

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Якушев В. М., Демин М.С.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ по
дисциплине по дисциплине «ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
ОБРАБОТКИ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ»

Часть 1

для студентов направления подготовки
21.03.01 Нефтегазовое дело
Направленность (профиль) «Геолого-геофизические
технологии в нефтегазовом деле»

Ставрополь
2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Практическое занятие 1. Спектральный анализ и синтез периодических сигналов	5
2. Практическое занятие 2. Спектральный анализ и синтез импульсных сигналов	25
3. Практическое занятие 3. Исследование линейных систем	51
4. Практическое занятие 4. Исследование дискретных сигналов	65
Рекомендуемая литература	85

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания к выполнению практических занятий работ по дисциплине «Теоретические основы обработки геофизической информации» составлены в соответствии с программой дисциплины для студентов направления подготовки 21.03.01 Нефтегазовое дело.

В методических указаниях приведены основные алгоритмы обработки геофизической информации и рассмотрена их практическая реализация в среде MathCAD.

Структурно каждая из работ в предлагаемых методических указаниях состоит из формулировки её цели и содержания, краткого теоретического обоснования, формулировки требований к аппаратуре и материалам, указаний по технике безопасности, методики и порядка выполнения работы, требований к содержанию отчета и его форме, вопросов для защиты работы и списка рекомендуемой литературы.

Целью практических занятий является углубление знаний студентов в области теории и практики, обработки геофизической информации.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- знать основные методы, способы и средства получения, хранения, переработки геофизической информации; возможности современных компьютеризированных систем (включая специализированное программное обеспечение) для управления технологиями геофизической и геологической разведки;

- уметь обосновывать, выбирать и применять различные методы обработки геофизических данных для решения конкретных задач в условиях конкретных геологических ситуаций;

- владеть навыками использования комплекса методов обработки геофизических данных при поисках и разведке месторождений полезных ископаемых, организации и проведения вычислительных работ, способами интерпретации данных геофизических измерений и представлением результатов работы.

Практическое занятие 1

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ

ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Цель и содержание

Цель— приобретение навыков спектрального анализа и синтеза периодических сигналов.

Содержание:

- изучение теоретического обоснования и примера спектрального анализа и синтеза периодического сигнала;
- выполнение индивидуального задания и оформление отчета;
- защита отчета.

Теоретическое обоснование

Разложение периодических сигналов в ряд Фурье. Периодический сигнал $s(t)$ может быть разложен в ряд Фурье. При этом он представляется в виде суммы гармонических функций либо комплексных экспонент с частотами, образующими арифметическую прогрессию. Чтобы такое разложение существовало, фрагмент сигнала длительностью в один период должен удовлетворять условиям Дирихле:

- не должно быть разрывов второго рода (с уходящими в бесконечность ветвями функции);
- число разрывов первого рода (скачков) должно быть конечным;
- число экстремумов должно быть конечным (в качестве примера функции, которая на конечном интервале имеет бесконечное число экстремумов, можно привести $\sin(1/x)$ в окрестности нуля).

В зависимости от конкретной формы базисных функций различают три формы записи ряда Фурье: синусно-косинусная форма, вещественная форма и комплексная форма.

Синусно-косинусная форма ряда Фурье имеет следующий вид:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] \quad (1.1)$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$ – круговая частота первой гармоники, рад/с, соответствующая периоду повторения сигнала, равному T , с;

$k\omega_1$ – круговая частота k -той гармоники, рад/с;

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt \quad \text{– коэффициент } k\text{-той косинусной составляющей}$$

спектра Фурье периодического сигнала;

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(k\omega_1 t) dt \quad \text{– коэффициент } k\text{-ой синусной составляющей}$$

спектра Фурье периодического сигнала;

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt \quad \text{– постоянная составляющая спектра Фурье}$$

периодического сигнала, представляющая собой среднее значение сигнала на периоде.

Если сигнал $s(t)$ является четной функцией, то все коэффициенты b_k будут равны нулю, и в формуле ряда Фурье будут присутствовать только «косинусные» слагаемые. Если сигнал $s(t)$ является нечетной функцией, равны нулю будут, наоборот, косинусные коэффициенты a_k , и в формуле останутся лишь «синусные» слагаемые.

Некоторое неудобство синусно-косинусной формы ряда Фурье состоит в том, что для каждого значения индекса суммирования k (то есть для каждой гармоники с частотой $k\omega_1$) в формуле (1.1) фигурируют два слагаемых синус и косинус. Поскольку

$$u(\omega t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = C \cos(\omega t - \varphi),$$

Где $C = \sqrt{a^2 + h^2}$ – амплитуда гармонического сигнала,

$\varphi = \arctg(b / a)$ – начальная фаза гармонического сигнала, то ряд (1.1)

можно также представить в компактной форме:

$$\Phi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_1 t - \varphi_k) \quad (1.2)$$

Формула (1.2) представляет вещественную форму записи ряда Фурье.

Если сигнал $s(t)$ является четной функцией, фазы φ_k могут принимать только значения 0 и π , а если $s(t)$ – функция нечетная, то возможные значения для фазы равны $\pm\pi/2$.

Комплексная форма представления ряда Фурье является наиболее общей и получается из вещественной формы представлением косинуса в виде полусуммы комплексных экспонент (такое представление вытекает из формулы Эйлера $e^{jx} = \cos x + j \sin x$):

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{jx} + e^{-jx}) .$$

Применив данное преобразование к вещественной форме ряда Фурье, получим суммы комплексных экспонент с положительными и отрицательными показателями:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2} [\exp(jk\omega t + j\varphi_k) + \exp(-jk\omega t - j\varphi_k)]$$

Будем трактовать экспоненты со знаком «минус» в показателе как члены ряда с отрицательными номерами. В рамках этого же общего подхода постоянное слагаемое $a_0/2$ станет членом ряда с нулевым номером. В результате получится комплексная форма записи ряда Фурье:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega t}$$

Комплексные коэффициенты ряда C_k связаны с амплитудами A_k и фазами φ_k , фигурирующими в вещественной форме записи ряда Фурье (1.2), следующими соотношениями:

$$C_k = \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k}, \quad A_k = 2 |C_k| \quad \text{и} \quad \varphi_k = \arg(C_k).$$

Несложно выглядят и формулы связи C_k с коэффициентами a_k и b_k синусно-косинусной формы ряда Фурье (1.1):

$$C_k = \frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2}, \quad a_k = 2 \operatorname{Re}(C_k) \quad \text{и} \quad b_k = -2 \operatorname{Im}(C_k).$$

Отсюда сразу же следует и формула непосредственного расчета коэффициентов C_k ряда Фурье в комплексной форме:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (1.5)$$

Если $s(t)$ является четной функцией, коэффициенты ряда C_k будут чисто вещественными, а если $s(t)$ — функция нечетная, коэффициенты ряда окажутся чисто мнимыми.

Совокупность амплитуд гармоник ряда Фурье часто называют амплитудным спектром периодического сигнала (спектр), а совокупность их фаз — фазовым спектром периодического сигнала (таблица 1.1).

Если анализируемый сигнал $s(t)$ является вещественным, то его амплитудный и фазовый спектры обладают соответственно четной и нечетной симметрией:

$$A_{-k} = A_k, \quad \varphi_{-k} = -\varphi_k,$$

а коэффициенты комплексного ряда Фурье — комплексно-сопряженной симметрией:

$$C_{-k}^* = C_k$$

Таблица 1.1 – Характеристики периодических сигналов.

Термин	Определение	Математическая формула и обозначение величины
Период периодического сигнала (период)	Параметр, равный наименьшему интервалу времени, через который повторяются мгновенные значения периодического сигнала	T
Частота периодического сигнала (частота)	Параметр, представляющий собой величину, обратную периоду периодического сигнала	$F = \frac{1}{T}$
Комплексный спектр периодического сигнала	Комплексная функция дискретного аргумента, равного целому числу значений частоты периодического сигнала, представляющая собой значения коэффициентов комплексного ряда Фурье для периодического сигнала	Формула (1.5), где k – любое целое число
Амплитудный спектр периодического сигнала (спектр)	Функция дискретного аргумента, представляющая собой модуль комплексного спектра периодического сигнала	$ C_k = \sqrt{\operatorname{Re}^2 \{C_k\} + \operatorname{Im}^2 \{C_k\}}$
Фазовый спектр периодического сигнала	Функция дискретного аргумента, представляющая собой аргумент комплексного спектра периодического сигнала	$\varphi_k = \arg \{C_k\} = \arctg \frac{\operatorname{Im} \{C_k\}}{\operatorname{Re} \{C_k\}}$
Гармоника	Гармонический сигнал с амплитудой и начальной фазой, равными соответственно значениям амплитудного и фазового спектра периодического сигнала при некотором значении аргумента	$s_k(t) = A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)$

Пример спектрального анализа и синтеза периодического сигнала в базисе Фурье. Рассмотрим пример разложения в ряд Фурье периодической последовательности прямоугольных импульсов с высотой U , длительностью τ и периодом T (рисунк1.2).

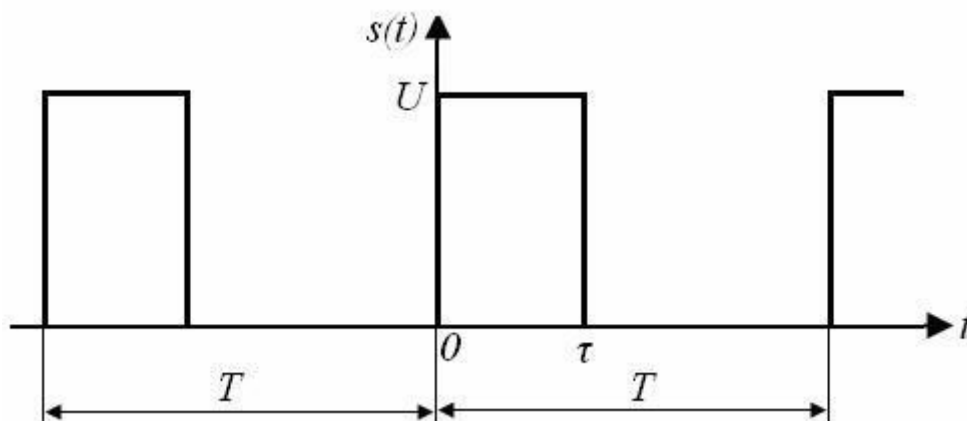


Рисунок1.2 – Периодическая последовательность прямоугольных импульсов.

Для решения задачи спектрального анализа воспользуемся системой математического анализа MathCAD. В приводимом ниже документе MathCAD приняты следующие обозначения:

а) $s(t)$ – функция, описывающая зависимость отдельного импульса, составляющего периодическую последовательность импульсов, от текущего времени в пределах одного периода T ;

б) $x(t)$ – периодическая функция, восстановленная (спектральный синтез) по результатам спектрального анализа (разложению в ряд Фурье) функции $s(t)$;

в) T – период;

г) τ – длительность импульсов;

д) U – высота импульса;

е) N – число рассчитываемых гармоник спектра периодической последовательности импульсов (задача спектрального анализа);

ж) A_n, B_n – коэффициент n -ой косинусной и синусной составляющей

спектра Фурье периодического сигнала (формула(1.1));

з) t_m – момент времени, когда восстановленный сигнал $x(t)$ принимает максимальное значение;

и) Δ – максимальное значение абсолютной ошибки восстановления сигнала, обусловленное наличием эффекта Гиббса;

к) Δ_1 – максимальное значение относительной ошибки восстановления сигнала, обусловленное наличием эффекта Гиббса;

Программа MathCAD по спектральному анализу и синтезу периодической последовательности прямоугольных импульсов представлена на рисунке 1.2, а результаты спектрального анализа и синтеза последовательности прямоугольных импульсов – на рисунках 1.3 – 1.6.

Разложение функции в ряд Фурье и её гармонический синтез

Программа вычисления коэффициентов ряда Фурье (Fourier series) с применением их интегрального представления

$$\text{FourierSeries}(s, N, T) := \left(\begin{array}{l} R^{(0)} \leftarrow \left(\frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) dt \right) \\ \text{for } n \in 1..N \\ R^{(n)} \leftarrow \left(\begin{array}{l} \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot t}{T}\right) dt \\ \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot t}{T}\right) dt \end{array} \right) \\ R^T \end{array} \right)$$

Рисунок 1.2 – Программа спектрального анализа и синтеза периодического сигнала в базисе Фурье (начало документа MathCAD)

Дано: $U := 1$ - высота импульса, В;
 $\tau := \frac{1}{5}$ - длительность импульса, с; Параметры сигнала
 $T := 1$ - период колебаний.

$s(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{if } \tau \leq t \leq T \end{cases}$ Математическая модель сигнала в пределах одного периода

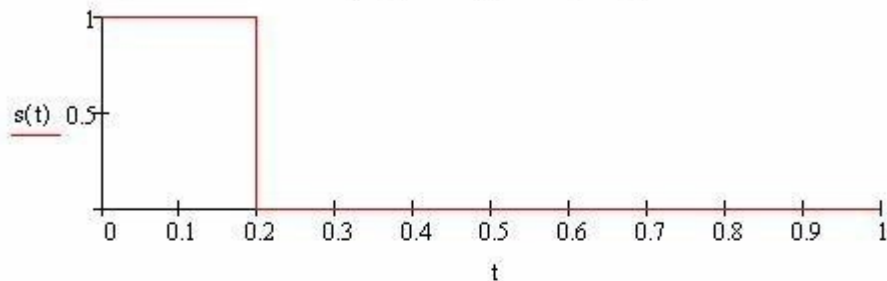


Рисунок 1 - Временная модель сигнала в пределах одного периода

Требуется: 1 Требуется выполнить спектральный анализ и синтез периодического сигнала в базисе Фурье.
 2. Исследовать эффект Гиббса.

Решение: Число гармоник ряда: $N := 10$

`result := FourierSeries(s,N,T)` $A := \text{result}^{(0)}$ $B := \text{result}^{(1)}$

$A =$

	0
0	0.4
1	0.303
2	0.094
3	-0.062
4	-0.076
5	-1.411·10 ⁻⁷
6	0.05
7	0.027
8	-0.023
9	-0.034
10	-5.581·10 ⁻⁷

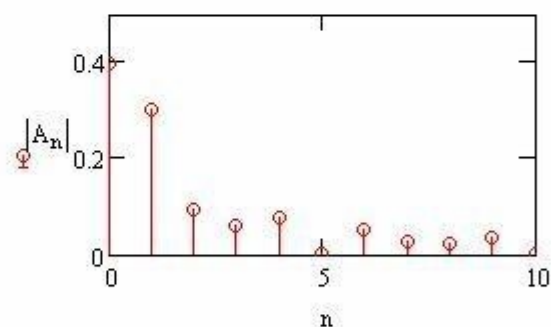


Рисунок 2 - Амплитуды косинусных составляющих спектра сигнала

$B =$

	0
0	0
1	0.22
2	0.288
3	0.192
4	0.055
5	-1.128·10 ⁻⁶
6	0.037
7	0.082
8	0.072
9	0.024
10	-2.257·10 ⁻⁶

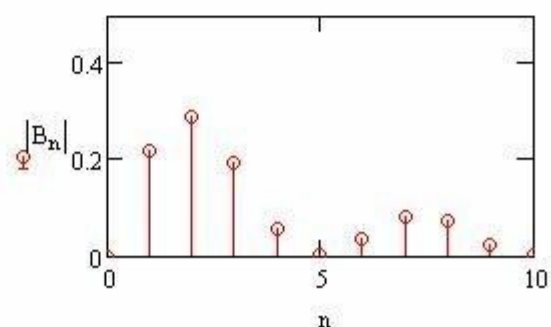


Рисунок 3 - Амплитуды синусных составляющих спектра сигнала

Рисунок 1.3 – Программа спектрального анализа и синтеза периодического сигнала в базисе Фурье (продолжение документа MathCAD)

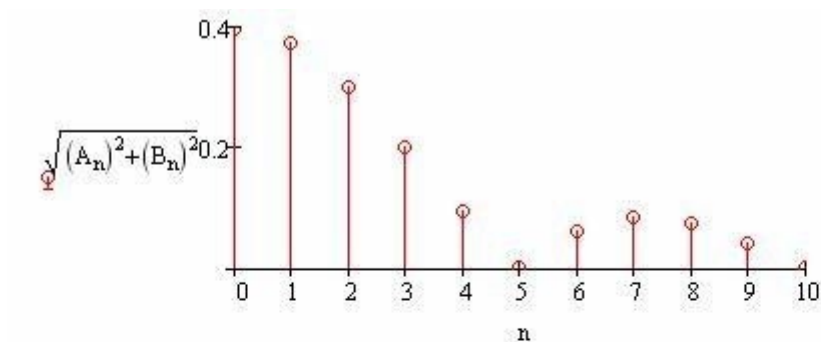


Рисунок 4 - АЧС сигнала

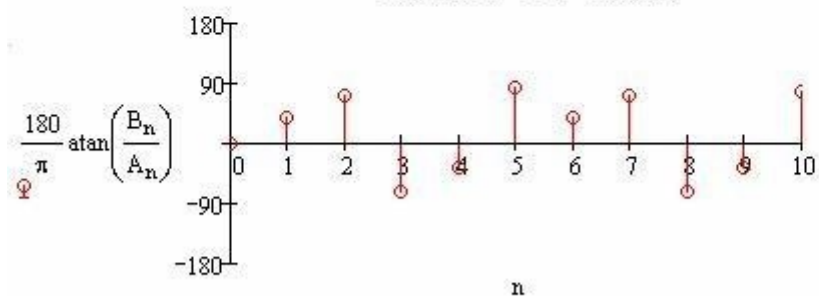


Рисунок 5 - ФЧС сигнала

Формула синтеза сигнала по ряду Фурье

$$x(t) := \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(A_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot t}{T}\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot t}{T}\right) \right)$$

$$t := 0, \frac{T}{50} \dots 2 \cdot T$$

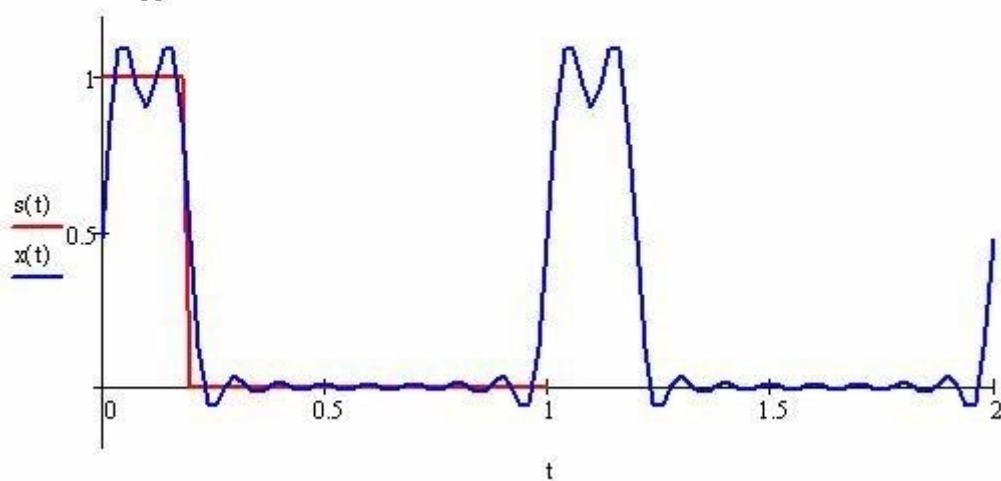


Рисунок 6 - Исходный и восстановленный сигнал при N = 10

Рисунок 1.4 – Программа спектрального анализа и синтеза периодического сигнала в базисе Фурье (продолжение документа MathCAD)

Как видно из рисунка 1.4, последовательность прямоугольных импульсов плохо подходит для представления рядом Фурье – она содержит скачки, а сумма любого числа гармонических составляющих с любыми амплитудами всегда будет непрерывной (и более того – бесконечно дифференцируемой во всех точках) функцией. Поэтому поведение ряда Фурье в окрестностях разрывов представляет особый интерес. На временной диаграмме, представленной на рисунке 1.4, хорошо видно, что в окрестности точки разрыва суммирование ряда Фурье дает наклонный участок, причем крутизна наклона возрастает с ростом числа суммируемых гармоник. В самой точке разрыва ряд Фурье сходится к полусумме правого и левого пределов:

$$x(t_0) = \frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} s(t) + \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} s(t) \right].$$

Здесь $s(t)$ – исходный сигнал, $x(t)$ – сумма ряда Фурье для него.

На примыкающих к разрыву участках сумма ряда Фурье дает заметные пульсации. Это явление, присущее рядам Фурье для любых сигналов с разрывами первого рода (скачками), называется эффектом Гиббса. В ряде работ, например [1 – 2], показано, что амплитуда первого (самого большого) выброса составляет примерно 9 % от величины скачка. Убедимся в этом самостоятельно (рисунок 1.5).

Исследование эффекта Гиббса

$$\begin{aligned} t &:= 0 & tm &:= \text{Maximize}(x, t) & tm &= 0.05 & x(tm) &= 1.119 & s(tm) &= 1 \\ \Delta &:= |s(tm) - x(tm)| & \Delta &= 0.119 & & & & & & \text{- абсолютная ошибка} \\ \Delta 1 &:= \frac{|s(tm) - x(tm)|}{|s(tm)|} \cdot 100 & \Delta 1 &= 11.917 & & & & & & \text{- относительная ошибка в \%} \end{aligned}$$

Рисунок 1.5 – Пример спектрального анализа и синтеза периодического сигнала в базе Фурье (окончание документа MathCAD)

Как видно из рисунка 1.5, вследствие эффекта Гиббса амплитуда первого (самого большого) выброса составляет примерно 12% от величины скачка. Исследуем, как повлияет на проявление эффекта Гиббса, изменение количества гармоник спектра сигнала. Для этого увеличим количество гармоник, принимающих участие в восстановлении сигнала в два раза ($N = 20$ на рисунке 1.4). Результат восстановления сигнала и исследования эффекта Гиббса показаны на рисунке 1.6.

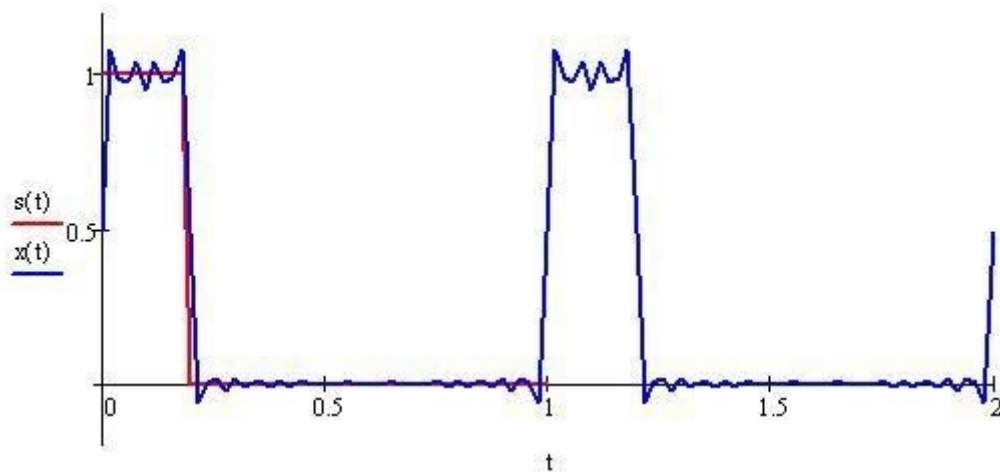


Рисунок 6 - Исходный и восстановленный сигнал при $N = 20$

Исследование эффекта Гиббса

$$t := 0 \quad t_m := \text{Maximize}(x, t) \quad t_m = 0.075 \quad x(t_m) = 1.051 \quad s(t_m) = 1$$

$$\Delta := |s(t_m) - x(t_m)| \quad \Delta = 0.051 \quad \text{- абсолютная ошибка}$$

$$\Delta_1 := \frac{|s(t_m) - x(t_m)|}{|s(t_m)|} \cdot 100 \quad \Delta_1 = 5.147 \quad \text{- относительная ошибка в \%}$$

Рисунок 1.6 –Проявление эффекта Гиббса при числе гармоник $N = 20$

Анализ графика и данных, представленных на рисунке 1.6, свидетельствует о том, что при увеличении количество гармоник в два раза (с 10 до 20) количество пульсаций восстановленного сигнала тоже удвоилось, а амплитуда первого (самого большого) выброса составляет примерно 5 % от величины скачка, то есть уменьшилась примерно в 2,4 раза. Таким образом, исследованный детерминированный, периодический сигнал (периодическая последовательность прямоугольных импульсов на рисунке 1.1) может быть задан функцией $s(t)$ (временной подход) или представлен в виде линейчатого

спектра амплитуд (АЧС) и фаз (ФЧС) гармоник (рисунок 1.4) (спектральный подход).

Аппаратура и программное обеспечение.

Для выполнения поставленных задач необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память $\geq$ не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 МВ Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (число цветов $\geq$ 256). Также необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 10 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении работы **запрещается:**

- самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;

- нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т. д.;

- принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

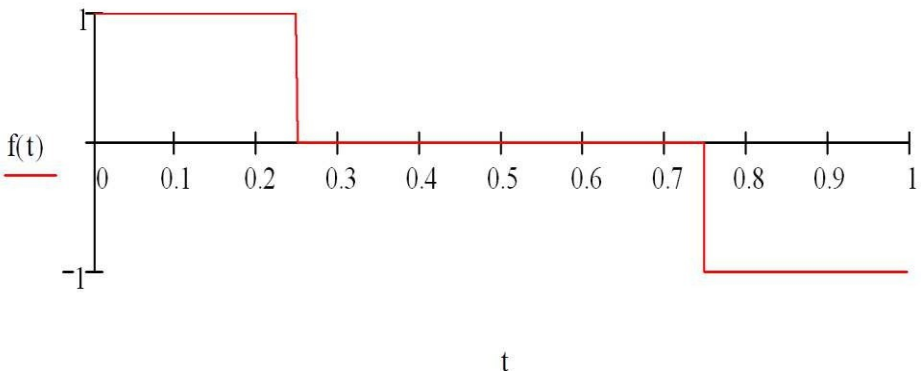
В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

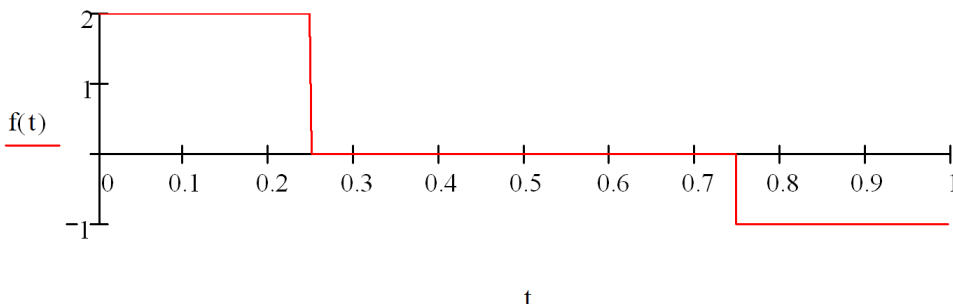
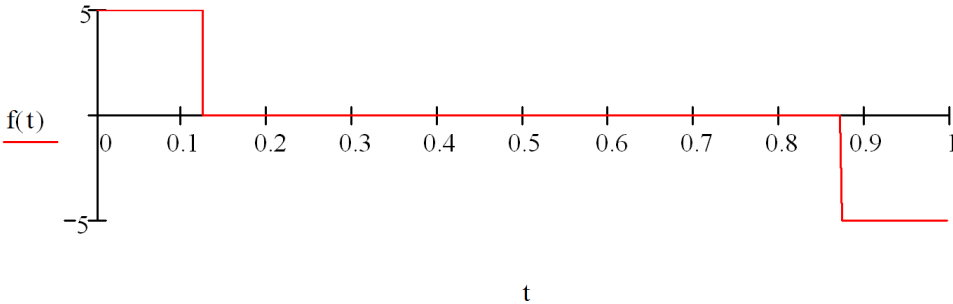
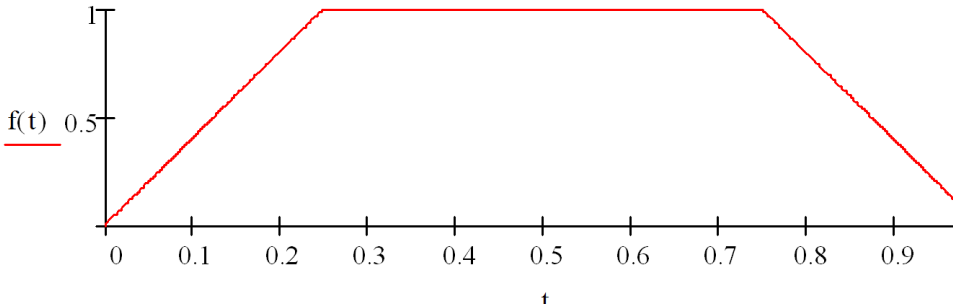
Методика и порядок выполнения работы.

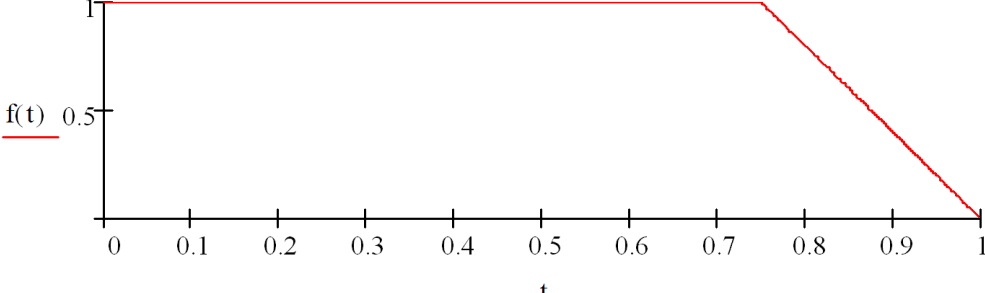
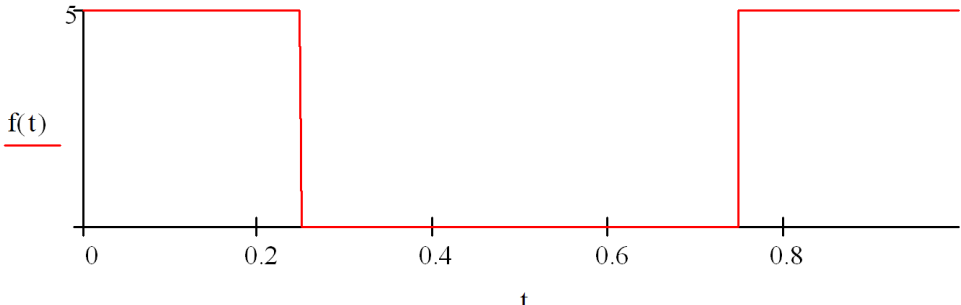
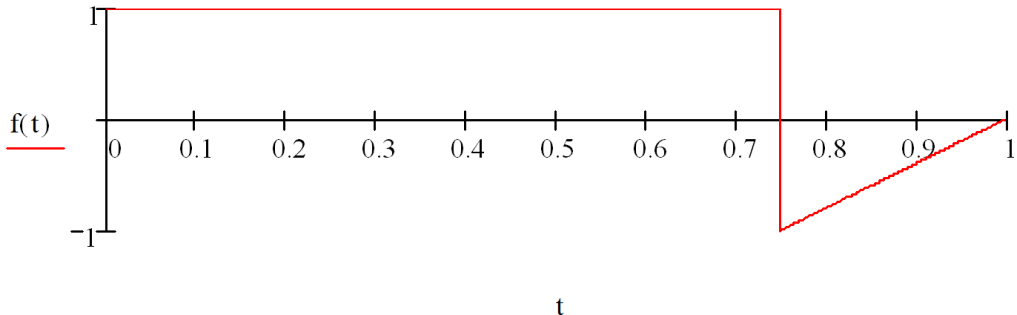
1. Запустите систему MathCAD.
2. Реализуйте программу спектрального анализа и синтеза периодических сигналов (рисунок 1.2 – 1.5) в соответствии с вариантом индивидуального задания (таблица 1.2, 1.3).
3. Исследуйте изменение количества гармоник на проявление эффекта Гиббса при восстановлении периодического сигнала рядом Фурье.
4. Сохраните результаты спектрального анализа и синтеза заданных периодических сигналов.
5. Сформируйте отчет по работе.
6. Защитите работу.

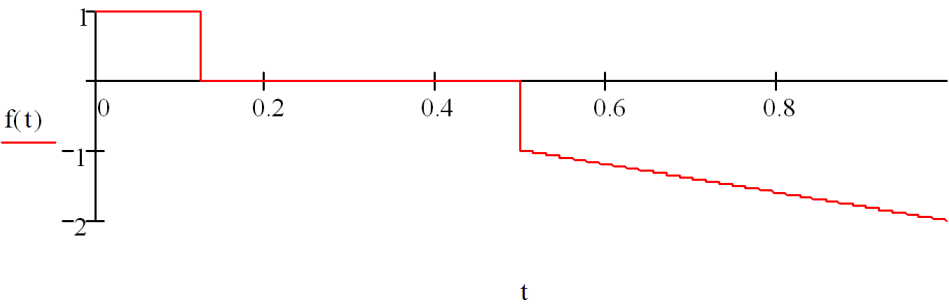
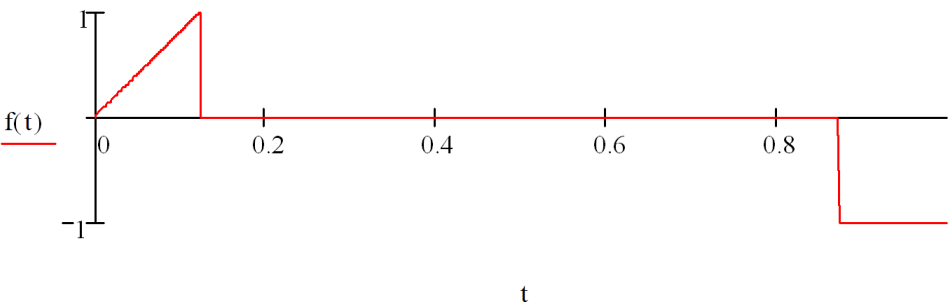
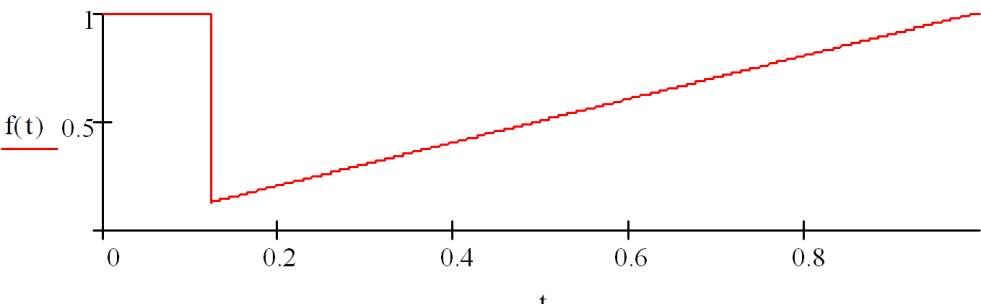
Варианты заданий

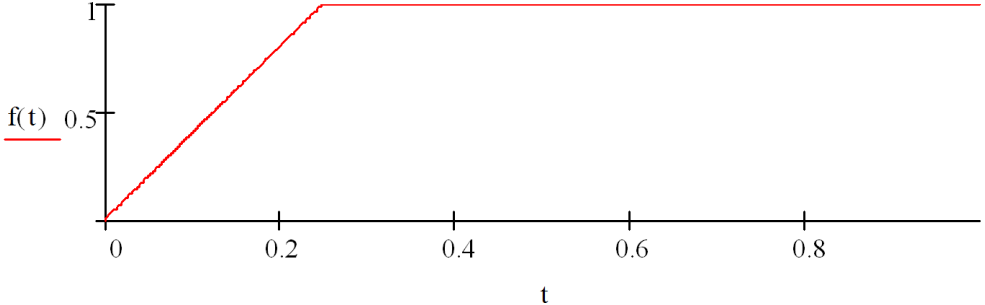
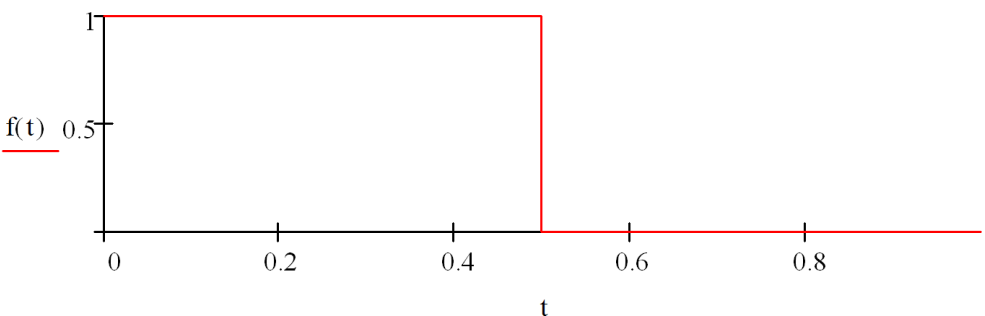
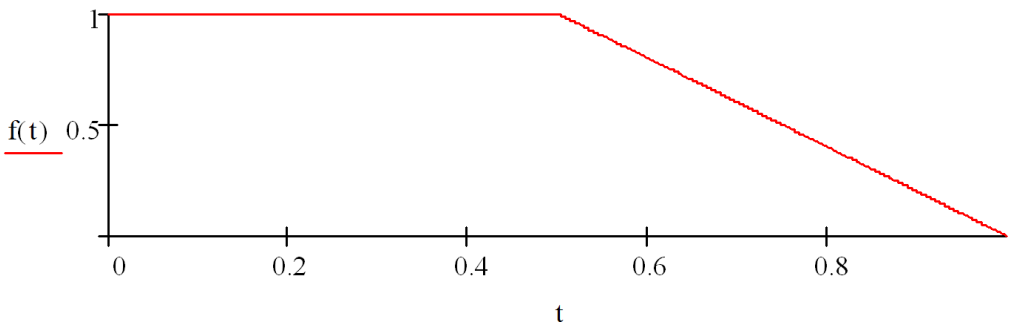
Таблица 1.2 – Варианты исследуемых сигналов

Код сигнала	Параметры, аналитическое определение и временная диаграмма сигнал в пределах одного периода
1	2
1	$U := 1 \quad \tau_1 := \frac{1}{4} \quad \tau_2 := \frac{3}{4}$ $f(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & \text{if } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ -U & \text{if } \tau_2 \leq t < 1 \end{cases}$ 

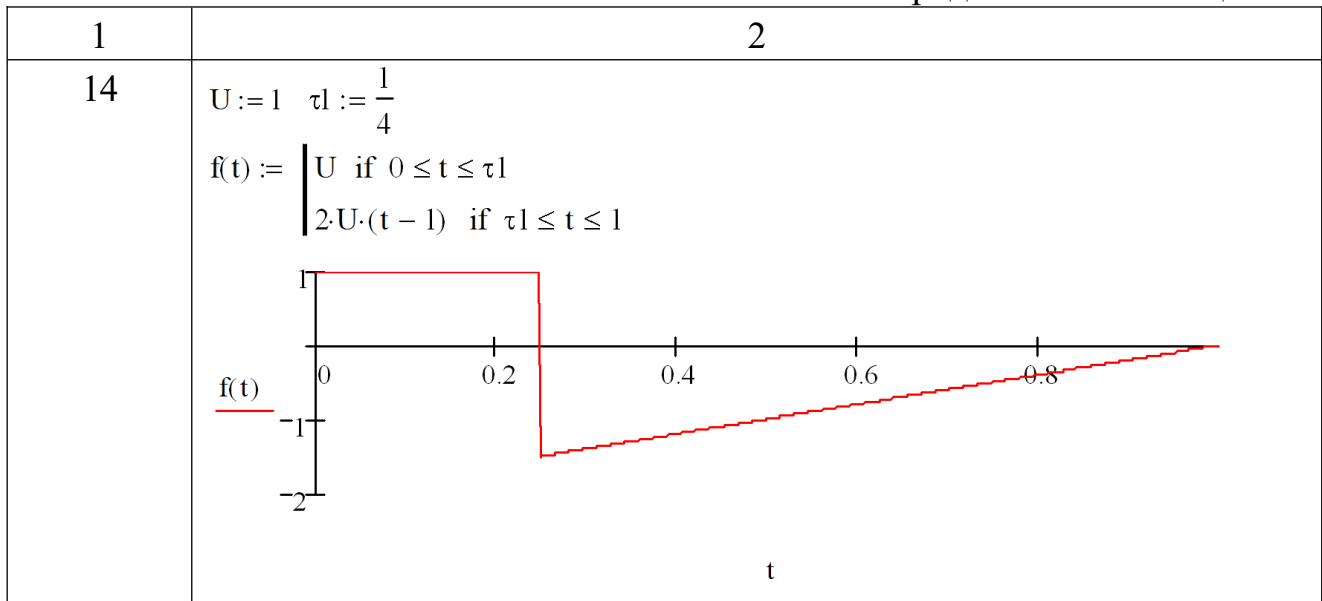
1	2
2	$U := 1 \quad \tau_1 := \frac{1}{4} \quad \tau_2 := \frac{3}{4}$ $f(t) := \begin{cases} 2U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & \text{if } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ -U & \text{if } \tau_2 \leq t < 1 \end{cases}$ 
3	$U := 5 \quad \tau_1 := \frac{1}{8} \quad \tau_2 := \frac{7}{8}$ $f(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & \text{if } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ -U & \text{if } \tau_2 \leq t < 1 \end{cases}$ 
4	$U := 1 \quad \tau_1 := \frac{1}{4} \quad \tau_2 := \frac{3}{4}$ $f(t) := \begin{cases} 4U \cdot t & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ U & \text{if } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ U \cdot [1 - 4 \cdot (t - \tau_2)] & \text{if } \tau_2 \leq t < 1 \end{cases}$ 

1	2
5	$U := 1 \quad \tau_1 := \frac{3}{4}$ $f(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ U \cdot [1 - 4 \cdot (t - \tau_1)] & \text{if } \tau_1 \leq t < 1 \end{cases}$ 
6	$U := 5 \quad \tau_1 := \frac{1}{4} \quad \tau_2 := \frac{3}{4}$ $f(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & \text{if } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ U & \text{if } \tau_2 \leq t \leq 1 \end{cases}$ 
7	$U := 1 \quad \tau_1 := \frac{3}{4}$ $f(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ -U \cdot [1 - 4 \cdot (t - \tau_1)] & \text{if } \tau_1 \leq t < 1 \end{cases}$ 

1	2
8	$U := 5 \quad \tau_1 := \frac{1}{8} \quad \tau_2 := \frac{1}{2}$ $f(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & \text{if } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ -U \cdot \frac{t}{\tau_2} & \text{if } \tau_2 \leq t \leq 1 \end{cases}$ 
9	$U := 5 \quad \tau_1 := \frac{1}{8} \quad \tau_2 := \frac{7}{8}$ $f(t) := \begin{cases} 8U \cdot t & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & \text{if } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ -U & \text{if } \tau_2 \leq t \leq 1 \end{cases}$ 
10	$U := 1 \quad \tau_1 := \frac{1}{8} \quad \tau_2 := \frac{7}{8}$ $f(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ U \cdot t & \text{if } \tau_1 \leq t \leq 1 \end{cases}$ 

1	2
11	$U := 1 \quad \tau_1 := \frac{1}{4}$ $f(t) := \begin{cases} 2U \cdot t & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ U & \text{if } \tau_1 \leq t \leq 1 \end{cases}$ 
12	$U := 1 \quad \tau_1 := \frac{1}{2}$ $f(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & \text{if } \tau_1 \leq t \leq 1 \end{cases}$ 
13	$U := 1 \quad \tau_1 := \frac{1}{2}$ $f(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ 2U \cdot (1 - t) & \text{if } \tau_1 \leq t \leq 1 \end{cases}$ 

Продолжение таблицы 1.2



Примечание – В таблице 1.2 параметр U измеряется в вольтах, а временные интервалы τ_1 и τ_2 – в секундах.

Таблица 1.3 – Варианты индивидуальных заданий

Вариант	Код сигнала	
1	1	9
2	2	10
3	3	11
4	4	12
5	5	13
6	6	14
7	7	9
8	8	10
9	1	11
10	2	12
11	3	13
12	4	14
13	5	9
14	6	10

Примечание – Исследование эффекта Гиббса выполнить при трех значениях числа гармоник, например $N = 10, 15$ и 20 .

Содержание отчета и его форма.

Отчет по работе оформляется в виде текстового документа и должен включать:

- а) название работы;
- б) цель и программу работы;
- в) формулировку индивидуального задания и результат его выполнения;
- г) краткие выводы по результатам выполнения работы.

Вопросы для защиты работы

1. Как определить постоянную составляющую спектра Фурье периодического сигнала?
2. Как определить коэффициент k -ой косинусной (синусной) составляющей спектра Фурье периодического сигнала?
3. Что такое комплексный спектр периодического сигнала?
4. Что такое амплитудный спектр периодического сигнала?
5. Что такое фазовый спектр периодического сигнала?
6. Что такое гармоника?
7. Каковы особенности спектров периодических сигналов?
8. Как определить период периодического сигнала по его спектру?
9. Какие характеристики формы периодических сигналов вы знаете?
10. Что такое коэффициент гармоник?
11. Какова методика выполнения индивидуального задания?
12. Какие выводы можно сделать по результатам выполнения индивидуального задания?

Практическое занятие 2

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ИМПУЛЬСНЫХ СИГНАЛОВ

Цель и содержание

Цель – приобретение навыков спектрального анализа и синтеза импульсных сигналов.

Содержание работы:

- изучение теоретического обоснования и примера спектрального анализа и синтеза импульсного сигнала;
- выполнение индивидуального задания и оформление отчета;
- защита отчета по работе.

Теоретическое обоснование

Спектральный анализ и синтез одиночных импульсных сигналов

Анализ одиночного импульса позволяет определить спектр разнообразных сигналов. Перейти от периодической функции к одиночному импульсу можно путем увеличения периода T . При этом промежутки между отдельными спектральными составляющими $\Delta f = 1/T$ будут уменьшаться, что позволяет определять спектральные составляющие с помощью выражения:

$$c_k = S(\omega_k) \Delta f = S(\omega_k) \Delta \omega / 2\pi ,$$

где $S(\omega_k)$ называется спектральной плотностью, размерность которой В/Гц.

