}; & \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{\sin^2 5x}; \\ 9. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-2x-3x^2}{x^2+x+3}; & \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{5x^2-4x-1}; \\ \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{4x-x}}{x^2-16}; & \text{e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{10x^2}; \\ 10. \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}; & \text{б)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2x-8}{8-x^3}; \end{array}$$

$$в) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{10+x} - \sqrt{10-x}}; \quad з) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{ctg}^2 3x;$$

11 – 20. Задана функция $y=f(x)$. Установить, является ли данная функция непрерывной. В случае разрыва функции в некоторой точке найти ее пределы слева и справа, классифицировать характер разрыва. Построить схематично график функции.

$$11. \quad f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$12. \quad f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1, \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$$

$$13. \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 1, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$14. \quad f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ x^2+1, & 0 < x < 1, \\ x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$15. \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$$

$$16. \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi, \\ x-2, & x > \pi. \end{cases}$$

$$17. \quad f(x) = \begin{cases} -(x+1), & x \leq -1, \\ (x+1)^2, & -1 < x \leq 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$$

$$18. \quad f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0, \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 2, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

$$19. \quad f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0, \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

$$20. \quad f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

21 – 30. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ следующих функций.

$$21. \quad \text{б)} \quad y = \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{3};$$

$$\text{в)} \quad x = 2t^2 + t, \quad y = \ln t.$$

$$22 \text{ а)} \quad y = \frac{x}{2} \sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2} \arccos \frac{x}{5}; \quad \text{б)} \quad y = \exp(\operatorname{ctg} 2x);$$

$$\text{в)} \quad x = \frac{1-t}{1+t^2}; \quad y = \frac{2+t^2}{t^2}.$$

$$23. \quad \text{а)} \quad y = \frac{1}{6} \ln \frac{x-3}{x+3}; \quad \text{б)} \quad y = \operatorname{arcc} \operatorname{tg}[\exp(5x)];$$

$$\text{в)} \quad x = \sin 23t, \quad y = \cos 23t.$$

$$24. \quad \text{а)} \quad y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right); \quad \text{б)} \quad y = \frac{1 - \cos 3x}{1 + \cos 3x};$$

$$\text{в)} \quad x = t^4 + 2t, \quad y = t^2 + 5t.$$

$$25. \quad \text{а)} \quad y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + \arccos \frac{1}{x^2}; \quad \text{б)} \quad y = (x-1) \exp(x^2);$$

$$\text{в)} \quad x = t - \ln \sin t, \quad y = t + \ln \cos t.$$

$$26. \quad a) \quad y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln \sin x; \quad б) \quad y = \exp(\cos 3x).$$

$$в) \quad x = \operatorname{tg} t, \quad y = \frac{1}{\sin^2 t}.$$

$$27. \quad a) \quad y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-2}) + \sqrt{x^2 - 2x}; \quad б) \quad y = 3x \exp(-x^2);$$

$$в) \quad x = t^2 - t^3, \quad y = 2t^3.$$

$$28. \quad a) \quad y = \ln \cos 2x - \ln \sin 2x; \quad б) \quad y = 2^{\operatorname{ctg}^2 3x};$$

$$в) \quad x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t.$$

$$29. \quad a) \quad y = \arccos \frac{x-1}{x+1}; \quad б) \quad y = \ln \operatorname{ctg} \sqrt{x+2};$$

$$в) \quad x = 3 \sin t, \quad y = 3 \cos^2 t.$$

$$30. \quad a) \quad y = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \ln \sin x; \quad б) \quad y = x \exp\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$в) \quad x = 2t - t^2, \quad y = 2t^3.$$

31 – 40. Найти дифференциал функций.