Подставив последнее выражение в формулу (1.4), преобразуем ряд Фурье в комплексной форме к виду:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega_k) \exp(jk\omega_1 t) \Delta\omega$$

В пределе при периоде $T \rightarrow \infty$ и частоте $\omega_1 = 2\pi/T \rightarrow 0$ дискретные значения частоты $\omega_k = k\omega_1$ заменяются непрерывной величиной ω , а сумма ряда Фурье, записанного в комплексной форме, – на интеграл:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.1)$$

Входящая в (2.1) функция $S(\omega)$ есть спектральная функция импульса:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.2)$$

Примечание – В отечественной технической литературе функцию $S(\omega)$ часто называют спектральной плотностью импульсного сигнала.

Интегралы (2.2) и (2.1) называются соответственно прямым и обратным интегральным преобразованием Фурье.

Чтобы интегральное преобразование Фурье было применимо, сигнал $s(t)$ должен удовлетворять следующим требованиям:

-должны выполняться условия Дирихле (см. теоретическое обоснование работы 1);

-сигнал должен быть абсолютно интегрируемым. Это означает, что интеграл от его модуля на интервале $-\infty < t < \infty$ должен быть конечной величиной:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty.$$

Примечание – Привлечение математического аппарата обобщенных функций предоставляет возможность выполнения Фурье-анализа и для некоторых сигналов, не удовлетворяющих перечисленным требованиям[3].

Если использовать не круговую частоту ω , а циклическую $f=2\pi/\omega$, формулы прямого и обратного преобразования Фурье становятся симметричными, отличаясь лишь знаком в показателе экспоненты:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad (2.3)$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (2.4)$$

Поясним физический смысл приведенных выражений прямого и обратного преобразований Фурье. Согласно (2.4) одиночный импульс произвольной формы, описываемый вещественной функцией $s(t)$, представляется бесконечной суммой гармонических колебаний. Сами эти колебания бесконечно малы по амплитуде и отличаются по частоте на бесконечно малую величину. Это отличие по частоте составляет df , а амплитуда составляющей $S(f)df$, где $S(f)$ — есть спектральная плотность размерностью В/Гц. Поскольку $S(f)$ — есть непрерывная функция, то спектр одиночного импульса является сплошным.

Если анализируемый сигнал $s(t)$ — вещественная функция, то соответствующая спектральная функция импульса $S(\omega)$ является «сопряженно-симметричной» относительно нулевой частоты. Это означает, что значения спектральной функции импульса $S(\omega)$ на частотах ω и $-\omega$ являются комплексно-сопряженными по отношению друг другу:

$$S(-j\omega) = S^*(j\omega).$$

Если $s(t)$ — четная функция, то, как и в случае ряда Фурье, спектр будет чисто вещественным и, следовательно, будет являться четной функцией. Если, напротив, $s(t)$ — функция нечетная, то спектральная функция импульса $S(\omega)$ будет чисто мнимой и нечетной.

Модуль спектральной функции импульса часто называют амплитудным спектром, а ее аргумент – фазовым спектром: □

$$|S(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 S(j\omega) + \operatorname{Im}^2 S(j\omega)}, \quad (2.5)$$

$$\arg S(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} S(j\omega)}{\operatorname{Re} S(j\omega)}. \quad (2.6)$$

Легко показать, что для вещественного сигнала амплитудный спектр является четной, а фазовый – нечетной функцией частоты:

$$|S(-j\omega)| = |S(j\omega)|, \\ \arg |S(-j\omega)| = -\arg |S(j\omega)|.$$

Пример расчета спектральной функции импульсного сигнала и соответствующие графики будут приведены далее.

Итак, прямое интегральное преобразование Фурье (2.2) и (2.3) ставит в соответствие сигналу, заданному во времени, его спектральную функцию. При этом осуществляется переход из временной области в частотную область. Прямое и обратное интегральное преобразование Фурье являются взаимно-однозначными, поэтому представление сигнала в частотной области (спектральная функция импульса) содержит ровно столько же информации, сколько и исходный импульсный сигнал, заданный во временной области.

При частоте $f=0$ из формулы (2.3) следует результат:

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt,$$

позволяющий по «площади импульса» быстро определить центральное значение амплитуды спектральной плотности импульса.

Определим энергию одиночного импульса, исходя из спектрального и временного представлений сигнала. При активной нагрузке в 1 Ом соответственно запишем:

$$W_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df, \quad (2.7)$$

$$W_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt. \quad (2.8)$$

Значения энергии, полученные по обоим методам – спектральному и временному – должны быть равны: $W_1=W_2$. Однако поскольку полоса пропускания физических устройств обработки сигналов всегда ограничена, то в первом случае следует записать:

$$W_1 = \int_{-f_v}^{f_v} |S(f)|^2 df$$

и соответственно получить $W_1 < W_2$, где f_v – верхняя частота полосы пропускания физического устройства обработки сигналов.

Введем параметр $K_w = W_1/W_2$, который назовем коэффициентом уменьшения энергии импульса по причине ограниченной полосы пропускания физического устройства обработки сигналов. При этом можно решить и обратную задачу: исходя из допустимой величины коэффициента K_w , следует определить минимально возможное значение частоты f_v . В приводимой ниже программе MathCAD принято значение $K_w=0,95$, для которого определено значение f_v . Очевидно, что в зависимости от формы импульса при одном и том же значении K_w могут быть получены различные величины f_v .

Рассмотрим пример определения спектральной плотности одиночного прямоугольного импульса (рисунок 2.1).

Рисунок 2.1 – Одиночный прямоугольный импульс

В основе приводимой ниже программы MathCAD (рисунок 2.2 – 2.4) лежат выражения (2.3) – (2.6). В программе используются следующие допущения и условные обозначения:

а) длительность одиночного импульса $s(t)$ равна τ , вне импульса функция $s(t) = 0$. Поэтому бесконечные пределы интегрирования в формулах (2.3) и (2.8) заменяются конечными величинами. Размерность величин при расчете следующая:

-при значении t и временного интервала τ в секундах – частота f измеряется в Гц;

-при значении t и временного интервала τ в миллисекундах – f измеряется в кГц;

-при значении t и временного интервала τ в микросекундах – f измеряется в МГц;

б) коэффициент уменьшения энергии импульса по причине ограниченной полосы пропускания K_W обозначается как KW, верхняя частота полосы пропускания f_v , – как fv;

в) в программе сначала представлены исходные параметры и функция $s(t)$. Затем согласно (2.3), (2.5) и (2.6) рассчитываются зависимости $S(f)$, $|S(f)|$ и $\arg S(f)$. Далее строится график спектральной функции импульса $S(f)$, амплитудного $S_{mod}(f) = |S(f)|$ и фазового $\Theta(f) = \arg S(f)$ спектров импульса. Исходя из выбранного значения fv, рассчитывается коэффициент KW.

Программа и результаты спектрального анализа одиночного импульса прямоугольной формы (рисунок 2.1) приведены на рисунках 2.2 – 2.4.

Программа спектрального анализа и синтеза прямоугольного импульса

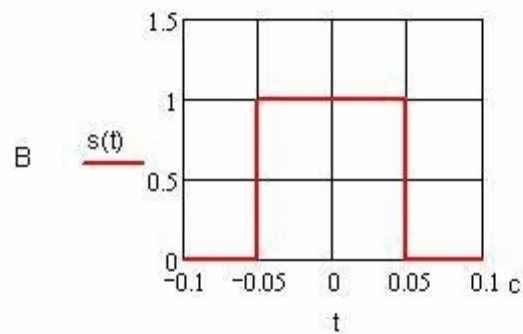
Дано: $AM := 1 \text{ В}$ $\tau := 0.1 \text{ с}$

Решение:

Шаг 1. Задаем импульсный сигнал $s(t)$.

$$s(t) := \begin{cases} AM & \text{if } 0 \leq |t| \leq 0.5 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } |t| \geq 0.5 \cdot \tau \end{cases}$$

Шаг 2. Строим временную диаграмму сигнала $s(t)$.



Шаг 3. Применяем прямое интегральное преобразование Фурье к сигналу $s(t)$.

$j := \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

$$S(f) := \int_{-0.5 \cdot \tau}^{0.5 \cdot \tau} s(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt \quad \text{- спектральная функция импульса, В/Гц.}$$

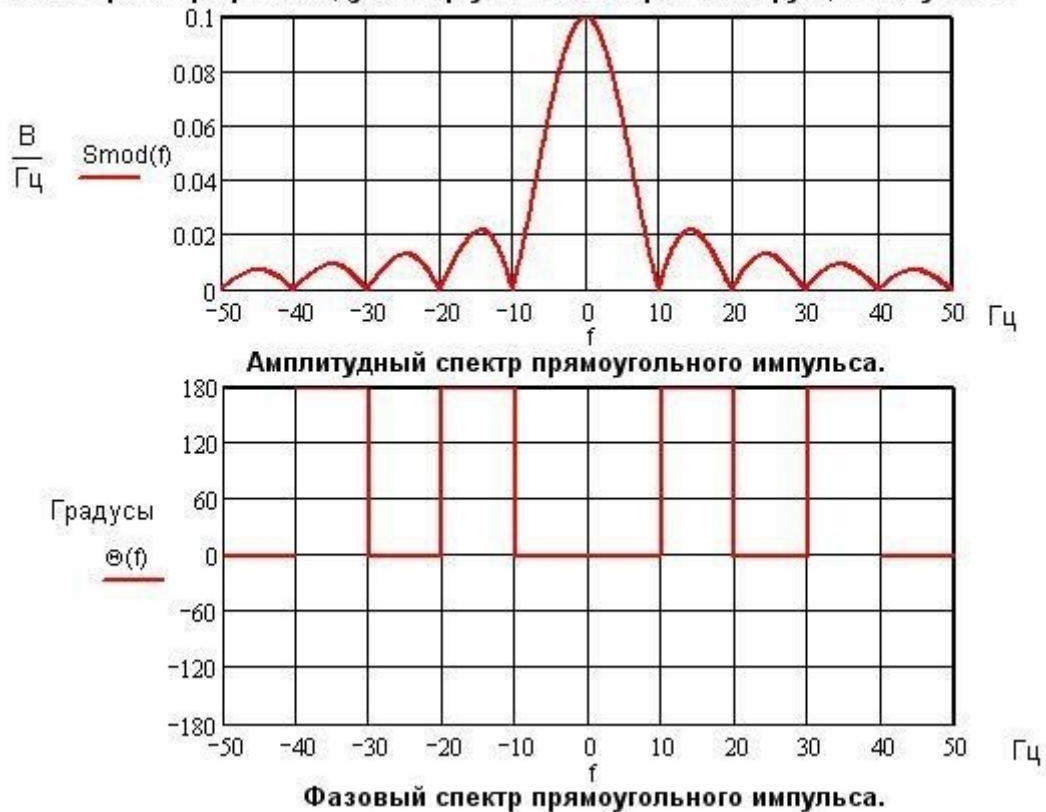
Шаг 4. Находим модуль и аргумент спектральной функции импульса.

$S_{\text{mod}}(f) := |S(f)|$ - модуль спектральной функции импульса, В/Гц.

$\Theta(f) := \frac{180}{\pi} \arg(S(f))$ - аргумент спектральной функции импульса, градусы.

Рисунок 2.2 – Начало программы спектрального анализа и синтеза прямоугольного импульса

Шаг 5. Строим графики модуля и аргумента спектральной функции импульса.



Шаг 6. Определяем верхнюю частоты полосы пропускания f_v исходя из требования, что коэффициент уменьшения энергии импульса, по причине ограниченной полосы пропускания, должен удовлетворять условию $KW=0,95$.

Шаг 6.1. Задаемся начальным значением f_v в Гц

$$f_v := 20$$

Шаг 6.2. Определим энергию одиночного импульса, исходя из спектрального и временного представлений сигнала:

$$W1 := \int_{-f_v}^{f_v} (|S(f)|)^2 df \quad W1 = 0.095 \quad W2 := \int_{-0.5 \cdot \tau}^{0.5 \cdot \tau} s(t)^2 dt \quad W2 = 0.1$$

Шаг 6.3. Находим коэффициент уменьшения энергии импульса по причине ограниченной полосы пропускания ($f_v = 20$ Гц):

$$KW := \frac{W1}{W2} \quad KW = 0.95$$

Шаг 6.4. Убеждаемся в том, что коэффициент уменьшения энергии импульса по причине ограниченной полосы пропускания не менее требуемого значения $KW=0,95$.

Ответ: $f_v = 20$ Гц

Примечание - Если найденное значение параметра KW окажется меньше требуемого ($KW=0,95$), то необходимо увеличить верхнюю частоту полосы пропускания f_v и повторить шаги с 6.1 по 6.4.

Рисунок 2.3 – Продолжение программы спектрального анализа и синтеза прямоугольного импульса

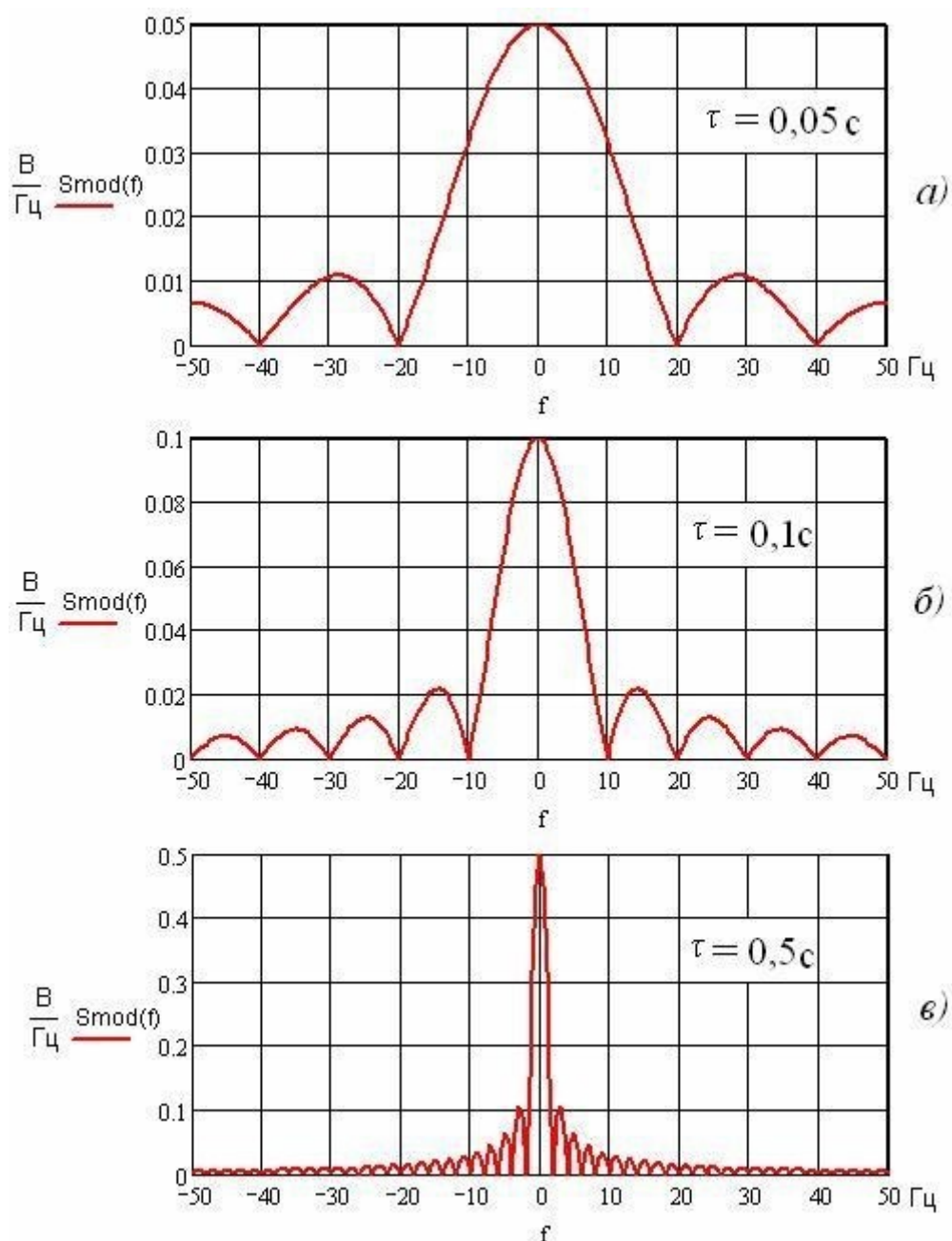


Рисунок 2.4 – Окончание программы спектрального анализа и синтеза прямоугольного импульса.

Графики модуля спектральной функции импульса, рассчитанные по программе (рисунок 2.2 – 2.4) при условии, что длительность прямоугольного импульса измеряется в секундах и равна $\tau=0,05 \text{ c}$, $0,1 \text{ c}$ и $0,5 \text{ c}$, построены на рисунке 2.5.

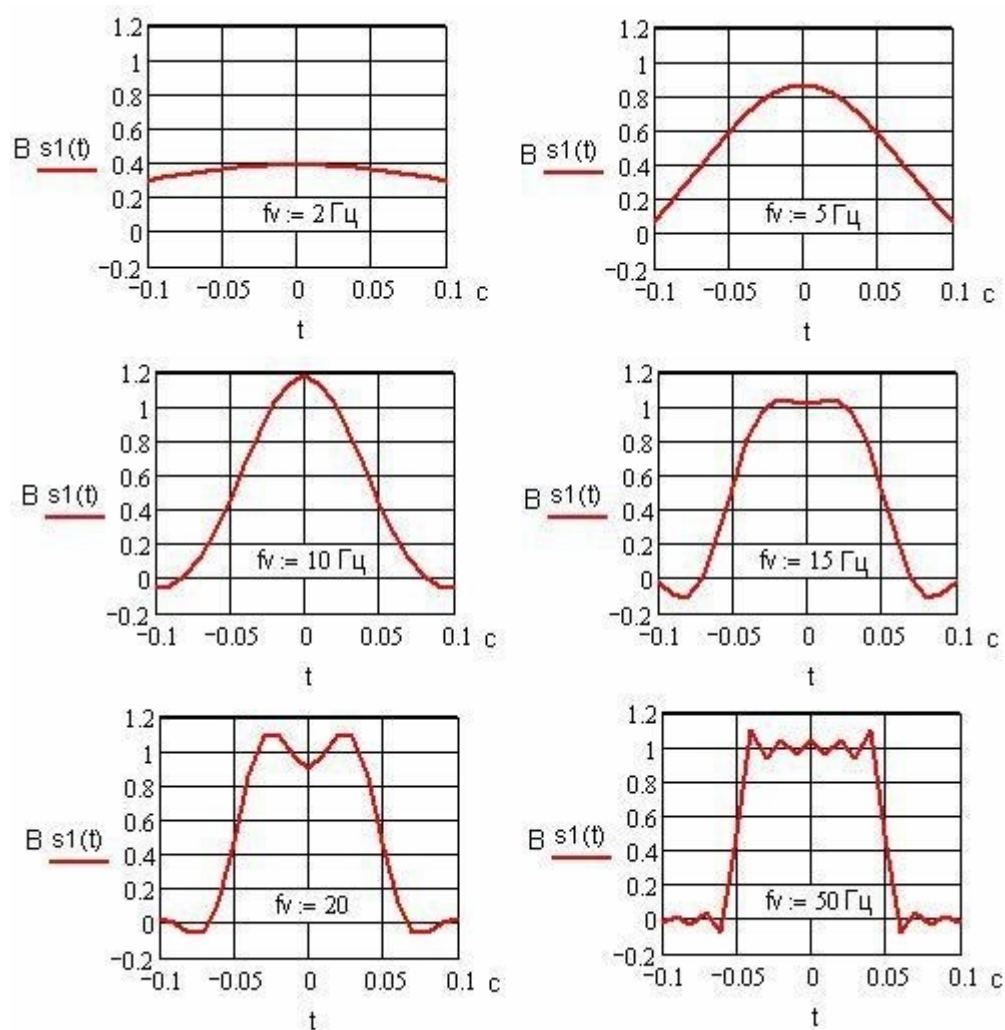


Рисунок 2.5 – Графики модуля спектральной функции прямоугольного импульса.

Временные диаграммы, иллюстрирующие результаты спектрального синтеза прямоугольного импульса программе (рисунок 2.2 – 2.4) при длительности импульса $t=0,1\text{ c}$ и разных значениях верхней частоты укороченного спектра $f_v=2, 5, 10, 20$ и 50 Гц , приведены на рисунке 2.6.

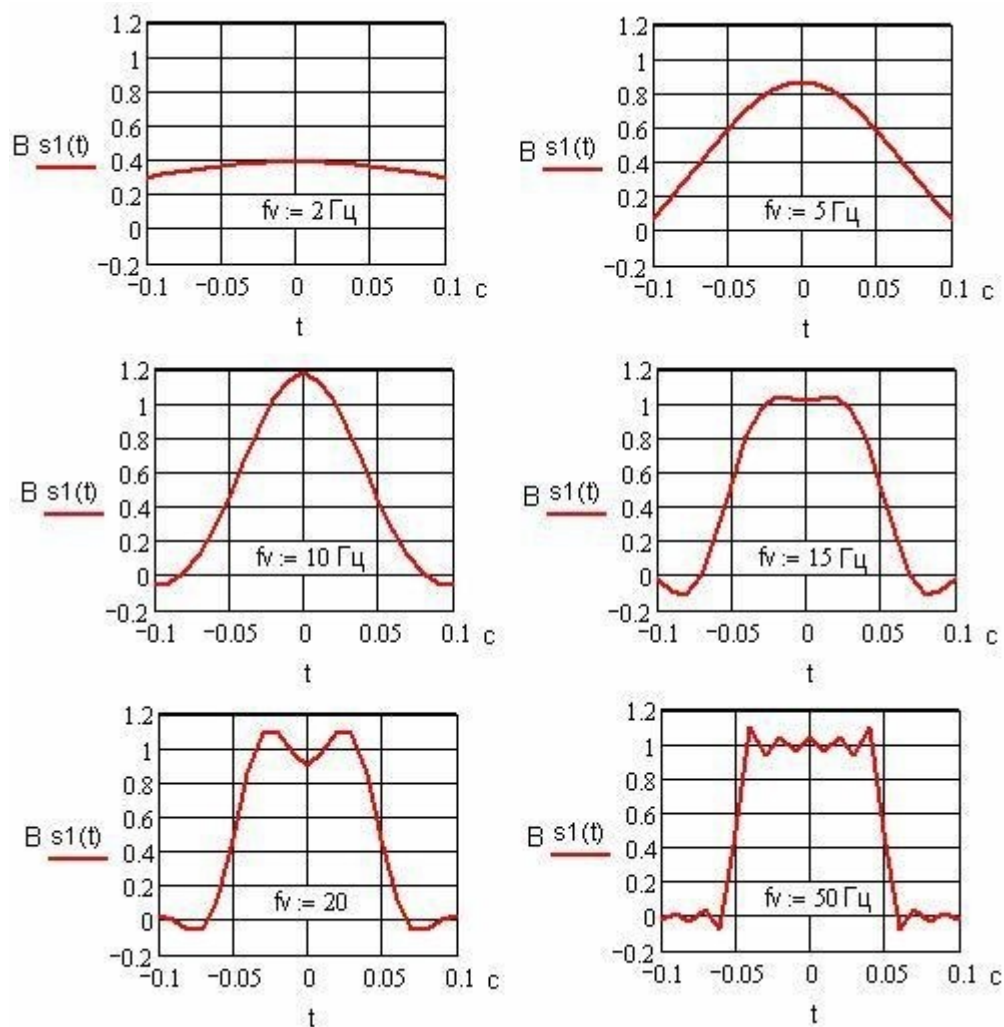


Рисунок 2.6 – Результаты синтез прямоугольного импульса.

Из анализа временных диаграмм (рисунок 2.6) следует вывод о том, что чем больше величина верхней частоты полосы пропускания f_v , тем лучше качество восстановления прямоугольного импульса. Количественной мерой качества восстановления прямоугольного импульса служит евклидова метрика (рисунок 2.4). Чем меньше значение параметра метрики ϵ , тем лучше качество восстановления.

При прямоугольном симметричном импульсе (рисунок 2.1) выражение для спектральной плотности (2.3) легко найти аналитическим путем:

$$S(f) = \int_{-A}^{A} e^{-j2\pi ft} dt = \left. \frac{\sin(2\pi ft)}{2} \right|_{-A}^{A} = A \frac{\sin(2\pi fA)}{2\pi fA}, \quad (2.9)$$

$$-\tau/2 \quad m \quad m \quad -\tau/2 \quad m \quad 2\pi f$$

$$2\pi f$$

где A_m – амплитуда;

τ – длительность импульса (рисунок 2.1).

При частоте $f=0$ из формулы (2.9) имеем: $S_{\text{пл}} = A_m \tau$.

Установим связь между сплошным спектром одиночного импульса и линейчатым спектром периодического сигнала, составленного из таких одиночных импульсов. Для упрощения анализа выберем импульс симметричной формы, описываемый четной функцией $s(t)$ (рисунок 2.7).

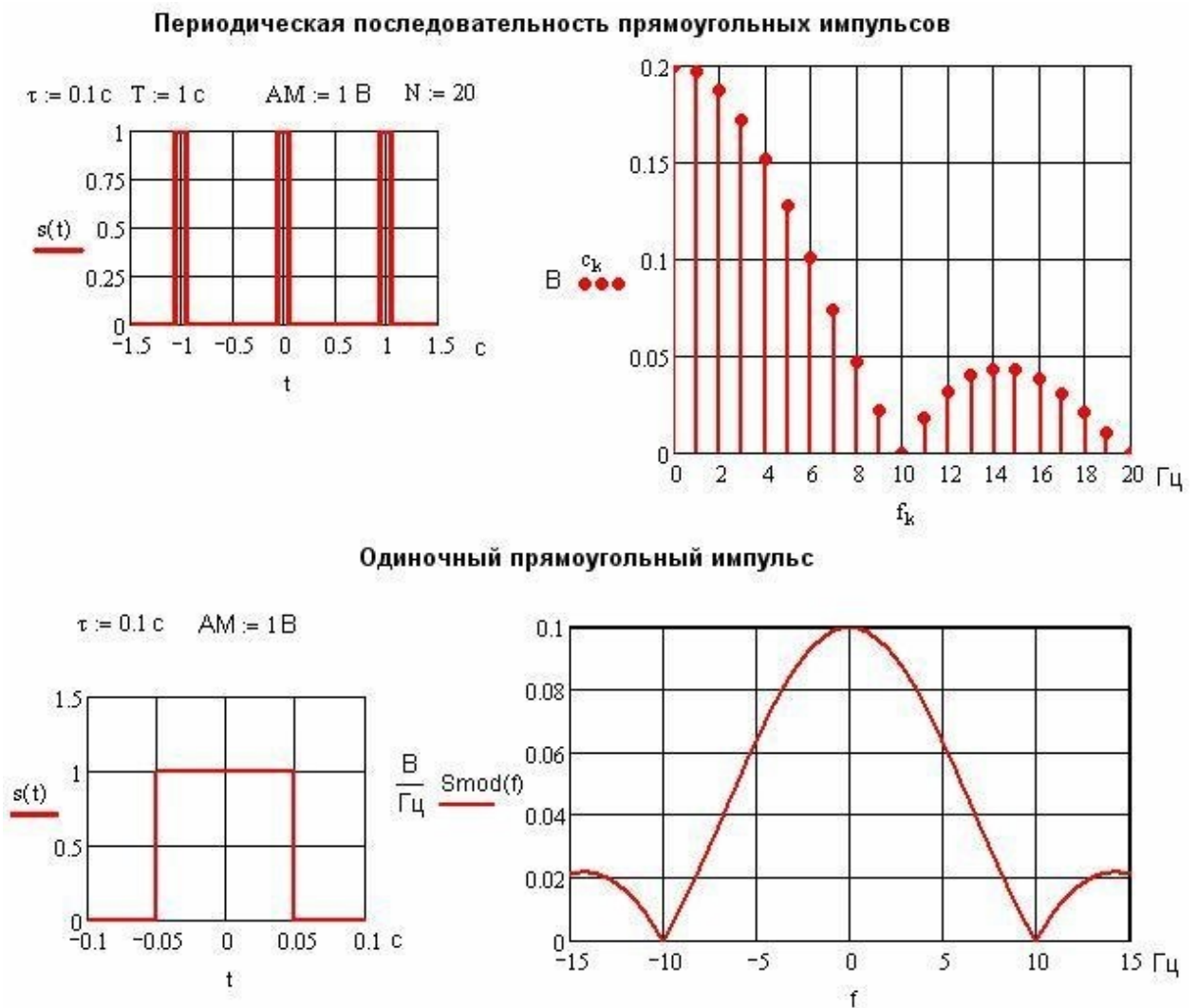


Рисунок 2.7 – Периодический сигнал, одиночный импульс и их спектры.

На основании формулы (1.3) при четной функции $s(t)$ для спектральной составляющей с частотой $k\omega_1$ периодической последовательности импульсов, представляемой в виде ряда Фурье, запишем:

$$A_k = \frac{4}{T} \int_0^{0,5\tau} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt.$$

Согласно интегралу Фурье(2.2), для спектральной функции одиночного импульса на той же частоте $\omega = k\omega_1$, имеем:

$$S_k = \int_{-0,5\tau}^{0,5\tau} s(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = 2 \int_0^{0,5\tau} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt.$$

Из сравнения полученных выражений следует:

$$A_k = \frac{2}{T} S_k = 2f S_k.$$

Последнее выражение позволяет сделать такой вывод: по форме оба спектра совпадают, причем огибающая линейчатого спектра периодической последовательности импульсов с точностью до постоянного множителя, равного $2/T$, повторяет сплошной спектр одиночного импульса. Этот вывод справедлив и для импульсов несимметричной формы, что подтверждают результаты проведенных расчетов и построенных на их основании графиков (рисунок 2.6).

В зависимости от формы импульса его энергия сосредоточена в определенной полосе частот. При этом ширину математического спектра $\Delta f_{\text{сп}}$ можно количественно определять с помощью введенного коэффициента уменьшения энергии импульса $K_W = W_1/W_2 < 1$ по причине ограниченной полосы пропускания цепи. Связь между длительностью одиночного импульса τ и шириной его физического спектра Δf определяет равенство $\Delta f \tau = \text{const}$, где $\Delta f = 0,5 \Delta f_{\text{сп}}$. Из последнего равенства следует известный вывод о том, что чем короче по времени импульс (отдельный или периодически повторяющийся), тем больше ширина его спектра. При $\tau \rightarrow 0$ ширина спектра $\Delta \rightarrow \infty$.

Произведение $\Delta f\tau$ зависит от выбранного значения KW и вида импульса. Так, для прямоугольного импульса при $KW=0,9$ имеем $\Delta f\tau=1$.

Примечание – Произведение длительности импульса на ширину его физического спектра (эффективную ширину спектра) называется базой сигнала и обозначается B . Таким образом, база прямоугольного импульса равна $B=\Delta f\tau=1$. Сигналы, у которых база равна или близка к единице, называются простыми.

Из формулы (2.3) следует, что амплитуда основного лепестка спектра одиночного импульса равна так называемой площади импульса:

$$S_0 = S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)dt .$$

Для прямоугольного одиночного импульса $S_0=AM\cdot\tau$, где AM – амплитуда импульса (рисунок 2.1). Размытость спектра, характеризуемая количеством «лепестков» и их амплитудой (рисунок 2.5), зависит от формы импульса.

Все сказанное следует учитывать при построении систем телекоммуникации[3]. Так, при близком расположении по частоте каналов телекоммуникации из-за размытости спектра излучения сигналов происходит их взаимное влияние друг на друга: часть энергии из одного канала проникает в другой, что приводит к взаимным помехам и снижает качество связи. В таком случае следует выбирать такие формы сигнала, у которых спектр излучения по возможности сжат. Сужение ширины спектра излучения сигнала необходимо также в рамках проблемы электромагнитной совместимости работы радиоэлектронных средств.

В другом случае, например, в широкополосных системах радиосвязи, спектр сигнала должен быть, наоборот, по возможности «размыт» в широкой

полосе частот, и поэтому следует выбирать сигнал, имеющий расширенный спектр излучения и значение базы $B \gg 1$.

Приведенная программа MathCAD (рисунки 2.2 – 2.4) является универсальной и может быть использована для спектрального анализа и синтеза любого детерминированного импульсного сигнала $s(t)$ □□.

Основные свойства преобразования Фурье, используемые при спектральном анализе импульсных сигналов, приведены в[3].

Аппаратура и программное обеспечение

Аппаратура. Для выполнения работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (числоцветов 256).

Программное обеспечение. Для выполнения работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 10 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении работы **запрещается:**

-самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;

-нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т. д.;

-принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

Методика и порядок выполнения работы

1. Запустите программу MathCAD.
2. По программе MathCAD (рисунки 2.2 – 2.4) выполните спектральный анализ и синтез одиночных импульсных сигналов в соответствии с вариантом индивидуального задания (таблицы 2.1 – 2.7).
3. Сохраните результаты выполнения индивидуального задания.
4. Сформируйте отчет по работе.
5. Подготовьтесь к ответу на вопросы для защиты работы.
6. Защитите работу.

Варианты заданий

В соответствии с вариантом индивидуального задания (таблица 2.1) необходимо:

- выполнить спектральный анализ и синтез двух из восьми одиночных импульсных сигналов, представленных в таблице 2.2;
- исследовать влияние параметров импульсов на их спектр (таблицы 2.3 – 2.9);
- исследовать влияние времени задержки импульсов на их спектр.

Номер варианта соответствует номеру фамилии студента в списке учебной группы (подгруппы). Импульсные сигналы, подлежащие исследованию для указанного варианта, отмечены в таблице 2.1 символом ■.

Примечание – Программу MathCAD исследования влияния параметров импульсов и времени задержки импульсов на их спектр разработать, обосновать и реализовать самостоятельно.

Таблица 2.1 – Типы импульсных сигналов, исследуемых в работе,
по вариантам.

Тип сигнала	Номер варианта													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Трапецеидальный импульс	■			■			■				■		■	
Односторонний экспоненциальный импульс								■		■				
Двусторонний экспоненциальный импульс		■				■						■	■	
Пилообразный импульс		■			■				■					
Треугольный импульс			■				■							■
Колоколообразный импульс			■						■		■	■		
Косинус-квадратный импульс				■		■		■						
Импульс типа $\sin x/x$	■				■					■				■

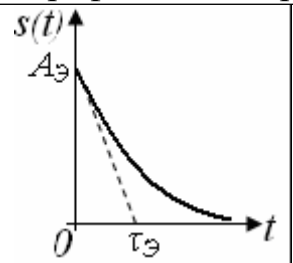
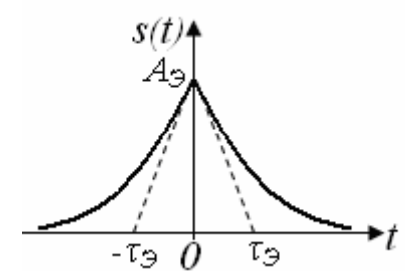
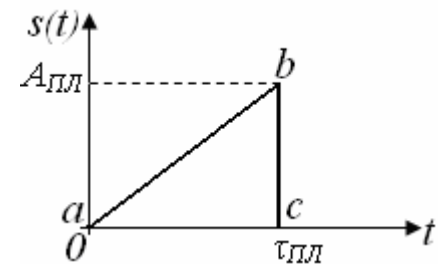
Содержание отчета и его форма

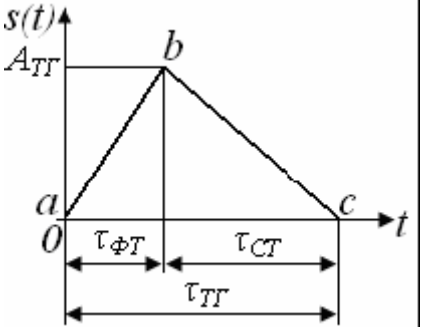
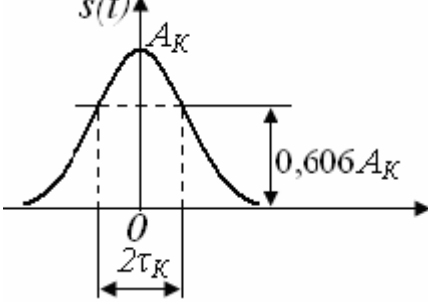
Отчет по работе оформляется в виде текстового документа
и должен включать:

1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Формулировку индивидуального задания и результат его выполнения.
4. Краткие выводы по результатам выполнения работы.

Таблица 2.2 – Термины, аналитическое и графическое определение номинальных форм и параметров исследуемых импульсов

Термин	Графическое определение	Аналитическое определение и параметры
Трапецеидальный импульс		$s(t) = \begin{cases} 0; & t < 0; \\ A_T \frac{t}{\tau_\Phi}; & 0 \leq t \leq \tau_\Phi; \\ A_T; & \tau_\Phi \leq t \leq \tau_T - \tau_C; \\ A_T \left(1 - \frac{t - \tau_T + \tau_C}{\tau_C} \right); & \tau_T - \tau_C \leq t \leq \tau_T; \\ 0; & t > \tau_T \end{cases}$ A_T – высота трапецеидального импульса; τ_T – длительность трапецеидального импульса; τ_Φ – длительность фронта трапецеидального импульса; τ_C – длительность среза трапецеидального импульса. <i>Примечание</i> – Отрезок ab называется фронтом трапецеидального импульса, отрезок bc – вершиной трапецеидального импульса, отрезок cd – срезом трапецеидального импульса.

Термин	Графическое определение	Аналитическое определение и параметры
Односторонний экспоненциальный импульс		$s(t) = \begin{cases} A_{\text{Э}} e^{-\frac{t}{\tau_{\text{Э}}}}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ $A_{\text{Э}}$ – высота одностороннего экспоненциального импульса; $\tau_{\text{Э}}$ – постоянная времени одностороннего экспоненциального импульса
Двусторонний экспоненциальный импульс		$s(t) = A_{\text{Э}} e^{-\frac{ t }{\tau_{\text{Э}}}}$ $A_{\text{Э}}$ – высота двустороннего экспоненциального импульса; $\tau_{\text{Э}}$ – постоянная времени двустороннего экспоненциального импульса.
Пилообразный импульс		$s(t) = \begin{cases} 0; & t < 0; \\ A_{\text{ПЛ}} \frac{t}{\tau_{\text{ПЛ}}}; & 0 \leq t \leq \tau_{\text{ПЛ}}; \\ 0; & t \geq \tau_{\text{ПЛ}}. \end{cases}$ $A_{\text{ПЛ}}$ – высота пилообразного импульса $\tau_{\text{ПЛ}}$ – длительность пилообразного импульса. <i>Примечание</i> – Отрезок ab называется прямым ходом пилообразного импульса, отрезок bc – обратным ходом пилообразного импульса.

Термин	Графическое определение	Аналитическое определение и параметры
Треугольный импульс		$s(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ A \frac{t}{\tau_{\Phi T}}; & 0 \leq t \leq \tau_{\Phi T} \\ A \left(1 - \frac{t - \tau_{\Phi T}}{\tau_{CT}} \right); & \tau_{\Phi T} \leq t \leq \tau_{\Phi T} + \tau_{CT} \\ 0; & t > \tau_{\Phi T} + \tau_{CT} \end{cases}$ $A_{ТГ}$ – высота треугольного импульса $t_{\Phi T}$ – длительность фронта треугольного импульса t_{CT} – длительность среза треугольного импульса; $t_{ТГ}$ – длительность треугольного импульса. <i>Примечание</i> – Отрезок ab называется фронтом треугольного импульса, отрезок bc – срезом треугольного импульса.
Колоколообразный импульс		$s(t) = A_K e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t}{\tau_K} \right)^2}$ A_K – высота колоколообразного импульса; $2\tau_K$ – интервал времени между точками перегиба колоколообразного импульса. <i>Примечание</i> – Значение параметра $2\tau_K$ определяется также по уровню $0,606A_K$.

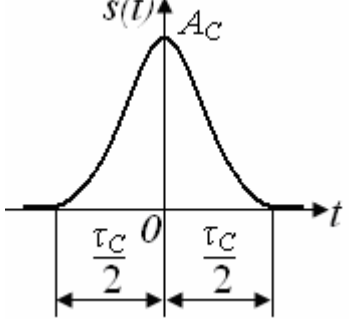
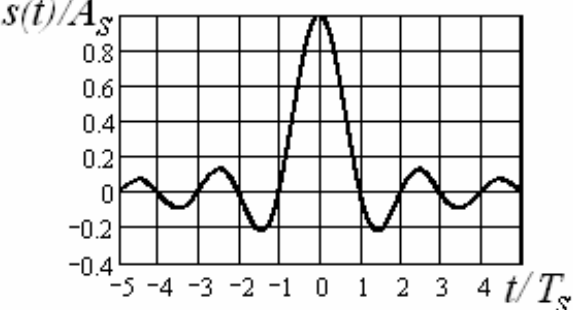
Термин	Графическое определение	Аналитическое определение и параметры
Косинус-квадратный импульс		$s(t) = \begin{cases} A_C \cos^2 \frac{\pi}{\tau_C} t; & -\frac{\tau_C}{2} \leq t \leq \frac{\tau_C}{2} \\ 0; & t > \frac{\tau_C}{2} \end{cases}$ A_C – высота косинус-квадратного импульса; τ_C – длительность косинус-квадратного импульса. Примечание – Значение параметра τ_C определяется также по уровню $0,5A_C$.
Импульс типа $\sin x/x$		$s(t) = A_S \frac{\sin \left(\pi t / T_S \right)}{\pi t / T_S}$ A_S – высота импульса типа $\sin x/x$; T_S – полупериод импульса типа $\sin x/x$. Примечание – Значение параметра T_S определяется как расстояние между смежными точками пересечения графика функции $\sin x/x$ оси абсцисс.

Таблица 2.3 – Варианты заданий для исследования трапецеидального импульса

Вариант	A_T , В	τ_T , мс	τ_Φ , мс	τ_C , мс	Вариант	A_T , В	τ_T , мс	τ_Φ , мс	τ_C , мс
1	1	1,0	0,1	0,2	8	8	8,0	2,5	1,5
2	2	2,0	0,4	0,4	9	9	9,0	3,5	2,5
3	3	3,0	0,8	1,2	10	10	10,0	2,5	4,5
4	4	4,0	0,5	1,0	11	11	11,0	3,5	2,5
5	5	5,0	1,5	1,5	12	12	12,0	4,5	1,5
6	6	6,0	2,0	1,0	13	13	13,0	3,5	3,5
7	7	7,0	2,0	3,0	14	14	14,0	4,5	3,5

Примечание к таблице 2.3 – При расчете спектральной функции трапецеидального импульса пределы интегрирования по времени рекомендуется выбирать от 0 до τ_T .

Таблица 2.4 – Варианты заданий для исследования одностороннего и двустороннего экспоненциального импульса

Вариант	A_Σ , В	τ_Σ , мс	Вариант	A_Σ , В	τ_Σ , мс
1	1	1,0	8	8	8,0
2	2	2,0	9	9	9,0
3	3	3,0	10	10	10,0
4	4	4,0	11	11	11,0
5	5	5,0	12	12	12,0
6	6	6,0	13	13	13,0
7	7	7,0	14	14	14,0

Примечания к таблице 2.4:

1. При расчете спектральной функции одностороннего экспоненциального импульса пределы интегрирования по времени рекомендуется выбирать от 0 до $3\tau_\Sigma$.

2. При расчете спектральной функции двустороннего экспоненциального импульса пределы интегрирования по времени рекомендуется выбирать от $-3\tau_\Sigma$ до $3\tau_\Sigma$.

Таблица 2.5 – Варианты заданий для исследования пилообразного импульса

Вариант	$A_{пл}, В$	$\square_{пл}, мс$	Вариант	$A_{пл}, В$	$\square_{пл}, мс$
1	1	1,0	8	8	8,0
2	2	2,0	9	9	9,0
3	3	3,0	10	10	10,0
4	4	4,0	11	11	11,0
5	5	5,0	12	12	12,0
6	6	6,0	13	13	13,0
7	7	7,0	14	14	14,0

Примечание к таблице 2.5 – При расчете спектральной функции пилообразного импульса пределы интегрирования по времени рекомендуется выбирать от 0 до $\tau_{пл}$

Таблица 2.6 – Варианты заданий для исследования треугольного импульса

Вариант	$A_{тг}, В$	$\tau_{фг}, мс$	$\tau_{ст}, мс$	$\tau_{тг}, мс$	Вариант	$A_{тг}, В$	$\tau_{фг}, мс$	$\tau_{ст}, мс$	$\tau_{тг}, мс$
1	1	0,4	0,6	1,0	8	8	3,0	5,0	8,0
2	2	0,8	1,2	2,0	9	9	3,0	6,0	9,0
3	3	1,2	1,8	3,0	10	10	4,5	5,5	10,0
4	4	1,0	3,0	4,0	11	11	3,0	8,0	11,0
5	5	1,5	3,5	5,0	12	12	6,0	6,0	12,0
6	6	2,0	4,0	6,0	13	13	4,0	9,0	13,0
7	7	3,0	4,0	7,0	14	14	8,0	6,0	14,0

Примечание к таблице 2.6 – При расчете спектральной функции пилообразного импульса пределы интегрирования по времени рекомендуется выбирать от 0 до $\tau_{тг}$.

Таблица 2.7 – Варианты заданий для исследования колоколообразного импульса

Вариант	A_s , В	$2\tau_k$, мс	Вариант	A_s , В	$2\tau_k$, мс
1	1	1,0	8	8	8,0
2	2	2,0	9	9	9,0
3	3	3,0	10	10	10,0
4	4	4,0	11	11	11,0
5	5	5,0	12	12	12,0
6	6	6,0	13	13	13,0
7	7	7,0	14	14	14,0

Примечание к таблице 2.7 – При расчете спектральной функции колоколообразного импульса пределы интегрирования по времени рекомендуется выбирать от $-3\tau_k$ до $3\tau_k$

Таблица 2.8 – Варианты заданий для исследования косинус-квадратного импульса

Вариант	A_s , В	τ_c , мс	Вариант	A_s , В	τ_c , мс
1	1	1,0	8	8	8,0
2	2	2,0	9	9	9,0
3	3	3,0	10	10	10,0
4	4	4,0	11	11	11,0
5	5	5,0	12	12	12,0
6	6	6,0	13	13	13,0
7	7	7,0	14	14	14,0

Примечание к таблице 2.8 – При расчете спектральной функции косинус-квадратного импульса пределы интегрирования по времени следует выбирать от $-\tau_c/2$ до $\tau_c/2$.

Таблица 2.9 – Варианты заданий для исследования импульса
типа $\sin(x)/x$

Вариант	A_s , В	T_s , мс	Вариант	A_s , В	T_s , мс
1	1	1,0	8	8	8,0
2	2	2,0	9	9	9,0
3	3	3,0	10	10	10,0
4	4	4,0	11	11	11,0
5	5	5,0	12	12	12,0
6	6	6,0	13	13	13,0
7	7	7,0	14	14	14,0

Примечание к таблице 2.9 – При расчете спектральной функции косинус-квадратного импульса пределы интегрирования по времени рекомендуется выбирать от $-5T_s$ до $5T_s$.

Вопросы для защиты работы

1. Что такое спектральная функция импульса?
2. Запишите прямое и обратное интегральное преобразование Фурье.
3. Каким требованиям должна удовлетворять импульсная функция времени $s(t)$ для того, чтобы её можно было подвергнуть спектральному анализу по Фурье?
4. Как определить модуль и фазу спектральной плотности импульса?
5. Как можно быстро определить центральное значение амплитуды спектральной плотности импульса?
6. Что такое коэффициент уменьшения энергии импульса?
7. Что такое база сигнала?
8. Каковы особенности спектральной функции прямоугольного импульса?
9. Какую связь можно установить между сплошным спектром одиночного импульса и линейчатым спектром периодического сигнала, составленного из таких одиночных импульсов?
10. Как решить задачу спектрального синтеза импульсных сигналов?

11. Какова методика выполнения индивидуального задания?
12. Каковы особенности спектральной функции исследованных импульсных сигналов?
13. Как формулируется свойство линейности преобразования Фурье?
14. Как сказывается на спектральной функции задержка сигнала во времени?
15. Как сказывается на спектральной функции изменение масштаба оси времени сигнала?
16. Как сказывается на спектральной функции дифференцирование сигнала во временной области?
17. Как сказывается на спектральной функции интегрирование сигнала во временной области?
18. Каковы свойства спектра свертки сигналов?
19. Каковы свойства спектра произведения сигналов?
20. Как сказывается на спектральной функции умножение сигнала на гармоническую функцию?
21. Составьте программу, подтверждающую свойство линейности преобразования Фурье.
22. Составьте программу, подтверждающую свойство линейности преобразования Фурье.
23. Составьте программу, подтверждающую свойство преобразования Фурье, связанное с умножением сигнала на гармоническую функцию.

Практическое занятие 3

ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Цель и содержание

Цель— приобретение навыков исследования линейных систем, используемых для преобразования сигналов.

Содержание работы:

- изучение теоретического обоснования и примеров исследования линейных систем;
- выполнение индивидуального задания и оформление отчета;
- защита отчета.

Теоретическое обоснование

Связь между входными $x(t)$ и выходным $y(t)$ сигналом линейной стационарной системы (рисунок 3.1)

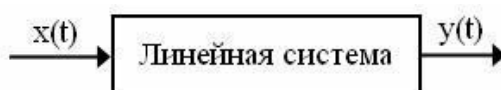


Рисунок 3.1 – Линейная система

может быть выражена в виде линейного дифференциального уравнения вида

$$\begin{aligned}
 & b_0 y(t) + \frac{dy(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \dots + \frac{d^m y(t)}{dt^m} = \\
 & a_0 x(t) + \frac{dx(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \dots + \frac{d^n x(t)}{dt^n}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где a_i, b_i — постоянные коэффициенты.

При анализе линейных систем операторным методом используется преобразование Лапласа[1], согласно которому уравнение (3.1) в операторной форме примет вид:

$$(b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m) y(s) = (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n) x(s) \quad (3.2)$$

Операторной передаточной функцией линейной системы

$H(s)$ называется отношение изображения $y(s)$ по Лапласу выходного сигнала к изображению $x(s)$ входного сигнала [2 – 4]:

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m} \quad (3.3)$$

или при разложении числителя и знаменателя на множители ($n < m$):

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{(s - s_{a1})(s - s_{a2}) \dots (s - s_{an})}{(s - s_{b1})(s - s_{b2}) \dots (s - s_{bm})}, \quad (3.4)$$

где $k = a_n/b_m$ – коэффициент усиления (gain) линейной системы;

s_{a1}, s_{a2}, s_{an} – корни уравнения

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n = 0,$$

называемые нулями (zero) операторной передаточной функции $H(s)$;

s_{b1}, s_{b2}, s_{bm} – корни уравнения

$$B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m = 0$$

называемые полюсами (pole) операторной передаточной функции $H(s)$.

Здесь m – порядок линейной системы.

Комплексная передаточная функция линейной системы есть отношение спектральной функции $S_y(j\omega)$ выходного сигнала к спектральной функции $S_x(j\omega)$ входного сигнала [2 – 4]:

$$H(j\omega) = \frac{S_y(j\omega)}{S_x(j\omega)} \quad (3.5)$$

Определить $H(j\omega)$ можно основываясь на положении о том, что интеграл Фурье есть

частный случай преобразования Лапласа при $s = j\omega$ (приложение А). Поэтому путем

подстановки $s = j\omega$ из передаточной функции (3.3)
получим для комплексной передаточной функции системы:

$$H(j\omega) = \frac{S_y(j\omega)}{S_x(j\omega)} = \frac{a_0 + ja_1\omega - a_2\omega^2 - ja_3\omega^3 + \dots + a_n(j\omega)^n}{b_0 + jb_1\omega - b_2\omega^2 - jb_3\omega^3 + \dots + b_m(j\omega)^m} \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) представим в виде:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j \arg H(j\omega)} = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \operatorname{Re}[H(j\omega)] + j \operatorname{Im}[H(j\omega)] \quad (3.7)$$

где $H(\omega)$ – модуль комплексной передаточной функции системы:

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2[H(j\omega)] + \operatorname{Im}^2[H(j\omega)]}; \quad (3.8)$$

$\varphi(\omega)$ – аргумент комплексной передаточной функции системы:

$$\varphi(\omega) = \arg K(j\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[K(j\omega)]}{\operatorname{Re}[K(j\omega)]}; \quad (3.9)$$

$\operatorname{Re}[H(j\omega)]$, $\operatorname{Im}[H(j\omega)]$ – действительная и мнимая части комплексной передаточной функции системы.

Амплитудно-частотная характеристика линейной системы (АЧХ)

есть модуль комплексной передаточной функции системы. Физически АЧХ определяет зависимость отношения амплитуды $U_y(\omega)$ выходного сигнала к амплитуде $U_x(\omega)$ входного сигнала от частоты ω входного сигнала при его постоянной амплитуде $U_x(\omega) = \text{const}$:

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \left. \frac{U_y(\omega)}{U_x(\omega)} \right|_{U_x(\omega) = \text{const}}$$

Фазочастотная характеристика линейной системы (ФЧХ) есть аргумент комплексной передаточной функции системы. Физически ФЧХ отражает зависимость разности фазы выходного и входного сигнала от частоты входного сигнала при его постоянной амплитуде:

$$\varphi(\omega) = \arg K(j\omega) = [\varphi_y(\omega) - \varphi_x(\omega)]_{U_x(\omega) = \text{const}}$$

Переходная характеристика линейной системы $h_i(t)$ есть отклик
линейной системы на входное воздействие в виде единичного скачка $\Phi(t)$

(таблица 3.1) при нулевых начальных условиях. Нулевые начальные условия подразумевают отсутствие в системе запасенной энергии.

Согласно определению $h_1(t)$ задается выражением:

$$h_1(t) = y(t)|_{x(t)=\Phi(t)} \quad (3.10)$$

Таблица 3.1 – Единичный скачек и единичный импульс

Термин	Математическая формула, обозначение величины и свойства	График
Единичный скачек (функция Хевисайда)	$\Phi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$ Функцию единичного скачка удобно использовать при создании математических выражений для сигналов конечной длительности. Простейшим примером является формирование прямоугольного импульса амплитудой A и длительностью τ: $S(t) = A[\Phi(t) - \Phi(t - \tau)]$	
Единичный импульс	$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$ Площадь единичного импульса: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ Фильтрующее свойство единичного импульса: $\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \delta(t - t_0) dt = s(t_0)$	

Найти аналитическую зависимость для временной характеристики типа $h_1(t)$ можно по изображению выходного сигнала: $y(s) = x(s)H(s)$. Поскольку изображение единичной функции по Лапласу $\Phi(t) \rightarrow 1/s$, то переходная

характеристика есть оригинал передаточной функции, умноженной на $1/s$: $H(s)/s \rightarrow h_1(t)$.

Найти оригинал функции по ее изображению можно согласно правилам операционного исчисления по формуле разложения. Для этого необходимо определить полюсы передаточной функции, т. е. согласно (3.4) найти действительные и комплексные корни уравнения:

$$B(s) = \sum_{k=1}^m b_k s^k \quad (3.11)$$

Известно несколько численных методов определения действительных и комплексных корней полинома с действительными коэффициентами (3.10), в частности способ Ньютона-Рафсона [1]. Подобные вычисления можно выполнить и с помощью математического пакета программ MathCAD [4].

Другой способ расчета переходной характеристики исходит из выражения для передаточной функции (3.4) и не требует предварительного определения корней полинома (3.10). Вновь основываясь на связи интеграла Фурье с преобразованием Лапласа, при выполнении условия устойчивости линейной системы $\text{Re}(s_{bk}) < 0$, при $H(0) \neq \infty$ и условии интегрируемости подынтегральных функций можно получить следующую формулу для переходной характеристики линейной системы, выраженную через действительную $\text{Re}[H(j\omega)]$ часть комплексной передаточной функции системы:

$$h_1(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}[H(j\omega)] \frac{\sin(\omega t)}{\omega} d\omega \quad (3.12)$$

Примечание— Если входной и выходной сигналы системы имеют одинаковую размерность, то переходная характеристика является безразмерной.

Импульсная характеристика линейной системы $h_\delta(t)$ есть отклик линейной системы на входное воздействие в виде единичного импульса (таблица 3.1). Согласно определению $h_\delta(t)$ задается выражением:

$$h_\delta(t) = y(t) \Big|_{x(t)=\delta(t)} \quad (3.13)$$

Так же как и переходная характеристика, импульсная характеристика линейной системы определяется при нулевых начальных условиях.

Примечание– Если входной и выходной сигналы системы имеют одинаковую физическую природу (то есть одинаковую размерность), то импульсная характеристика, как и дельта-функция времени, имеет размерность частоты.

Поскольку дельта-функция – это производная от единичного скачка (функции Хевисайда), импульсная и переходная характеристики линейной системы связаны друг с другом операциями дифференцирования и интегрирования:

$$h_{\sigma}(t) = \frac{dh_i}{dt}, \quad h_i(t) = \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(s)e^{jst} ds \quad (3.14)$$

Поскольку изображение единичного импульса $\delta(t)$ по Лапласу равно единице[1], то согласно (3.3) выполняется условие: $y(s)=H(s)$. При этом импульсная характеристика есть оригинал операторной передаточной функции системы:

$$h_{\sigma}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(s)e^{jst} ds \quad (3.15)$$

Переходная и импульсная характеристика относится к классу временных характеристик линейной системы.

Выходной сигнал линейной системы с постоянными параметрами равен свертке выходного сигнала и импульсной характеристики системы:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')h_{\sigma}(t-t')dt' \quad (3.16)$$

Примечание – системы, имеющие вещественную импульсную характеристику, в дальнейшем будут называться вещественными системами.

Условия физической реализуемости. Любая физически реализуемая система обладает свойством причинности – выходная реакция не может возникнуть раньше входного сигнала. Отсюда следует, что для физически реализуемой системы импульсная и переходная характеристики должны быть

равны нулю при $t < 0$.

Примечание– Под физической реализуемостью здесь понимается только выполнение свойства причинности, а не возможность создать систему в каком-нибудь конкретном виде.

Устойчивость линейных систем. Линейная система называется устойчивой, если при нулевом входном сигнале выходной сигнал затухает при любых начальных условиях[3]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \quad \text{если } x(t)=0$$

Это требование равносильно требованию затухания импульсной характеристики системы:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_g(t) = 0$$

Общее условие устойчивости линейных систем: линейная система является устойчивой тогда и только тогда, когда полюсы её передаточной функции лежат левой комплексной полуплоскости:

$$\operatorname{Re}(s_{bi}) > 0$$

Рассмотрим пример определения амплитудно-частотной, фазочастотной, переходной и импульсной характеристик линейной системы в среде MathCAD. В приводимом ниже примере приняты следующие обозначения:

- t – время, ω – частота (при размерности времени в с, мс или мкс; частота соответственно в рад/с, крад/с или Мрад/с);
- TOL – требуемая точность вычислений в MathCAD (используется при численном интегрировании и др. вычислениях) [4];
- $A(\omega)$ – модуль комплексной передаточной функции системы – амплитудно-частотная характеристика системы;
- $\varphi(\omega)$ – аргумент комплексной передаточной функции системы – фазочастотная характеристика системы;
- $h\delta(t)$ – импульсная характеристика системы;
- $h1(t)$ – переходная характеристика системы;

- $h_{10}(t)$ – переходная характеристика системы, найденная по формуле (3.12);
- $\square \text{ invlaplace, } s \rightarrow$ – команда MathCAD, реализующая поиск результата обратного преобразования Лапласа в символьном виде. Эта команда находится на панели Symbolic (рисунок 3.2).

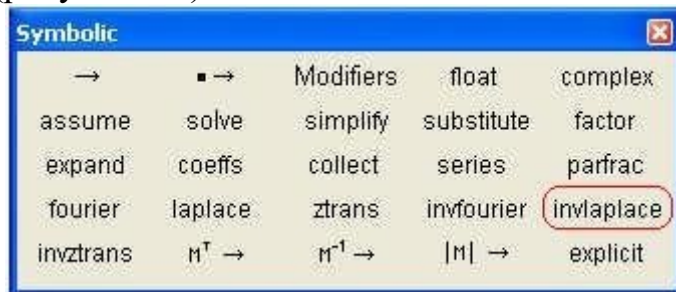


Рисунок 3.2 – Команда invlaplace , реализующая поиск результата обратного преобразования Лапласа в символьном виде

На рисунках 3.3 и 3.4 приведены фрагменты документа MathCAD, реализующего исследование временных и частотных характеристик линейной системы 2-го порядка. Данный пример легко адаптировать для исследования временных и частотных характеристик линейной системы n -го порядка.

Примечание– Не забывайте задавать требуемую точность вычисления (параметр TOL на рисунке 3.3). Если этот параметр не будет задан, время расчетов может существенно увеличиться.

Определение частотных и временных характеристик линейной системы по её операторной передаточной функции

Дано:

$$H(s) := \frac{1s}{1 + s + s^2} \quad \text{- операторная передаточная функция системы.}$$

Требуется определить: частотные и временные характеристики системы.

Решение:

Шаг 1. Задаем мнимую единицу и требуемую точность вычислений:

$$j := \sqrt{-1} \quad \text{TOL} := 0.01 \quad \text{TOL (tolerance in numerical calculation)}$$

Рисунок 3.3 – Пример анализа частотных и временных характеристик линейной системы (начало документа MathCAD)

Шаг 2. Находим комплексную передаточную функцию, АЧХ и ФЧХ системы:

$$A(\omega) := |H(j\omega)| \quad - \text{АЧХ системы.} \quad \phi(\omega) := \frac{180}{\pi} \arg(H(j\omega)) \quad - \text{ФЧХ системы.}$$

Шаг 3. Строим графики АЧХ (рисунок 1) и ФЧХ (рисунок 2) системы:

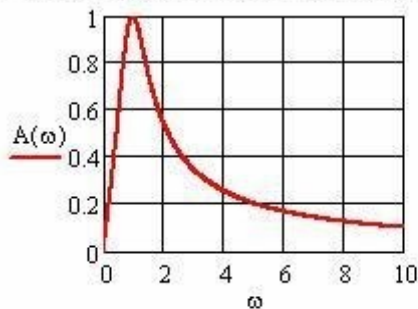


Рисунок 1 – АЧХ системы

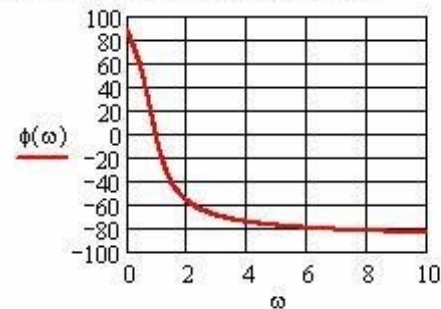


Рисунок 2 – ФЧХ системы

Шаг 4. Находим импульсную характеристику системы и строим её график:

$$h\delta(t) := H(s) \text{ invlaplace, } s \rightarrow e^{\frac{-1}{2} \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) - \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot t} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot t\right)$$

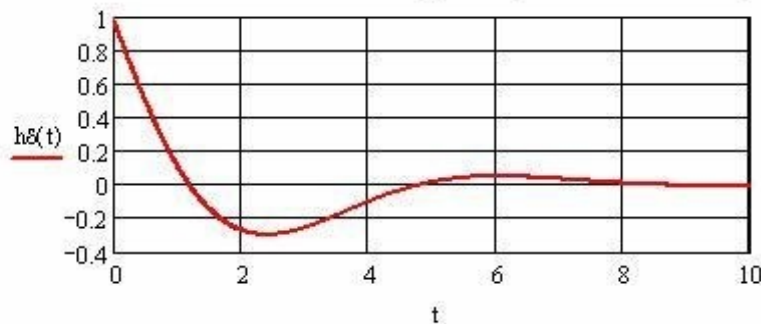


Рисунок 3 – Импульсная характеристика системы

Шаг 5. Находим переходную характеристику системы и строим её график:

$$h1(t) := \frac{H(s)}{s} \text{ invlaplace, } s \rightarrow \frac{2}{3} \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot t} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) \quad - \text{первый метод.}$$

$$h10(t) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}(H(j\omega)) \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t)}{\omega} d\omega \quad - \text{второй метод}$$

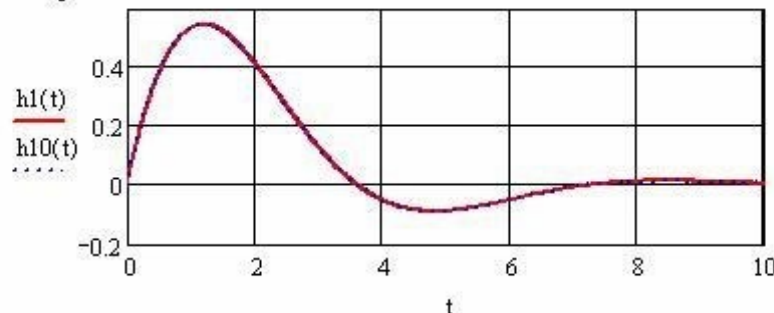


Рисунок 4 – Переходная характеристика системы

Рисунок 3.4 – Пример анализа частотных и временных характеристик линейной системы (продолжение документа MathCAD)

Как видно из рисунка (3.4), импульсная характеристика исследуемой линейной системы 2-го порядка удовлетворяет условию $\lim_{t \rightarrow \infty} h_{\sigma}(t) = 0$,

следовательно, система является устойчивой.

Операторный метод анализа прохождения сигнала через линейную систему. В основе данного метода лежат два соотношения. С помощью первого, основанного на формуле (3.3):

$$y(s) = H(s) \cdot x(s) \quad (3.17)$$

определяем изображение выходного сигнала $y(s)$ при известном изображении входного сигнала $x(s)$ и операторной передаточной функции системы $H(s)$.

С помощью второго соотношения:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} y(s) e^{jst} ds \quad (3.18)$$

основанного на обратном преобразовании Лапласа[1], находим выходной сигнал $y(t)$, исходя из изображения $y(s)$. Продемонстрируем эту методику на конкретном примере расчет выходного сигнала $y(t)$ при воздействии прямоугольного импульса, на линейную систему, рассмотренную ранее (рисунки 3.3 и 3.4). В документе MathCAD (рисунок 3.5) приняты следующие обозначения:

- $\Phi(t)$ – функция единичного скачка;
- $Y(s)$ – изображение выходного сигнала по Лапласу;
- $y(t)$ – выходной сигнал линейной системы.
- $\square$ laplace, s – команда MathCAD, реализующая поиск результата

прямого преобразования Лапласа в символьном виде (команда находится на панели Symbolic).

Остальные обозначения совпадают с обозначениями, рассмотренными ранее в программе, представленной на рисунках 3.3 и 3.4.

Анализ прохождения прямоугольного импульса через линейную систему операторным методом

Шаг 6. Задаем входной сигнал $x(t)$ в виде прямоугольного импульса со следующими параметрами: высота импульса - 2, длительность импульса - 1.

$x(t) := 2(\Phi(t) - \Phi(t - 1))$ - прямоугольный импульс представлен суммой двух единичных скачков.

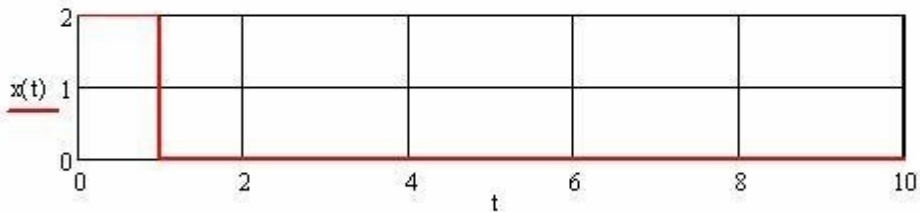


Рисунок 5 – Временная диаграмма входного сигнала $x(t)$

Шаг 7. Находим изображение входного сигнала по Лапласу:

$$X(s) := x(t) \text{ laplace, } t \rightarrow \frac{2}{s} - 2 \cdot \frac{e^{-s}}{s}$$

Шаг 8. Находим изображение выходного сигнала по Лапласу:

$$Y(s) := X(s) \cdot H(s)$$

Шаг 9. Воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа, находим оригинал выходного сигнала и строим его график:

$$y(t) := Y(s) \text{ invlaplace, } s \rightarrow \frac{4}{3} \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot t} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) - \frac{4}{3} \cdot \Phi(t - 1) \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot t + \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \sin\left[\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot (t - 1)\right]$$

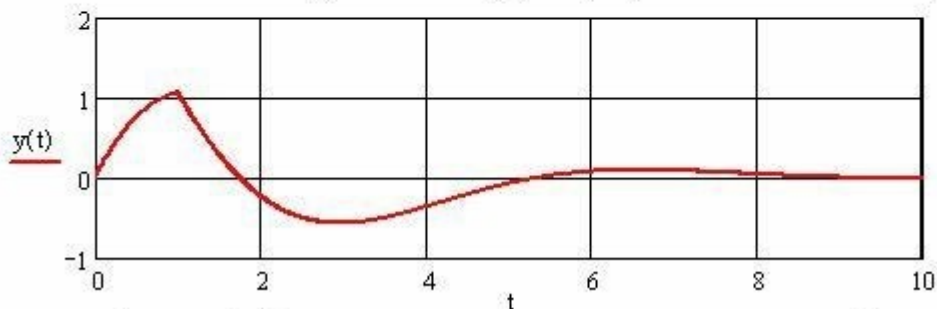


Рисунок 6 – Временная диаграмма выходного сигнала $y(t)$

Рисунок 3.5 – Пример анализа прохождения прямоугольного импульса через линейную систему операторным методом (конец документа MathCAD)

Примечание – Программа, приведенная на рисунке 3.5, является логическим продолжением ранее рассмотренной программы (рисунок 3.3 и 3.4) и без неё не работает. По этой причине нумерация этапов (шагов) алгоритма на рисунке 3.5 продолжает начатую нумерацию на рисунках 3.3 и 3.4.

Аппаратура и программное обеспечение

Аппаратура. Для выполнения работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (число цветов 256).

Программное обеспечение. Для выполнения работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 10 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении работы **запрещается**:

- самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;
- нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т. д.;
- принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

Методика и порядок выполнения работы

1. Запустите систему MathCAD.
2. Составьте документ MathCAD, позволяющий исследовать заданные линейные системы (таблицы 3.2 и 3.3). Требуется:
 - а) выполнить анализ частотных и временных характеристик заданных линейных систем (всего четыре системы);

б) выполнить операторным методом анализ прохождения заданного прямоугольного импульса (таблица 3.4) через исследованные Вами линейные системы;

в) найти полюсы операторной передаточной функции исследованных линейных систем и сделать вывод об их устойчивости. При определении полюсов операторной передаточной функции линейной системы, воспользуйтесь встроенной в среду MathCAD функцией $\text{polyroots}(v)$, предназначенной для поиска корней полинома от 2 до 99 степени по заданному вектору v коэффициентов полинома (рисунок 3.5).

Шаг 1. Записываем полином знаменателя комплексной передаточной функции (см. рисунок 3.2):

$$B(s) := 1 + s + s^2$$

Шаг 2. Находим коэффициенты полинома:

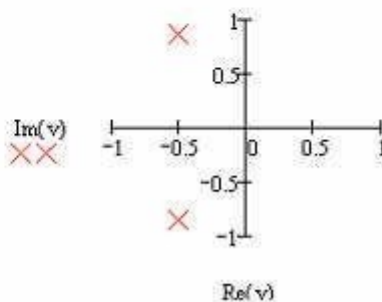
$$z := B(s) \text{ coeffs } s \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Шаг 3. Находим корни полинома:

$$v := \text{polyroots}(z)$$

$$v = \begin{pmatrix} -0.5 + 0.866i \\ -0.5 - 0.866i \end{pmatrix}$$

Шаг 4. Строим распределение корней полинома (полюсов передаточной функции) на комплексной плоскости:



Вывод - Линейная система является устойчивой, так как полюсы её передаточной функции лежат в левой комплексной полуплоскости.

Рисунок 3.5 – Программа для поиска полюсов операторной передаточной функции линейной системы

3. Сохраните результаты выполнения индивидуального задания.
4. Сформируйте отчет.

5. Подготовьтесь к ответу на вопросы для защиты работы.
6. Защитите работу.

Варианты заданий

Таблица 3.2 – Варианты операторных передаточных функций систем

Название системы	Операторная передаточная функция системы
Система 1-го порядка	$H(s) = \frac{a_0}{b_0 + b_1 s}$
Система 2-го порядка	$H(s) = \frac{a_0 + a_1 s}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}$
Система 3-го порядка	$H(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3}$
Система 4-го порядка	$H(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4}$

Таблица 3.3 – Коэффициенты полиномов числителя и знаменателя операторной передаточной функции линейной системы

Вариант	Коэффициенты полиномов								
	Числителя				Знаменателя				
	a_0	a_1	a_2	a_3	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
1	4	-1	1	1	22	28	19	5	1
2	9	-1	1	2	36	42	26	5	1
3	16	-1	1	-1	54	60	35	5	1
4	25	-1	1	-2	76	82	46	5	1
5	36	-1	1	1	102	108	59	5	1
6	49	-1	1	2	132	138	74	5	1
7	64	-1	1	-1	166	172	91	5	1
8	81	-1	1	-2	416	181	94	5	1
9	100	-1	1	1	832	196	99	5	1
10	121	-1	1	2	1415	217	106	5	1
11	144	-1	1	-1	2164	244	115	5	1
12	169	-1	1	-2	3080	277	126	5	1
13	196	-1	1	1	4162	315	139	5	1
14	225	-1	1	2	5411	361	154	5	1

Таблица 3.4 – Варианты заданий для прямоугольного импульса

Вариант	А, В	τ , с	Вариант	А, В	τ , с
1	1	1,0	8	8	8,0
2	2	2,0	9	9	9,0
3	3	3,0	10	10	10,0
4	4	4,0	11	11	11,0
5	5	5,0	12	12	12,0
6	6	6,0	13	13	13,0
7	7	7,0	14	14	14,0

Примечание– Программы MathCAD, для исследования частотных и временных характеристик линейных систем 1 – 4-го порядков, необходимо оформить в виде отдельных файлов.

Содержание отчета и его форма

Отчет по работе оформляется в виде текстового документа и должен включать:

1. Названия работы.
2. Цель работы.
3. Формулировку индивидуального задания и результат его выполнения.
4. Краткие выводы по результатам выполнения работы.

В выводах необходимо отразить:

- наличие полос пропускания (затухания) для АЧХ систем 1 – 4-го порядков – граничные частоты, ширину полосы пропускания (затухания), равномерность АЧХ в пределах указанных полос;
- тип исследуемой системы 1 – 4-го порядка с точки зрения взаимного расположения полос пропускания и задерживания в пределах её АЧХ (фильтр нижних частот, фильтр верхних частот, полосовой фильтр, режекторный фильтр и т. п.);
- форма и длительность импульсной характеристики системы;
- форма и длительность переходной характеристики системы;
- искажения, вносимые системой в форму выходного сигнала;

- количество и распределение на комплексной плоскости полюсов операторной передаточной функции исследованных линейных систем;
- степень устойчивости (система устойчива, находится на границе устойчивости, не устойчива) исследованных линейных систем.

Вопросы для защиты работы

1. Какие системы называются линейными?
2. Как классифицируются линейные системы?
3. Области применения линейных систем?
4. Какие частотные характеристики используются для описания свойств линейных систем?
5. Какие временные характеристики используются для описания свойств линейных систем?
6. Что такое операторная передаточная функция линейной системы?
7. Что такое нули и полюсы операторной передаточной функции линейной системы?
8. Какая линейная система считается вещественной?
9. Какая линейная система считается устойчивой?
10. Что такое комплексная передаточная функция линейной системы?
11. Что такое амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) линейной системы?
12. Что такое фазочастотная характеристика (ФЧХ) линейной системы?
13. Как экспериментально определить АЧХ и ФЧХ линейной системы?
14. Чему равны нули и полюсы комплексной передаточной функции исследованной линейной системы?
15. Является ли линейная система, исследованная в работе, устойчивой? Как вы можете это доказать?
16. Что такое переходная характеристика линейной системы?
17. Что такое импульсная характеристика линейной системы?

18. Как взаимосвязаны между собой переходная и импульсная характеристика линейной системы?

19. Как определить импульсную характеристику линейной системы, если известны её АЧХ и ФЧХ или операторная передаточная функция системы?

20. Каково содержание операторного метода анализа линейной системы?

21. На вход исследованной Вами линейной системы поступает гармонический сигнал $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$. Какими будут амплитуда и начальная фаза сигнала на выходе системы, если, например, $A = 2$ В, а $\omega_0 = 3$ рад/с.

22. Какие выводы можно сделать по результатам выполнения индивидуального задания?

Практическое занятие 4

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Цель и содержание

Цель— приобретение навыков применения теоремы В. А. Котельникова при дискретизации аналоговых сигналов.

Содержание работы:

- изучение теоретического обоснования и примеров исследования Дискретных сигналов;
- выполнение индивидуального задания и оформление отчета;
- защита отчета по работе.

Теоретическое обоснование

Аналоговый сигналом называется сигнал $s(t)$, который является непрерывным как во времени, так и по значению.

Дискретным сигналом называется сигнал, который получается в результате дискретизации значений аналогового сигнала $s(t)$.

Дискретизация— это определение значений аналогового сигнала в дискретные моменты времени[3].

Пример аналогового сигнала, подвергнувшегося дискретизации, показан на рисунке 4.1.

Отметим, что после дискретизации (рисунок 4.1) аналоговый сигнал представлен только в дискретные моменты времени, причем значения сигнала в эти моменты равны соответствующим значениям исходного аналогового сигнала. Таким образом, дискретный сигнал непрерывен по амплитуде, но определяется только в дискретных точках во времени.

Как правило, при дискретизации отсчеты аналогового сигнала берутся через равные промежутки времени T (рисунок 4.1), называемые периодом

дискретизации (или интервалом, шагом дискретизации – sample time).

Величина, обратная периоду дискретизации, называется частотой дискретизации (sampling frequency): $f_s = 1/T$. Соответствующая ей круговая частота определяется следующим образом: $\omega_s = 2\pi/T$.

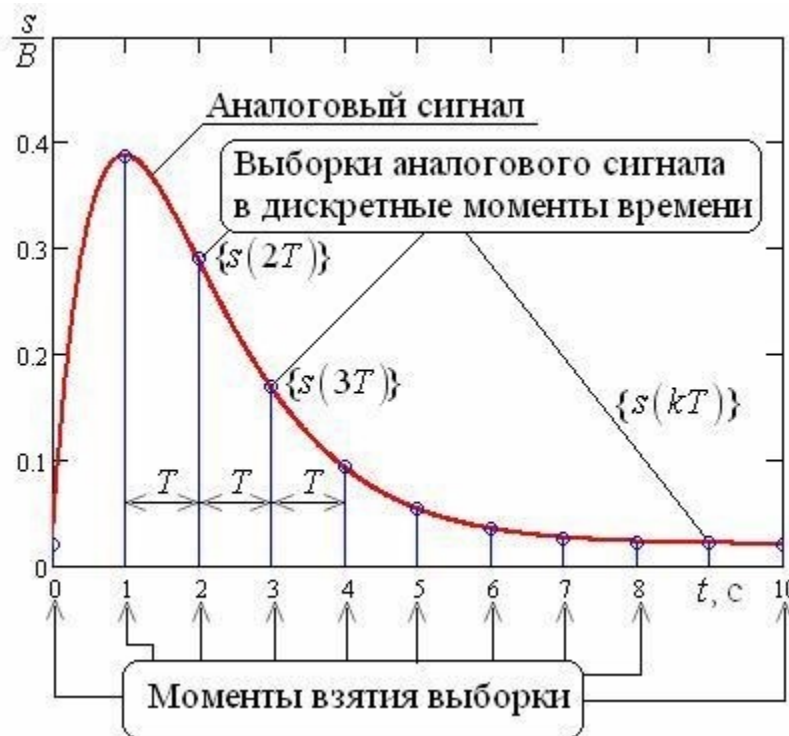


Рисунок 4.1 – Пример аналогового сигнала, подвергнутого дискретизации

Ясно, что в общем случае представление аналогового сигнала набором дискретных отсчетов приводит к потере информации, так как остается неизвестным поведение сигнала в промежутках между отсчетами (выборками).

Однако, существует класс аналоговых сигналов, для которых такой потери информации не происходит и которые могут быть точно восстановлены по значениям своих дискретных отсчетов. К этому классу относятся сигналы, подчиняющиеся теореме В. А. Котельникова[3]: «Любой сигнал $s(t)$, спектр которого не содержит составляющих с частотами выше некоторого значения $f_{\max}$ ($\omega_{\max} = 2\pi f_{\max}$), может быть без потерь информации представлен своими дискретными отсчетами $\{s(kT)\}$, взятыми с интервалом T , удовлетворяющим следующему неравенству:

$$T \leq \frac{1}{2 f_{\max}} = \frac{\pi}{\omega_{\max}} \quad (4.1)$$

Таким образом, если $f_{\max}$ – самый высокочастотный компонент сигнала, то, чтобы элементы выборки полностью описывали сигнал, дискретизация сигнала должна осуществляться с частотой не ниже $2 f_{\max}$.

Примечание – В зарубежных источниках данная теорема называется *теоремой Найквиста* (Nyquist theorem), а также теоремой Шеннона (Shannon theorem) или *теоремой дискретизации* (sampling theorem).

Восстановление исходного непрерывного сигнала $s(t)$ по набору его дискретных отсчетов $\{s(kT)\}$ производится по формуле:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(kT) \frac{\sin\left(\pi \frac{t - kT}{T}\right)}{\pi \frac{t - kT}{T}} \quad (4.2)$$

Формула (4.2) представляет собой разложение сигнала $s(t)$ в ряд по системе функций, называемой базисом Котельникова:

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{T}(t - kT)\right)}{\frac{\pi}{T}(t - kT)}.$$

Формирование непрерывного сигнала по его дискретным отсчетам поясняет рисунок 4.2. Пунктиром показаны графики отдельных слагаемых формулы (4.2), сплошной линией – восстановленный аналоговый сигнал.

Следовательно, если максимальная частота аналогового сигнала составляет 4 кГц, то для того, чтобы собрать или сохранить всю информацию, содержащуюся в сигнале, его дискретизация должна осуществляться с частотой 8 кГц или больше.

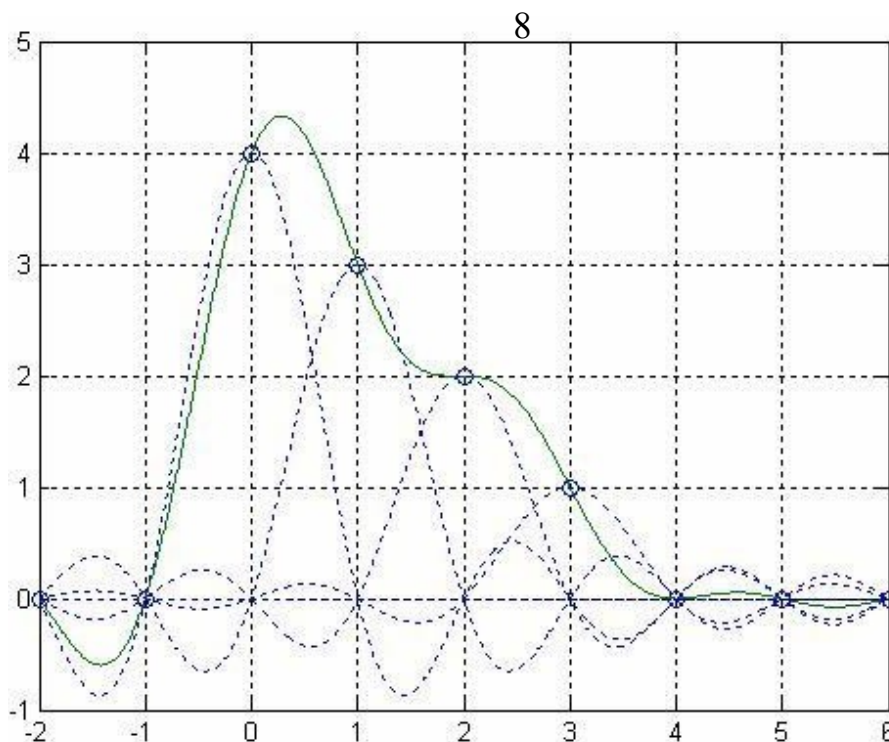


Рисунок 4.2 – Восстановление аналогового сигнала по его дискретным отсчетам

Для применения теоремы В. А. Котельникова на практике необходимо определить максимальную частоту аналогового сигнала $f_{\max}$. Рассмотрим методику определения $f_{\max}$ для случая, когда в качестве аналогового сигнала $s(t)$ выступает одиночный прямоугольный импульс высотой $A=2$ В и длительностью $\tau=1$ с (рисунок 4.3).

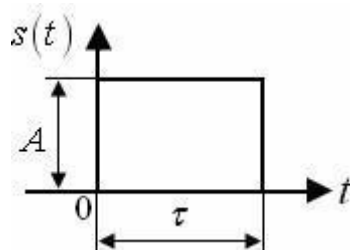


Рисунок 4.3 – Одиночный прямоугольный импульс

Алгоритм определения $f_{\max}$ состоит из следующих пунктов:

1. Используя прямое интегральное преобразование Фурье (2.3) находим спектральную функцию $S(f)$ прямоугольного импульса и строим график

модуля $|S(f)|$ спектральной функции (рисунок 4.4). Убеждаемся в том, что спектр одиночного прямоугольного импульса неограничен по частоте.

2. Определяем энергию одиночного импульса, исходя из спектрального и временного представлений сигнала:

$$W_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (4.3)$$

$$W_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |S(t)|^2 dt \quad (4.4)$$

Значения энергии, полученные по обоим методам – спектральному и временному – должны быть равны: $W_1=W_2$. Однако поскольку наша задача состоит в определении максимальной частоте аналогового сигнала $f_{\max}$, то в первом случае следует записать:

$$W_1 = \int_{-f_{\max}}^{f_{\max}} |S(f)|^2 df$$

и соответственно получить $W_1 < W_2$.

Введем параметр $K_W = W_1 / W_2$, который назовем коэффициентом уменьшения энергии импульса по причине искусственного ограничения ширины его спектра (работа 2). При этом можно решить и обратную задачу: исходя из допустимой величины коэффициента K_W , определим минимально возможное значение частоты $f_{\max}$. Потребуем, чтобы в интервале частот от $-f_{\max}$ до $f_{\max}$ содержалось 95% всей энергии сигнала, то есть, чтобы $K_W=0,95$. Как видно из программы MathCAD на рисунке 4.4, сформулированному требованию удовлетворяет значение $f_{\max}=2$ Гц.

Дано: $A := 1$ В - высота прямоугольного импульса;
 $\tau := 1$ с - длительность прямоугольного импульса

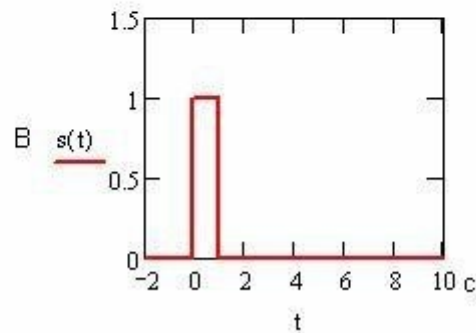
Требуется определить: $f_{\max}$ - ?

Решение:

Шаг 1. Задаем аналоговый импульсный сигнал $s(t)$.

$$s(t) := A \cdot (\Phi(t) - \Phi(t - \tau))$$

Шаг 2. Строим временную диаграмму аналогового сигнала $s(t)$.



Шаг 3. Применяем прямое интегральное преобразование Фурье к сигналу $s(t)$.

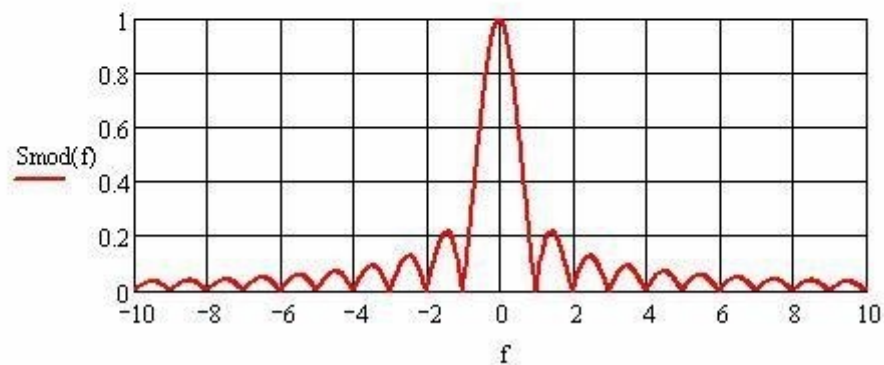
$j := \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

$$S(f) := \int_0^{\tau} s(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt \text{ - спектральная функция импульса, В/Гц.}$$

Шаг 4. Находим модуль и аргумент спектральной функции импульса.

$S_{\text{mod}}(f) := |S(f)|$ - модуль спектральной функции импульса, В/Гц.

Шаг 5. Строим графики модуля и аргумента спектральной функции импульса.



Амплитудный спектр прямоугольного импульса.

Рисунок 4.4 – Начало программы определения $f_{\max}$

Шаг 6. Определяем максимальную частоту аналогового сигнала $f_{\max}$ исходя из требования, чтобы в интервале частот от $-f_{\max}$ до $f_{\max}$ содержалось 95% всей энергии сигнала, т. е. $KW=0,95$.

Шаг 6.1. Задаемся начальным значением $f_{\max}$ в Гц:

$$f_{\max} := 2 \text{ Гц}$$

Шаг 6.2. Определим энергию одиночного импульса, исходя из спектрального и временного представлений сигнала:

$$W1 := \int_{-f_{\max}}^{f_{\max}} (|S(f)|)^2 df \quad W1 = 0.95 \quad W2 := \int_0^{\tau} s(t)^2 dt \quad W2 = 1$$

Шаг 6.3. Находим коэффициент уменьшения энергии импульса по причине ограниченной полосы спектра частот от $-f_{\max}$ до $f_{\max}$:

$$KW := \frac{W1}{W2} \quad KW = 0.95$$

Шаг 6.4. Убеждаемся в том, что коэффициент уменьшения энергии импульса по причине ограниченной полосы спектра частот от $-f_{\max}$ до $f_{\max}$ не менее требуемого значения $KW=0,95$.

Ответ: $f_{\max} = 2 \text{ Гц}$

Примечание - Если найденное значение параметра KW окажется меньше требуемого ($KW=0,95$), то необходимо увеличить $f_{\max}$ и повторить шаги с 6.2 по 6.4.

Рисунок 4.5 – Окончание программы определения $f_{\max}$

Вывод. В интервале частот от -2 Гц до 2 Гц содержится 95% всей энергии прямоугольного импульса. Поэтому, с энергетической точки зрения, спектральными составляющими прямоугольного импульса, лежащими за пределами интервала $-2 \text{ Гц} \leq f \leq 2 \text{ Гц}$, можно пренебречь и считать, что для рассматриваемого аналогового сигнала $f_{\max}=2 \text{ Гц}$.

Примечание— Очевидно, что в зависимости от формы прямоугольного импульса (амплитуде и его длительности) при одном и том же значении KW могут быть получены различные величины параметра $f_{\max}$.

Таким образом, приходим к выводу о том, что частота дискретизации рассматриваемого прямоугольного импульса должна быть не ниже

$$f_s = 2 f_{\max} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ Гц},$$

а период дискретизации должен быть не более

$$T = \frac{1}{f_s} = 0,25 \text{ с.}$$

Рассчитаем параметры фильтра защиты от наложения спектра при дискретизации аналогового сигнала.

Положим, что антиэлайсинговый фильтр реализуется фильтром нижних частот Баттерворта n -го порядка, с передаточной функцией вида[2]:

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}} \quad (4.5)$$

где f_c – частота среза;

n – порядок фильтра.

Зависимость модуля передаточной функции фильтром нижних частот Баттерворта 2-го порядка от отношения f/f_c приведена на рисунке 4.6.