$$31. \quad a) \quad y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right); \quad б) \quad y = \frac{1 - \cos 3x}{1 + \cos 3x};$$

$$32. \quad a) \quad y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + \arccos \frac{1}{x^2}; \quad б) \quad y = (x-1) \exp(x^2);$$

$$33. \quad a) \quad y = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \ln \sin x; \quad б) \quad y = x \exp\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$34. \quad a) \quad y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln \sin x; \quad б) \quad y = \exp(\cos 3x);$$

$$35. \quad a) \quad y = \frac{x}{2} \sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2} \arccos \frac{x}{5}; \quad б) \quad y = \exp(\operatorname{ctg} 2x);$$

$$36. \quad a) \quad y = \arccos \frac{x-1}{x+1}; \quad б) \quad y = \ln \operatorname{ctg} \sqrt{x+2};$$

$$37. \quad a) \quad y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-2}) + \sqrt{x^2 - 2x}; \quad б) \quad y = 3x \exp(-x^2);$$

$$38. \text{ а) } y = \ln \cos 2x - \ln \sin 2x; \quad \text{б) } y = 2^{\operatorname{ctg}^2 3x};$$

$$39. \text{ а) } y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln \sin x; \quad \text{б) } y = \exp(\cos 3x).$$

$$40. \text{ а) } y = \frac{1}{6} \ln \frac{x-3}{x+3}; \quad \text{б) } y = \operatorname{arccctg}[\exp(5x)]$$

41 – 51. Методами дифференциального исчисления: а) исследовать функцию $y = f(x)$ и по результатам исследования построить ее график; б) найти наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке $[a; b]$.

$$41. \text{ а) } y = \frac{4x}{4+x^2}, \quad \text{б) } [-3; 3].$$

$$42. \text{ а) } y = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \quad \text{б) } [-1; 1].$$

$$43. \text{ а) } y = \frac{x^3}{x^2+1}, \quad \text{б) } [-2; 2].$$

$$44. \text{ а) } y = \frac{x^2-5}{x-3}, \quad \text{б) } [-2; 2].$$

$$45. \text{ а) } y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}, \quad \text{б) } [1; 4].$$

$$46. \text{ а) } y = (x-1)e^{3x+1}, \quad \text{б) } [0; 1].$$

$$47. \text{ а) } y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad \text{б) } [1; 9].$$

$$48. \text{ а) } y = e^{\frac{1}{2-x}}, \quad \text{б) } [-1; 1].$$

$$49. \text{ а) } y = xe^{-x^2}, \quad \text{б) } [-2; 2].$$

$$50. \text{ а) } y = \frac{x^2-3}{x^2+9}, \quad \text{б) } [-2; 2].$$

Самостоятельная работа №3

Тема: «Неопределенный и определенный интегралы».

Дифференциальные уравнения. Функции нескольких переменных»

1 – 10. Найти неопределенные интегралы. В случаях а), б) результат проверить дифференцированием.

1.

$$a) \int e^{\cos^2 x} \sin 2x dx;$$

$$б) \int x \arctg x dx;$$

$$в) \int \frac{dx}{x^3 + 27};$$

$$з) \int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx;$$

2.

$$a) \int \frac{x^2 dx}{(x^3 + 4)^6};$$

$$б) \int e^x \ln(1 + e^x) dx;$$

$$в) \int \frac{x dx}{x^3 + 8};$$

$$з) \int \frac{dx}{\sin x \cos x};$$

3.

$$a) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^6}};$$

$$б) \int x 2^x dx;$$

$$в) \int \frac{(5x + 6) dx}{x^3 + x^2 + x + 1};$$

$$з) \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}};$$

4.

$$a) \int \frac{dx}{\sin^2 x (2 \operatorname{ctg} x + 1)};$$

$$б) \int \frac{x \arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$$

$$в) \int \frac{dx}{x^3 - x^2 + 2x - 2};$$

$$з) \int \frac{x + \sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{x+1}} dx;$$

5.

$$a) \int \frac{\sin 2x dx}{5 - \cos 2x};$$

$$б) \int x^2 e^{5x} dx;$$

$$6) \quad \int \frac{(x-1)dx}{x^3 - 2x^2 + x}; \quad 2) \quad \int \frac{\sin x dx}{1 + \sin x};$$

6.

$$a) \quad \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin^3 x}}; \quad 6) \quad \int x \arccos \frac{1}{x} dx;$$

$$6) \quad \int \frac{(2x+1)dx}{x^3 + 3x^2 - 4x}; \quad 2) \quad \int \frac{(\sqrt[4]{x} - 1)dx}{(\sqrt{x} - 2)\sqrt{x^3}};$$

7.