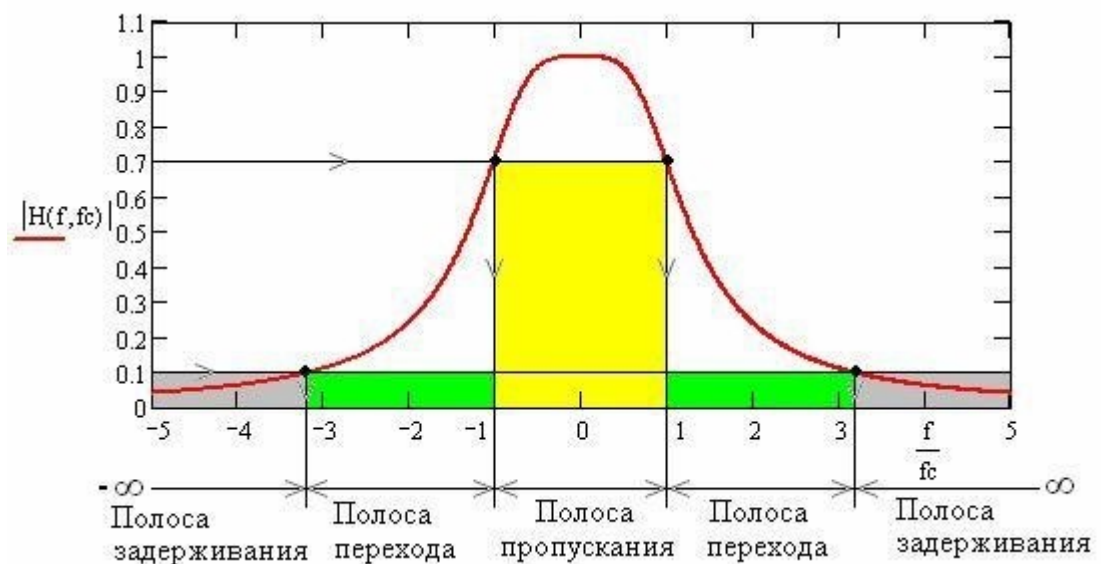


Рисунок 4.6 – АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта 2-го порядка

На рисунке 4.6 для определения граничных частот полосы пропускания (частот среза $\pm f_c$) использовался уровень 0,707, а граничных частот полос задерживания – уровень 0,1. Как видно из рисунка 4.6 между полосой пропускания и полосами задерживания фильтра находятся полосы перехода. Чем уже полоса перехода, тем ближе форма АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта к прямоугольной (идеальной) форме. Управлять шириной полосы перехода

можно при помощи порядка фильтра. Чем больше порядок фильтра, тем уже полоса перехода АЧХ фильтра (рисунок 4.7).

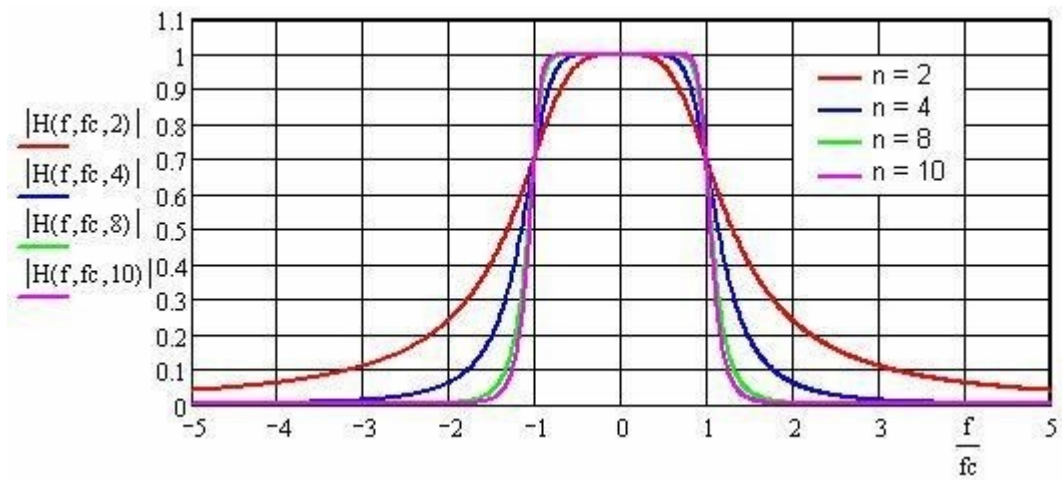


Рисунок 4.7 – Зависимость формы АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта от порядка фильтра

Определим частоту среза f_c , чтобы при порядке фильтра Баттерворта $n=4$ отношение сигнала к уровню искажения от наложения составляло 10:1 при частоте $f=f_{\max}=2$ Гц.

Как следует из уравнения (4.5) и графиков на рисунке 4.7 при $f=f_c$ уровень сигнала составляет 0,707. Отношение уровня сигнала к уровню наложения 10:1 предполагает уровень наложения 0,0707. Зеркальный компонент спектра дискретного сигнала, который вызывает наложение при частоте $f=f_{\max}$, определяется уравнением Баттерворта (4.5). Следовательно, из указанного уравнения находим:

$$\frac{I}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{f_c}\right)^{2 \cdot 4}}} = 0,0707 \quad (4.6)$$

Решая уравнение (4.6)

относительно f_c получим:

$$f_c = \frac{1}{\sqrt[8]{1 - \frac{1}{0,0707^2}}} = 0,953 - j0,395 \quad (4.7)$$

Так как искомая частота среза получилась комплексной (формула (4.7)), то для дальнейших расчетов примем значение частоты среза:

$$f_c = |0,953 - j0,395| = 1,032 \approx 1 \text{ Гц.} \quad (4.8)$$

Подставим полученный результат $f_c = 1$ Гц в уравнение Баттерворта, считая $f = f_{\max} = 2$ Гц и $n = 4$, получим следующее значение отношение сигнала к уровню искажения от наложения:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{1}\right)^{2 \cdot 4}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 16}} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{1}{4,123} = 0,242 \quad (4.9)$$

Как видно из (4.9) значение отношение сигнала к уровню искажения от наложения 0,242 меньше требуемого 0,0707. Следовательно, полученный результат $f_c = 1$ Гц является корректным.

Убедимся в справедливости выводов и положим $f_c = f_{\max} = 2$ Гц. Используя программу MathCAD и спектральный метод анализа прохождения сигналов через линейную систему, построим АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта 4-го порядка и спектр сигнала после дискретизации с частотой дискретизации $f_s = 2 f_{\max} = 4$ Гц (рисунок 4.8).

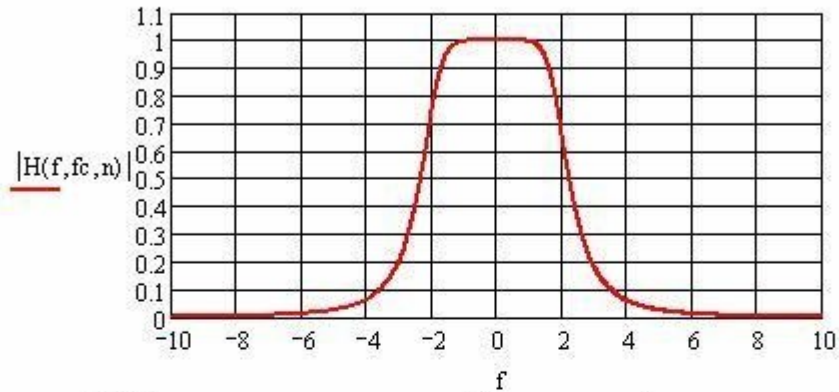
Убеждаемся в том, что при частоте среза $f_c = f_{\max} = 2$ Гц в спектре сигнала после дискретизации с частотой дискретизации $f_s = 2 f_{\max} = 4$ Гц присутствует ярко выраженный эффект наложения зеркальных спектров на основной спектр. Следовательно, частоту среза необходимо уменьшать.

Положим $f_c = 1$ Гц и повторим расчеты (рисунок 4.9). Убеждаемся в том, что при частоте среза $f_c = 1$ Гц в спектре сигнала после дискретизации с частотой дискретизации $f_s = 2 f_{\max} = 4$ Гц отсутствует эффект наложения спектров. Поэтому для дальнейших расчетов принимаем $f_c = 1$ Гц.

Шаг 7. Определяем и строим АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта 4-го порядка

$n := 4$ $f_c := f_{\max}$ $f_c = 2$ Гц

$$H(f, f_c, n) := \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2 \cdot n}}}$$



АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта 4-го порядка с $f_c = 2$ Гц

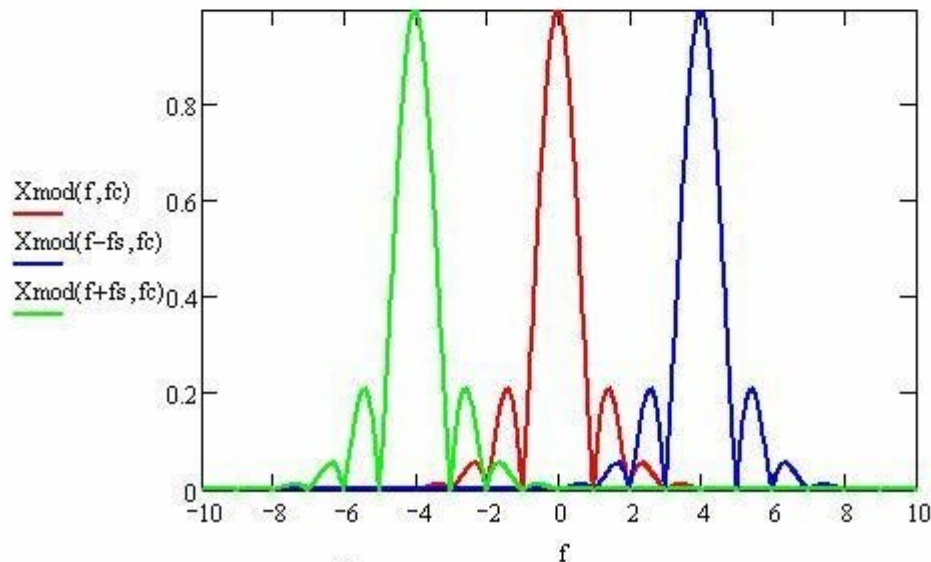
Шаг 8. Находим спектральную функцию импульса, прошедшего через фильтр нижних частот Баттерворта 4-го порядка.

$$X(f, f_c) := S(f) \cdot H(f, f_c, n)$$

Шаг 9. Находим модуль спектральной функции импульса и строим спектр сигнала после дискретизации.

$$X_{\text{mod}}(f, f_c) := |X(f, f_c)| \quad - \text{модуль спектральной функции импульса, В/Гц.}$$

$$f_s := 2 \cdot f_{\max}$$



Спектр сигнала после дискретизации

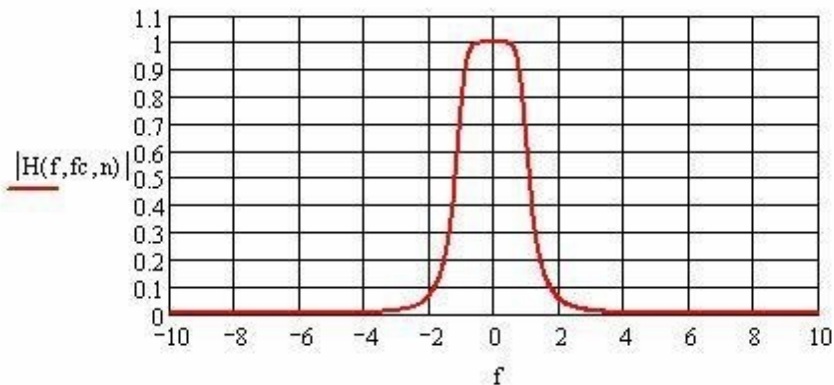
Рисунок 4.8 – Ярко выражен эффект наложения спектров после дискретизации

Используя обратное преобразование Фурье, находим сигнал на выходе фильтра защиты от наложения спектра и строим его временную диаграмму (рисунок 4.10).

Шаг 7. Определяем и строим АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта 4-го порядка

$$n := 4 \quad f_c := \frac{f_{\max}}{2} \quad f_c = 1 \quad \text{Гц}$$

$$H(f, f_c, n) := \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2 \cdot n}}}$$



АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта 4-го порядка с $f_c = 2$ Гц

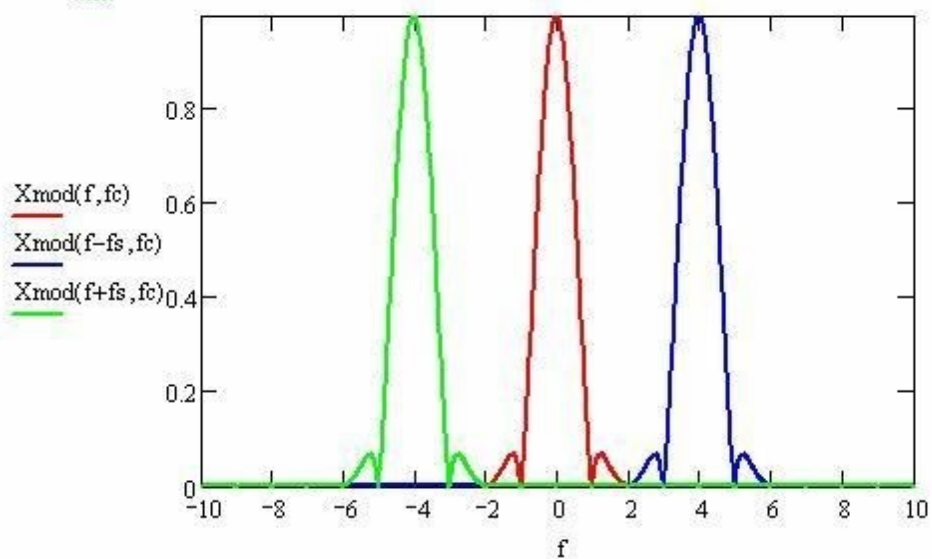
Шаг 8. Находим спектральную функцию импульса, прошедшего через фильтр нижних частот Баттерворта 4-го порядка.

$$X(f, f_c) := S(f) \cdot H(f, f_c, n)$$

Шаг 9. Находим модуль спектральной функции импульса и строим спектр сигнала после дискретизации.

$$X_{\text{mod}}(f, f_c) := |X(f, f_c)| \quad \text{— модуль спектральной функции импульса, В/Гц.}$$

$$f_s := 2 \cdot f_{\max}$$

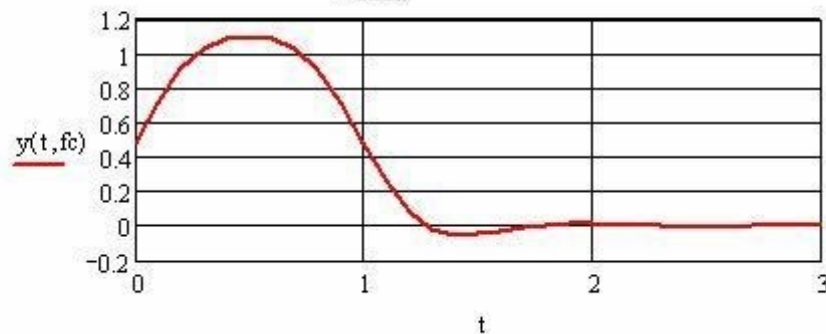


Спектр сигнала после дискретизации

Рисунок 4.9 – Эффект наложения спектров после дискретизации отсутствует

Шаг 10. Используя обратное преобразование Фурье находим сигнал на выходе фильтра защиты от наложения спектра и строим его временную диаграмму.

$$y(t, f_c) := \int_{-f_{\max}}^{f_{\max}} X(f, f_c) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$



Временная диаграмма сигнала на выходе фильтра защиты от наложения спектра

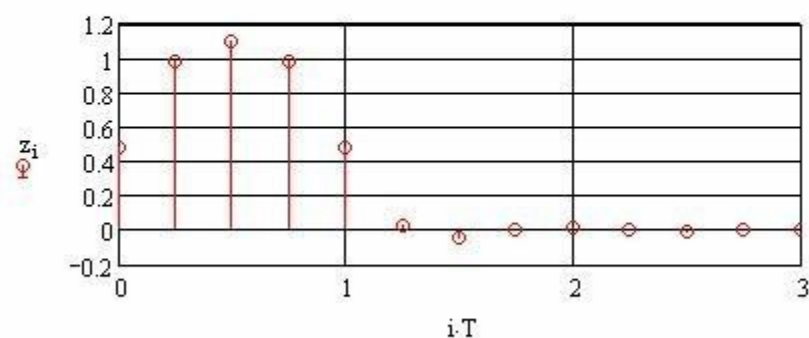
Рисунок 4.10 – Находим аналоговый сигнал на выходе антиэлайсингового фильтра

Формируем набор дискретных отсчетов $\{z(iT)\}$ аналогового сигнала, прошедшего через антиэлайсинговый фильтр (рисунок 4.11).

Шаг 11. Формируем дискретные отсчеты сигнала, прошедшего через фильтр защиты от наложения спектра и строим его временную диаграмму.

$$i := 0..12 \quad T := \frac{1}{f_s} \quad T = 0.25 \text{ с}$$

$$z_i := y(i \cdot T, f_c)$$



Дискретные отсчеты сигнала, прошедшего через фильтр защиты от наложения спектра

Рисунок 4.11 – Дискретный сигнал сформирован

Воспользовавшись формулой (4.2), восстанавливаем аналоговый сигнал на выходе антиэлайсингового по набору его дискретных отсчетов

$\{z(iT)\}$ и строим временную диаграмму исходного и восстановленного по теореме Котельникова сигнала (рисунок 4.12).

Шаг 12. Воспользовавшись формулой (4.2), восстанавливаем аналоговый сигнал $y(t, f_c)$ по его дискретным отсчетам z_i и строим временную диаграмму исходного $y(t, f_c)$ и восстановленного $\hat{y}(t)$ по теореме Котельникова сигнала

$$\hat{y}(t) := \sum_{i=0}^{12} \left[z_i \cdot \text{sinc} \left[\frac{\pi}{T} \cdot (t - i \cdot T) \right] \right] \quad t := 0, 0.1 \dots 3$$

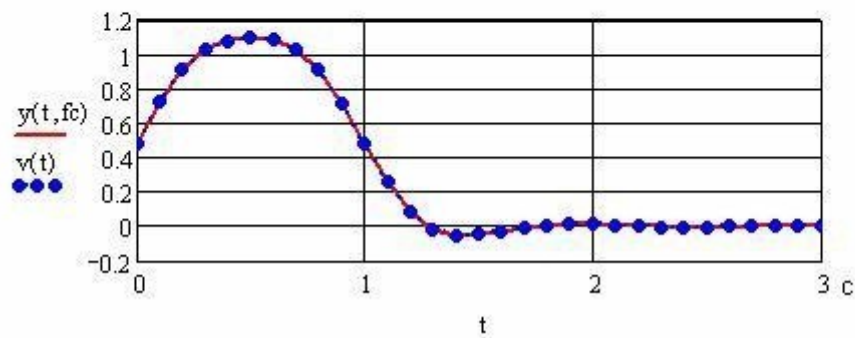


Рисунок 4.12 – На основании теоремы Котельникова аналоговый сигнал восстановлен из дискретного сигнала

Более подробно процесс восстановления аналогового сигнала по его дискретным отсчетам показан на рисунке 4.13.

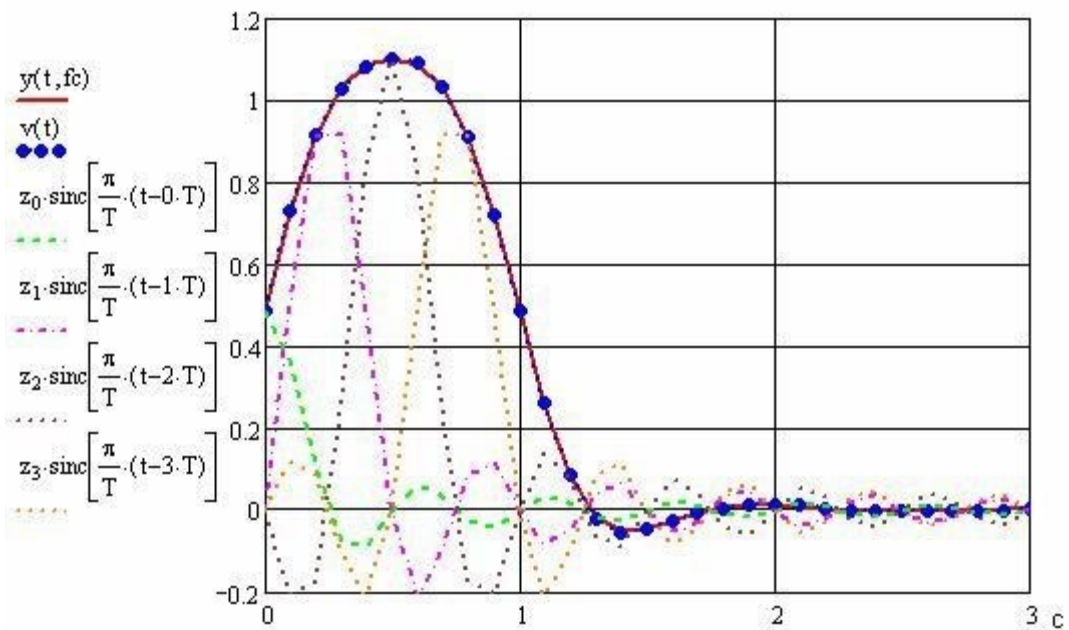


Рисунок 4.13 – Восстановление аналогового сигнала по его дискретным отсчетам

Вывод. Как видно из рисунков 4.12 и 4.13 восстановление аналогового сигнала по его дискретным отсчетам выполнено успешно, что полностью подтверждает справедливость теоремы В. А. Котельникова.

Аппаратура и программное обеспечение

Аппаратура. Для выполнения работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор типа Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 МВ Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа SuperVGA (число цветов 256).

Программное обеспечение. Для выполнения работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 10 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении работы **запрещается**:

- самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;
- нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т. д.;
- принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

Методика и порядок выполнения работы

1. Запустите программу MathCAD.
2. Для каждого из двух аналоговых импульсных сигналов, исследованных вами на работе 2:
 - а) определите частоту дискретизации и период дискретизации, удовлетворяющие теореме В. А. Котельникова;
 - б) исходя из требования отсутствия эффекта наложения спектров после дискретизации, сформулируйте требования к антиэлайсинговому фильтру, реализуемому фильтром нижних частот Баттерворта n -го порядка (определите частоту среза и порядок фильтра);
 - в) реализуйте операцию дискретизации и восстановления в базисе Котельникова.
3. Сохраните результаты выполнения индивидуального задания.
4. Сформируйте отчет по работе.
5. Подготовьтесь к ответу на вопросы для защиты работы.
6. Защитите работу.

Варианты заданий

Варианты заданий совпадают с соответствующими вариантами, сформулированными в работе 2.

Номер варианта соответствует номеру фамилии студента в списке учебной группы (подгруппы).

Вопросы для защиты работы

1. Какой сигнал называется аналоговым?
2. С какой целью производится дискретизация аналоговых сигналов?
3. Какой сигнал называется дискретным?
4. Как формулируется теорема В. А. Котельникова?

5. Как восстановить исходный аналоговый сигнал по набору его дискретных отсчетов?
6. Как формируется базис Котельникова?
7. Каково прикладное значение теоремы В. А. Котельникова для цифровых систем радиосвязи?
8. Каковы свойства спектра дискретного сигнала?
9. Что такое частота Найквиста?
10. Как определить максимальную частоту в спектре импульсного аналогового сигнала?
11. В чем проявляется эффект наложения спектров при дискретизации?
12. Как обосновать требования к фильтру защиты от наложения спектра при дискретизации аналогового сигнала?
13. Каковы свойства фильтра нижних частот Баттерворта n -го порядка?
14. Как при помощи спектрального метода определить сигнал, прошедший через фильтр нижних частот Баттерворта n -го порядка?
15. Как выглядит схема цифровой обработки сигналов?
16. Какова методика выполнения индивидуального задания?
17. Какие выводы можно сделать по результатам выполнения индивидуального задания?

Список рекомендуемой литературы

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике / Пер. с англ.; под ред. И. Г. Арамановича. М.: Наука, 1978.
2. Куприянов М. С., Матюшкин Б. Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. СПб.: Политехника, 1998.
3. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов: Учебник для вузов. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2006. – 751 с.
4. Дьяконов В. П. MathCAD 8-12 для студентов. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005. – 632

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Якушев В.М., Демин М.С.

Якушев В. М., Демин М.С.
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ по
дисциплине по дисциплине «ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ
ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ»
Часть 2
для студентов направления подготовки
21.03.01 Нефтегазовое дело
Направленность (профиль) «Геолого-геофизические технологии в
нефтегазовом деле»

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Практическое занятие 5. Исследование цифровых фильтров	5
2. Практическое занятие 6. Исследование быстрого преобразования Фурье	39
3. Практическое занятие 7. Вейвлет-анализ и синтез сигналов	70
4. Практическое занятие 8. Вейвлет-обработка и компрессия изображений	99
Рекомендуемая литература	110

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания к выполнению практических занятий работ по дисциплине «Теоретические основы обработки геофизической информации» составлены в соответствии с программой дисциплины для студентов направления подготовки 21.03.01 Нефтегазовое дело.

В методических указаниях приведены основные алгоритмы обработки геофизической информации и рассмотрена их практическая реализация в среде MathCAD.

Структурно каждая из работ в предлагаемых методических указаниях состоит из формулировки её цели и содержания, краткого теоретического обоснования, формулировки требований к аппаратуре и материалам, указаний по технике безопасности, методики и порядка выполнения работы, требований к содержанию отчета и его форме, вопросов для защиты работы и списка рекомендуемой литературы.

Целью практических занятий является углубление знаний студентов в области теории и практики, обработки геофизической информации.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- знать основные методы, способы и средства получения, хранения, переработки геофизической информации; возможности современных компьютеризированных систем (включая специализированное программное обеспечение) для управления технологиями геофизической и геологической разведки;

- уметь обосновывать, выбирать и применять различные методы обработки геофизических данных для решения конкретных задач в условиях конкретных геологических ситуаций;

- владеть навыками использования комплекса методов обработки геофизических данных при поисках и разведке месторождений полезных ископаемых, организации и проведения вычислительных работ, способами интерпретации данных геофизических измерений и представлением результатов работы.

Практическое занятие 5

ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Цель и содержание

Цель— приобретение навыков анализа характеристик цифровых фильтров.

Содержание работы:

- изучение теоретического обоснования и примеров анализа характеристик дискретных систем;
- выполнение индивидуального задания и оформление отчета;
- защита отчета по работе.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Фильтр— это система или устройство, избирательно меняющая форму сигнала (амплитудно-частотный или фазово-частотный спектр). Основными целями фильтрации являются улучшение качества сигнала (например, устранение или снижение помех), извлечение из сигналов информации или разделение нескольких сигналов, объединенных ранее для, например, эффективного использования доступного канала связи.

Цифровой фильтр — это математический алгоритм, реализованный на аппаратном и/или программном уровне, который с заданной целью действует на входной и генерирует выходной цифровой сигнал согласно следующему уравнению в конечных разностях:

$$y(k) = a_0x(k) + a_1x(k-1) + \dots + a_mx(k-m) - b_1y(k-1) - b_2y(k-2) - \dots - b_ny(k-n), \quad (5.1)$$

где $x(k), x(k), \dots, x(k-m)$ — отсчеты входного сигнала;

$y(k), y(k), \dots, y(k-n)$ — отсчеты выходного сигнала;

$a_0, a_1, \dots, a_m$ и $b_0, b_1, \dots, b_n$ — вещественные коэффициенты.

m и n — количествами входных и выходных отсчетов сигналов, используемых при вычислениях.

Формула (5.1) называется **алгоритмом цифровой фильтрации**.

Линейные цифровые фильтры делятся:

- на фильтры с постоянными параметрами, у которых все коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_m$ и $b_0, b_1, \dots, b_n$ есть константы, и на фильтры с переменными параметрами, не отвечающие указанному требованию;
- на фильтры рекурсивные и нерекурсивные.

Алгоритм работы **рекурсивных** цифровых фильтров подчиняется общему алгоритму цифровой фильтрации(5.1).

Алгоритм работы **нерекурсивных** (no recursive) цифровых фильтров получается из общего алгоритма цифровой фильтрации (5.1) при условии, что все коэффициенты $b_i=0$ ($i=1, 2, \dots, n$):

$$y(k) = a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_m x(k-m), (5.2)$$

вследствие чего выходной сигнал зависит только от входного сигнала. Применяется также термин «трансверсальный фильтр» (от английского *transversal* – поперечный).

Рассмотрим простейшие примеры работы нерекурсивных и рекурсивных цифровых фильтров.

Примеры работы нерекурсивного цифрового фильтра. Пусть выходной сигнал фильтра равен сумме двух последних отсчетов входного сигнала:

$$y(k) = x(k) + x(k-1).$$

Убедимся в том, что этот нерекурсивный цифровой фильтр по-разному пропускает на выход сигналы разных частот.

Для начала подадим на вход фильтра серию одинаковых отсчетов (то есть сигнал нулевой частоты):

Вход	Выход
...	...
1	$1 + 1 = 2$
1	$1 + 1 = 2$
1	$1 + 1 = 2$
1	$1 + 1 = 2$
...	...

Как видите, уровень постоянного сигнала фильтр увеличил в два раза. Теперь подадим на вход отсчеты, одинаковые по модулю, но с чередующимися знаками (то есть гармонический сигнал с частотой Найквиста):

Вход	Выход
...	...
1	...
-1	-1+1=0
1	1+(-1)=0
-1	-1+1=0
...	...

В отличие от постоянного сигнала, сигнал с частотой Найквиста на выход не рекурсивного фильтра просто не прошел.

Примеры работы рекурсивного цифрового фильтра. Теперь заметим, что помимо выходных отсчетов мы можем использовать для вычислений и ранее рассчитанные значения выходного сигнала. Попробуем просто суммировать входной отсчет и предыдущий выходной отсчет:

$$y(k) = x(k) + x(k - 1).$$

Подаем на вход постоянный сигнал (начальное состояние фильтра считаем нулевым):

Вход	Выход
1	1+0=1
1	1+2=2
1	1+3=3
1	1+4=4
...	...

Так, очевидно, будет продолжаться и далее – выходной сигнал будет линейно нарастать, что рано или поздно приведет к переполнению разрядной сетки вычислительного устройства. Это сразу же демонстрирует нам главную отличительную черту рекурсивных фильтров – из-за наличия обратных связей они могут быть неустойчивыми.

Попробуем уменьшить влияние обратной связи, разделив предыдущий отсчет выходного сигнала на 2:

$$y(k) = x(k) + 0,5y(k - 1).$$

Снова подаем на вход постоянный сигнал:

Вход	Выход
1	$1 + 0,5 \cdot 0 = 1$
1	$1 + 0,5 \cdot 1 = 1,5$
1	$1 + 0,5 \cdot 1,5 = 1,75$
1	$1 + 0,5 \cdot 1,75 = 1,875$
1	$1 + 0,5 \cdot 1,875 = 1,9375$
...	...

Как видим, ситуация радикально изменилась – теперь выходной сигнал с уменьшающейся скоростью стремится к значению 2. Таким образом переходный процесс в фильтре является бесконечным. Это еще одна отличительная черта рекурсивных фильтров.

Итак, рекурсивные фильтры суммируют при расчетах не только входные, но и некоторое количество предыдущих выходных отсчетов сигнала, умножая их при этом на постоянные весовые коэффициенты.

Параметры и характеристики нерекурсивных цифровых фильтров.

Уравнение фильтрации (5.1) в этом случае приобретает следующий вид:

$$y(k) = \sum_{i=0}^m a_i x(k-i). \quad (5.3)$$

Количество используемых предыдущих отсчетов m называется порядком фильтра (filter order).

Структурная схема, реализующая алгоритм (5.3), приведена на рисунке 5.1.

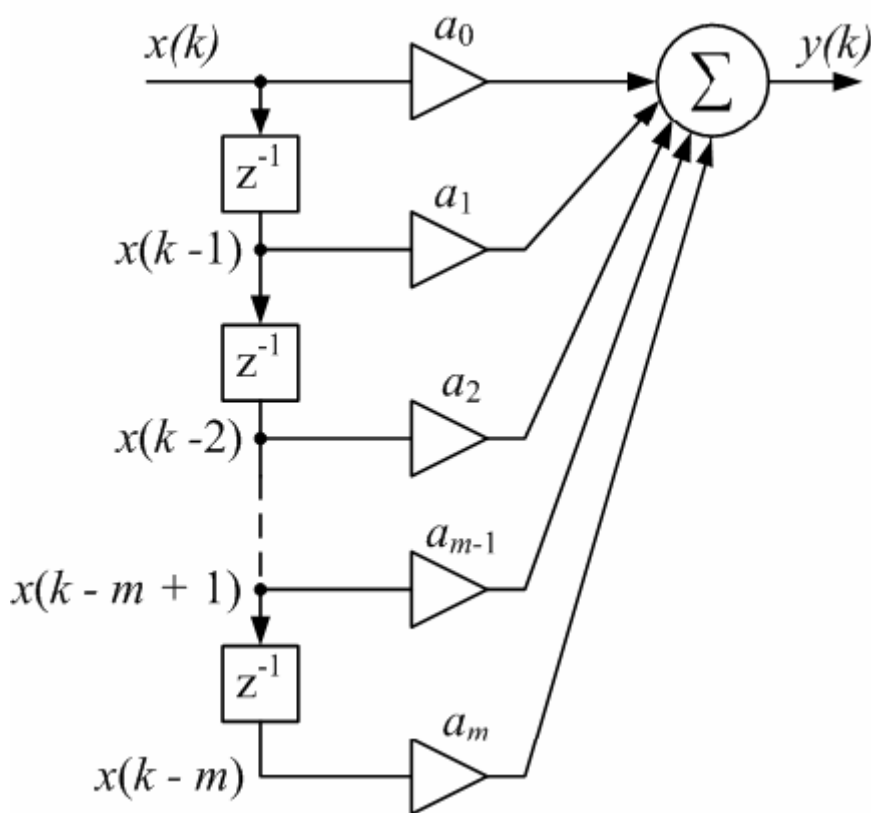


Рисунок 5.1 – Нерекурсивный цифровой фильтр

Как видно из рисунка 5.1 некоторое количество предыдущих отсчетов входного сигнала хранится в ячейках памяти, которые образуют дискретную линию задержки. Эти отсчеты умножаются на весовые коэффициенты a_i и суммируются, формируя выходной отсчет $y(k)$.

Примечание – Согласно свойствам z-преобразования[3], задержка дискретной последовательности на один такт соответствует умножению ее z-

преобразования на z^{-1} . Поэтому элементы памяти, осуществляющие такую задержку, обозначены на структурной схеме как z^{-1} .

Так как при вычислениях не используются предыдущие отсчеты выходного сигнала, в схеме отсутствуют обратные связи.

Применив z -преобразование к функции (5.3), получим следующее выражение для передаточной функции нерекурсивного фильтра:

$$H(z) = \sum_{i=0}^m a_i z^{-i}.$$

Путем подстановки $z=e^{j\omega T}$, найдем выражение для комплексной частотной характеристики нерекурсивного фильтра: □

$$H(j\omega) = \sum_{i=0}^m a_i e^{-ji\omega T}, \quad (5.5)$$

где T – период дискретизации входного сигнала.

Для амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) нерекурсивного фильтра из (5.5) получим следующее выражение:

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \left| \sum_{i=0}^m a_i e^{-ji\omega T} \right|. \quad (5.6)$$

Для фазочастотной □ характеристики (ФЧХ) нерекурсивного фильтра из соотношения (5.5) имеем:

$$\varphi(\omega) = \arg H(j\omega) = \arg \left[\sum_{i=0}^m a_i e^{-ji\omega T} \right].$$

(5.7)

Импульсная характеристика нерекурсивного фильтра определяется очень просто. Подставим в уравнение (5.3) единичный импульс $\delta(k)$ в качестве входного сигнала:

$$y(k) = \sum_{i=0}^m a_i \delta(k-i). \quad (5.8)$$

Но отсчет $x_k \delta(k-i)$ равен нулю для всех k , кроме $k=i$, когда этот отсчет равен единице. Поэтому мы получаем очень простой результат:

$$h_{\delta}(k) = a_k,$$

то есть коэффициенты a_k являются отсчетами импульсной характеристики фильтра. Это можно наглядно пояснить с помощью рисунка 5.1. При подаче на вход единичного импульса он будет перемещаться по линии задержки, умножаться на коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$ и проходить на выход устройства (ведь все остальные входные сигналы сумматора при этом равны нулю).

Очевидно, что в реальном устройстве линия задержки содержит конечное число элементов, поэтому импульсная характеристика нерекурсивного фильтра также является конечной по длительности. Это обусловило еще одно название таких фильтров – фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры; английский термин – finite impulse response, FIR).

Таким образом импульсная характеристика нерекурсивного цифрового фильтра есть его реакция на единичный дельта-импульс и, следовательно, по аналогии с уравнением (5.8) имеет вид:

$$h_{\delta}(k) = \sum_{i=0}^m a_i \delta(k - i). \quad (5.9)$$

Примечание— Вследствие отсутствия обратных связей любой нерекурсивный фильтр является устойчивым. Это объясняется тем, что каковы бы ни были начальные условия (то есть отсчеты, хранящиеся в линии задержки), при отсутствии сигнала на входе $x(k)=0$ выходной сигнал (свободные колебания) будет отличен от нуля в течение не более, чем m тактов, необходимых для очистки линии задержки.

Простота анализа и реализации, а также наглядная связь коэффициентов фильтра с отсчетами его импульсной характеристики и абсолютная устойчивость привели к тому, что нерекурсивные фильтры широко применяются на практике. Однако для получения хороших частотных характеристик (например, полосовых и 1092 фильтров с высокой прямоугольностью АЧХ) необходимы нерекурсивные фильтры высокого порядка – до нескольких сотен и даже тысяч.

Фрагмент документа MathCAD, реализующего расчет амплитудночастотной (5.6), фазочастотной (5.7) и импульсной (5.9) характеристик нерекурсивного цифрового фильтра при заданных значениях коэффициентов

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$, собранных в вектора, и шаге дискретизации T приведена на рисунках 5.2 и 5.3. В программе, в основном, приняты те же обозначения, что и в приведенных ранее формулах. Исключения в обозначениях составляют:

$A(f)$ – АЧХ фильтра; $h\delta_i$ – значение i -го дискретного отсчета импульсной характеристики фильтра.

Программа расчета характеристик нерекурсивного цифрового фильтра

Дано:

$$a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad - \text{вектор коэффициентов фильтра.}$$

$T := 1$ - период дискретизации входного сигнала, с.

Решение:

Шаг 1. Находим порядок фильтра

$$m := \text{length}(a) - 1 \quad m = 3$$

Вывод 1: порядок исследуемого нерекурсивного цифрового фильтра равен трем.

Шаг 2. Находим и строим импульсную характеристику фильтра:

$$i := 0..m \quad t_i := i \cdot T \quad h\delta_i := a_i$$

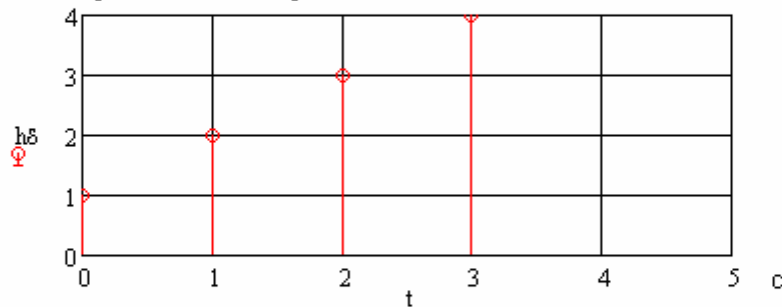


Рисунок 1 - Импульсная характеристика нерекурсивного цифрового фильтра

Вывод 2: исследуемый нерекурсивный цифровой фильтр является каузальным.

Шаг 3. Находим передаточную функцию фильтра:

$$H(z) := \sum_{i=0}^m \left(a_i \cdot z^{-i} \right)$$

Шаг 4. Находим амплитудно-частотную (АЧХ) и фазочастотную характеристику (ФЧХ) нерекурсивного фильтра:

$$j := \sqrt{-1}$$

$$A(f) := \left| H(e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T}) \right| \quad - \text{АЧХ нерекурсивного фильтра;}$$

$$\phi(f) := \frac{180}{\pi} \cdot \arg\left(H(e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T}) \right) \quad - \text{ФЧХ нерекурсивного фильтра в градусах;}$$

Рисунок 5.2 – Пример расчета характеристик нерекурсивного цифрового фильтра (начало документа MathCAD)

Шаг 5. Строим графики АЧХ и ФЧХ нерекурсивного цифрового фильтра:

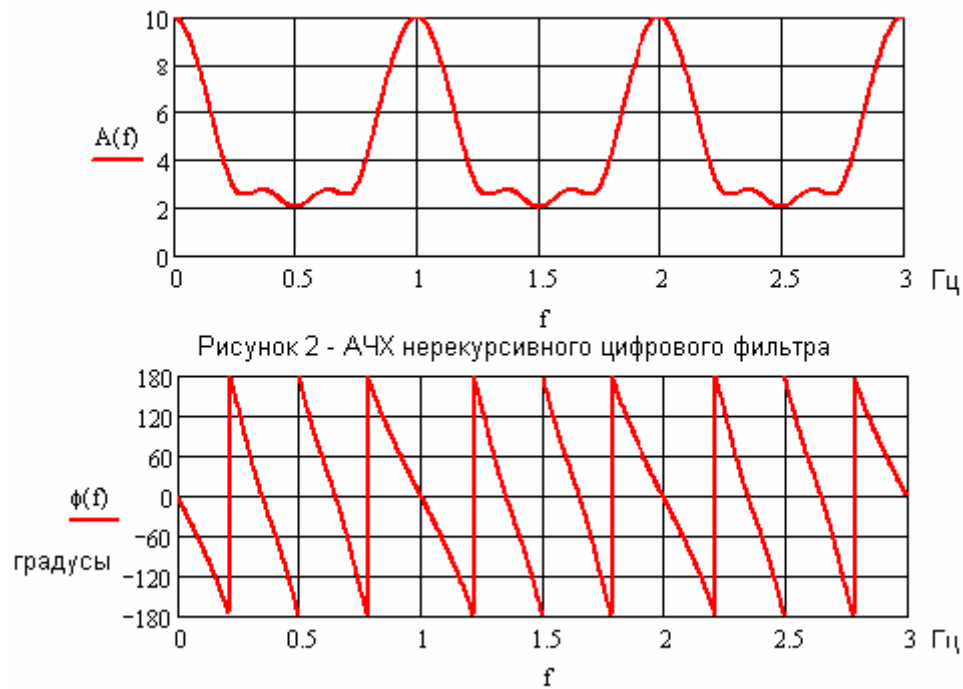


Рисунок 5.3 – Пример расчета характеристик нерекурсивного цифрового фильтра (конец документа MathCAD)

Как видно из рисунка 5.2, частотная характеристика нерекурсивного цифрового фильтра, как и спектр дискретного сигнала, является периодической функцией с частотой повторения равной частоте дискретизации $f_s = 1/T$ входного сигнала (в примере $f_s = 1/1 = 1$ Гц). Максимум АЧХ может соответствовать значениям частоты $n f_s$, где n – любое целое число. Форма АЧХ и ФЧХ зависит от комбинации коэффициентов a , собранных в вектор $\mathbf{a}$.

Выходной сигнал (отклик) $y(k)$ нерекурсивного цифрового фильтра на входной сигнал $x(m)$ можно найти из уравнения дискретной свертки

$$y(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(k-m)$$

(5.10)

или из определения операторной передаточной функции цифрового фильтра

$$y(z) = H(z) * x(z), (5.11)$$

где $y(z)$ – z -изображение выходного сигнала цифрового фильтра;

$x(z)$ – z -изображение входного сигнала цифрового фильтра;

При использовании соотношения (5.11), для нахождения зависимости выходного сигнала цифрового фильтра от времени $y(k)$, к z -изображению входного сигнала цифрового фильтра $y(z)$ необходимо применить обратное z -преобразование. В этой связи отметим, что в систему MathCAD встроена поддержка прямого и обратного z -преобразования. Прямое z -преобразование реализуется оператором `ztrans`, а обратное – `invztrans`. Эти операторы размещены в системе MathCAD на панели Symbolic (рисунок 5.4).

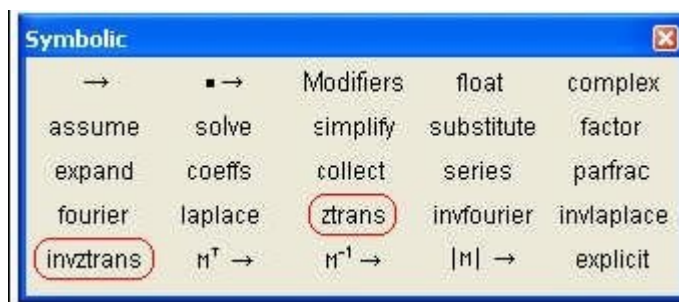


Рисунок 5.4 – Размещение команд z -преобразования на панели Symbolic

Пример вычисления отклика нерекурсивного цифрового фильтра в соответствии с уравнением фильтрации (5.10), подробно иллюстрирующий выполняемые при этом математические операции дискретной свертки, приведен на рисунке 5.5.

Пример вычисления отклика нерекурсивного цифрового фильтра в соответствии с определением операторной передаточной функции цифрового фильтра (5.11) и использованием оператора обратного z -преобразования `invztrans`, встроенного в MathCAD, приведен на рисунке 5.6.

Примечание– На рисунках 5.2, 5.3 и 5.6 приведена сквозная нумерация шагов алгоритма анализа нерекурсивного цифрового фильтра, поэтому в ходе исследования эти фрагменты необходимо объединить в один документ MathCAD.

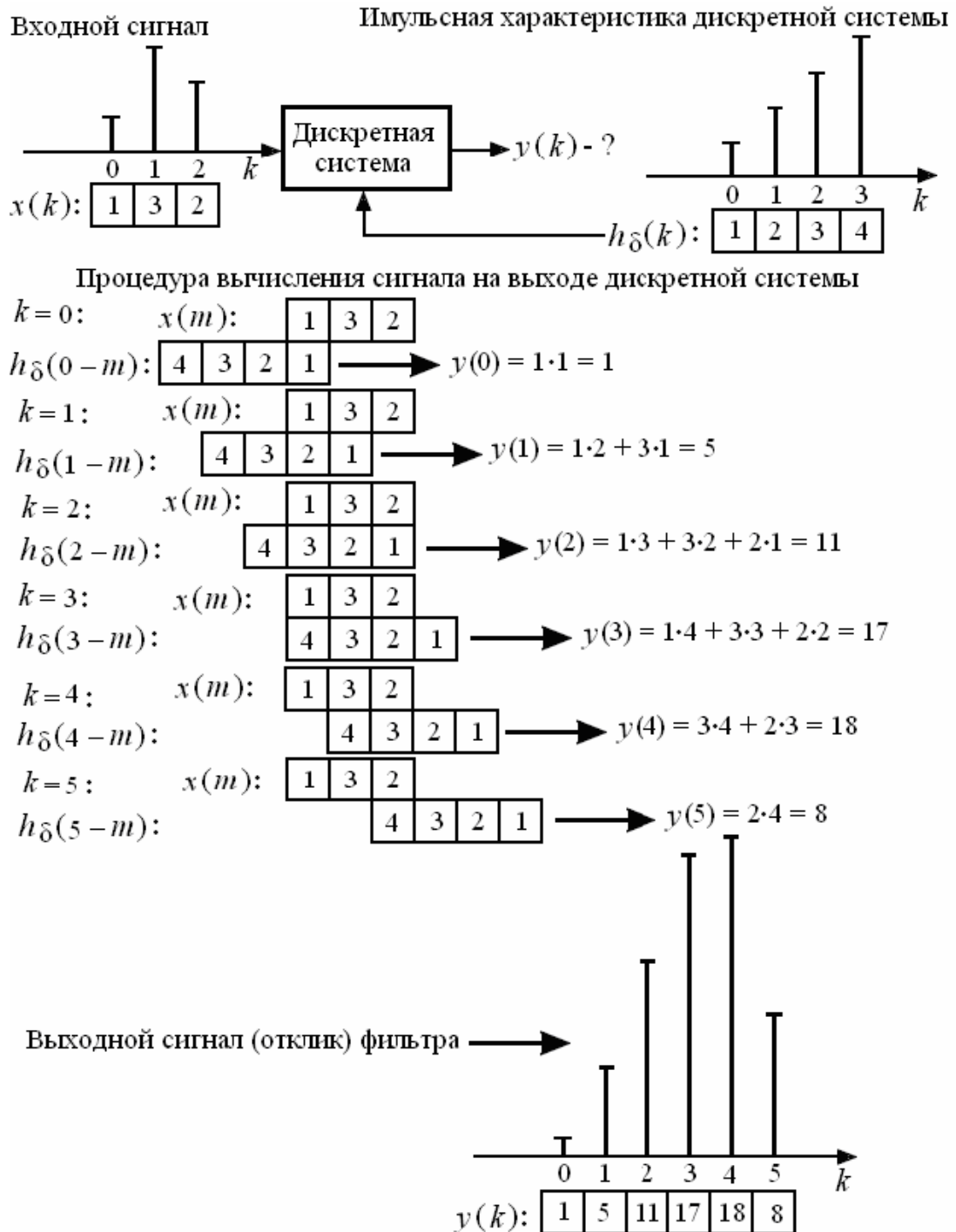
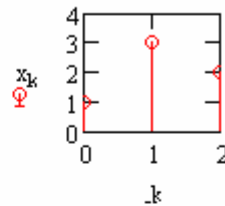


Рисунок 5.5 – Пример вычисления отклика нерекурсивного цифрового фильтра

Шаг 6. Определяем отклик нерекурсивного цифрового фильтра:

Шаг 6.1 Задаем вектор отсчетов входного дискретного сигнала:

$$k := 0..2 \quad x := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$



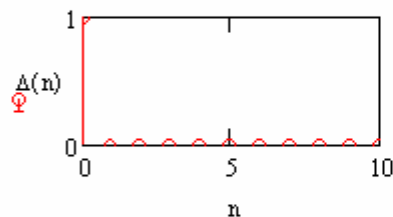
Шаг 6.1 Находим z-изображение входного сигнала цифрового фильтра:

$$X(z) := 1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}$$

Шаг 6.2 Определяем единичную импульсную функцию:

$$n := 0..10$$

$$\Delta(n) := \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{if } n \neq 0 \end{cases}$$



Шаг 6.3 Находим z-изображение выходного сигнала цифрового фильтра:

$$Y(z) := H(z) \cdot X(z)$$

Шаг 6.4 Применяем обратное z-преобразование к z-изображению выходного сигнала цифрового фильтра и находим выходной дискретный сигнал:

$$y(n) := Y(z) \text{ invztrans, } z \rightarrow 8 \cdot \Delta(n-5) + 18 \cdot \Delta(n-4) + 17 \cdot \Delta(n-3) + 11 \cdot \Delta(n-2) + 5 \cdot \Delta(n-1) + \Delta(n)$$

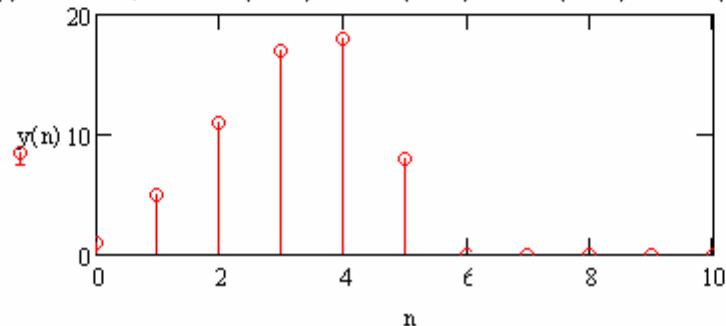


Рисунок 5.6 – Пример расчета отклика нерекурсивного цифрового фильтра

Параметры и характеристики рекурсивных цифровых фильтров.

Если уравнение фильтрации имеет общий вид (5.1), то есть содержит как входные, так и выходные отсчеты, для реализации такого фильтра в схему, приведенную на рисунке 5.1, необходимо добавить вторую линию задержки – для хранения выходных отсчетов $y(k-i)$. Получающаяся при этом структура показана на рисунке 5.7.

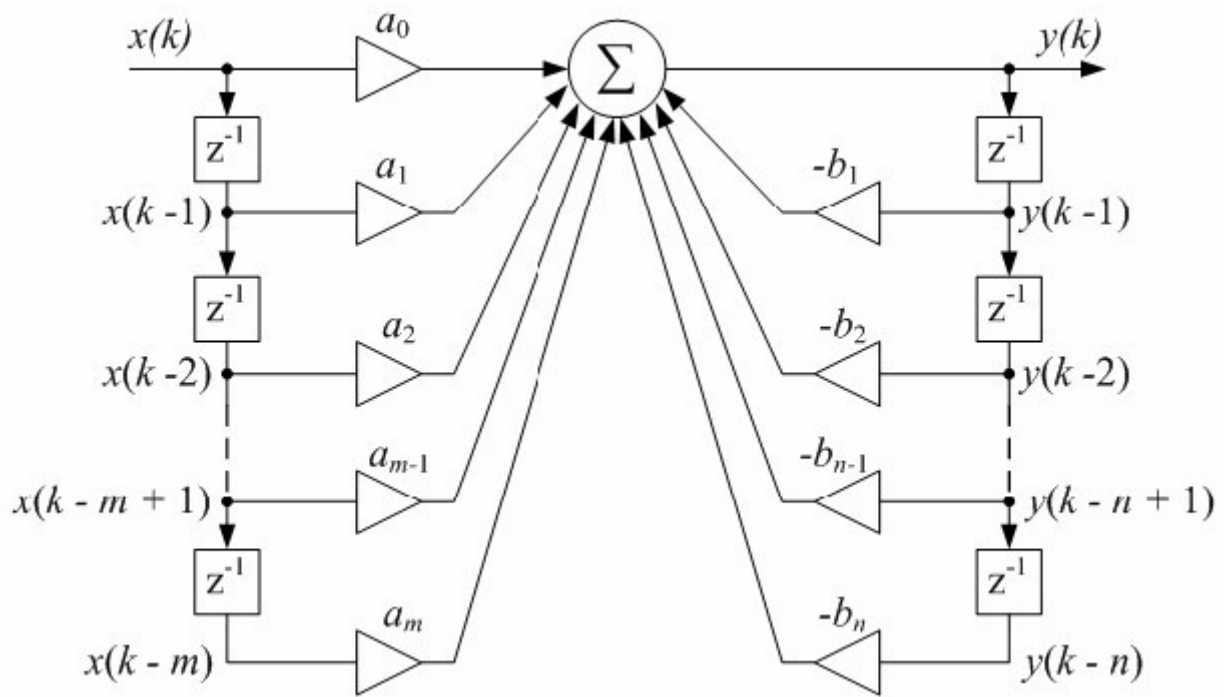


Рисунок 5.7 – Рекурсивный фильтр – прямая реализация

Так как при вычислениях используются предыдущие отсчеты выходного сигнала, в схеме присутствуют обратные связи. Поэтому такие фильтры называют рекурсивными (recursive).

Примечание– Количество предыдущих входных и выходных отсчетов, используемых для вычислений, может не совпадать. В таком случае порядком фильтра считается максимальное из чисел m и n .

Применив z -преобразование к функции (5.1), получим для передаточной функции рекурсивного фильтра:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_m z^{-m}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-i}}{1 + \sum_{l=0}^n b_l z^{-l}} \quad (5.12)$$

Путем подстановки $z = e^{j\omega T}$ в формулу (5.11), найдем выражение для комплексной частотной характеристики рекурсивного фильтра:

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-ji\omega T}}{1 + \sum_{l=0}^n b_l z^{-jl\omega T}} \quad (5.13)$$

Для амплитудно-частотной характеристики рекурсивного фильтра из (5.12) получим:

$$H(\omega) = |H(j\omega)| = \left| \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-ji\omega T}}{1 + \sum_{l=0}^n b_l z^{-jl\omega T}} \right| \quad (5.14)$$

Для фазочастотной характеристики из (5.12) имеем:

$$\varphi(\omega) = \arg H(j\omega) = \arg \left[\frac{\sum_{i=0}^m a_i z^{-ji\omega T}}{1 + \sum_{l=0}^n b_l z^{-jl\omega T}} \right] \quad (5.15)$$

Импульсная характеристика рекурсивного фильтра рассчитывается значительно сложнее, чем для нерекурсивного. Рассмотрим формирование лишь нескольких первых ее отсчетов. При поступлении на вход единичного импульса он умножается на a_0 и проходит на выход. Таким образом,

$$h_\delta(0) = a_0.$$

Далее входной единичный импульс попадает во входную линию задержки, а выходной отсчет, равный a_0 , – в выходную линию задержки. В результате второй отсчет импульсной характеристики будет формироваться как

□ .

использованием оператора обратного z -преобразования `invztrans`,
встроенного в MathCAD.

Примечание— Ввиду громоздкости выражений, образующихся при нахождении обратного z -преобразования с помощью оператора `invztrans`, на рисунках 5.8 и 5.9 приведены только фрагменты этих выражений.

Программа расчета характеристик рекурсивного цифрового фильтра

Дано:

$$C := \begin{pmatrix} -0.85 & 1 \\ 0 & -0.25 \\ 0.85 & -0.7 \end{pmatrix} \text{ - вектор коэффициентов передаточной функции фильтра.}$$

$T := 1$ - период дискретизации входного сигнала, с.

$m := \text{rows}(C) - 1$

$m = 2$ - порядок фильтра.

Решение:

Шаг 1. Находим передаточную функцию рекурсивного фильтра:

$a := C^{(0)}$ $b := C^{(1)}$ - векторы коэффициентов передаточной функции фильтра.

$$H(z) := \frac{\sum_{i=0}^m (a_i z^{-i})}{1 + \sum_{i=1}^m (b_i z^{-i})}$$

Шаг 2. Находим амплитудно-частотную (АЧХ) и фазочастотную характеристику (ФЧХ) рекурсивного фильтра:

$$j := \sqrt{-1}$$

$$A(f) := |H(e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T})| \quad \text{- АЧХ рекурсивного фильтра;}$$

$$\phi(f) := \frac{180}{\pi} \cdot \arg(H(e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot T})) \quad \text{- ФЧХ рекурсивного фильтра в градусах.}$$

Шаг 3. Строим графики АЧХ и ФЧХ рекурсивного цифрового фильтра:

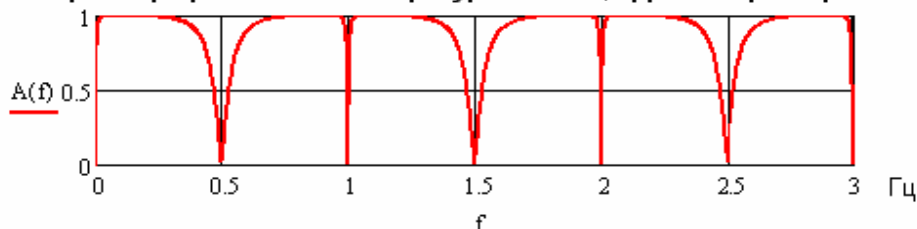


Рисунок 1 - АЧХ рекурсивного цифрового фильтра

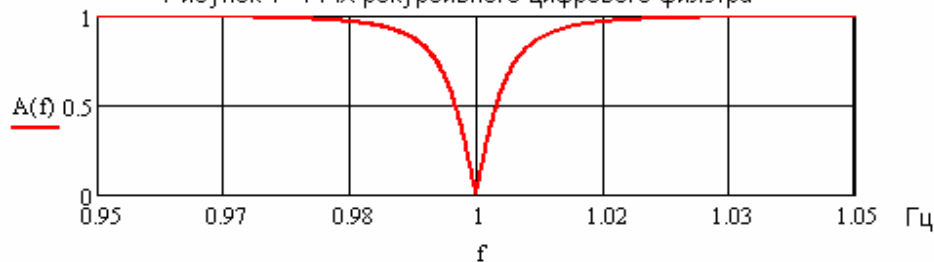


Рисунок 2 - АЧХ рекурсивного цифрового фильтра в более крупном масштабе

Рисунок 5.7 – Пример расчета характеристик рекурсивного цифрового фильтра (начало документа MathCAD)

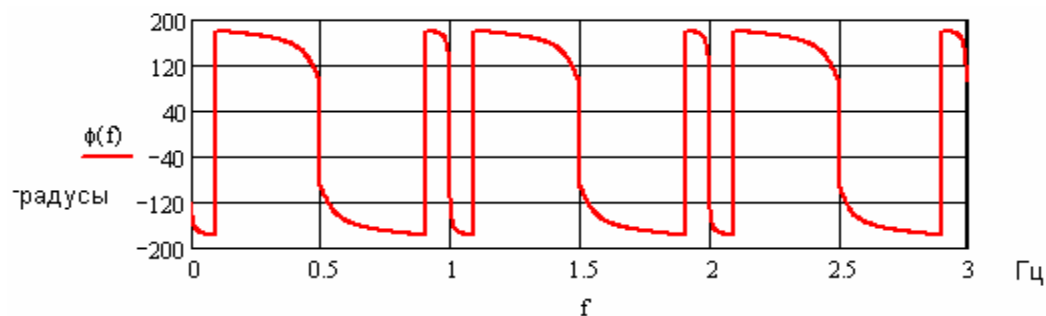


Рисунок 3 - ФЧХ рекурсивного цифрового фильтра

Шаг 4. Определяем единичную импульсную функцию:

$$n := 0..20$$

$$\Delta(n) := \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{if } n \neq 0 \end{cases}$$

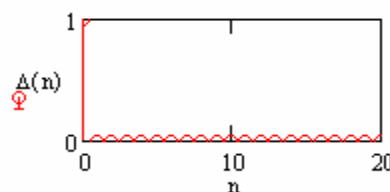


Рисунок 4 - Единичная импульсная функция

Шаг 5. Применяем обратное z-преобразование к передаточной функции фильтра и определяем его импульсную характеристику:

$$h\delta(n) := H(z) \text{ invztrans, } z \rightarrow \frac{1}{64120} \cdot (-77860) \cdot \Delta(n) \cdot \left[(-5) + 1145 \frac{1}{2} \right]^n \cdot \left(5 + 1145 \frac{1}{2} \right)^n + 289 \cdot (-28)^n \cdot \left[(-5) + 1145 \frac{1}{2} \right]^n$$

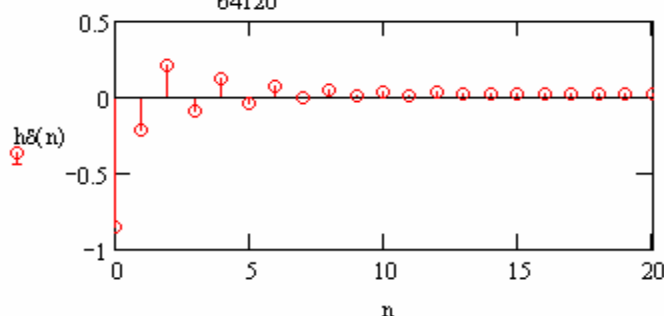


Рисунок 5 - Импульсная характеристика рекурсивного цифрового фильтра

Шаг 6. Определяем отклик рекурсивного цифрового фильтра:

Шаг 6.1 Задаем вектор отсчетов входного дискретного сигнала:

$$k := 0..2 \quad x := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

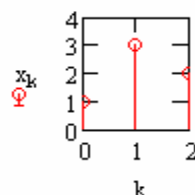


Рисунок 6 - Отсчеты входного дискретного сигнала

Рисунок 5.8 – Пример расчета характеристик рекурсивного цифрового фильтра (продолжение документа MathCAD)

Шаг 6.2 Находим z-изображение входного сигнала цифрового фильтра:

$$X(z) := 1 + 3z^{-1} + 2z^{-2}$$

Шаг 6.3 Находим z-изображение выходного сигнала цифрового фильтра:

$$Y(z) := H(z) \cdot X(z)$$

Шаг 6.4 Применяем обратное z-преобразование к z-изображению выходного сигнала цифрового фильтра и находим выходной дискретный сигнал:

$$y(n) := Y(z) \text{ invztrans, } z \rightarrow \frac{1}{3141880} \cdot \frac{(-3970860) \cdot \Delta(n) \left[(-5) + 1145 \frac{1}{2} \right]^n \cdot \left(5 + 1145 \frac{1}{2} \right)^n - 8720320 \cdot \Delta(n)}{}$$

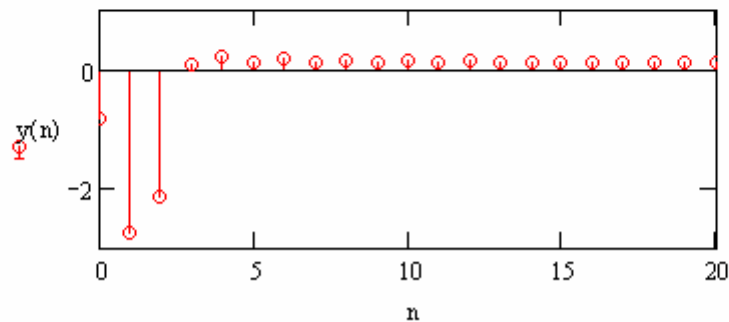


Рисунок 7 - Отклик рекурсивного цифрового фильтра

Рисунок 5.9 – Пример расчета характеристик рекурсивного цифрового фильтра (конец документа MathCAD)

Как видно из рисунка 5.6, частотные характеристики рекурсивного фильтра, как и спектр дискретного сигнала, является периодической функцией, но с частотой повторения, отличной от частоты дискретизации $f=1/T$. Форма АЧХ и ФЧХ зависит от комбинации коэффициентов a_m и b_i , собранных соответственно в векторы **a** и **b**.

Следует отметить существенные различия в характеристиках нерекурсивного (рисунок 5.1) и рекурсивного (рисунок 5.4) цифровых фильтров, причиной чему является наличие в рекурсивном фильтре обратной связи. Эти различия приводят в рекурсивном фильтре к возможности получения более узкой АЧХ, к сложному, колебательному виду ФЧХ и возможной потере фильтром устойчивости.

Устойчивость цифровых фильтров. Под устойчивостью цифрового фильтра понимается ограниченность амплитуды выходного сигнала $y(k)$ при любых начальных условиях и ограниченном входном сигнале $x(k)$.

Одним из критериев такой устойчивости является расположение полюсов z_i передаточной функции (5.11), т. е. корней знаменателя функции $H(z)$, внутри единичной окружности на z -плоскости [3]. В этом отношении устойчивость цифрового рекурсивного фильтра во многом напоминает линейную систему непрерывного типа с обратной связью, устойчивость которой также определяется по расположению нулей и полюсов на плоскости комплексной переменной [4]. Одним из признаков устойчивости цифрового фильтра является отсутствие неограниченного возрастания пикового значения АЧХ при ее расчете с помощью программы, представленной на рисунках 5.5 – 5.6.

Достоинства и недостатки цифровых фильтров. Цифровые фильтры играют важную роль в цифровой обработке сигналов. По сравнению с аналоговыми фильтрами они предпочтительны во множестве областей (например, сжатие данных, биомедицинская обработка сигналов, обработка речи, обработка изображений, передача данных и др.), так как обладают **рядом достоинств**, часть из которых перечислена ниже:

1. Цифровые фильтры могут иметь характеристики, получить которые на аналоговых фильтрах невозможно, например, действительно линейную фазовую характеристику.

2. В отличие от аналоговых, производительность цифровых фильтров не зависит от изменений среды, например, от колебаний температуры. Таким образом цифровые фильтры не требуют периодической калибровки.

3. Если фильтр построен с использованием программируемого процессора, его частотная характеристика может настраиваться автоматически (поэтому такие процессоры широко применяются в адаптивных фильтрах).

4. Один цифровой фильтр может обрабатывать несколько входных сигналов или каналов без дублирования аппаратных блоков.

5. Как фильтрованные, так и нефильтрованные данные можно сохранить для последующего использования.

6. Можно легко использовать достижения из области технологий супербольших интегральных схем (СБИС) и получать небольшие цифровые фильтры с пониженной потребляемой мощностью и более низкой ценой.

7. На практике точность, которой можно добиться при использовании аналоговых фильтров, ограничена; например, затухание в полосе подавления нельзя поднять выше 60-70 дБ (если использовать стандартные аналоговые компоненты). Точность цифровых фильтров ограничена только используемой длиной арифметического слова (2, 4, 6 и более байт).

8. Производительность цифровых фильтров одинакова для всех устройств серии.

9. Цифровые фильтры могут использоваться при очень низких частотах, характерных, например, для многих биомедицинских приложений, где применять аналоговые фильтры непрактично. Кроме того, цифровые фильтры могут использоваться в большом диапазоне частот, для чего достаточно просто менять частоту дискретизации.

Впрочем, по сравнению с аналоговыми цифровые фильтры имеют и **ряд недостатков**:

1. Ограничение скорости. Максимальная ширина полосы сигналов, которые в реальном времени способны обработать цифровые фильтры, значительно уже, чем у аналоговых фильтров. В приложениях реального времени процесс преобразования «аналоговый-цифровой-аналоговый» вводит ограничение по скорости на производительность цифрового фильтра. Наивысшую частоту дискретизации, с которой может работать фильтр, ограничивает время конвертации АЦП и время установления сигнала ЦАП. Кроме того, скорость работы цифрового фильтра зависит от скорости работы используемого цифрового процессора и числа арифметических операций, которые надлежит выполнить в алгоритме фильтрации, и повышается, когда характеристика фильтра становится более сжатой.

2. Влияние конечной разрядности. Цифровые фильтры подвержены шуму АЦП, происходящему от квантования непрерывного сигнала, и шуму

округления, который вводится при вычислениях. При использовании рекурсивных фильтров высоких порядков накопление шума округления может привести к неустойчивости фильтра.

3. Значительное время разработки и внедрения. Разработка и внедрение цифровых фильтров, особенно внедрение аппаратного обеспечения, могут выполняться гораздо дольше, чем подобные процедуры для аналоговых фильтров. В то же время, однажды разработанное аппаратное и/или программное обеспечение может использоваться в других задачах цифровой обработки сигналов с незначительной модификацией или вообще без изменений (соответствующие примеры приведены в последующих главах). Если при проектировании цифровых фильтров доступна хорошая компьютерная поддержка, эту задачу будет весьма интересно решать, хотя для того, чтобы эффективно и полно использовать такую поддержку, нужно определенное умение.

Аппаратура и программное обеспечение

Аппаратура. Для выполнения работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (число цветов 256).

Программное обеспечение. Для выполнения работы необходима операционная система WINDOWS 2000/XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 10 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении работы запрещается:

- самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;
- нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т. д.;
- принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

Методика и порядок выполнения работы

1. Запустите систему MathCAD.
2. Составьте документ MathCAD, позволяющий определить частотные и временные характеристики заданного нерекурсивного цифрового фильтра (таблица 5.1).
3. Исследуйте характеристики заданного нерекурсивного цифрового фильтра и сформулируйте выводы.
4. Определите отклик нерекурсивного цифрового фильтра на входной сигнал, заданный следующими отсчетами $x(0)=1$, $x(1)=3$, и $x(2)=2$.
5. Составьте документ MathCAD, позволяющий определить частотные и временные характеристики двух заданных звеньев рекурсивного цифрового фильтра 1-го порядка (таблица 5.2).
6. Определите отклик каждого из двух заданных звеньев рекурсивного цифрового фильтра 1-го порядка (таблица 5.2) на входной сигнал, заданный следующими отсчетами $x(0)=1$, $x(1)=3$, и $x(2)=2$.
7. Составьте документ MathCAD, позволяющий определить частотные и временные характеристики двух звеньев рекурсивного цифрового фильтра 2-го порядка (таблица 5.3).

8. Определите отклик каждого из двух звеньев рекурсивного цифрового фильтра 2-го порядка (таблица 5.3) на входной сигнал, заданный следующими отсчетами $x(0)=1$, $x(1)=3$, и $x(2)=2$.

9. Проанализируйте устойчивость всех исследованных цифровых фильтров и сделайте соответствующие выводы. При исследовании устойчивости используйте методику рассмотренную на работе 3 «Исследование линейных систем».

10. Постройте схемы реализации исследуемых цифровых фильтров. Для нерекурсивного цифрового фильтра схему реализации следует построить по образцу рисунка 5.1, где вместо общего значения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots,$

a_m

следует подставить их численные значения в соответствии с индивидуальным заданием. Для рекурсивного цифрового фильтра необходимо построить одну схему реализации по образцу рисунка 5.4 для звена 2-го порядка с передаточной функцией $H_{22}(z)$. На схеме реализации рекурсивного цифрового фильтра

следует вместо общего значения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ необходимо подставить их численные значения в соответствии с индивидуальным заданием.

11. Сохраните результаты выполнения индивидуального задания.

12. Сформируйте отчет по лабораторной работе.

13. Подготовьтесь к ответу на вопросы для защиты работы.

14. Защитите работу.

Варианты заданий

Необходимо выполнить анализ характеристик заданного нерекурсивного (таблица 5.1) и рекурсивного (таблица 5.2 и 5.3) цифрового фильтра. Номер варианта соответствует номеру фамилии студента в списке учебной группы (подгруппы).

Таблица 5.1 – Исходные данные для исследования характеристик
нерекурсивного цифрового фильтра

Вариант	T, мс	Вектор коэффициентов $\mathbf{a}$
1	0,1	$\mathbf{A}^T =$ 5,0 4,8 4,5 4,3 4,1 3,9 3,7 3,5 3,4 3,2
2	0,2	$\mathbf{A}^T =$ 10,0 9,5 9,0 8,6 8,2 7,8 7,4 7,0 6,7 6,4
3	0,3	$\mathbf{A}^T =$ 10,0 9,0 8,2 7,4 6,7 6,1 5,5 5,0 4,5 4,1
4	0,4	$\mathbf{A}^T =$ 12,0 11,0 10,2 9,3 8,6 7,9 7,3 6,7 6,2 5,7
5	0,5	$\mathbf{A}^T =$ 18,0 17,3 16,6 15,9 15,2 14,6 14,0 13,4 12,9 12,4
6	0,6	$\mathbf{A}^T =$ 8,0 7,7 7,4 7,1 6,8 6,5 6,2 6,0 5,7 5,5
7	0,7	$\mathbf{A}^T =$ 18,0 16,3 14,7 13,3 12,1 10,9 9,9 8,9 8,1 7,3
8	0,8	$\mathbf{A}^T =$ 20,0 15,6 12,1 9,4 7,4 5,7 4,5 3,5 2,7 2,1
9	0,9	$\mathbf{A}^T =$ 14,0 12,4 10,9 9,6 8,5 7,5 6,6 5,8 5,2 4,5
10	1,0	$\mathbf{A}^T =$ 25,0 21,2 17,9 15,2 12,8 10,9 9,2 7,8 6,6 5,6
11	1,1	$\mathbf{A}^T =$ 30,0 27,1 24,6 22,2 20,1 18,2 16,5 14,9 13,5 12,2
12	1,2	$\mathbf{A}^T =$ 22,0 20,2 18,6 17,1 15,8 14,5 13,3 12,3 11,3 10,4
13	1,3	$\mathbf{A}^T =$ 16,0 13,5 11,5 9,7 8,2 7,0 5,9 5,0 4,2 3,6
14	1,4	$\mathbf{A}^T =$ 36,0 28,0 21,8 17,0 13,2 10,3 8,0 6,3 4,9 3,8

Таблица 5.2 – Исходные данные для исследования характеристик рекурсивного цифрового фильтра 1-го порядка

Вариант	T, с	Тип звена	
		первое звено	второе звено
1	0,1	$H_{11}(z) = \frac{8,5 + 8,5z^{-1}}{7 + 10z^{-1}}$	$H_{11}(z) = \frac{-8,5 + 8,5z^{-1}}{-7 + 10z^{-1}}$
2	0,2	$H_{11}(z) = \frac{4 + 4z^{-1}}{3 + 5z^{-1}}$	$H_{11}(z) = \frac{-4 + 4z^{-1}}{-3 + 5z^{-1}}$
3	0,4	$H_{11}(z) = \frac{1,5 + 1,5z^{-1}}{1 + 2z^{-1}}$	$H_{11}(z) = \frac{-1,5 + 1,5z^{-1}}{-1 + 2z^{-1}}$
4	0,5	$H_{11}(z) = \frac{3,5 + 3,5z^{-1}}{2 + 5z^{-1}}$	$H_{11}(z) = \frac{-3,5 + 3,5z^{-1}}{-2 + 5z^{-1}}$
5	1,0	$H_{11}(z) = \frac{6,5 + 6,5z^{-1}}{3 + 10z^{-1}}$	$H_{11}(z) = \frac{6,5 + 6,5z^{-1}}{3 + 10z^{-1}}$
6	0,1	$H_{11}(z) = \frac{3 + 3z^{-1}}{1 + 5z^{-1}}$	$H_{11}(z) = \frac{-3 + 3z^{-1}}{-1 + 5z^{-1}}$
7	0,2	$H_{11}(z) = \frac{5,5 + 5,5z^{-1}}{1 + 10z^{-1}}$	$H_{11}(z) = \frac{-5,5 + 5,5z^{-1}}{-1 + 10z^{-1}}$
8	0,4	$H_{11}(z) = \frac{4,5 + 4,5z^{-1}}{-1 + 10z^{-1}}$	$H_{11}(z) = \frac{-4,5 + 4,5z^{-1}}{1 + 10z^{-1}}$
9	0,5	$H_{11}(z) = \frac{2 + 2z^{-1}}{-1 + 5z^{-1}}$	$H_{11}(z) = \frac{-2 + 2z^{-1}}{1 + 5z^{-1}}$

Продолжение таблицы 5.2

10	1,0	$H_{11}(z) = \frac{3,5 + 3,5z^{-1}}{-3 + 10z^{-1}}$	$H_{11}(z) = \frac{3,5 + 3,5z^{-1}}{-3 + 10z^{-1}}$
11	0,1	$H_{11}(z) = \frac{1,5 + 1,5z^{-1}}{-2 + 5z^{-1}}$	$H_{11}(z) = \frac{-1,5 + 1,5z^{-1}}{2 + 5z^{-1}}$
12	0,2	$H_{11}(z) = \frac{5 + 5z^{-1}}{-1 + 2z^{-1}}$	$H_{11}(z) = \frac{-5 + 5z^{-1}}{1 + 2z^{-1}}$

13	0,4	$H_{11}(z) = \frac{1 + z^{-1}}{-3 + 5z^{-1}}$	$H_{11}(z) = \frac{-1 + z^{-1}}{3 + 5z^{-1}}$
14	0,5	$H_{11}(z) = \frac{1,5 + 1,5z^{-1}}{-7 + 10z^{-1}}$	$H_{11}(z) = \frac{-1,5 + 1,5z^{-1}}{7 + 10z^{-1}}$

Таблица 5.3 – Исходные данные для исследования характеристик рекурсивного цифрового фильтра 2-го порядка

Вариант	T,с	Тип звена	
		первое звено	второе звено
1	0,1	$H_{21}(z) = \frac{-0,85 + 0,85z^{-2}}{1 - 0,243z^{-1} - 0,7z^{-2}}$	$H_{21}(z) = \frac{0,15 - 0,243z^{-1} + 0,15z^{-2}}{1 - 0,243z^{-1} - 0,7z^{-2}}$
2	0,2	$H_{21}(z) = \frac{-0,8 + 0,8z^{-2}}{1 - 0,324z^{-1} - 0,6z^{-2}}$	$H_{21}(z) = \frac{0,2 - 0,324z^{-1} + 0,2z^{-2}}{1 - 0,243z^{-1} - 0,6z^{-2}}$
3	0,4	$H_{21}(z) = \frac{-0,75 + 0,75z^{-2}}{1 - 0,4053z^{-1} - 0,5z^{-2}}$	$H_{21}(z) = \frac{0,25 - 0,405z^{-1} + 0,25z^{-2}}{1 - 0,4053z^{-1} - 0,5z^{-2}}$
4	0,5	$H_{21}(z) = \frac{-0,7 + 0,7z^{-2}}{1 - 0,185z^{-1} - 0,4z^{-2}}$	$H_{21}(z) = \frac{0,3 - 0,185z^{-1} + 0,3z^{-2}}{1 - 0,185z^{-1} - 0,6z^{-2}}$
5	1,0	$H_{21}(z) = \frac{-0,65 + 0,65z^{-2}}{1 - 0,566z^{-1} - 0,3z^{-2}}$	$H_{21}(z) = \frac{0,35 - 0,566z^{-1} + 0,35z^{-2}}{1 - 0,566z^{-1} - 0,3z^{-2}}$
6	0,1	$H_{21}(z) = \frac{-0,6 + 0,6z^{-2}}{1 - 0,274z^{-1} - 0,2z^{-2}}$	$H_{21}(z) = \frac{0,4 - 0,247z^{-1} + 0,4z^{-2}}{1 - 0,274z^{-1} - 0,2z^{-2}}$
7	0,2	$H_{21}(z) = \frac{-0,55 + 0,55z^{-2}}{1 - 0,728z^{-1} - 0,1z^{-2}}$	$H_{21}(z) = \frac{0,45 - 0,728z^{-1} + 0,45z^{-2}}{1 - 0,728z^{-1} - 0,1z^{-2}}$
8	0,4	$H_{21}(z) = \frac{-0,45 + 0,45z^{-2}}{1 - 0,89z^{-1} - 0,1z^{-2}}$	$H_{21}(z) = \frac{0,55 - 0,89z^{-1} + 0,55z^{-2}}{1 - 0,89z^{-1} - 0,1z^{-2}}$

9	0,5	$H_{21}(z) = \frac{-0,4 + 0,4z^{-2}}{1 - 0,371z^{-1} - 0,2z^{-2}}$	$H_{21}(z) = \frac{0,6 - 0,371z^{-1} + 0,6z^{-2}}{1 - 0,371z^{-1} - 0,2z^{-2}}$
10	1,0	$H_{21}(z) = \frac{-0,35 + 0,35z^{-2}}{1 - 1,052z^{-1} - 0,3z^{-2}}$	$H_{21}(z) = \frac{0,65 - 1,052z^{-1} + 0,65z^{-2}}{1 - 1,052z^{-1} - 0,3z^{-2}}$
11	0,1	$H_{21}(z) = \frac{-0,3 + 0,3z^{-2}}{1 - 1,133z^{-1} - 0,4z^{-2}}$	$H_{21}(z) = \frac{0,7 - 1,133z^{-1} + 0,7z^{-2}}{1 - 1,133z^{-1} - 0,4z^{-2}}$
12	0,2	$H_{21}(z) = \frac{-0,25 + 0,25z^{-2}}{1 - 1,214z^{-1} - 0,5z^{-2}}$	$H_{21}(z) = \frac{0,75 - 0,214z^{-1} + 0,75z^{-2}}{1 - 1,214z^{-1} - 0,5z^{-2}}$
13	0,4	$H_{21}(z) = \frac{-0,2 + 0,2z^{-2}}{1 - 1,294z^{-1} - 0,6z^{-2}}$	$H_{21}(z) = \frac{0,8 - 0,294z^{-1} + 0,8z^{-2}}{1 - 1,294z^{-1} - 0,6z^{-2}}$
14	0,5	$H_{21}(z) = \frac{-0,15 + 0,15z^{-2}}{1 - 1,375z^{-1} - 0,7z^{-2}}$	$H_{21}(z) = \frac{0,85 - 0,375z^{-1} + 0,85z^{-2}}{1 - 1,375z^{-1} - 0,7z^{-2}}$

Содержание отчета и его форма

Отчет по работе оформляется в виде текстового документа

и должен включать:

1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Формулировку индивидуального задания и результат его выполнения.
4. Краткие выводы по результатам выполнения работы. В

выводах для каждого исследованного цифрового фильтра необходимо отразить:

- наличие полос пропускания (затухания) для АЧХ фильтра – граничные частоты, ширину полосы пропускания (затухания), равномерность АЧХ в пределах указанных полос;

- тип исследуемого цифрового фильтра с точки зрения взаимного расположения полос пропускания и задерживания в пределах его АЧХ (фильтр нижних частот, фильтр верхних частот, полосовой фильтр, режекторный фильтр и т. п.);

- форма отклика фильтра на заданное воздействие;
- количество и распределение на комплексной плоскости полюсов передаточной функции;

- степень устойчивости (фильтр устойчив; находится на границе устойчивости; не устойчив).

Вопросы для защиты работы

1. Что такое фильтр?
2. Что такое цифровой фильтр?
3. Какова обобщенная математическая модель цифрового фильтра?
4. Какой цифровой фильтр называется нерекурсивным? Как выглядит его уравнение фильтрации?
5. Как определить порядок нерекурсивного цифрового фильтра?
6. Как выглядит структурная схема, реализующая нерекурсивный цифровой фильтр?
7. Какие свойства z -преобразования используются при анализе нерекурсивного цифрового фильтра?
8. Как выглядит выражение для передаточной функции нерекурсивного цифрового фильтра?
9. Как выглядит выражение для комплексной частотной характеристики нерекурсивного цифрового фильтра?
10. Как выглядит выражение для амплитудно-частотной и фазочастотной характеристики нерекурсивного цифрового фильтра?
11. Как математически описать импульсную характеристику нерекурсивного цифрового фильтра?
12. Чему будет равен отклик исследованного вами нерекурсивного цифрового фильтра, если отсчеты входного сигнала $x(k)$ равны: 1, 3 и 2?
13. Какой цифровой фильтр называется рекурсивным? Как выглядит его уравнение фильтрации?
14. Как выглядит прямая реализация структурной схемы, реализующей рекурсивный цифровой фильтр?
15. Как выглядит выражение для передаточной функции рекурсивного цифрового фильтра?

16. Как выглядит выражение для комплексной частотной характеристики рекурсивного цифрового фильтра?
17. Как выглядит выражение для амплитудно-частотной характеристики рекурсивного цифрового фильтра?
18. Как выглядит выражение для фазочастотной характеристики рекурсивного цифрового фильтра?
19. Как математически описать импульсную характеристику рекурсивного цифрового фильтра?
20. Что понимается под устойчивостью цифрового фильтра?
21. Какие формы реализации цифровых рекурсивных фильтров Вы знаете?
22. Как выглядит каноническая форма реализации рекурсивного фильтра?
23. Как выглядит транспонированная форма реализации рекурсивного фильтра?
24. Какая форма реализации рекурсивного фильтра является предпочтительной и почему?
25. Каковы достоинства и недостатки цифровых фильтров?
26. Как было выполнено индивидуальное задание?
27. Какие выводы можно сделать по результатам выполнения индивидуального задания?

Практическое занятие 6

ИССЛЕДОВАНИЕ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Цель и содержание

Цель – приобретение навыков применения быстрого преобразования Фурье (БПФ) для спектрального анализа и синтеза сигналов.

Содержание работы:

- изучение теоретического обоснования и примеров спектрального анализа и синтеза сигналов при помощи БПФ;
- выполнение индивидуального задания и оформление отчета;
- защита отчета по работе.

Теоретическое обоснование

Теоретические основы быстрого преобразования Фурье (БПФ; английский термин – Fast Fourier Transform, FFT) были рассмотрены на лекции 6 «Дискретные преобразования». По этой причине остановимся на практической реализации алгоритмов прямого и обратного БПФ в системе MathCAD.

Этот метод весьма несложен в вычислительном плане, однако позволяет получать очень точные и корректные результаты. Чтобы продемонстрировать, что в численном расчете дискретного преобразования Фурье (ДПФ) методом БПФ нет ничего трудного, приведем пример соответствующего алгоритма в системе MathCAD (рисунок 6.1).

Обратите внимание, что полученный на рисунке 6.2 дискретный Фурье-спектр имеет два резко выделяющихся максимума, положения, которых соответствуют частотам двух периодических составляющих заданного нами бигармонического сигнала ($f_1=0,1$ Гц и $f_2=0,2$ Гц).

Реализация алгоритма БПФ в системе MathCAD

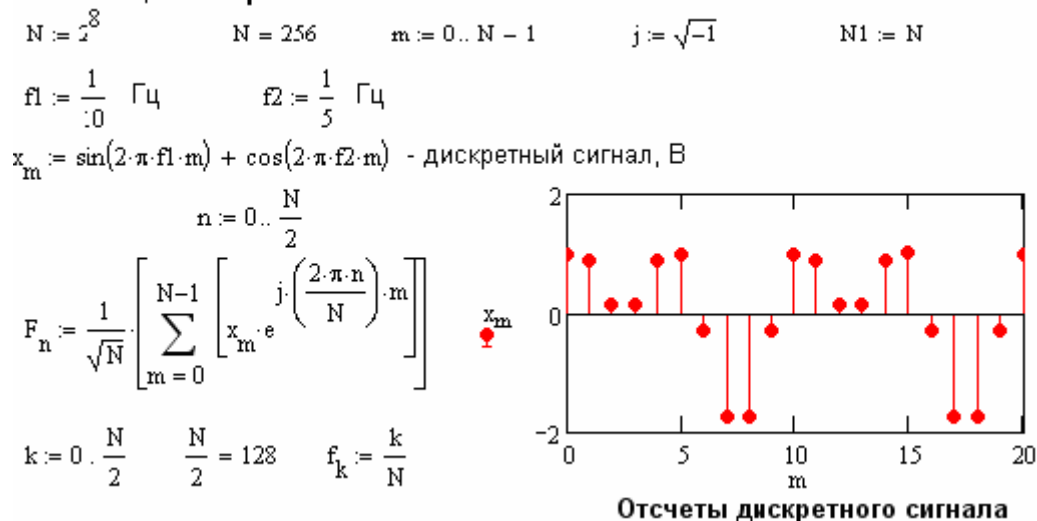


Рисунок 6.1 – Пример реализации алгоритма БПФ в системе MathCAD

Результаты расчета модуля ДПФ дискретного сигнала по программе MathCAD (рисунок 6.1) представлены на рисунке 6.2.

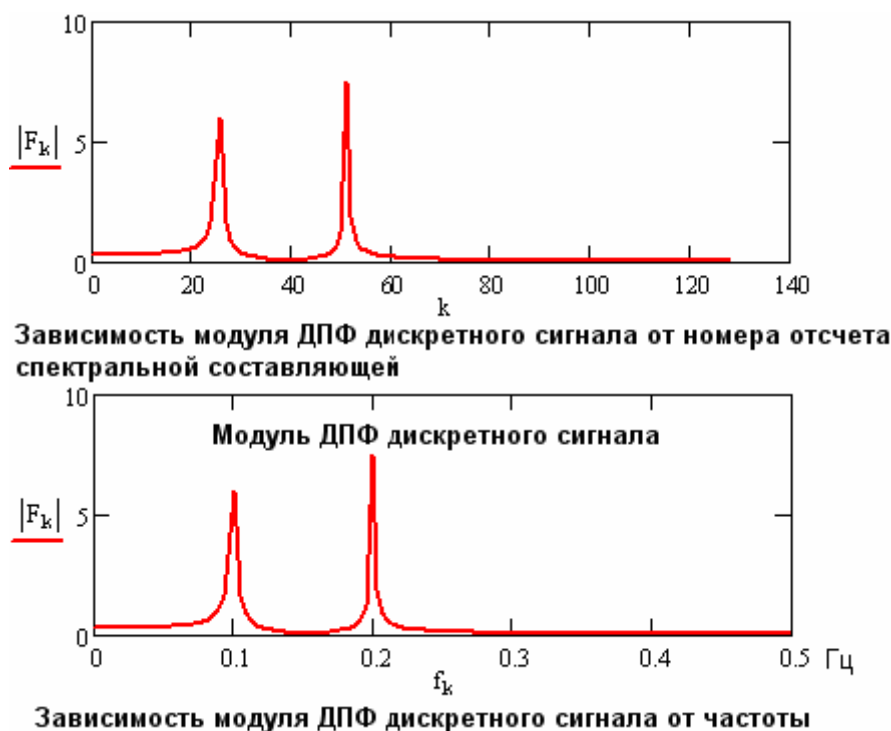


Рисунок 6.2 – Результаты расчета ДПФ по алгоритму БПФ на рисунке 6.1

Как было продемонстрировано выше, задать алгоритм БПФ в MathCAD можно предельно просто. Однако гораздо легче и лучше использовать встроенные в MathCAD функции прямого и обратного быстрого преобразования Фурье:

Функции спектрального анализа в MathCAD.

В MathCAD встроены следующие функции прямого и обратного быстрого преобразования Фурье:

- $\text{fft}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x}$ – вектор равномерно распределенных по промежутку измеренных значений изучаемого сигнала. Возвращает вектор прямого ДПФ (эта функция реализует разновидность алгоритма БПФ в нормировке

$$X(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-j \frac{2\pi nk}{N}), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{N-1}{2};$$

- $\text{ifft}(\mathbf{X})$, где $\mathbf{X}$ – вектор равномерно распределенных значений ДПФ.

Обратное преобразование Фурье;

- $\text{FFT}(\mathbf{x})$ – эта функция реализует алгоритм БПФ в несколько другой нормировке, чем $\text{fft}(\mathbf{x})$

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-j \frac{2\pi nk}{N}), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{N-1}{2}$$

- $\text{IFFT}(\mathbf{X})$ – обратное преобразование Фурье для спектра, полученного на основании использования функции $\text{FFT}(\mathbf{y})$.