$$a) \quad \int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 6) \quad \int x \ln(x^2 + 1) dx;$$

$$6) \quad \int \frac{x dx}{x^4 + 5x^2 + 6}; \quad 2) \quad \int \frac{\sqrt[6]{x+5}}{1 + \sqrt[3]{x+5}} dx;$$

8.

$$a) \quad \int \frac{\arctg x}{x^2 + 1} dx; \quad 6) \quad \int x \cos 2x dx$$

$$6) \quad \int \frac{x dx}{x^4 - 81}; \quad 2) \quad \int \frac{dx}{\cos x + 3 \sin x};$$

9.

$$a) \quad \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{8 + 3 \sin x}}; \quad 6) \quad \int x \ln^2 x dx;$$

$$6) \quad \int \frac{x^2 + x - 1}{x^4 + 3x^2 - 4} dx; \quad 2) \quad \int \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt[6]{x} - 1)}{\sqrt[3]{x} + 1} dx;$$

10.

$$a) \quad \int \frac{\sqrt{3 + \ln x}}{x} dx; \quad 6) \quad \int x^2 \sin 3x dx;$$

$$6) \quad \int \frac{(x^3 + x)dx}{x^4 + 5x^2 + 6}; \quad 2) \quad \int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x + 1};$$

11-20. Вычислить определенные интегралы.

$$11. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx;$$

$$12. \int_0^1 x \arctg x dx$$

$$13. \int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$14. \int_0^1 \frac{5x+1}{x^2+2x+1} dx.$$

$$15. \int_0^{\pi} \sin 2x \cos^2 x dx.$$

$$16. \int_1^2 \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$17. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$$

$$18. \int_0^1 x \ln(1+x) dx.$$

$$19. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

$$20. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

21 - 31. Найти решения дифференциальных уравнений первого порядка, удовлетворяющие указанным начальным условиям. Сделать проверку.

$$21 \text{ а) } 2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2} y' = 0, \quad y(1) = 0,$$

$$\text{б) } x \cdot y' - y = x \cdot e^{\frac{y}{x}}.$$

$$\text{в) } y'' - 3y' - 4y = e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

$$22. \text{ а) } xy' + xe^{y/x} - y = 0, \quad y(1) = 1.$$

$$\text{б) } y' \cdot \operatorname{ctg} x - y = \cos x \cdot \operatorname{ctg} x.$$

$$\text{в) } y'' - 6y' + 9y = x+1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$23. \text{ а) } 20x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 5xy^2 dx, \quad y(1) = 1.$$

$$\text{б) } y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

$$\text{в) } y'' + 9y' = x-2, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1.$$

$$24. \text{ а) } xy' = y \ln(y/x), \quad y(1) = e.$$

$$\text{б) } x \cdot y' + y = \sin 2x.$$

$$\text{в) } y'' - 2y' + 10y = \sin 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

25. а) $3(x^2y + y)dy + \sqrt{9 + y^2}dx = 0, y(0) = 0.$

б) $x^2 \cdot y' - x^2 + xy - y^2 = 0, y(1) = 0.$

в) $y'' + y' - 6y = 2e^{-3x}, y(0) = 0, y'(0) = 2.$

26. а) $xy' + 6y = x + 1, y(1) = 0.$

б) $x \cdot y' = y(\ln y - \ln x), y(1) = e.$

в) $y'' + 4y = x^2, y(0) = -1, y'(0) = 0.$

27. а) $y' \cos x = (y + 1)\sin x, y(0) = 0.$

б) $y' - \frac{2}{x} \cdot y = \frac{e^{-x^2}}{x}.$

в) $y'' - 3y' = \cos 2x, y(0) = 3, y'(0) = 1.$

28. а) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}, y(1) = 0.$

б) $x \cdot y' + y = \ln x.$

в) $y'' - 4y' + 4y = 2\sin 3x, y(0) = 0, y'(0) = -1.$

29. а) $y' - y/x = x^2, y(1) = 0.$

б) $x^2 \cdot y' = x^2 + xy + y^2.$

в) $y'' + 4y' + 5y = 4e^x, y(0) = 2, y'(0) = 0.$

30. а) $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, y(0) = 0.$

б) $y' - \frac{3}{x} \cdot y = x.$

в) $y'' + 4y' = \cos x, y(0) = -2, y'(0) = -1.$

31 – 40. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$z = f(x; y)$ в ограниченной замкнутой области D . Область D изобразить на чертеже.