При проведении ДПФ дискретного сигнала с помощью алгоритма БПФ в системе MathCAD, необходимо помнить следующее:

1. Количество элементов в векторе значений сигнала должно точно равняться 2^n (n – целое число, больше либо равное 2).

Примечание– Если данных меньше, то просто нарастите соответствующий вектор за счет нулевых значений – на корректность результата это не окажет никакого влияния.

2. В качестве результата прямого БПФ система MathCAD выдает вектор из $2^{n-1}+1$ элемента. Это обстоятельство следует учитывать, если вы собираетесь провести обратное преобразование или построить график спектра.

3. Результатом обратного БПФ вектора спектра из $2^{n-1}+1$ элементов будет являться вектор из 2^n строк, значения элементов которого будут крайне близки к исходному сигналу (если он, конечно, был достаточно информативен).

4. Причиной того, что результатом работы приведенных функций прямого преобразования Фурье есть вектор, количество элементов которого в два раза меньше исходной выборки, является то, что в случае действительных данных, как было показано ранее, дискретный Фурье-спектр симметричен. А это означает, что нет смысла отображать вторую половину спектра, полностью дублирующую первую.

На рисунке 6.3 приведен пример расчета прямого и обратного ДПФ для ранее рассмотренного бигармонического сигнала (рисунки 6.1 и 6.2) с использованием соответствующих встроенных в MathCAD функций БПФ.

Обратите внимание, насколько точными являются численные методы преобразования Фурье: наибольшее отклонение, которое появилось в векторе $\text{ifft}(\mathbf{X})$ по сравнению с вектором исходных данных, лежит в области 12-го знака после запятой. А это очень и очень мало даже для расчетов на компьютере.

Если сравнить результаты расчета ДПФ по алгоритму БПФ (рисунок 6.2) и алгоритму БПФ с использованием встроенных в MathCAD функций БПФ (рисунок 6.3), то можно убедиться, что их результаты совпадают.

Если обрабатываемые данные являются комплексными величинами, то использовать описанные выше функции нельзя. Однако в MathCAD существуют встроенные функции, позволяющие проводить преобразование Фурье и над комплексным сигналом.

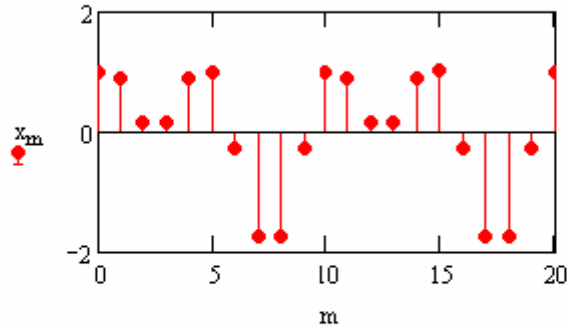
Запомнить их очень легко, так как все они получаются с помощью добавления буквы «с» к именам соответствующих функций действительного преобразования:

- $\text{cfft}(\mathbf{x})$ – комплексное преобразование Фурье в стандартной нормировке;
- $\text{CFFT}(\mathbf{x})$ – вектор прямого комплексного преобразования Фурье с другим условием нормировки (см. выше функцию $\text{FFT}(\mathbf{x})$);
- $\text{icfft}(\mathbf{X})$ – обратное комплексное преобразование Фурье;

- IFFT(X) – обратная функция для FFT(x).

Реализация алгоритма БПФ в системе MathCAD

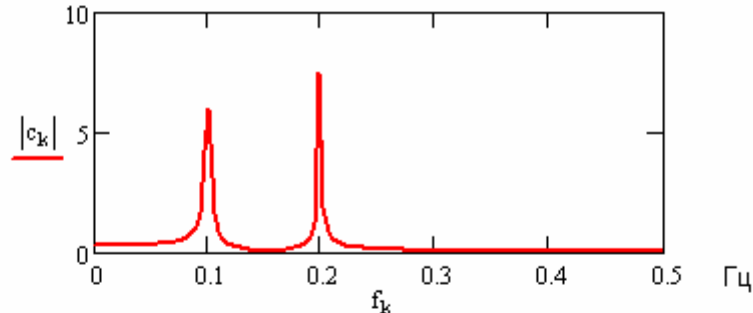
$N := 2^8$ $N = 256$ $m := 0..N-1$ $j := \sqrt{-1}$ $f_1 := \frac{1}{10} \text{ Гц}$ $f_2 := \frac{1}{5} \text{ Гц}$
 $x_m := \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot m) + \cos(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot m)$ - дискретный сигнал, В



Отсчеты дискретного сигнала

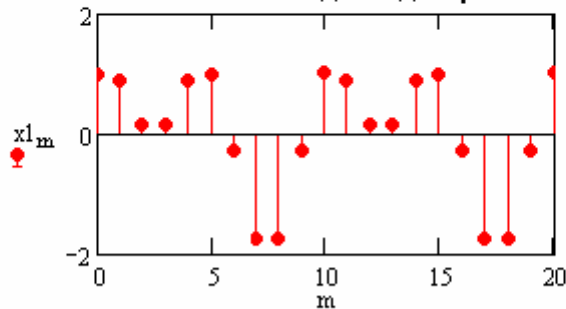
$k := 0.. \frac{N}{2}$ $\frac{N}{2} = 128$ $f_k := \frac{k}{N}$

$c := \text{fft}(x)$ - применяем БПФ к вектору отсчетов дискретного сигнала



Зависимость модуля ДПФ дискретного сигнала от частоты

$x_1 := \text{ifft}(c)$ применяем обратное БПФ к вектору отсчетов ДПФ и восстанавливаем исходный дискретный сигнал



Отсчеты восстановленного дискретного сигнала

$\max(x - x_1) = 5.001 \times 10^{-12}$ - ошибка восстановления сигнала

Рисунок 6.3 – Результаты расчета ДПФ по алгоритму БПФ с использованием встроенных в MathCAD функций БПФ

Как и в случае действительного преобразования Фурье, вектор данных для функций $\text{sfft}(x)$ и $\text{CFFT}(x)$ должен содержать строго $2n$ ($n > 2$) элементов. Однако в связи с тем, что преобразование Фурье для комплексных данных не

является симметричным, результатом работы указанных функций будет вектор, образованный $2n$, а $2^{n-1}+1$ элементами.

При использовании функций комплексного преобразования Фурье по отношению к действительной выборке вектор результата будет образован двумя симметричными половинами, одна из которых была бы отброшена, если бы при преобразовании использовалась функция действительного преобразования.

На самом же деле, если разобраться, то преобразование Фурье не совсем корректно делить на комплексное и действительное. Так, в основе функций $\text{ifft}(\mathbf{X})$ и $\text{icfft}(\mathbf{X})$ лежит один и тот же алгоритм БПФ, различно только количество подсчитываемых элементов вектора спектра.

Для иллюстрации быстрых преобразований Фурье, встроенных в систему MathCAD, зададим некоторый вектор $\mathbf{x}$ из $2^3=8$ комплексных элементов и, проведя прямое преобразование с помощью функции $\text{cfft}(\mathbf{x})$, получим новый вектор $\mathbf{X}$. Исходные данные (в том числе выражение с функцией преобразования) принимают вид:

$$j := \sqrt{-1} \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} 1 + 8j \\ 2 + 7j \\ 3 + 6j \\ 4 + 5j \\ 5 + 4j \\ 6 + 3j \\ 7 + 2j \\ 8 + j \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} := \text{cfft}(\mathbf{x})$$

Результат:

$$X = \begin{pmatrix} 12.728 + 12.728i \\ -4.828 - 2i \\ -2.828 \\ -2 + 0.828i \\ -1.414 + 1.414i \\ -0.828 + 2i \\ 2.828i \\ 2 + 4.828i \end{pmatrix}$$

Примечание– Обратите внимание на то, что в системе MathCAD для обозначения мнимой единицы используется символ i .

Далее проведем над полученным вектором X обратное быстрое преобразование Фурье, используя функцию $\text{icfft}(X)$:

$$x1 := \text{icfft}(x)$$

Результат:

$$x1 = \begin{pmatrix} 12.728 + 12.728i \\ 2 + 4.828i \\ 2.828i \\ -0.828 + 2i \\ -1.414 + 1.414i \\ -2 + 0.828i \\ -2.828 \\ -4.828 - 2i \end{pmatrix}$$

Нетрудно заметить, что полученный таким двукратным преобразованием вектор $x1$ полностью совпадает с исходным вектором x .

Прямое преобразование Фурье по существу означает перевод временной зависимости в ее частотный спектр. А обратное преобразование Фурье переводит частотный спектр вновь во временную зависимость. Технику

проведения БПФ на примере разложения прямоугольного импульса и последующего его синтеза с помощью быстрого преобразования Фурье с ограниченным числом спектральных составляющих ($k = 10$) иллюстрирует фрагмент документа MathCAD, показанный на рисунке 6.4. Здесь исходный вектор задан элементами действительного типа, поэтому используются функции `fft` и `ifft`.

БПФ широко применяется при решении задач фильтрации сигналов или аппроксимации функций. При ограниченном числе гармоник приближение функции тригонометрическим рядом Фурье обеспечивает наименьшую среднеквадратичную погрешность если при этом используется БПФ.

Фрагмент документа MathCAD, показанный на рисунке 6.6, иллюстрирует построение модуля и аргумента дискретной спектральной функции прямоугольного импульса (рисунки 6.4 и 6.5) для случая, когда прямое БПФ реализовано функцией `fft(x)`. Обратите также внимание на то, что для вычисления модуля спектральной функции используется оператор вычисления модуля, размещенная на панели системы MathCAD «Calculator», а для вычисления аргумента – функция `arg0`.

Применение БПФ для спектрального анализа и синтеза прямоугольного импульса

Шаг 1. Задаем исходный сигнал в виде вектора x отсчетов прямоугольного импульса:

$i := 0..127$ - задаём количество элементов вектора x равным $128 = 2^7$

$x_i := 0$ - обнуляем элементы вектора x отсчетов прямоугольного импульса.

$i := 8..40$ - задаём номера элементов вектора x отличных от нуля. Таким образом, количество элементов вектора x отличных от нуля равно $32 = 2^5$

$x_i := 1$ - задаём значения элементов вектора x отличных от нуля.

Шаг 2. Применяем прямое БПФ: $X := \text{fft}(x)$

Шаг 3. Подготавливаем данные для обратного БПФ:

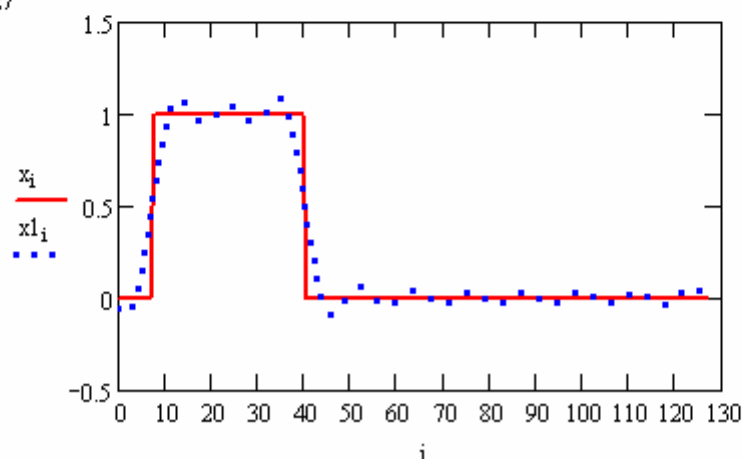
$k := 10$ - задаём максимальное количество спектральных составляющих ДПФ сигнала, принимающих участие в его спектральном синтезе.

$j := 0..64$ $q_j := \text{if}(j \leq k, X_j, 0)$

Шаг 4. Применяем обратное БПФ: $x1 := \text{ifft}(q)$

Шаг 5. Строим график исходного сигнала, представленного вектором x отсчетов прямоугольного импульса, и восстановленного, представленного вектором $x1$:

$i := 0..127$



Примечание - Характерные колебательные процессы на графике восстановленного сигнала иллюстрируют эффект Гибса

Рисунок 6.4 – Начало программы MathCAD

Шаг 6. Отказываемся от ограничений на количество спектральных составляющих сигнала, принимающих участие в его спектральном синтезе, и применяем обратное БПФ к вектору **c**:

$$x2 := \text{ifft}(X)$$

Шаг 7. Строим график исходного сигнала, представленного вектором **v** отсчетов прямоугольного импульса, и восстановленного, представленного вектором **v1**:

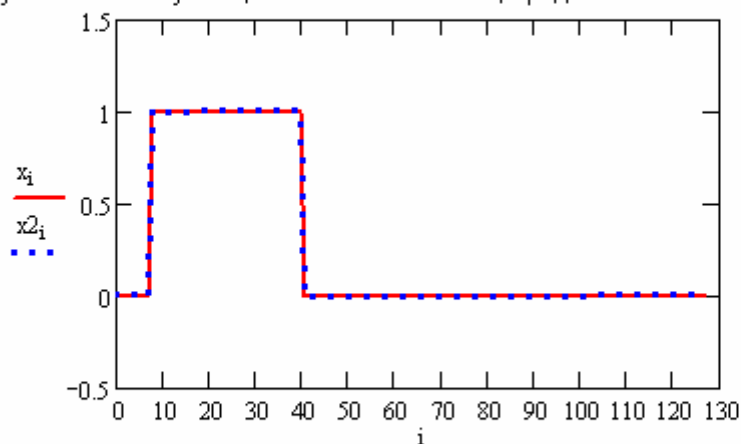


Рисунок 2 - Исходный **x** и восстановленный сигнал **x2**

Вывод - Исходный и восстановленный сигнал практически совпадают

Шаг 8. Находим наибольшее отклонение, которое появилось в векторе **v2** по сравнению с вектором исходных данных **v**: $\max(x - x2) = 2.72 \times 10^{-12}$

Рисунок 6.5 – Окончание программы (рисунок 6.4)

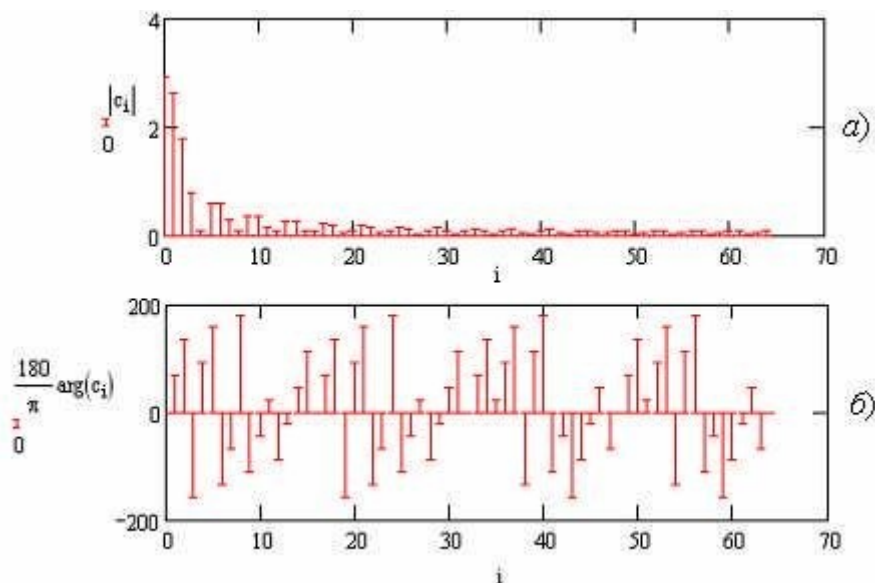


Рисунок 6.6 – Модуль и аргумент дискретной спектральной функции прямоугольного импульса, показанного на рисунке 6.4, при использовании функции **fft(x)** для прямого БПФ

При вычислении модуля и аргумента дискретной спектральной функции прямоугольного импульса использован особый вид графика с представлением зон «ошибок». Такой график строится форматированием графиков двух линий,

причем в качестве типа линий выбирается вариант Error (Ошибка). В данном случае за вторую линию взята линия, значения ординат которой равны 0. Поэтому получается график в виде отсчетов первой (основной) линии, представляющий точечные значения амплитуд и фаз дискретной спектральной функции. Для функции $\text{fft}(\mathbf{x})$ спектр ограничен числом спектральных составляющих, вдвое меньшим, чем число отсчетов сигнала – в нашем случае прямоугольного импульса. Это ограничение хорошо видно на рисунке 6.6, где количество отсчетов дискретной спектральной функции равно:

$$1+2^{7-1}=1+2^6=1+64=65.$$

Модуль и аргумент дискретной спектральной функции прямоугольного импульса имеют обычный вид (работа 2).

На рисунке 6.7 показаны модуль и аргумент дискретной спектральной функции того же импульса, но полученные с помощью функции $\text{cfft}(\mathbf{v})$.

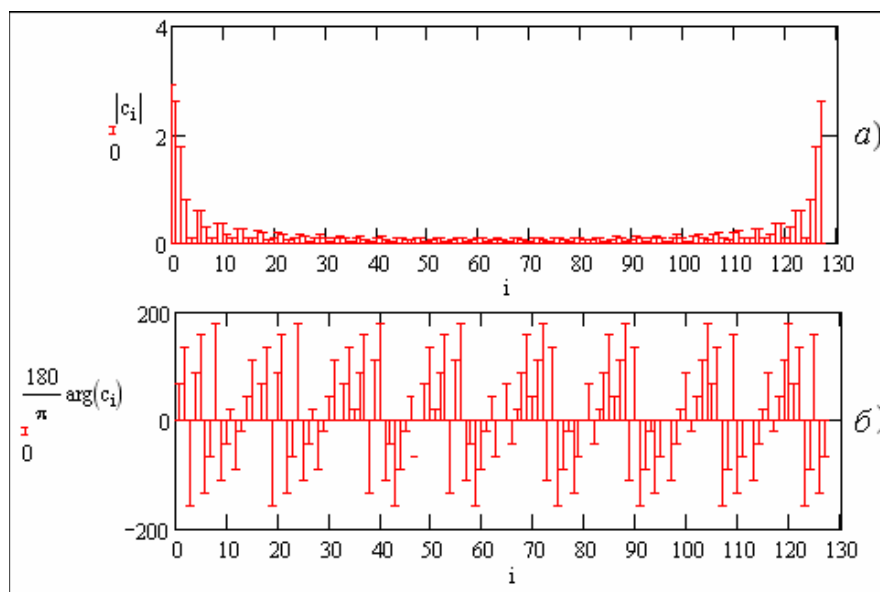


Рисунок 6.7 – Модуль и аргумент дискретной спектральной функции прямоугольного импульса, показанного на рисунке 6.5, при использовании функции $\text{cfft}(\mathbf{x})$ для прямого БПФ

На этот раз можно заметить два принципиально важных отличия:

- выходной вектор имеет то же число отсчетов, что и входной, то есть вдвое больше, чем при использовании функции $\text{fft}(\mathbf{v})$;

- модуль и аргумент дискретной спектральной функции прямоугольного импульса имеют двойную длину и представлены как обычным своим видом в левой части графика, так и их зеркальным отражением в его правой части.

На рисунке 6.8 показан еще один фрагмент программы MathCAD с примером прямого и обратного преобразований Фурье[4]. Здесь для преобразования использована сложная трехкомпонентная функция, содержащая два синусоидальных компонента и компонент-помеху, формируемый в виде случайных чисел.

Прямое и обратное БПФ

$$x(t) := 7 \cdot \sin(t) + \sin(7 \cdot t) + \text{rnd}(1) \quad i := 0..31 \quad v_i := x\left(\frac{i}{5}\right)$$

$$c_k := \text{fft}(v) \quad k := 0..15 \quad x1 := \text{ifft}(c)$$

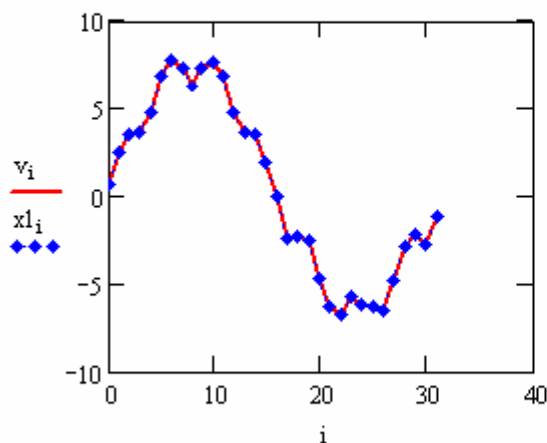


Рисунок 1 - График $x(t)$ и точки функции $x1(i)$ после прямого и обратного БПФ

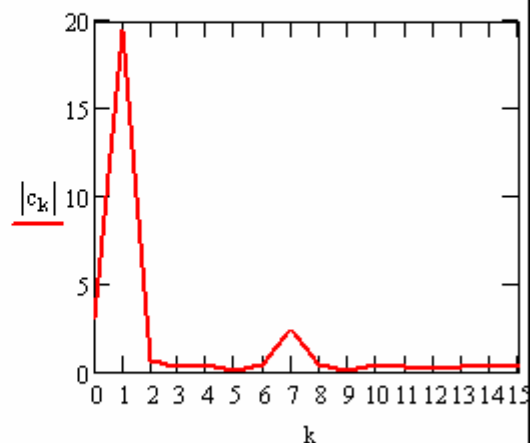


Рисунок 2 - Спектрограмма функции $x(t)$

Рисунок 6.8 – Пример БПФ для сложной функции с построением ее спектрограммы

На левом графике показанного на рисунке фрагмента документа MathCAD производится сравнение исходной функции с результатом ее прямого и обратного преобразований Фурье, а на правом графике дается построение спектрограммы функции (на этот раз линией, представляющей собой огибающую спектра).

Фильтрация зашумленных аналоговых сигналов. Под

фильтрацией сигнала в общем случае подразумевается выделение полезного сигнала из его смеси с мешающим сигналом (часто шумом). Наиболее распространенный тип фильтрации – частотная фильтрация. Если известна область частот, занимаемых полезным сигналом, достаточно выделить эту область и подавить те области, которые заняты шумом.

Начальный фрагмент документа MathCAD, показанный на рисунке 6.9, иллюстрирует технику фильтрации с применением БПФ[4].

В начале документа синтезируется двухчастотный сигнал, представленный 128 отсчетами вектора x . Затем к этому сигналу добавляется шум, получаемый с помощью генератора случайных чисел (функция $\text{rnd}(a)$), и формируется вектор s из 128 отсчетов зашумленного сигнала. Путем использования прямого БПФ сигнал с шумом преобразуется из временной области в частотную область, что создает вектор c из 64 частотных составляющих. Затем выполняется фильтрующее преобразование, эффективность которого задается параметром фильтрации α (рисунок 6.10). Отфильтрованный сигнал (вектор q) подвергается обратному БПФ, в результате чего создается вектор сигнала x_1 , наблюдаемый на выходе устройства фильтрации.

В конце документа (рисунок 6.10) сравниваются временные зависимости исходного сигнала x и сигнала x_1 , очищенного от помехи. Хотя абсолютной идентичности между ними нет, видно, что выходной сигнал почти повторяет входной и в значительной мере избавлен от высокочастотных шумовых помех, маскирующих полезный сигнал.

Алгоритмы, реализованные в данном примере, находят широкое применение на практике. Они лежат в основе создания систем оптимального приема аналоговых сигналов, наблюдаемых на фоне различных помех [4].

Фильтрация аналогового сигнала с применением БПФ

Шаг 1. Синтезируем бигармонический аналоговый сигнал и строим его график

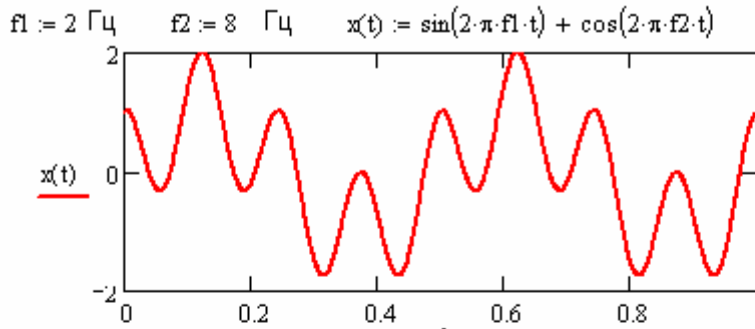


Рисунок 1 - Временная диаграмма бигармонического аналогового сигнала

Шаг 2. Формируем из бигармонического аналогового сигнала дискретный сигнал

$i := 0..127$ - номер дискретного отсчета аналогового сигнала.

$x_i := \sin\left(\frac{i}{128} \cdot 4\pi\right) + \cos\left(\frac{i}{128} \cdot 16\pi\right)$ - вектор x отсчетов аналогового сигнала

Шаг 3. Формируем вектор n аддитивной помехи

$n_i := \text{rnd}(2) - 1$ - дискретный сигнал аддитивной помехи

Шаг 4. Суммируем вектор n аддитивной помехи и вектор x отсчетов аналогового сигнала и строим временную диаграмму сигнала s , поступающего на вход устройства фильтрации:

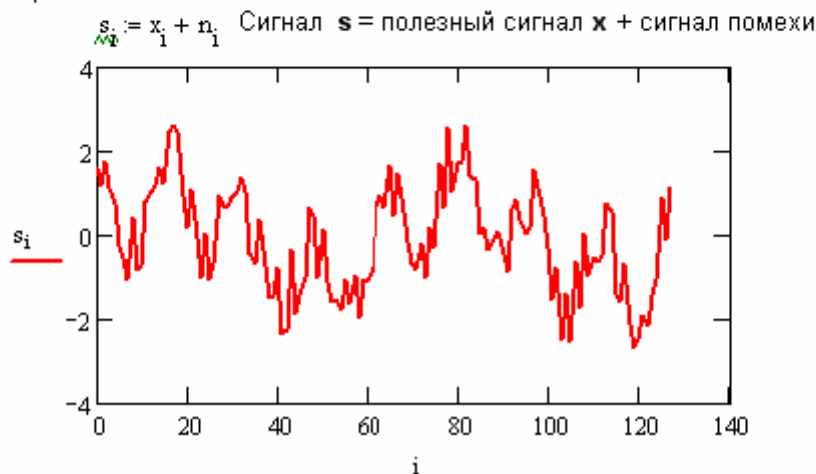


Рисунок 2 - Временная диаграмма сигнала s , поступающего на вход устройства фильтрации

Рисунок 6.9 – Фильтрация аналогового сигнала с применением БПФ (начало программы)

Цифровая фильтрация с помощью БПФ. Аналоговые фильтры обычно имеют довольно сложную аппаратную реализацию. В них применяются громоздкие и нетехнологичные колебательные контуры или RC-цепи с интегральными операционными усилителями. Поэтому интенсивно развивается новый класс фильтрующих устройств – цифровые фильтры [2 –4]. В них

используются цифровые логические схемы, имеющие высокую степень интеграции, и применяются цифровые методы обработки сигналов.

Шаг 5. С помощью прямого БПФ временное представление сигнала s переводится в частотную область, высшие гармоники сигнала отсеиваются и затем с помощью обратного БПФ обеспечивается возврат к временному представлению сигнала. Степень фильтрации задается значением параметра α .

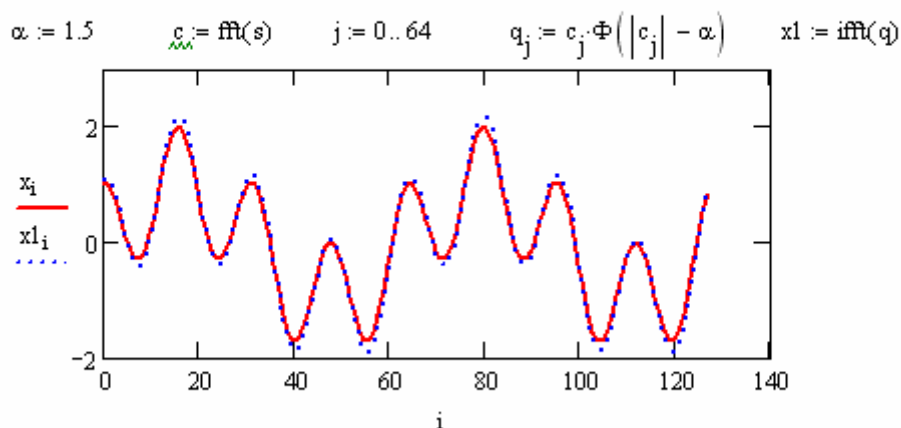


Рисунок 3 - Временные диаграммы исходного сигнала x и сигнала $x1$, полученного в результате фильтрации зашумленного сигнала s .

Рисунок 6.10 – Фильтрация аналогового сигнала с применением БПФ
(окончание программы)

Начальный фрагмент документа MathCAD, показанный на рисунке 6.11, поясняет реализацию алгоритмов цифровой фильтрации с помощью реализуемой цифровыми устройствами функции $s(k, j)$. После ее определения синтезируется цифровой сигнал, содержащий низкочастотную компоненту в виде перепада и высокочастотную компоненту в виде меандра.

Примечание – Меандром называется периодическая последовательность импульсов со скважностью равной двум.

В середине и конце документа (рисунки 6.12 и 6.13) показана реализация фильтрующей операции – свертки для двух типов цифровых фильтров, низкочастотного и высокочастотного, причем, операция вычисления линейной свертки входного сигнала и импульсной характеристики цифрового фильтра реализуется путем вычисления круговой свертки с помощью алгоритма БПФ.

Заметим, что в данном примере речь идет не о фильтрации сигнала на фоне шумов, а о прохождении сложного составного дискретного сигнала через

цифровые фильтры. Графики в конце документа (рисунок 6.13) иллюстрируют характер, возникающих при этом, искажений сигнала.

Двумерное преобразование Фурье. До сих пор приводились примеры применения одномерного БПФ. Однако возможно и двумерное преобразование Фурье, позволяющее решать более сложные задачи.

Цифровая фильтрация с помощью БПФ

Шаг 1. С помощью функции **s(k,j)** задан сигнал, содержащий низкочастотную (параметр **LowFrequency**) и высокочастотную (параметр **HighFrequency**) компоненты. Соответствующие преобразования и графики приведены ниже.

LowFrequency := 1 HighFrequency := 8

$s(k,j) \equiv \text{if} \left(\text{mod} \left(\frac{j \cdot k}{8}, 2 \right) < 1, 1, -1 \right) \cdot \Phi(15 - j)$

$i \equiv 0..15 \quad j \equiv 0..31 \quad x_i := 0.5 \cdot s(\text{LowFrequency}, j) + s(\text{HighFrequency}, j)$

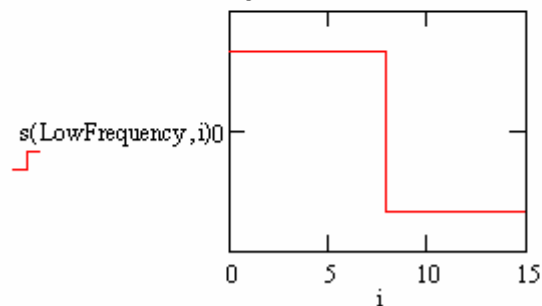


Рисунок 1 - Низкочастотная компонента

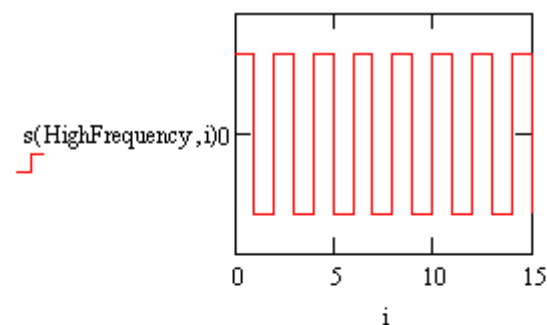


Рисунок 2 - Высокочастотная компонента

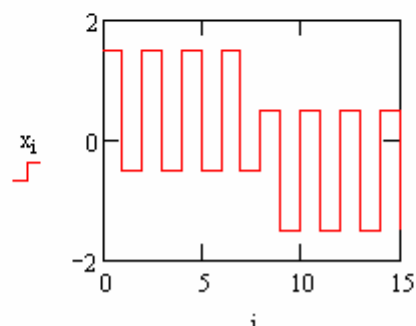


Рисунок 3 - Сигнал

Рисунок 6.11 – Реализация цифровой фильтрации (начало документа)

Если в функциях преобразования Фурье в качестве входного параметра задана матрица, то реализуется двумерное обратное преобразование Фурье. Заметим, что в ранних версиях эта возможность отсутствовала, но могла быть реализована (хотя и более сложным путем) с помощью одномерного БПФ.

Шаг 2. Задаём импульсные характеристики низкочастотного (**LowFrequencyFilter_j**) и высокочастотного (**HighFrequencyFilter_j**) цифровых фильтров (ЦФ):

$\text{LowFrequencyFilter}_j := 0.7^j \cdot \Phi(3 - j)$ - импульсная характеристика НЧ ЦФ

$\text{HighFrequencyFilter}_j := (-1)^j \cdot \text{LowFrequencyFilter}_j$ - импульсная характеристика ВЧ ЦФ

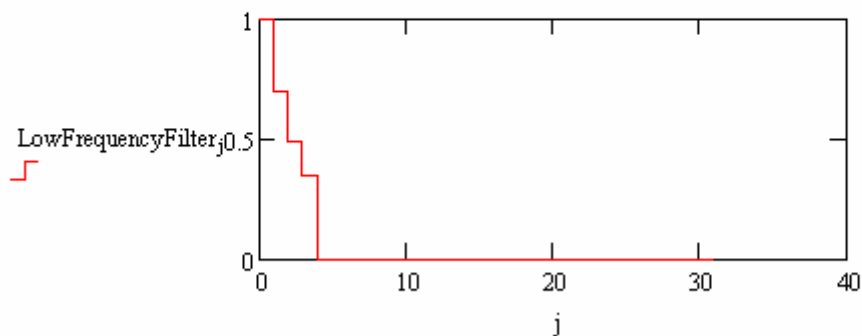


Рисунок 4 - Импульсная характеристика НЧ ЦФ

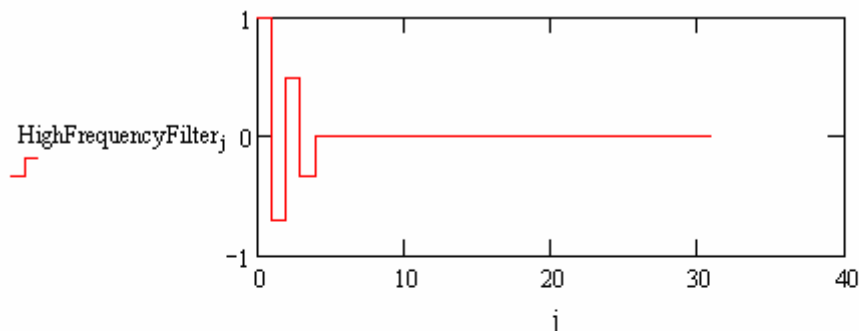


Рисунок 5 - Импульсная характеристика ВЧ ЦФ

Шаг 3. Вычисляем функции откликов низкочастотного (**OutLowFrequencyFilter**) и высокочастотного (**OutHighFrequencyFilter**) цифровых фильтров методом круговой свертки, с применением БПФ:

$$\text{OutLowFrequencyFilter} := \text{icfft}\left(\sqrt{32} \cdot (\text{cfft}(x) \cdot \text{cfft}(\text{LowFrequencyFilter}))\right)$$

$$\text{OutHighFrequencyFilter} := \text{icfft}\left(\sqrt{32} \cdot (\text{cfft}(x) \cdot \text{cfft}(\text{HighFrequencyFilter}))\right)$$

Рисунок 6.12 – Реализация цифровой фильтрации (продолжение документа)

Фильтрация пространственного образа с применением БПФ.

Фрагмент документа MathCAD с примером двумерного прямого и обратного

преобразования Фурье для монохромного изображения, хранящегося в виде файла lena.bmp, представлен на рисунке 6.14.

Шаг 4. Сторим функции отклика низкочастотного и высокочастотного цифрового фильтра, а также низкочастотную и высокочастотную компоненту входного сигнала

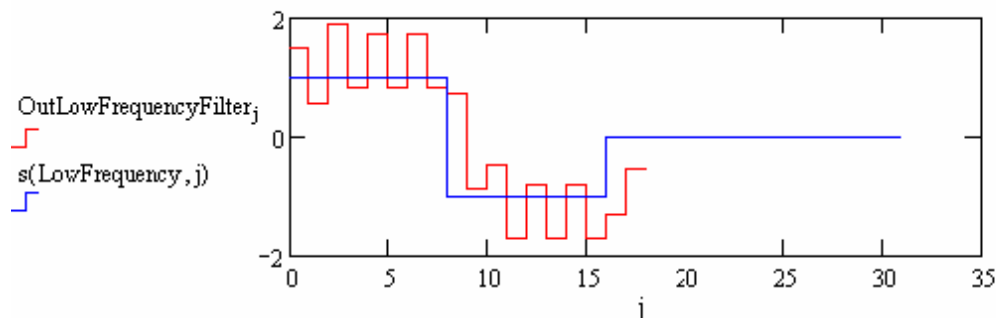


Рисунок 6 - Функции отклика низкочастотного цифрового фильтра и низкочастотная компонента входного сигнала

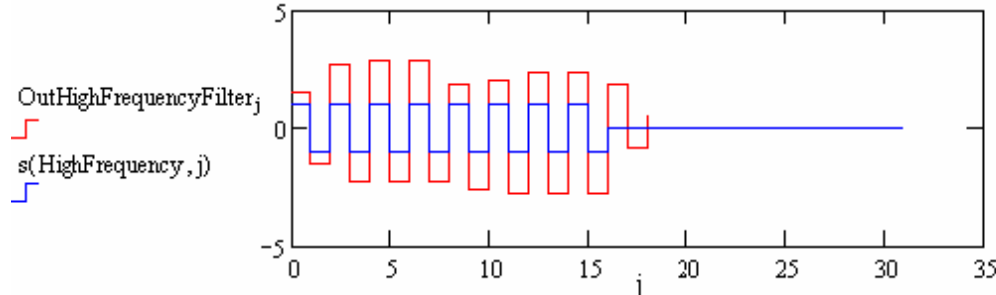


Рисунок 7 - Функции отклика высокочастотного цифрового фильтра и высокочастотная компонента входного сигнала

Рисунок 6.13 – Реализация цифровой фильтрации (окончание документа)

Фильтрация изображения при помощи двумерного БПФ

Шаг 1. Считываем монохромное изображение, формируем матрицу **L** изображения и отображаем изображение, используя инструмент **Picture**, расположенный на панели инструментов **Matrix**:

```
L:= READBMP("lena")
```



L =

	0	1	2	3
0	137	136	133	136
1	137	136	133	136
2	138	133	134	134
3	133	133	133	130
4	129	133	130	130
5	131	133	130	122
6	131	130	130	130
7	131	132	130	130
8	129	130	130	127
9	129	130	132	129
10	130	130	129	128
11	131	129	125	130
12	129	127	127	130

Рисунок 6.14 – Двумерное БПФ (начало документа)

Шаг 2. Вычисляем размеры матрицы изображения (в пикселях):

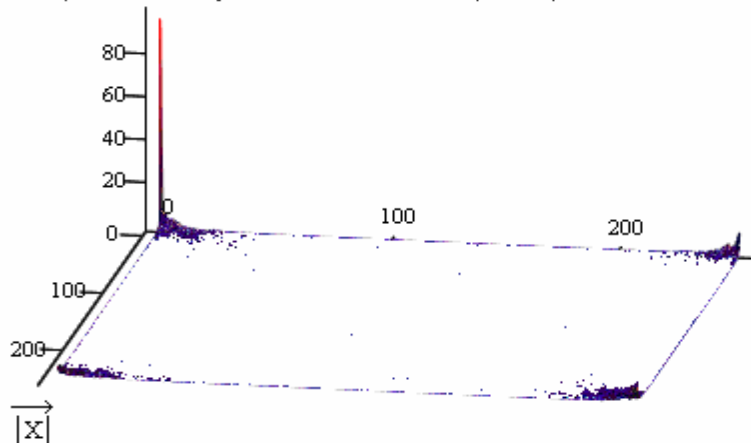
```
width := cols(L)      width = 256    - ширина изображения.
height := rows(L)     height = 256   - высота изображения.
```

Вывод: ширина и высота изображения совпадают и равны 256, что представляет собой число 2 в степени 8.

Шаг 3. Применяем прямое двумерное БПФ к матрице **L** изображения:

```
X := CFFT(L)
```

Шаг 4. Строим амплитудно-частотный спектр изображения:



Шаг 5. Формируем матрицу **H_low** двумерного фильтра нижних частот и строим трехмерный график его АЧХ

```
i := 0..255      j := 0..255
```

$$H_{low,i,j} := \begin{cases} 1 & \text{if } i \leq 63 \wedge j \leq 63 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

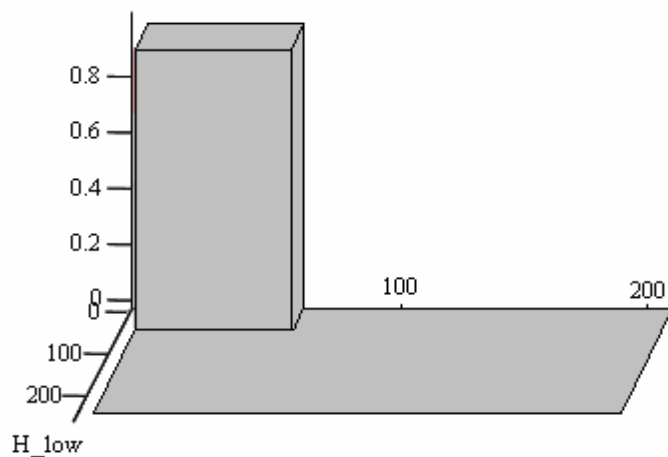
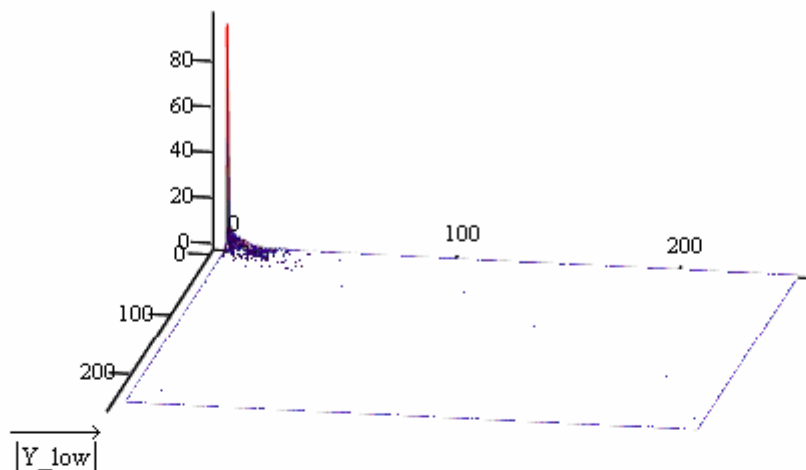


Рисунок 6.15 – Двумерное БПФ (продолжение документа)

Шаг 6. Используя спектральный метод, находим спектр изображения на выходе двумерного фильтра нижних частот и строим трехмерный график его АЧС

$$Y_{low,i,j} := X_{i,j} \cdot H_{low,i,j}$$



Шаг 5. Применяем обратное двумерное БПФ к матрице **Y_low**. Получаем и строим изображение, восстановленное после прохождения двумерного фильтра нижних частот

$$L_{low} := \text{ICFFT}(Y_{low})$$



L_{low}

Рисунок 6.16 – Двумерное БПФ (окончание документа)

В этом примере использована функция альтернативного прямого комплексного БПФ $\text{CFFT}(x)$ и обратного $\text{ICFFT}(X)$.

Как видно из рисунков 6.14 – 6.16, двумерное прямое БПФ позволяет легко проанализировать искажения, вносимые в изображение при его обработке с помощью двумерного фильтра нижних частот. Сравнивая изображения на

рисунках 6.14 и 6.15, убеждаемся в том, что в реконструированном изображении отсутствуют мелкие детали, так как их спектр лежит в области высоких частот, подавленных фильтром.

Примечание— Файл монохромного изображения lena.bmp должен находиться в одной директории с программой MathCAD.

Используя программу, представленную на рисунках 6.14 и 6.16, можно проанализировать искажения, вносимые в реконструированное изображение после его прохождения через двумерный фильтр высоких частот, полосовой и режекторный двумерные фильтры. При этом необходимо только изменять матрицу АЧХ фильтра (шаг 5 на рисунке 6.15). Примеры задания соответствующих матриц АЧХ в среде MathCAD показаны на рисунке 6.17, а трехмерные изображения АЧХ этих фильтров представлены на рисунке 6.18.

$$\begin{array}{l} i := 0..255 \quad j := 0..255 \\ H_{high}_{1,j} := \begin{cases} 1 & \text{if } 192 \leq i \leq 255 \wedge 192 \leq j \leq 255 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{array}$$

а)

$$\begin{array}{l} i := 0..255 \quad j := 0..255 \\ H_{band}_{1,j} := \begin{cases} 1 & \text{if } 63 \leq i \leq 192 \wedge 63 \leq j \leq 192 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{array}$$

б)

$$\begin{array}{l} i := 0..255 \quad j := 0..255 \\ H_{rejector}_{1,j} := \begin{cases} 0 & \text{if } 63 \leq i \leq 192 \wedge 63 \leq j \leq 192 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \end{array}$$

в)

Рисунок 6.17 – Задание матриц АЧХ двумерных фильтров: а – нижних частот, б – полосового фильтра, в – режекторного фильтра

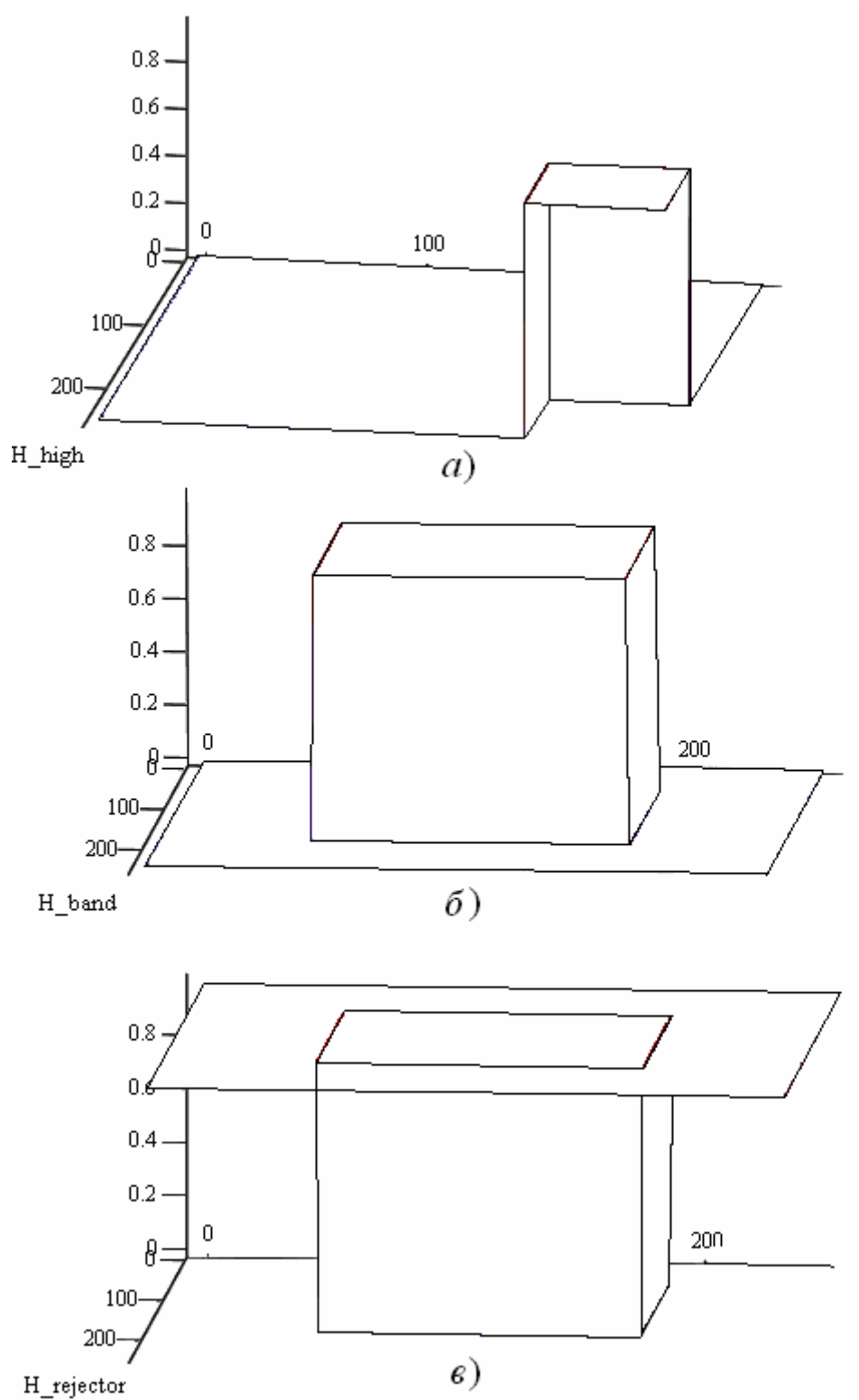


Рисунок 6.17 – АЧХ двумерных фильтров: а – нижних частот, б – полосового фильтра, в – режекторного фильтра

Аппаратура и программное обеспечение

Аппаратура. Для выполнения работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (число цветов 256). □

Программное обеспечение. Для выполнения работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 10 и выше.

УКАЗАНИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

При выполнении работы **запрещается:**

- самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;
- нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т. д.;
- принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности u1087 персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

1. Запустите программу MathCAD.

2. Используя БПФ, выполните дискретный спектральный анализ и синтез одного из аналоговых импульсных сигналов, исследованных вами в работе № 2 (сигнал выбрать самостоятельно). Аналог программы MathCAD приведен на рисунках 6.4 – 6.6.

3. Используя БПФ, постройте и проанализируйте спектрограмму заданного сигнала (таблица 6.1). Аналог программы MathCAD приведен на рисунке 6.8.

4. Используя БПФ, реализуйте фильтрацию заданного зашумленного аналогового сигнала (таблица 6.1). Аналог программы MathCAD приведен на рисунках 6.9 – 6.10.

5. Используя БПФ, реализуйте цифровую фильтрацию заданного сигнала (таблица 6.2). Аналог программы MathCAD приведен на рисунках 6.11 – 6.13.

6. Выполните фильтрацию заданного пространственного образа (таблица 6.3) с применением БПФ. Аналог программы MathCAD приведен на рисунках 6.14 – 6.16. Исследуйте искажения, вносимые в реконструированное изображение после его прохождения через двумерный фильтр низких частот, высоких частот, полосовой и режекторный двумерные фильтры. Для задания матриц АЧХ этих фильтров воспользуйтесь рисунками 6.16 и 6.17.

7. Сохраните результаты выполнения индивидуального задания.

8. Сформируйте отчет по работе.

9. Подготовьтесь к ответу на вопросы для защиты работы.

10. Защитите работу.

Варианты заданий

Варианты заданий по п. программы работы совпадают с вариантами заданий к работе 2. Остальные варианты заданий представлены в таблицах 6.1 – 6.3.

Таблица 6.1 – Исходные данные для исследования спектрограммы сигнала и фильтрации сигнала на фоне помех

Вариант	Сигнал
1	$x(t)=1\sin t+\sin(5t)+rnd(1)$
2	$x(t)=2\sin t+\sin(5t)+rnd(1)$
3	$x(t)=3\sin t+\sin(3t)+rnd(1)$
4	$x(t)=4\sin t+\sin(4t)+rnd(1)$
5	$x(t)=5\sin t+\sin(5t)+rnd(1)$
6	$x(t)=6\sin t+\sin(6t)+rnd(1)$
7	$x(t)=7\sin t+\sin(7t)+rnd(1)$
8	$x(t)=8\sin t+\sin(8t)+rnd(1)$
9	$x(t)=9\sin t+\sin(9t)+rnd(1)$
10	$x(t)=10\sin t+\sin(10t)+rnd(1)$
11	$x(t)=11\sin t+\sin(11t)+rnd(1)$
12	$x(t)=12\sin t+\sin(12t)+rnd(1)$
13	$x(t)=13\sin t+\sin(13t)+rnd(1)$
14	$x(t)=14\sin t+\sin(14t)+rnd(1)$

Таблица 6.2 – Исходные данные для исследования цифровой фильтрации сигнала

Вариант	Сигнал	Частоты
1	$x_j = s(\square \text{LowFrequency}, j) + s(\text{HighFrequency}, j \square)$	LowFrequency = 1 HighFrequency = 8
2	$x_j = s(\square \text{LowFrequency}, j) + 2s(\text{HighFrequency}, j \square)$	
3	$x_j = 3s(\square \text{LowFrequency}, j) + s(\text{HighFrequency}, j \square)$	
4	$x_j = s(\square \text{LowFrequency}, j) + 4s(\text{HighFrequency}, j \square)$	
5	$x_j = 5s(\square \text{LowFrequency}, j) + s(\text{HighFrequency}, j \square)$	
6	$x_j = s(\square \text{LowFrequency}, j) + 6s(\text{HighFrequency}, j \square)$	LowFrequency = 1 HighFrequency = 8
7	$x_j = 7s(\square \text{LowFrequency}, j) + s(\text{HighFrequency}, j \square)$	
8	$x_j = s(\square \text{LowFrequency}, j) + s(\text{HighFrequency}, j \square)$	LowFrequency = 2 HighFrequency = 8
9	$x_j = s(\square \text{LowFrequency}, j) + 2s(\text{HighFrequency}, j \square)$	
10	$x_j = 3s(\square \text{LowFrequency}, j) + s(\text{HighFrequency}, j \square)$	
11	$x_j = s(\square \text{LowFrequency}, j) + 4s(\text{HighFrequency}, j \square)$	
12	$x_j = 5s(\square \text{LowFrequency}, j) + s(\text{HighFrequency}, j \square)$	
13	$x_j = s(\square \text{LowFrequency}, j) + 6s(\text{HighFrequency}, j \square)$	
14	$x_j = 7s(\square \text{LowFrequency}, j) + s(\text{HighFrequency}, j \square)$	

Таблица 6.3 – Исходные данные для фильтрации пространственного образа

Вариант	Файл образа	Вариант	Файл образа
1	lena.bmp	8	lena.bmp
2	mona.bmp	9	mona.bmp
3	irene.bmp	10	irene.bmp
4	leaves.bmp	11	leaves.bmp
5	rose.bmp	12	rose.bmp
6	lena.bmp	13	lena.bmp
7	winter.bmp	14	winter.bmp

Примечание– Файл в формате bmp предоставляется преподавателем.

Номер варианта соответствует номеру фамилии студента в списке учебной группы (подгруппы).

Вопросы для защиты работы

1. Как выглядит процедура вычисления спектра периодического дискретного сигнала?
2. Как записывается прямое (обратное) дискретное преобразование Фурье (ДПФ)?
3. Какие разновидности нормировки, используются при вычислении прямого и обратного ДПФ?
4. Свойства ДПФ?
5. В чем заключается свойство линейности дискретного преобразования Фурье?
6. Как формулируется свойство задержки ДПФ?
7. Как формулируется свойство симметрии ДПФ?
8. Как определить ДПФ произведения двух последовательностей отсчетов $\{x_1(k)\}$ и $\{x_2(k)\}$ одинаковой длины?
9. Как вычислить круговую свертку периодических временных последовательностей?
10. Как выполнить восстановление непрерывного сигнала с помощью ДПФ?
11. Как выглядит матрица ДПФ?
12. Какова связь ДПФ и спектра дискретного сигнала?
13. Какой способ вычисления ДПФ называется быстрым преобразованием Фурье (БПФ)?
14. Как повысить спектральное разрешение ДПФ?
15. Как реализуется БПФ с прореживанием по времени?
16. Как выглядит «бабочка» БПФ с прореживанием по времени?

17. Каков выигрыш в количестве операций, необходимых для вычисления ДПФ методом БПФ с прореживанием по времени?
18. Как реализуется БПФ с прореживанием по частоте?
19. Как выглядит «бабочка» БПФ с прореживанием по частоте?
20. Какие используются основания алгоритма БПФ?
21. Какие функции прямого и обратного быстрого преобразования Фурье встроены в MathCAD?
22. Как было выполнено индивидуальное задание?
23. Какие выводы можно сделать по результатам выполнения индивидуального задания?

Практическое занятие № 7

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СИГНАЛОВ

Цель и содержание

Цель— приобретение навыков вейвлет-анализа и синтеза сигналов.

Содержание работы:

- изучение теоретического обоснования и примеров дискретного спектрального анализа и синтеза сигналов;
- выполнение индивидуального задания и оформление отчета;
- защита отчета по работе.

Теоретическое обоснование

Слово *wavelet* переводится на русский язык как «короткая или небольшая волна». Встречаются так же и такие определения, как всплеск и маловолновая функция.

Особенности вейвлетов. Как и в случае преобразований Фурье, возможны два вида вейвлет-преобразований – прямое и обратное. Прямое означает вейвлет-декомпозицию сигнала, т.е. его разложение по базису вейвлетов. В основе непрерывного вейвлет-преобразования НВП (или CWT – Continue Wavelet Transform) лежит использование двух непрерывных и интегрируемых по всей оси t (или x) функций:

- вейвлет-функция $\psi(t)$ или базисная вейвлет-функция с нулевым значением интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 1$ определяющая детали сигнала и

порождающая детализирующие коэффициенты;

- масштабирующая или скейлинг-функция $\phi(t)$ с единичным значением интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1$, определяющая грубое приближение (аппроксимацию) сигнала и порождающая коэффициенты аппроксимации.

Phi-функции $\varphi(t)$ присущи только тем вейвлетам, которые относятся к ортогональным. Базисная вейвлет-функция $\psi(t)$ создается на основе той или иной «материнской» функции $\Psi_0(t)$, которая, как и $\Psi(t)$, определяет тип вейвлета. «Материнская» функция должна удовлетворять всем тем требованиям, которые были отмечены для ψ -функции $\Psi(t)$ вейвлет-базиса.

Она должна обеспечивать выполнение двух основных операций:

- сдвиг по оси времени $t \rightarrow \Psi_0(t-b)$ при $b \in \mathbf{R}$;

- масштабирование – $\frac{1}{\sqrt{a}} \Psi_0\left(\frac{t-b}{a}\right)$ при $a > 1$ и $a \in \mathbf{R} - \{0\}$.

Параметр a задает ширину этого волнового пакета, а b – его положение, $\mathbf{R}$ – задает область определения параметров, в общем случае бесконечную (верхний индекс $+$ означает область положительную, а обозначение $-\{0\}$ исключение нулевой точки). В ряде литературных источников вместо явного указания времени t используется аргумент x , а вместо параметров a и b используются имеющие тот же смысл иные обозначения. Нетрудно убедиться в том, что следующее выражение задает сразу два этих свойства функции $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = \Psi(a, b, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi_0\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (7.1)$$

Итак, для заданных параметров a и b функция $\Psi(t)$, определяемая формулой (7.1), и есть вейвлет. Вейвлеты являются вещественными функциями времени t и колеблются вокруг оси t (или x). Параметр b задает положение вейвлетов, а параметр a – их масштаб. О вейвлетах, четко локализованных в пространстве (или во времени), говорят, что они имеют компактный носитель.

Вейвлеты типа «мексиканская шляпа». Вейвлеты характеризуются своим временным и частотным образами. Временной образ определяется некоторой ψ -функцией времени $\Psi(t)$. А частотный образ определяется ее Фурье-образом $S(j\omega) = F\{\Psi(t)\}$, который задает огибающую спектра вейвлета. Фурье-образ определяется выражением:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(a, b, t) \exp(-j\omega t) dt$$

Для демонстрации особенностей вейвлетов часто используется вейвлет типа «мексиканская шляпа» (**mexican hat** – похож на сомбреро). Его временной образ, в отличие от подавляющего большинства других вейвлетов, описывается аналитическим выражением:

$$mhat(t) = (1 - t^2)e^{\frac{-t^2}{2}} \quad (7.2)$$

Выражение(7.2) является второй производной от гауссова импульса $y(t)=\exp(-t^2/2)$, в которой опущен не имеющий принципиального значения числовой множитель. С помощью системы MathCAD, имеющей оператор символьного преобразования $\square$ и средства построения графиков функций, нетрудно получить и представить графически временной и частотный образ этого вейвлета (рисунок 7.1).

Хорошо видно, что вейвлет «мексиканская шляпа» напоминает сильно затухающее синусоидальное колебание с некоторой «средней частотой» и площадью (над осью времени и под ней), близкой к нулю. На самом деле точное нулевое значение площади (над и под осью времени) – одно из важнейших условий, позволяющих отнести временную зависимость $mhat(t)$ к вейвлетам. Если вейвлет в пространстве сужается, его «средняя частота» повышается, спектр вейвлета перемещается в область более высоких частот и расширяется. Этот процесс можно считать линейным: если вейвлет сужается вдвое, то его средняя частота и ширина спектра возрастают также вдвое.

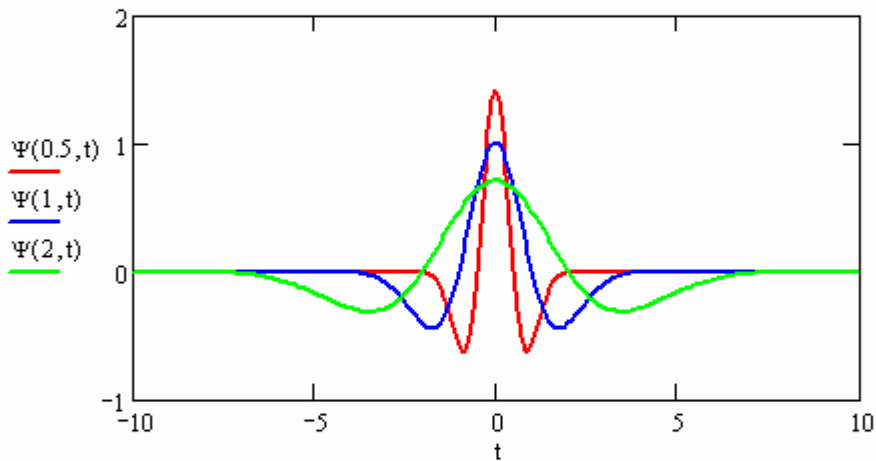
Вейвлет - "Мексиканская шляпа" без сдвига

$$\text{mhat}(t) := \frac{d^2}{dt^2} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \rightarrow e^{\frac{-1}{2} \cdot t^2} - t^2 \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot t^2} \quad j := \sqrt{-1} \quad \text{inf} := 1000$$

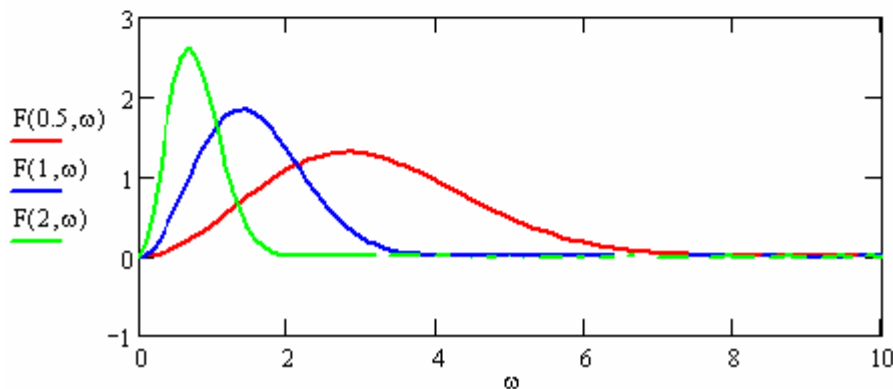
$$t := -10, -9.9 \dots 10 \quad \omega := 0, 0.1 \dots 10$$

$$\Psi(a, t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\text{mhat}\left(\frac{t}{a}\right) \right) \quad - \text{ базисная функция вейвлета}$$

$$F(a, \omega) := \int_{-\text{inf}}^{\text{inf}} \Psi(a, t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt \quad - \text{ Фурье-образ базисной функция вейвлета}$$



Временная диаграмма вейвлета "Мексиканская шляпа"



Спектральные функции вейвлета "Мексиканская шляпа"

Рисунок 7.1 – Временной и частотный образы вейвлета «мексиканская шляпа»

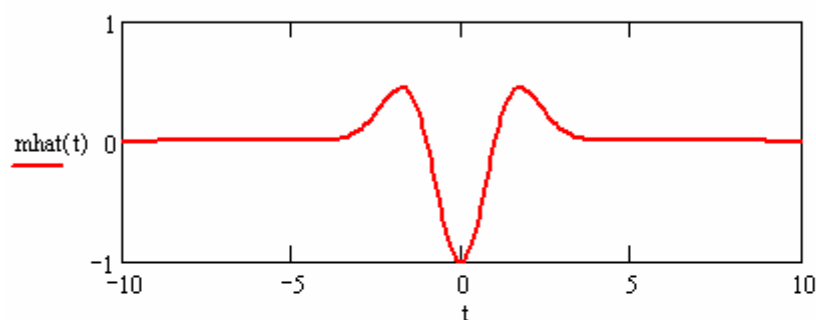
Иногда предпочитают перевернутый вейвлет «мексиканская шляпа», у которого главный пик обращен вниз. Поэтому на рисунке 7.2 показано еще одно построение вейвлета «мексиканская шляпа». На этот раз «шляпа» представлена перевернутой сменой знака у исходной временной функции.

Вейвлет - "Перевернутая мексиканская шляпа"

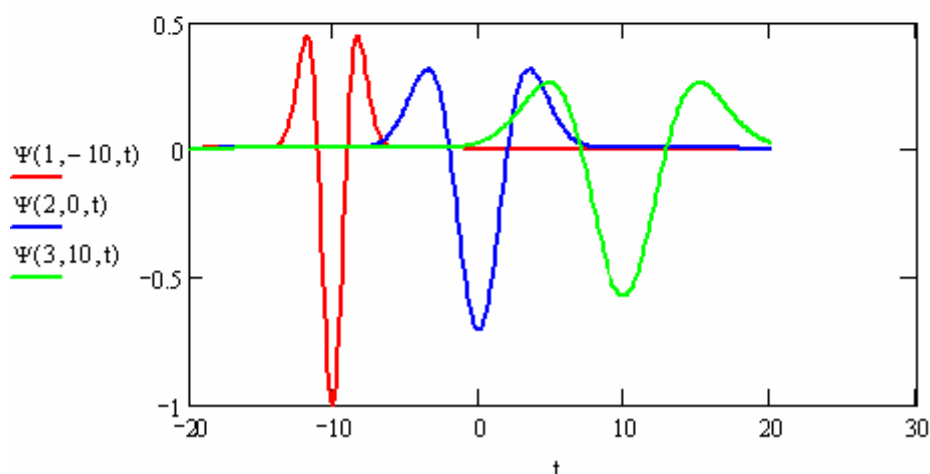
$$\text{mhat}(t) := \frac{d^2}{dt^2} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \rightarrow \left(-e^{\frac{-1}{2} \cdot t^2}\right) + t^2 \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot t^2} \quad j := \sqrt{-1} \quad \text{inf} := 1000$$

$$t := -20, -19.9 \dots 20$$

$$\Psi(a, b, t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\text{mhat}\left(\frac{t-b}{a}\right) \right) \quad - \text{ базисная функция вейвлета}$$



Временная диаграмма вейвлета "Перевернутая мексиканская шляпа"



Сдвиг и масштабирование вейвлета "Перевернутая мексиканская шляпа"

Рисунок 7.2 – Иллюстрация к сдвигу и масштабированию вейвлета типа «перевернутая мексиканская шляпа»

Здесь представлена базисная функция данного вейвлета и функция $\Psi(a, b, t)$ для разных a и b , что иллюстрирует сдвиг вейвлета и его масштабирование. В MathCAD для обеспечения изменений a и b функцию $\Psi(a, b, t)$ приходится задавать в более полном виде, чем $\Psi(t)$, в котором зависимость $\Psi(t)$ от a и b лишь подразумевается.

В частотной области малые значения a соответствуют высоким частотам, а большие – низким частотам. Таким образом, операция задания окна, используемая в оконном преобразовании Фурье, как бы заложена в самой

базисной функции вейвлетов. Это создает предпосылки их приспособления (адаптации) к сигналам, которые могут быть представлены совокупностью вейвлетов.

Тут важно отметить, что невозможна хорошая локализация вейвлетов одновременно во временной и частотной областях. Однако было бы неверно оценивать это обстоятельство как недостаток вейвлетов. Напротив, в сравнении с преобразованием Фурье, именно хорошая временная локализация вейвлетов дает нужное средство для повышения частоты тех спектральных составляющих вейвлетов, которые и нужны для представления кратковременных локальных особенностей сигналов.

Вейвлеты типа «Морле». Рассмотрим еще одно непрерывное вейвлет преобразование с другим типом вейвлета (в настоящее время известно более 20 различных типов вейвлетов). Остановимся на вейвлете «Морле», названным так по имени его автора Morlet и часто применяемым при преобразовании сигналов с локальными изменениями частоты.

Исходная, «материнская» комплексная функция вейвлета «Морле» имеет вид:

$$M(t) = \mu \exp(2\pi f_0 t) \exp(-0,5t^2) \quad (7.3)$$

где $\mu = \pi^{-1/4} = 0,751$ – множитель;

f_0 – частота.

Образованная из (7.1) базисная функция вейвлета «Морле», зависящая от трех параметров: a, b, f_0 , преобразуется к виду:

$$\Psi(a, b, f_0, t) = \frac{1}{\sqrt{a}} M(f_0, \frac{t-b}{a}) \quad (7.4)$$

Спектральная функция такого импульса согласно преобразованию Фурье определяется интегралом:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(a, b, f_0, t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (7.5)$$

Бесконечные пределы интегрирования в (7.5) при расчетах заменяются величиной T , при которой функция $\Psi(a, b, f_0, t)$ практически спадает к нулю.

Программа по расчету действительной и мнимой частей комплексной функции базисного вейвлета «Морле» (7.4) и модуля его Фурье-спектра (7.5) представлены на рисунке 7.3. Из анализа представленных графиков следует, что частота определяет число осцилляции внутри гауссова импульса, параметр a влияет на ширину импульса (с увеличением значения a импульс расплывается), центральная частота Фурье-спектра $f_c = f_0/a$.

Прямое и обратное непрерывные вейвлет-преобразования. Прямое непрерывное вейвлет-преобразование (ПНВП) сигнала $s(t)$ задается, по формальной аналогии с преобразованием Фурье, путем вычисления вейвлет коэффициентов по формуле:

$$C(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (7.6)$$

Если сигнал ограничен во времени, $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, то интегрировать в (7.1) можно в конечных пределах:

$$C(a, b) = \int_R s(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

Обратное вейвлет-преобразование задается выражением

$$s(t) = \frac{1}{K_\psi} \int_R \int_R C(a, b) \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dad b}{a^2}$$

(7.7)

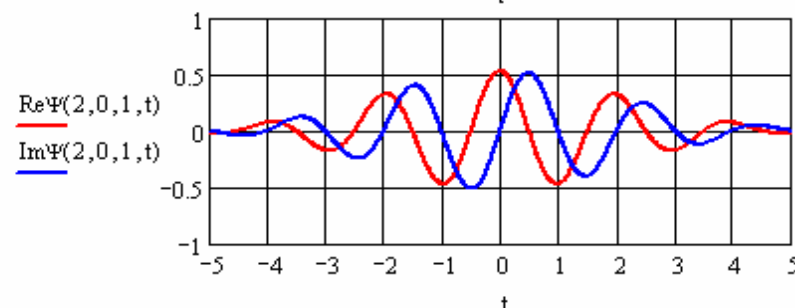
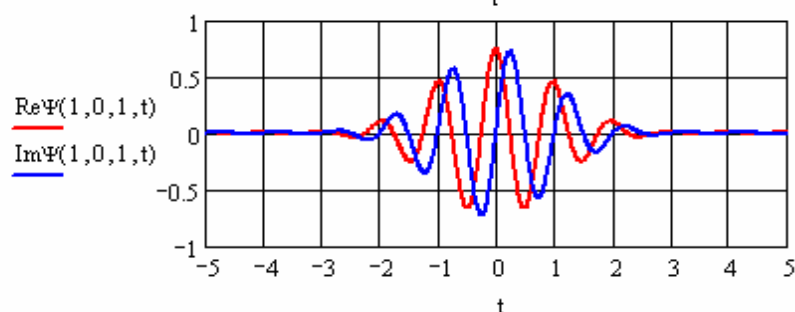
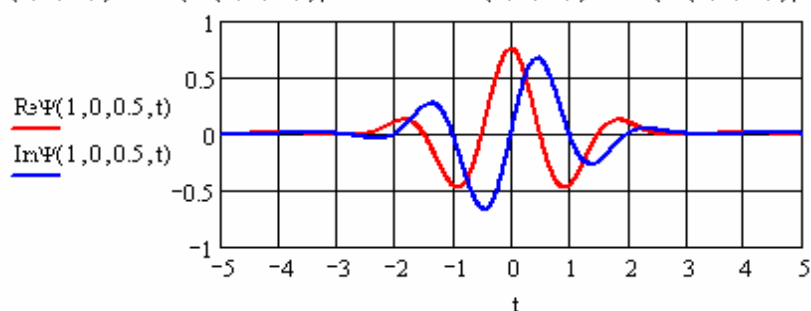
Обратное вейвлет-преобразование (7.7) обеспечивает восстановление сигнала, если используемые вейвлеты ортогональны. К сожалению, вейвлет типа «мексиканская шляпа» к таковым не относится.

Вейвлеты типа «Морле»

$$j := \sqrt{-1} \quad \mu := \pi^{-0.25} \quad \mu = 0.751$$

$$M(f0, t) := \mu \cdot \left(\exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f0 \cdot t) \cdot \exp(-0.5 \cdot t^2) \right) \quad \Psi(a, b, f0, t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot M\left[f0, \left(\frac{t - b}{a}\right)\right]$$

$$\text{Re}\Psi(a, b, f0, t) := \text{Re}(\Psi(a, b, f0, t)) \quad \text{Im}\Psi(a, b, f0, t) := \text{Im}(\Psi(a, b, f0, t))$$



$$DF := 0.01 \quad T := 5 \quad N := 400 \quad b := 0 \quad f01 := 1 \quad f02 := 6 \quad n := 0..N \quad f_n := n \cdot DF$$

$$C1_n := \int_{-T}^T \Psi(1, b, f01, t) \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) dt \quad C2_n := \int_{-T}^T \Psi(2, b, f02, t) \cdot \exp(-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t) dt$$

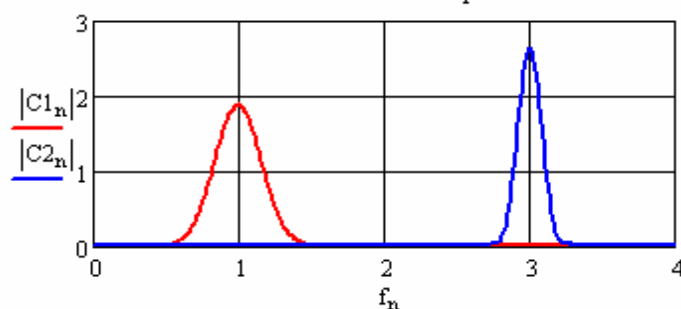


Рисунок 7.3 – Временной и частотный образы вейвлета «Морле»

Примеры непрерывных вейвлет-преобразований и построение их спектрограмм. Рисунки 7.4 – 7.5 демонстрирует документ системы MathCAD, обеспечивающий создание вейвлета «мексиканская шляпа» и проведение прямого вейвлет-преобразования для бигармонического сигнала.

Вейвлет-анализ аналогового бигармонического сигнала в вейвлет-базисе "Перевернутая мексиканская шляпа"

Дано: $AM1 := 1$ $f1 := 0.02$ $AM2 := 1$ $f2 := 0.06$

$x(t) := AM1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot t) + AM2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f2 \cdot t)$ - бигармонический сигнал

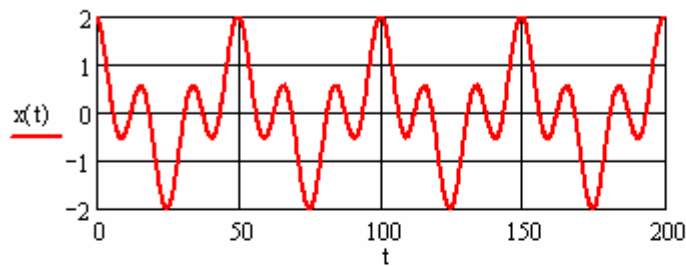


Рисунок 1 - Временная диаграмма бигармонического сигнала

Решение:

Шаг 1. Формируем материнскую и базисную функцию вейвлета
"Перевернутая мексиканская шляпа"

$$mhat(t) := \frac{d^2}{dt^2} \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) \rightarrow \left(-e^{\frac{-1}{2} \cdot t^2}\right) + t^2 \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot t^2} \quad \begin{array}{l} \text{- материнская функция вейвлета} \\ \text{"Перевернутая мексиканская шляпа"} \end{array}$$

$$\Psi(a, b, t) := \frac{1}{\sqrt{a}} \left(mhat\left(\frac{t-b}{a}\right) \right) \quad \begin{array}{l} \text{- базисная функция вейвлета} \\ \text{"Перевернутая мексиканская шляпа"} \end{array}$$

Шаг 2. Задаем параметры и выполняем прямое вейвлет-преобразование:

$$a0 := 1 \quad b0 := 1 \quad \underline{J} := 30 \quad \underline{N} := 201 \quad \underline{K} := N - 1$$

$$\underline{C}(a, b) := \int_{-N}^N \Psi(a, b, t) \cdot x(t) \, dt \quad \text{- прямое вейвлет-преобразование}$$

Шаг 3. Формируем матрицу вейвлет-спектра:

$$j := 1..J \quad a_j := a0 \cdot j \quad k := 0..K \quad b_k := b0 \cdot k$$

$$\underline{R}_{j,k} := C(a_j, b_k)$$

Рисунок 7.4 – Прямое вейвлет-преобразование бигармонического сигнала в вейвлет-базисе «перевернутая мексиканская шляпа» (начало документа MathCAD)

Шаг 4. Отображаем результаты прямого вейвлет-преобразования заданного сигнала:

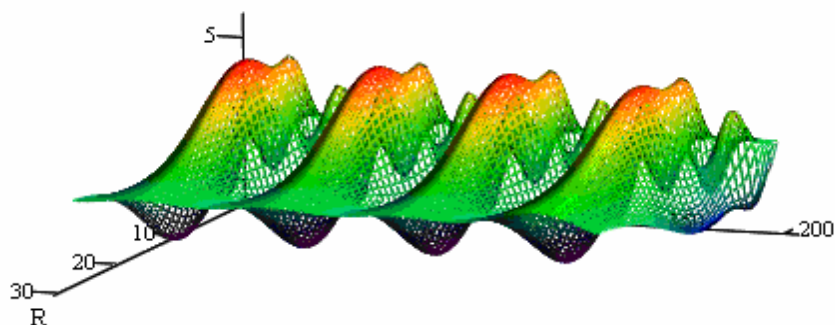


Рисунок 2 - Трехмерное изображение вейвлет-спектра бигармонического сигнала

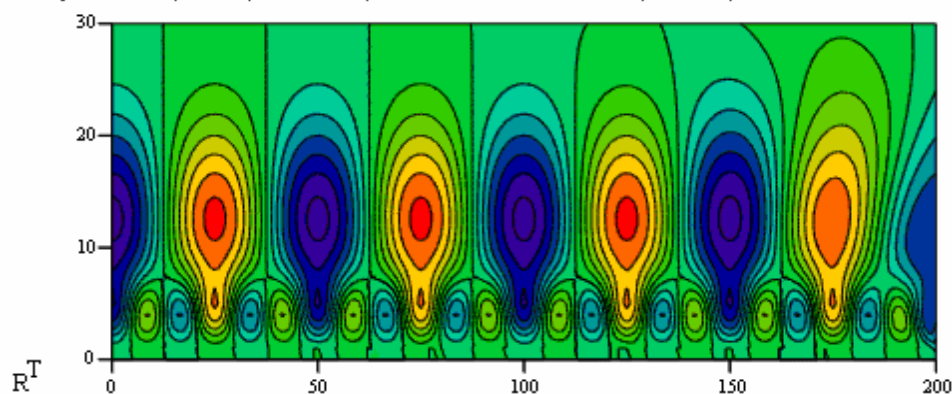


Рисунок 3 - Двумерное изображение вейвлет-спектра бигармонического сигнала на плоскости параметров **a** и **b** вейвлет-преобразования

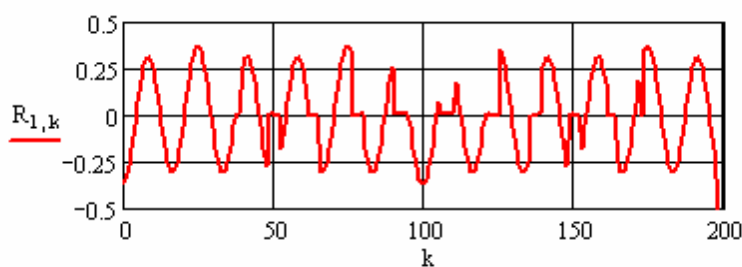


Рисунок 4 - Зависимость спектральной составляющей вейвлет-спектра бигармонического сигнала от параметра **b**, при значении параметра **a** = 1

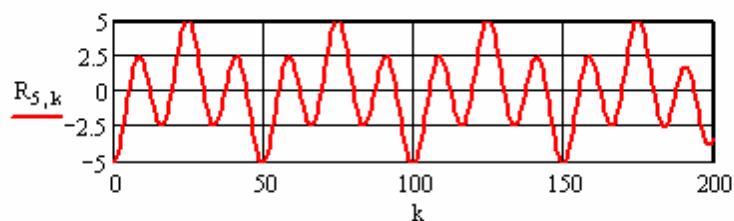


Рисунок 5 - Зависимость спектральной составляющей вейвлет-спектра бигармонического сигнала от параметра **b**, при значении параметра **a** = 5

Рисунок 7.5 – Прямое вейвлет-преобразование для бигармонического сигнала в вейвлет-базисе «перевернутая мексиканская шляпа» (продолжение документа MathCAD)

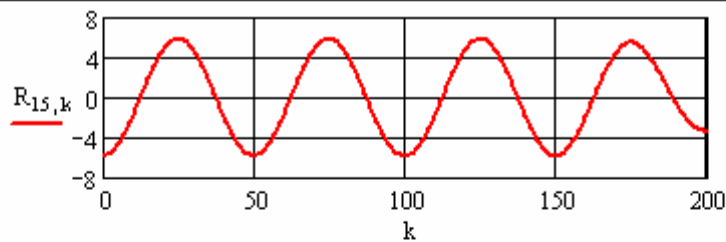


Рисунок 6 - Зависимость спектральной составляющей вейвлет-спектра бигармонического сигнала от параметра **b**, при значении параметра **a = 15**

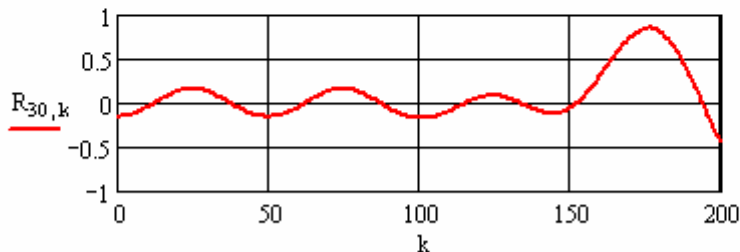


Рисунок 7 - Зависимость спектральной составляющей вейвлет-спектра бигармонического сигнала от параметра **b**, при значении параметра **a = 30**

Рисунок 7.6 – Прямое вейвлет-преобразование для бигармонического сигнала в вейвлет-базисе «перевернутая мексиканская шляпа» (конец документа MathCAD)

В представленном документе системы MathCAD (рисунки 7.4 – 7.6) вычисление вейвлет-коэффициентов $C(a,b)$ выполняется стандартным оператором интегрирования, что придает документу, с одной стороны, прекрасную наглядность, а с другой – обрекает его на медлительность исполнения.

На другом примере (рисунки 7.7 – 7.8) представлено прямое вейвлет-преобразование для той же бигармонической функции, но в вейвлет-базисе «Морле».

Сравнивая между собой рисунки 7.4 – 7.6 и 7.7 – 7.8, убеждаемся в том, что независимо от используемого вейвлет-базиса спектральные составляющие вейвлет-спектра бигармонического сигнала с малыми значениями параметра a ($a=1,2,\dots,5$) несут информацию о высокочастотных составляющих спектра, а с большими ($a=10,15,\dots,30$) – о низкочастотных составляющих спектра.

Вейвлет-анализ аналогового бигармонического сигнала в вейвлет-базисе "Морле"

Дано: $AM1 := 1$ $f1 := 0.02$ $AM2 := 1$ $f2 := 0.06$ $f0 := 0.2$ $j := \sqrt{-1}$
 $x(t) := AM1 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f1 \cdot t) + AM2 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f2 \cdot t)$ - бигармонический сигнал

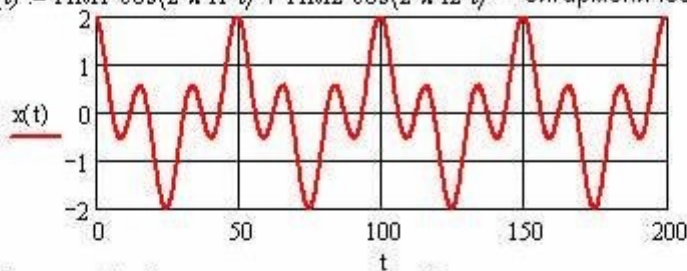


Рисунок 1 - Временная диаграмма бигармонического сигнала

Решение:

Шаг 1. Формируем материнскую и базисную функцию вейвлета "Морле"

$M(t) := \exp(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f0 \cdot t) \cdot \exp(-0.5 \cdot t^2)$ - материнская функция вейвлета "Морле"

$\Psi(a, b, t) := \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) \cdot M\left(\frac{t - b}{a}\right)$ - базисная функция вейвлета "Морле"

Шаг 2. Задаем параметры и выполняем прямое вейвлет-преобразование:

$a0 := 1$ $b0 := 1$ $J := 30$ $N := 201$ $K := N - 1$

$C(a, b) := \int_{-N}^N \Psi(a, b, t) \cdot x(t) dt$ - прямое вейвлет-преобразование

Шаг 3. Формируем матрицу вейвлет-спектра:

$j := 1..J$ $a_j := a0 \cdot j$ $k := 0..K$ $b_k := b0 \cdot k$ $R_{j,k} := |C(a_j, b_k)|$

Шаг 4. Отображаем результаты прямого вейвлет-преобразования заданного сигнала:

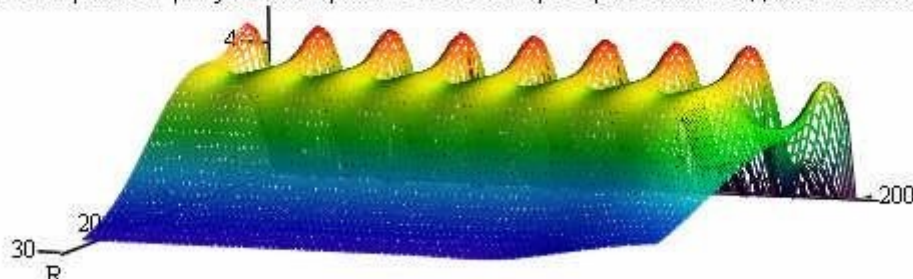


Рисунок 2 - Трехмерное изображение вейвлет-спектра бигармонического сигнала

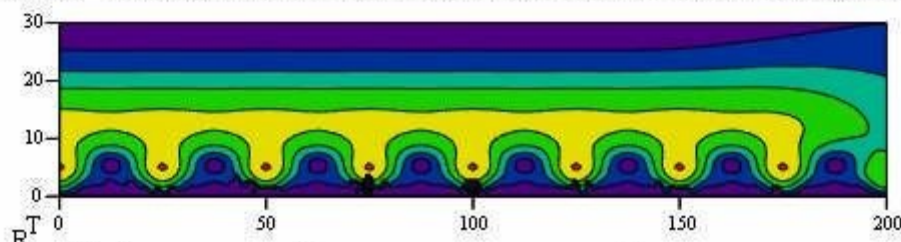


Рисунок 3 - Двумерное изображение вейвлет-спектра бигармонического сигнала на плоскости параметров a и b вейвлет-преобразования

Рисунок 7.7 – Прямое вейвлет-преобразование бигармонического сигнала в вейвлет-базисе «Морле» (начало документа MathCAD)

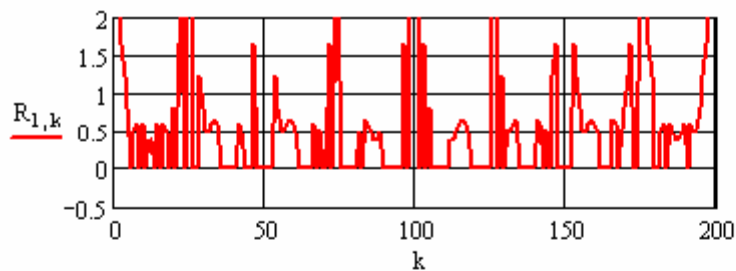


Рисунок 4 - Зависимость спектральной составляющей вейвлет-спектра бигармонического сигнала от параметра **b**, при значении параметра **a = 1**

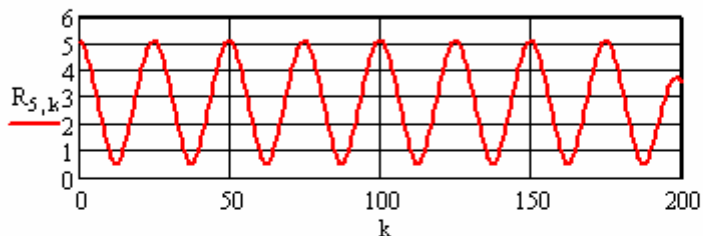


Рисунок 5 - Зависимость спектральной составляющей вейвлет-спектра бигармонического сигнала от параметра **b**, при значении параметра **a = 5**

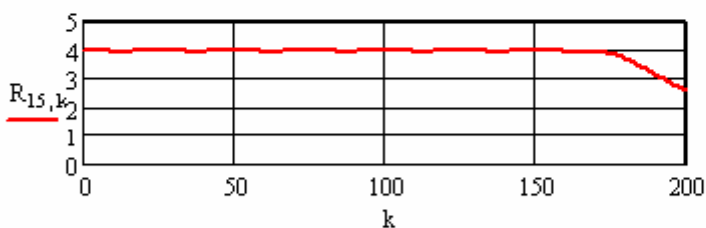


Рисунок 6 - Зависимость спектральной составляющей вейвлет-спектра бигармонического сигнала от параметра **b**, при значении параметра **a = 15**

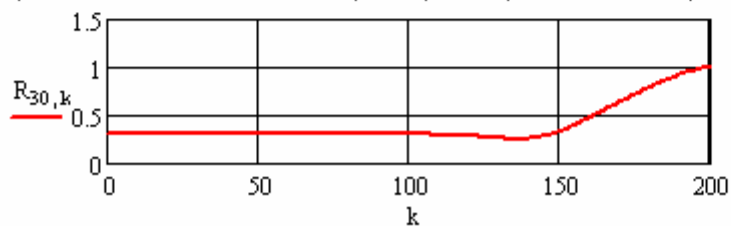


Рисунок 7 - Зависимость спектральной составляющей вейвлет-спектра бигармонического сигнала от параметра **b**, при значении параметра **a = 30**

Рисунок 7.8 – Прямое вейвлет-преобразование бигармонического сигнала в вейвлет-базисе «Морле» (конец документа MathCAD)

Итак, из формулы (7.6) следует, что вейвлет-спектр $C(a,b)$ (wavelet spectrum или time-scale-spectrum – масштабно-временной спектр) в отличие от Фурье-спектра (single spectrum) является функцией двух аргументов: первый аргумент a (временной масштаб) аналогичен периоду осцилляции, т. е. обратен частоте, а второй b – аналогичен смещению сигнала по оси времени.

Следует отметить, что $C(a_1b)$ характеризует временную зависимость (для временного масштаба a_1), тогда как зависимости $C(a_1b)$ можно поставить в соответствие с частотной зависимостью (для смещения b_1).