31. $z = x^2 - y^2 + 3xy + 7; \quad D: -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2.$

32. $z = x^2 + 2y^2 - 1; \quad D: x \geq -2, y \geq -2, x + y \leq 4.$

33. $z = 3 - x^2 - xy - y^2; \quad D: x \leq 1, y \geq -1, x + 1 \geq y.$

34. $z = x^2 + y^2 + x - y; \quad D: x \geq 1, y \geq -1, x + y \leq 2.$

35. $z = x^2 + 2xy + 2y^2; \quad D: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 3.$

$$36. \quad z = 3x^2 - 3xy + y^2 + 1; \quad D: \quad x \geq -1, \quad y \geq -1, \quad x + y \leq 1.$$

$$37. \quad z = 5 + 2xy - x^2; \quad D: \quad -1 \leq y \leq 4 - x^2.$$

$$38. \quad z = x^2 - 2xy - y^2 + x; \quad D: \quad x \leq 0, \quad y \leq 1, \quad x + y + 2 \geq 0.$$

$$39. \quad z = x^2 - xy - 2; \quad D: \quad 4x^2 - 4 \leq y \leq 1.$$

$$40. \quad z = x^2 + xy + 3y^2; \quad D: \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1.$$

41 – 50. Даны: функция трех переменных $u = f(x, y, z)$, точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$. Найти: 1) grad u в точке M_0 ; 2) производную в точке M_0 по направлению вектора $\vec{a}$.

$$41. \quad u = \sqrt{x^2 - 2y + 4z}; \quad M_0(1; -2; 1); \quad \vec{a}(-1; 2; 2).$$

$$42. \quad u = \ln|3x^2 - 2y + z|; \quad M_0(1; 1; 0); \quad \vec{a}(0; 4; 3).$$

$$43. \quad u = \frac{x}{\sqrt{x + y + z}}; \quad M_0(1; 1; 2); \quad \vec{a}(-3; 0; 4).$$

$$44. \quad u = \sqrt{2x - y + z^2}; \quad M_0(1; 2; 2); \quad \vec{a}(3; 0; -4).$$

$$45. \quad u = \frac{z}{\sqrt{x + y}}; \quad M_0(2; 2; 1); \quad \vec{a}(1; -2; 2).$$

$$46. \quad u = \ln|10 - x^2 - y^2 - z^2|; \quad M_0(2; 2; 1); \quad \vec{a}(-4; 0; 3).$$

$$47. \quad u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad M_0(3; 4; 0); \quad \vec{a}(2; -1; 2).$$

$$48. \quad u = x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2; \quad M_0(-1; 2; 1); \quad \vec{a}(0; 6; 8).$$

$$49. \quad u = \sqrt{3x + 4y + z^2}; \quad M_0(3; 4; 0); \quad \vec{a}(2; 2; -1).$$

$$50. \quad u = \ln|12 - x^2 - y^2 + z|; \quad M_0(1; 1; -5); \quad \vec{a}(3; 0; -4).$$

Основная литература

1. Высшая математика в упражнениях и задачах: [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2016. - 816 с. : ил., табл. - Прил.: с. 809-815. - ISBN 978-5-17-099894-4. - ISBN 978-5-94666-805-7

2. Письменный, Д. Т.; Конспект лекций по высшей математике : в 2-х ч. / Д.Т. Письменный, Ч. 2. - 13-е изд. - М. : АЙРИС-пресс, 2019. - 256 с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6044-7

Дополнительная литература

1. Ильин, В. А.; Линейная алгебра : учебник / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - 6-е изд., стереотип. - Москва : Физматлит, 2010. - 278 с. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 4). - <http://biblioclub.ru/>. - ISBN 978-5-9221-0481-4

2. Баврин, И. И. Высшая математика : учебник / И. И. Баврин, В. Л. Матросов. - М. : Владос, 2004. - 400 с. : ил. - (Учебник для вузов). - Гриф: Рек. МО. - Библиогр.: с. 398. - ISBN 5-691-01223-1