Если исследуемый сигнал $s(t)$ представляет собой одиночный импульс длительностью τ , сосредоточенный в окрестности $t=t_0$, то его вейвлет спектр будет иметь наибольшее значение в окрестности точки с координатами $a=\tau$, $b=t_0$.

Как следует из приведенных примеров, способы представления (визуализации) $C(a,b)$ могут быть различными. Спектр $C(a,b)$ является поверхностью в трехмерном пространстве (см. рисунки 7.5 и 7.7). Однако часто вместо изображения поверхности представляют её проекцию на плоскость ab с изоуровнями (рисунки 7.5 и 7.7), позволяющими проследить изменение интенсивности амплитуд прямого вейвлет-преобразования на разных масштабах (a) и во времени (b). Кроме того, изображают картины линий локальных экстремумов этих поверхностей так называемый скелетон (skeleton), который выявляет структуру анализируемого сигнала.

Разложение сигнала в ряд по вейвлетам. При непрерывном изменении параметров a и b для расчета вейвлет-спектра необходимы большие вычислительные затраты. Множество функций $\Psi(a,b,t)$ избыточно. Необходима дискретизация этих параметров при сохранении возможности восстановления сигнала из его преобразования. Дискретизация, как правило, осуществляется через степени двойки:

$$a = 2^m, b = k2^m, \Psi_{mk}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \Psi(2^{-m}t - k) \quad (7.8)$$

где m и k – целые числа. В этом случае плоскость ab превращается в соответствующую сетку mk .

непрерывных сигналов запишутся в виде:

$$c_{mk} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \Psi_{mk}(t) dt \quad (7.9)$$

$$s(t) = \sum_{m,k} c_{mk} \Psi_{mk}(t) \quad (7.10)$$

Проводя аналогию с преобразованием Фурье, коэффициенты c_{mk} разложения (7.9) можно определить через непрерывное вейвлет-преобразование $C(a,b)$

$$c_{mk} = C(2^m, k * 2^m) \quad (7.11)$$

Обращаясь к (7.9) и (7.11), видим, что вейвлет-спектр c_{mk} можно представить как «лес» из вертикальных отрезков, размещенных над mk -плоскостью (сеткой); при этом целочисленные координаты m и k указывают соответственно на скорость изменения сигнала и положение вдоль оси времени.

Из формулы (7.10) следует, что сигнал $s(t)$ может быть представлен суммой «вейвлетных волн» с коэффициентами c_{mk} . Формально обобщенный ряд Фурье (7.10) отличается от классического тем, что суммирование проводится не по одному, а по двум индексам. Однако это несущественно, так как обе системы индексации принадлежат одному классу бесконечных счетных множеств.

Встроенные в MathCAD функции вейвлет-преобразований. Начиная с версии MathCAD 2000 в систему MathCAD были включены две простые функции дискретных волновых преобразований:

- wave (x) – дискретное волновое преобразование действительных чисел с использованием 4-коэффициентного волнового базиса Добеши. Вектор данных x , взятых через равные промежутки значений аргумента (время или пространственная координата), должен содержать $2n$ действительных значений, где n – целое число;

- $\text{wave}(\mathbf{X})$ – обратное преобразование относительно преобразования $\text{wave}(\mathbf{x})$, где $\mathbf{X}$ – вектор данных вейвлет-спектра с числом элементов $2n$).

Эти функции реализуют пирамидальный алгоритм быстрого вейвлет преобразования. Вейвлет-преобразования в книге [4] посвящена отдельная глава. В ней подробно описаны особенности вейвлетов и техника их расширенного применения. Здесь же мы рассмотрим только простые примеры применения описанных выше двух функций.

Примеры дискретных вейвлет-преобразований. Несмотря на весьма скромные средства вейвлет-преобразований в ядре системы MathCAD (сейчас известны сотни вариантов вейвлетов) они позволяют выполнять многие важные вычисления и преобразования, которые возможны с применением вейвлетов.

Фрагмент документа MathCAD с примером выполнения дискретных волновых преобразований показан на рисунках 7.9 – 7.12. В этом примере исследуемый сигнал $x(t)$ представляет собой аддитивную смесь

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (7.12)$$

детерминированного сигнала $s(t)$ и белого нормального шума $n(t)$, описываемого плотностью вероятности

$$w(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-n^2/2} \quad (7.13)$$

Над исследуемым сигналом, представленным 256 дискретными отсчетами, осуществляются прямое и обратное дискретное вейвлет-преобразования. Семейства коэффициентов вычисленного вейвлет-спектра и весь спектр показаны на рисунках 7.10 – 7.11.

Примечание – У коэффициентов $(C^{<m>})_i$ (рисунок 7.10) нижний индекс i означает номер текущего отсчета времени и принимает N значений от 0 до $N - 1$, а верхний m имеет тот же смысл, что и параметр a у вейвлет коэффициентов $C(a,b)$, определяемых по формуле(7.6).

Вейвлет-преобразование смеси сигнала и шума на основе материнского вейвлета Добеши

Дано: Исследуемый сигнал представляет собой аддитивную смесь $x(t) = s(t) + n(t)$ прямоугольного импульса $s(t)$ и белого нормального шума $n(t)$.

$$U := 5 \quad t_0 := 40 \quad \tau := 60 \quad s(t) := U \cdot (\Phi(t - t_0) - \Phi(t - t_0 - \tau))$$

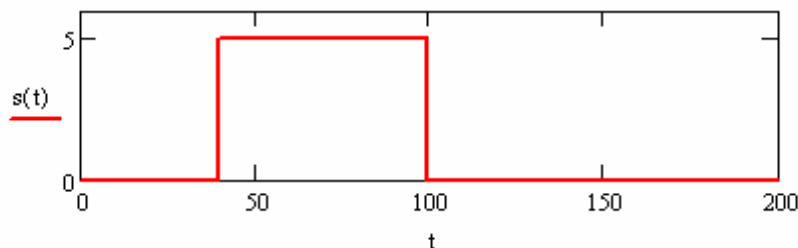


Рисунок 1 - Временная диаграмма исследуемого сигнала

Представление сигнала и шума в дискретном виде:

$$m := 8 \quad N := 2^m \quad N = 256 \quad k := 0..N - 1$$

$$s_k := s(k) \quad \text{- сигнал}$$

$$\sigma := 0.3 \quad n_k := \sigma \cdot \sqrt{-2 \ln(\text{rnd}(1))} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot \text{rnd}(1)) \quad \text{- шум}$$

$$x_k := s_k + n_k$$

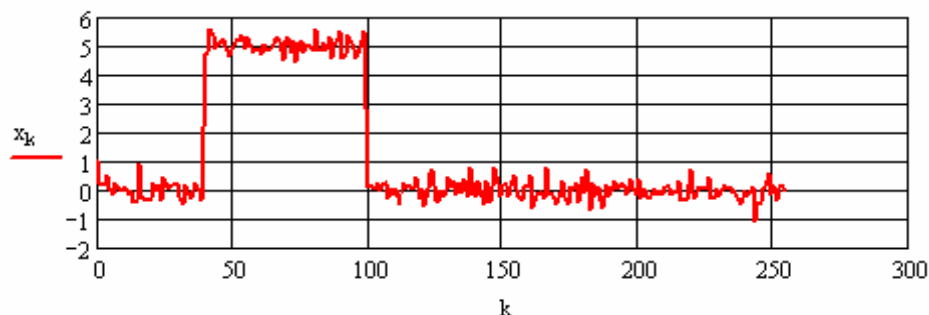


Рисунок 2 - Временная диаграмма "зашумленного" исследуемого сигнала

Этап 1. Вейвлет анализ сигнала

Шаг 1. Выполняем прямое вейвлет преобразование: $W := \text{wave}(x)$

Шаг 2. Формируем матрицу вейвлет-коэффициентов

$$N_{\text{levels}} := \frac{\ln(N)}{\ln(2)} - 1 \quad N_{\text{levels}} = 7 \quad k := 1, 2..N_{\text{levels}} \quad i := 0..N - 1$$

$$\text{coeffs}(\text{level}) := \text{submatrix}(W, 2^{\text{level}}, 2^{\text{level}+1} - 1, 0, 0)$$

$$C_{i,k} := \text{coeffs}(k)_{\text{floor}\left(\frac{i}{2^k}\right)}$$

Рисунок 7.9 – Прямое вейвлет-преобразование аддитивной смеси детерминированного сигнала и шума в вейвлет-базисе Добеши (начало документа MathCAD)

Этап 1. Вейвлет-анализ сигнала

Шаг 1. Выполняем прямое вейвлет преобразование:

$$\underline{W} := \text{wave}(x)$$

Шаг 2. Формируем матрицу вейвлет-коэффициентов

$$N_{\text{levels}} := \frac{\ln(N)}{\ln(2)} - 1 \quad N_{\text{levels}} = 7 \quad k := 1, 2 \dots N_{\text{levels}}$$

$$i := 0 \dots N - 1$$

$$\text{coeffs}(\text{level}) := \text{submatrix}(\underline{W}, 2^{\text{level}}, 2^{\text{level}+1} - 1, 0, 0)$$

$$C_{i,k} := \text{coeffs}(k)_{\text{floor}\left(\frac{i}{N}\right)} \left(\frac{i}{N} \right)_{2^k}$$

Шаг 3. Строим временную диаграмму первых пяти вейвлет-коэффициентов

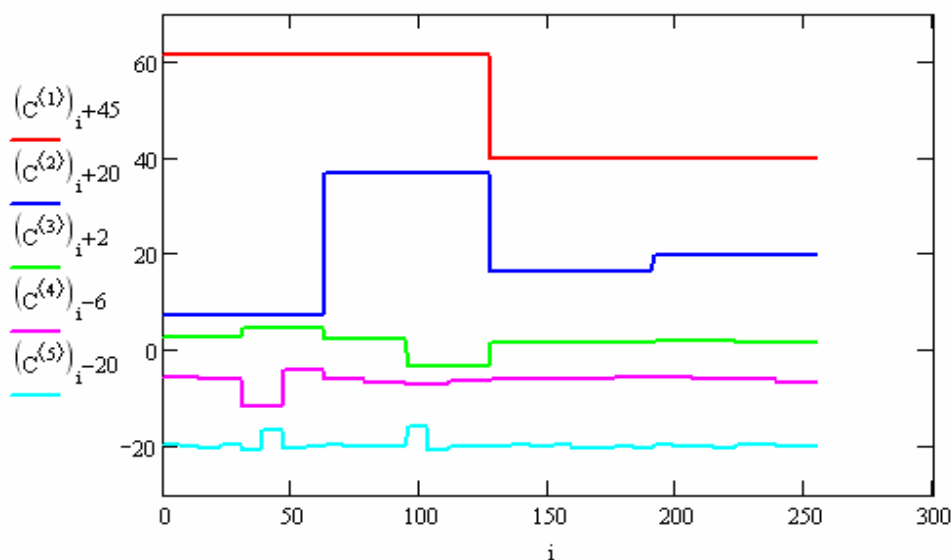


Рисунок 3 - Временная диаграмма первых пяти вейвлет-коэффициентов

Шаг 4. Строим весь вейвлет-спектр

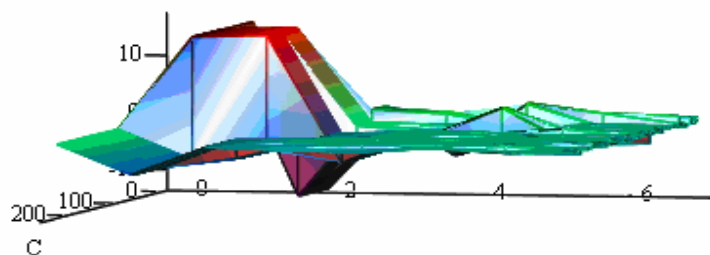


Рисунок 4 - Объемное изображение всего вейвлет-спектра

Рисунок 7.10 – Прямое вейвлет-преобразование аддитивной смеси детерминированного сигнала и шума в вейвлет-базисе Добеши (продолжение документа MathCAD)

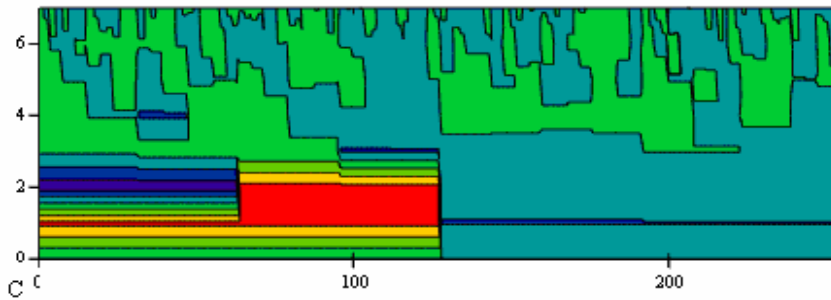


Рисунок 5 - Проекция изображение всего вейвлет-спектра на плоскость индексов i и k

Этап 2. Вейвлет-синтез сигнала

Шаг 5. Восстанавливаем исследуемый сигнал с использованием различного количества первых вейвлет-коэффициентов

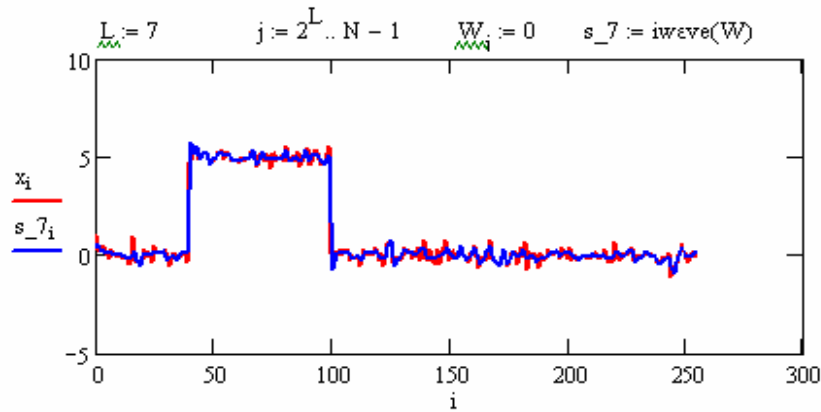


Рисунок 6 - Временная диаграмма исходного импульса и импульса, синтезированного с помощью вейвлет-преобразования при использовании первых семи вейвлет-коэффициентов

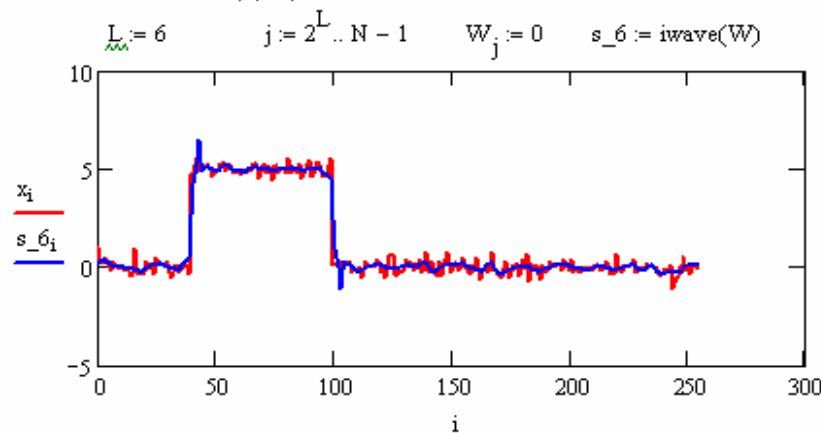


Рисунок 7 - Временная диаграмма исходного импульса и импульса, синтезированного с помощью вейвлет-преобразования при использовании первых шести вейвлет-коэффициентов

Рисунок 7.11 – Прямое вейвлет-преобразование аддитивной смеси детерминированного сигнала и шума в вейвлет-базисе Добеши (продолжение документа MathCAD)

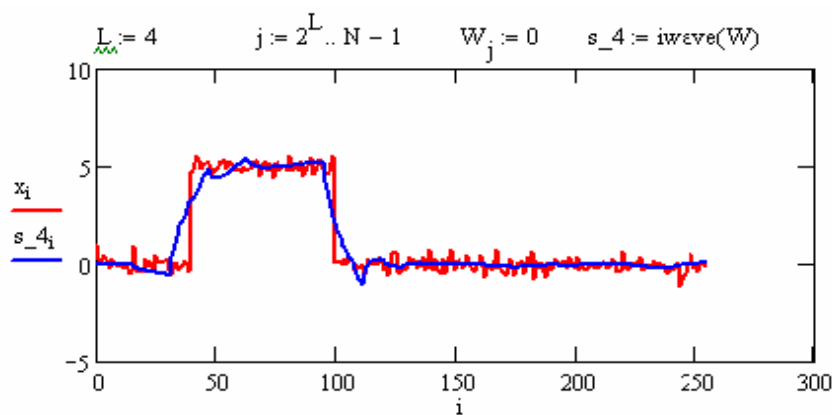


Рисунок 8 - Временная диаграмма исходного импульса и импульса, синтезированного с помощью вейвлет-преобразования при использовании первых четырех вейвлет-коэффициентов

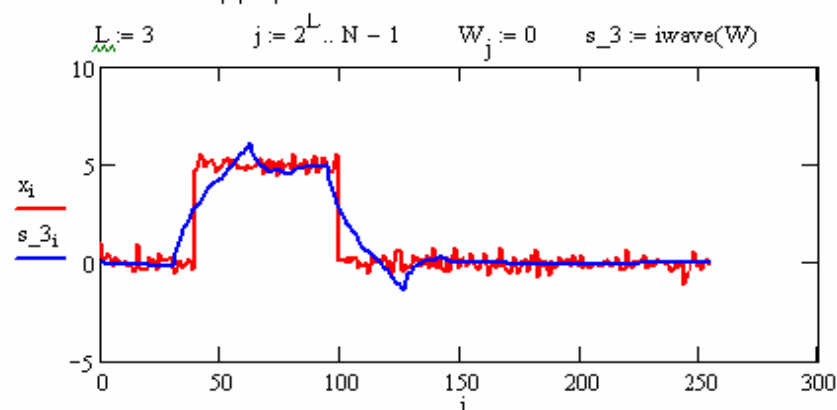


Рисунок 9 - Временная диаграмма исходного импульса и импульса, синтезированного с помощью вейвлет-преобразования при использовании первых трех вейвлет-коэффициентов

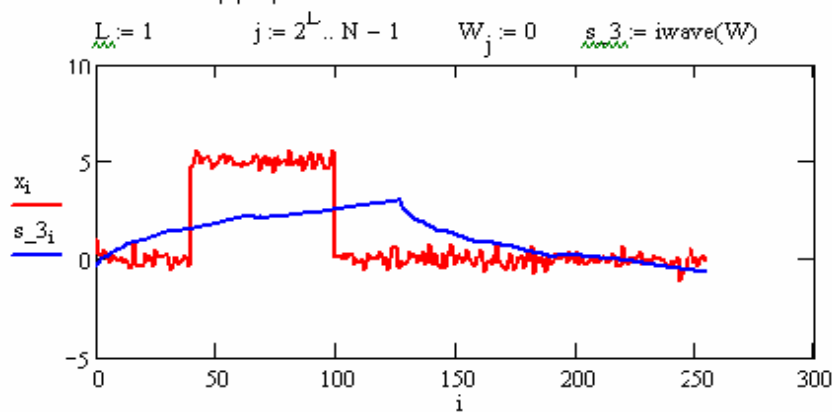


Рисунок 10 - Временная диаграмма исходного импульса и импульса, синтезированного с помощью вейвлет-преобразования при использовании первого одного вейвлет-коэффициента

Рисунок 7.12 – Прямое вейвлет-преобразование аддитивной смеси детерминированного сигнала и шума в вейвлет-базисе Добеши (конец документа MathCAD)

Из анализа графиков на рисунках 7.11 и 7.12 видно, что с уменьшением параметра L расширяется полоса подавления составляющих в вейвлет-спектре, что эквивалентно пропусканию сигнала через фильтр низких частот с

уменьшающейся полосой пропускания фильтра и, следовательно, росту подавления шума и относительно высокочастотных компонент сигнала; последнее приводит к искажению (затягиванию) фронтов импульса.

В настоящее время дискретные волновые преобразования стали важным направлением в технике обработки информации. По ним издано множество книг и публикаций. В MathCAD есть специальное расширение Wavelet Extension Pack для работы с дискретными волновыми преобразованиями[4]. В нем содержится свыше сотни новых функций, расширяющих возможности систем MathCAD в этой новой и перспективной области обработки сигналов и изображений.

Аппаратура и программное обеспечение

Аппаратура. Для выполнения работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (число цветов 256). □

Программное обеспечение. Для выполнения работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 10 и выше.

При выполнении лабораторной работы **запрещается**:

- самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;
- нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т. д.;
- принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

Методика и порядок выполнения работы

1. Запустите программу MathCAD.

2. Составьте программу MathCAD и выполните прямое непрерывное вейвлет-преобразование для заданного сигнала (таблица 7.1) в указанном вейвлет-базисе (таблица 7.2). Требуется:

а) определить вейвлет-спектр и вывести графики поверхности $C(a,b)$ в трехмерном пространстве и виде линий уровня на плоскости (a, b) ;

б) построить несколько сечений спектра $C(a,b)$ для различных (характерных) значений a и b , то есть $C(a_1,b)$, $C(a_2,b)$, $C(a,b_1)$, $C(a,b_2)$ и проанализировать результаты;

в) изменяя параметры сигнала (амплитуды, периоды и задержки и пр.), проанализируйте их влияние на форму его вейвлет-спектра.

3. Составьте программу MathCAD и выполните прямое и обратное вейвлет-преобразование при помощи функций $wave(x)$ и $iwave(X)$ для заданного сигнала (таблица 7.3), наблюдаемого на фоне белого нормального шума (7.12), описываемого плотностью вероятности (7.13). Исходные значения

параметров шума и сигнала: $\sigma=0.5B$, $U=5B$, $T=100$, $\tau=50$, $t_0=10$, $\sigma_1=5$, $\alpha=0.1$,

$U_1=U_2=2B$, $T_1=50$, $T_2=10$, $t_{01}=t_{02}=0$, $k=0.1$. Требуется:

а) дискретизировать сигнал $x(t)$ и представить его графически, аргумент t должен иметь ровно $N=2^p$ элементов (p - целое, например, 8);

б) определить коэффициенты c_{mk} на основе встроеного прямого вейвлетпреобразования ($\text{wave}(x)$) и представить графически семейства этих коэффициентов;

в) исследовать влияние параметров сигнала и шума на структуру семейств коэффициентов c_{mk} ;

г) осуществить синтез сигнала $x(t)$ на основе встроеного обратного вейвлет-преобразования ($\text{iwave}(X)$);

д) исследовать влияние параметра L на форму синтезируемого сигнала и сглаживание (подавление) шума.

4. Сохраните результаты выполнения индивидуального задания.

5. Сформируйте отчет по работе.

6. Подготовьтесь к ответу на вопросы для защиты работы.

7. Защитите работу. **Варианты заданий**

Варианты сигналов, используемых для исследования непрерывных вейвлет-преобразований, представлены в таблице 7.1, а варианты заданий для одноименных исследований – в таблице 7.2. Непрерывный вейвлет-анализ необходимо выполнить в двух вейвлет-базисах:

- перевернутая мексиканская шляпа;
- Морле.

Номер варианта соответствует номеру фамилии студента в списке учебной группы (подгруппы).

Таблица 7.1 – Варианты сигналов для исследования непрерывного вейвлет-преобразования

Код	Определение сигнала
	аналитическое
1	$s(t)=\Phi(t-96)-\Phi(t-160)$
2	$A_{m1}=A_{m2}=1\text{ В}$ $f_1=0.02\text{ Гц}$ $f_2=0.06\text{ Гц}$ $T_0=100\text{ с}$ $x(t) = \begin{cases} A_{m1} \cos(2\pi f_1 t), & t \leq T_0 \\ A_{m2} \cos(2\pi f_2 t), & t \geq T_0 \end{cases}$
3	$A_m=1\text{ В}$ $f_0=0.05\text{ Гц}$ $x(t) = A_m \cos[\Phi(t) - \Phi(t - 200)] \times \sin(2\pi f_0 t)$
4	$A_m=1\text{ В}$ $f_0=0.05\text{ Гц}$ $(t) = A_m \cos[\Phi(t) - \Phi(t - 96)] \times \sin(2\pi f_0 t) + A_m \cos[\Phi(t - 104) - \Phi(t - 200)] \times \sin(2\pi f_0 t)$
5	$A_{m1}=1\text{ В}$ $A_{m2}=2\text{ В}$ $f_1=0.02\text{ Гц}$ $f_2=0.06\text{ Гц}$ $T_0=100\text{ с}$ $x(t) = \begin{cases} A_{m1} \cos(2\pi f_1 t), & t \leq T_0 \\ A_{m2} \cos(2\pi f_2 t), & t \geq T_0 \end{cases}$

6	$A_m=1 \text{ B}$ $f_0=0.05 \text{ Гц}$ $(t) = A_m \cos[\Phi(t) - \Phi(t - 100)] \times \sin(2\pi f_0 t) + A_m \cos[\Phi(t - 104) - \Phi(t - 200)] \times \sin(2\pi f_0 t)$
7	$s(t)=\Phi(t-64)-\Phi(t-128)$

Таблица 7.2 – Варианты заданий для исследования непрерывного вейвлет-преобразования

Вариант	Код сигнала (таблица 7.1)	Тип вейвлет-базиса
1	1	Перевернутая мексиканская шляпа
2	2	
3	3	
4	4	
5	5	
6	6	
7	7	
8	1	Морле
9	2	
10	3	
11	4	
12	5	
13	6	
14	7	

Таблица 7.3 – Варианты сигналов для исследования дискретного вейвлет-преобразования

Вариант	Название сигнала	Аналитическое определение сигнала $s(t)$
1	Отрезок синусоиды	$U \sin[2\pi(t - t_0)/T], t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$
2	Прямоугольный импульс	$\Phi(t-t_0) - \Phi(t-(t_0+\tau))$
3	Колоколообразный импульс	$U \exp(-(t-t_0)^2/2\sigma^2)$
4	Треугольный импульс	$\begin{cases} \left(\frac{2U}{\tau}\right)(t - t_0), t_0 \leq t \leq t_0 + \tau/2 \\ \left(\frac{2U}{\tau}\right)(-t - t_0 + \tau), t_0 + \tau/2 \leq t \leq t_0 + \tau \end{cases}$
5	Пилообразный импульс	$\left(\frac{U}{\tau}\right)(t - t_0), t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$
6	Экспоненциальный импульс	$U \exp[-\alpha(t - t_0)], t > t_0$
7	Пара знакопеременных	$\begin{cases} U, t_0 \leq t \leq t_0 + \tau \\ -U, t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau \end{cases}$

	прямоугольных импульсов	
8	Сумма двух гармонических сигналов	$U_1 \sin[2\pi(t - t_{01})/T_1] + U_2 \sin[2\pi(t - t_{02})/T_2]$
9	Два последовательно включенных отрезка синусоиды	$\begin{cases} U_1 \sin[2\pi(t - t_{01})/T_1], t_0 \leq t \leq t_0 + \tau \\ U_2 \sin[2\pi(t - t_{02})/T_2], t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau \end{cases}$
10	ЛЧМ-импульс	$U \sin \left[\left(\frac{2\pi}{T} \right) (1 + kt) \right]$
11	Разница двух гармонических сигналов	$U_1 \sin[2\pi(t - t_{01})/T_1] - U_2 \sin[2\pi(t - t_{02})/T_2]$
12	Косинусквадратный импульс	$U \cos^2 \left[\left(\frac{\pi}{2\sigma_1} \right) (t - t_0) \right], 0 \leq t \leq 2\sigma_1$
13	Пилообразный импульс	$(-U/\tau)(t - t_0), t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$
14	Пара знакопеременных прямоугольных импульсов	$\begin{cases} -U, t_0 \leq t \leq t_0 + \tau \\ U, t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau \end{cases}$

Вопросы для защиты работы

1. Что такое вейвлет?
2. Каковы прикладные аспекты использования вейвлет-анализа сигналов?
3. Какая разница между Фурье-анализом и вейвлет-анализом сигналов?
4. Каким требованиям должна удовлетворять «материнская» вейвлет-функция?
5. Что такое базисная вейвлет-функция?
6. Каков физический смысл параметров a и b вейвлет-функции?
7. Каковы свойства вейвлетов типа «мексиканская шляпа»?
8. Каковы свойства вейвлетов типа «Морле»?
9. Какие вейвлеты называются ортогональными?
10. Какие вы знаете разновидности вейвлетов в вещественном непрерывном базисе?

11. Какие вы знаете разновидности вейвлетов в вещественном дискретном базисе?

Практическое занятие № 8

ВЕЙВЛЕТ-ОБРАБОТКА И КОМПРЕССИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Цель и содержание

Цель— приобретение навыков вейвлет-обработки и компрессии изображений.

Содержание работы:

- изучение теоретического обоснования и примеров дискретного спектрального анализа и синтеза сигналов;
- выполнение индивидуального задания и оформление отчета;
- защита отчета по работе.

Теоретическое обоснование

Для многих вейвлет-обработка изображений кажется настолько сложной, что ее нереально выполнять в системе MathCAD. Тем более, что в ядре системы имеется всего две функции для прямого $\text{wave}(x)$ и обратного $\text{iwave}(X)$ преобразований одномерного массива данных (работа 7. Вейвлет анализ и синтез сигналов). Ниже представлен документ MathCAD, который показывает, что это не так и что вейвлет-обработка изображений вполне возможна в системе MathCAD даже без применения специальных пакетов расширения[4].

На рисунке 8.1 представлено начало документа, в котором выполняется прямое двумерное вейвлет-преобразование сигнала изображения, которое хранится в графическом файле формата BMP, и задается число (в процентах) удаляемых вейвлет-коэффициентов thresh . Идея преобразования достаточно проста – двумерный массив изображения M разворачивается в одномерный и задается функция двумерного вейвлет-преобразования wave2D . После этого мы получаем матрицу вейвлет-коэффициентов W .

Вейвлет-преобразования монохромного изображения

Шаг 1. Считываем файл исходного монохромного изображения

$L := \text{READBMP}("lena")$



Шаг 2. Вычисляем размеры изображения в пикселях:

$\text{width} := \text{cols}(L)$

$\text{width} = 256$ - ширина изображения

$\text{height} := \text{rows}(L)$

$\text{height} = 256$ - высота изображения

L

$L =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	137	136	133	136	138	134	134	132	132	138
1	137	136	133	136	138	134	134	132	132	138
2	138	133	134	134	136	132	130	130	131	134
3	133	133	133	130	134	133	128	125	129	128
4	129	133	130	130	133	131	132	128	128	131
5	131	133	130	122	132	131	130	130	130	128
6	131	130	130	130	132	131	128	130	130	130
7	131	132	130	130	131	131	130	128	129	130
8	129	130	130	127	130	129	130	129	127	129
9	129	130	132	129	131	129	132	134	134	134
10	130	130	129	128	131	130	133	132	133	131
11	131	129	125	130	132	130	131	132	134	131
12	129	127	127	130	133	132	132	131	135	129
13	128	130	130	129	131	133	133	131	133	134
14	131	132	132	132	131	131	133	131	132	134
15	131	133	132	132	133	132	135	135	135	134

Шаг 3. Задаем число (в %) отсекаемых вейвлет-коэффициентов

$\text{thresh} = 95$

Шаг 4. Определяем вспомогательные функции

$\text{MakePad}(n, m) := \begin{cases} \text{for } x \in 0..m-1 \\ \text{for } y \in 0..n-1 \\ A_{x,y} \leftarrow 0 \\ A \end{cases}$
 $\text{ComputePad}(n) := \begin{cases} x \leftarrow \frac{\log(n)}{\log(2)} \\ 0 \text{ if } (x - \text{floor}(x)) = 0 \\ 2^{\text{floor}(x+1)} - n \text{ otherwise} \end{cases}$

Рисунок 8.1 – Прямое вейвлет-преобразования изображения из графического файла (начало MathCAD документа)

```

Padx(A) := | n ← ComputePad(cols(A))
            | A if n = 0
            | augment(A, MakePad(n, rows(A))) otherwise
L1 := Padx(L)
cols(L1) = 256

Pady(A) := | n ← ComputePad(rows(A))
            | A if n = 0
            | stack(A, MakePad(n, cols(A))) otherwise
L1 := Pady(L)
rows(L1) = 256

wave2D(A) := | for i ∈ 0..cols(A) - 1   Задаем двумерное вейвлет-преобразование
               | A<sup>j</sup> ← wave(A<sup>j</sup>)
               | A ← AT
               | for i ∈ 0..cols(A) - 1
               | A<sup>j</sup> ← wave(A<sup>j</sup>)
               | AT

```

Шаг 5. Выполняем прямое двумерное вейвлет-преобразование

$W := \text{wave2D}(L1)$

	0	1	2	3	4	5
0	1.273-104	1.364-104	-1.709-103	665.865	262.006	-1.262-103
1	1.025-104	1.39-104	-1.596-103	1.693-103	1.839-103	-1.054-103
2	2.595-103	-1.083-103	-1.019-103	950.004	147.232	-243.924
3	-1.406-103	1.027-103	32.055	-3.078-103	-1.025-103	28.331
4	-14.207	-123.53	679.556	-660.169	11.678	421.471
5	467.222	1.059-103	148.529	1.283-103	-287.95	936.992
6	184.068	-111.684	-570.952	-456.399	61.623	-503.029
7	-144.307	344.584	-157.093	805.775	245.734	447.787
8	-57.369	514.1	432.216	-262.141	-228.044	501.89
9	83.525	-789.2	-69.839	-110.896	129.923	-227.465
10	576	670.003	-529.938	747.76	-56.888	-378.484
11	-362.695	-2.905	339.502	-234.196	36.291	640.654
12	69.879	-327.564	45.362	-169.648	85.599	-352.757
13	168.079	241.962	-197.926	-171.215	55.408	293.34
14	22.937	-434.043	280.298	219.727	72.297	64.477
15	-234.593	-122.682	-131.692	200.726	202.156	-235.328

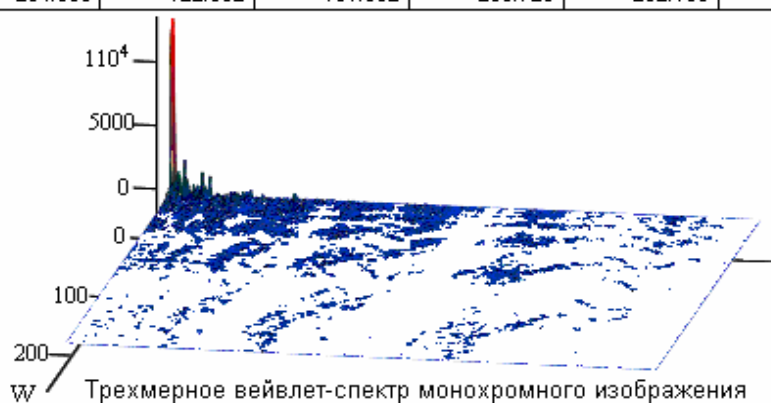


Рисунок 8.2 – Прямое вейвлет-преобразования изображения из графического файла (продолжение MathCAD документа)

Шаг 6. Задаём функцию векторизации матрицы и проводим векторизацию

```
Vectorize(A) := 
$$\begin{cases} \text{for } i \in 0.. \text{cols}(A) - 1 \\ \quad v \leftarrow A^{(i)} \text{ if } i = 1 \\ \quad v \leftarrow \text{stack}(v, A^{(i)}) \text{ otherwise} \end{cases}$$

v
```

v := Vectorize(W)

Шаг 7. Зададим функцию вычисления абсолютного значения элементов вектора

```
Vabs(v) := 
$$\begin{cases} \text{for } i \in 0.. \text{rows}(v) - 1 \\ \quad v_i \leftarrow -v_i \text{ if } v_i < 0 \end{cases}$$

v
```

v := Vabs(v) v := sort(v)

skip := (cols(L1) - width) · rows(L1) + (rows(L1) - height) · cols(cols(L1))

skip = 0

Шаг 8. Вычисляем пороговые значения вейвлет-коэффициентов

th := v

$$\text{skip} + \text{floor}\left(\frac{\text{thresh}}{100} \cdot \text{width} \cdot \text{height}\right)$$

th = 44.759

Шаг 9. Определяем функцию для порогового ограничения вейвлет-коэффициентов

```
ThreshOld(A, t) := 
$$\begin{cases} \text{for } i \in 0.. \text{rows}(A) - 1 \\ \quad \text{for } j \in 0.. \text{cols}(A) - 1 \\ \quad \quad A_{i,j} \leftarrow 0 \text{ if } |A_{i,j}| < t \end{cases}$$

A
```

W := ThreshOld(W, th)

W =

	93	94	95	96	97	98	99
0	0	0	0	0	-62.777	51.411	0
1	-45.401	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	-77.862	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	-77.928	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0
10	0	-45.244	0	0	0	47.601	0
11	0	-59.088	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	-52.918	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0

Рисунок 8.3 – Обратное вейвлет-преобразование изображения с компрессией
(продолжение MathCAD документа)

Шаг 10. Задаем обратное двумерное вейвлет-преобразование

```

iwave2D(A) :=
  for i ∈ 0..cols(A) - 1
    A(i) ← iwave(A(i))
  A ← AT
  for i ∈ 0..cols(A) - 1
    A(i) ← iwave(A(i))
  AT

```

Шаг 11. Выполняем обратное двумерное вейвлет-преобразование

L2 := iwave2D(W)

L2 := submatrix(L2, 0, height - 1, 0, width - 1)



Изображение после обратного
двумерного вейвлет-преобразования

**Шаг 12. Сохраняем восстановленное
изображение на жестком диске ПК**

WRITEBMP("lena 2.bmp") := L2

L2

L2 =

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	145.324	138.921	129.12	120.23	127.179	129.883	136.411	157.808
1	148.025	147.441	133.985	123.978	127.265	126.99	130.701	145.838
2	131.955	145.216	132.413	126.593	125.452	123.058	126.919	139.774
3	120.915	145.87	132.565	129.512	124.148	119.404	122.621	132.128
4	120.395	145.1	133.35	131.368	126.183	121.856	126.042	135.7
5	117.056	144.712	133.965	133.509	127.323	122.672	127.395	136.267
6	119.311	145.927	134.113	132.597	126.863	122.259	126.68	133.827
7	120.067	146.712	134.386	132.503	126.832	122.176	126.518	132.193
8	117.985	140.303	131.818	131.587	126.912	123.427	129.687	137.253
9	116.663	135.822	130.012	130.892	126.962	124.321	131.963	140.519
10	116.102	133.268	128.966	130.416	126.982	124.857	133.347	141.991
11	115.337	130.198	127.717	129.882	127.01	125.488	134.97	143.944
12	122.255	133.946	130.865	131.742	128.498	126.358	135.194	142.551
13	127.114	135.867	132.835	132.961	129.594	127.163	135.793	142.054
14	129.915	135.962	133.627	133.537	130.299	127.905	136.767	142.454
15	133.267	136.546	134.734	134.286	131.11	128.664	137.641	142.614

Рисунок 8.4 – Обратное вейвлет-преобразование изображения с компрессией
(конец MathCAD документа)

Для пояснения смысла вейвлет-преобразований в нижней части рисунка 8.1 представлена исходная матрица изображения **L**, а на рисунке 8.2 матрица вейвлет-коэффициентов **W**. Элементы матрицы **M** – целые числа от 0 до 255, которые характеризуют яркость каждой точки изображения – от

черного цвета 0 до белого 255. Элементы матрицы W – вейвлет-коэффициенты, которые представляют собой по существу временные зависимости (работа 7. Вейвлет анализ и синтез сигналов).

Следующая часть документа (рисунок 8.3 и 8.4) демонстрирует технику компрессии изображения (рисунок 8.3) и его восстановления (рисунок 8.4).

На рисунке 8.3, после вычисления вспомогательных функций, задается вычисление порога th . Если какой-то вейвлет-коэффициент имеет абсолютное значение меньше th , ему просто задается нулевое значение. В результате получается разреженная матрица W (разреженная матрица W показана в нижней части рисунка 8.3), файл которой можно подвергнуть компрессии любым архиватором, например, RAR или ZIP.

На рисунке 8.4, после задания функции обратного двумерного вейвлет-преобразования $iwave2D(A)$, реализуется собственно это преобразование. Результатом этого преобразования является восстановленное (реконструированное изображение, задаваемое матрицей $L2$). При желании это изображение можно сохранить на жестком диске персонального компьютера, используя функцию $WRITEBMP()$ (шаг 12 на рисунке 8.4).

На рисунке 8.5 построено исходное изображение (по матрице L) и изображение, полученное в результате вейвлет-преобразований и компрессии (по матрице $L2$). Нетрудно заметить, что, несмотря на высокую степень компрессии (использовалось только 5 % ненулевых вейвлет-коэффициентов, что соответствует степени компрессии 20), изображение достаточно отчетливо, хотя и имеет заметные погрешности в сравнении с оригиналом. Помимо огрубления передачи полутонов заметны светлые точки на наиболее темных участках изображения. Это типичное проявление эффекта Гиббса, жесткости примененных вейвлетов DB4 и резкого порога удаления найденных вейвлет-коэффициентов. Указанные погрешности изображения заметно уменьшаются при уменьшении степени компрессии. На рисунке 8.6 показано сравнение оригинального изображения с изображением, в котором сохранено только 20 % коэффициентов (степень сжатия 5).



Рисунок 8.5 – Исходное (слева) и преобразованное (справа) изображения при степени компрессии 20



Рисунок 8.6 – Исходное (слева) и преобразованное (справа) изображения при степени компрессии 5

В этом случае разницу в изображениях на глаз заметить довольно трудно.

Аппаратура и программное обеспечение

Аппаратура. Для выполнения работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (число цветов 256). □

Программное обеспечение. Для выполнения работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 10 и выше.

УКАЗАНИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

При выполнении работы **запрещается:**

- самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;
- нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т. д.;
- принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

1. Запустите систему MathCAD.

2. Составьте документ MathCAD, позволяющий выполнить вейвлет-обработку и компрессию для заданного изображения L (таблица 8.1). Требуется:

- выполнить прямое вейвлет-преобразование($\text{wave2D}(L)$) изображения и определить его вейвлет-спектр W .

- построить график поверхности вейвлет-спектра W изображения L в трехмерном пространстве;

- осуществить компрессию и выполнить синтез изображения на основе разработанного обратного вейвлет-преобразования($\text{iwave2D}(W)$);

- последовательно изменяя число thresh , которое задает количество (в процентах) удаляемых вейвлет-коэффициентов, исследовать влияние степени компрессии изображения на качество его восстановления. Качество восстановления изображения оценивать визуально;

- самостоятельно разработать и реализовать в программе MathCAD количественные критерии оценки степени отличия восстановленного изображения от оригинального.

3. Сохраните результаты выполнения индивидуального задания.

4. Сформируйте отчет по работе.

5. Подготовьтесь к ответу на вопросы для защиты работы.

6. Защитите работу.

Варианты заданий

Варианты изображений для исследования вейвлет-обработки и компрессии изображений представлены в таблице 8.1. Номер варианта соответствует номеру фамилии студента в списке учебной группы (подгруппы).

Таблица 8.1 – Исходные данные для вейвлет-обработки и компрессии изображений

Вариант	Файл изображения	Вариант	Файл изображения
1	lena.bmp	8	lena.bmp
2	leaves.bmp	9	leaves.bmp
3	rose.bmp	10	rose.bmp
4	winter.bmp	11	winter.bmp
5	lena.bmp	12	lena.bmp
6	leaves.bmp	13	leaves.bmp
7	rose.bmp	14	rose.bmp

Примечание– Файл в формате bmp предоставляется преподавателем.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ЗАЩИТЫ РАБОТЫ

1. Что такое вейвлет?
2. В чем отличие прямого дискретного вейвлет-преобразования временных сигналов и изображений (пространственных сигналов)?
3. Какова логика реализации прямого вейвлет-преобразования при помощи функции $\text{wave2D}(L)$?
4. Каким требованиям должно удовлетворять изображение, чтобы его можно было подвергнуть прямому вейвлет-преобразованию при помощи функции $\text{wave2D}(L)$?
5. С какой целью в программе MathCAD (рисунок 8.3) использовалась функция векторизации $\text{Vectorize}(A)$? Какова логика работы этой функции?
6. Какова логика работы функции порогового ограничения вейвлет-коэффициентов $\text{ThreshOld}(A,t)$?
7. Какова логика реализации обратного вейвлет-преобразования при помощи функции $\text{iwave2D}(W)$?

8. Как реализуется процедура компрессии заданного изображения в работе?
9. Какой тип вейвлетов использован в работе?
10. Каким требованиям должна удовлетворять «материнская» вейвлет-функция?
11. Что такое базисная вейвлет-функция?
12. Какие вейвлеты называются ортогональными?
13. Как аналитически определяется прямое (обратное) дискретное вейвлет-преобразование?
14. Какие способы представления (визуализации) вейвлет-спектров Вы знаете?
15. Как было выполнено индивидуальное задание?
16. Какие выводы можно сделать по результатам выполнения индивидуального задания?

Список рекомендуемой литературы

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике / Пер. с англ.; Под ред. И. Г. Арамановича. М.: Наука, 1978.
2. Куприянов М. С., Матюшкин Б. Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. СПб.: Политехника, 1998.
3. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов: Учебник для вузов. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2006. – 751 с.
4. Дьяконов В. П. MathCAD 8 –12 для студентов. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005. – 632 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы

«Теоретические основы обработки геофизической информации»

для студентов направления подготовки

21.03.01 Нефтегазовое дело

Направленность (профиль) «Геолого-геофизические технологии в нефтегазовом деле»

1. Общие положения

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов (СРС) в вузе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения.

К основным видам самостоятельной работы студентов относятся:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание докладов;
- подготовка к семинарам, практическим и лабораторным работам, их оформление;
- выполнение учебно-исследовательских работ, проектная деятельность;
- подготовка практических разработок и рекомендаций по решению проблемной ситуации;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;
- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов и др.

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Самостоятельная работа по дисциплине «Теоретические основы обработки геофизической информации» направлена на формирование следующих **компетенций**:

Код	Формулировка
ПК-1	Способен использовать современный аппарат математического моделирования при решении прикладных и научных задач и работать с программным обеспечением общего и специального назначения

2. Цель и задачи самостоятельной работы

Ведущая цель организации и осуществления СРС совпадает с целью обучения студента - формирование набора компетенций будущего бакалавра.

При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование

умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности. Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельной работы и лабораторных занятий.

3. Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций, индикатора(ов)	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
6 семестр					
ИД-1 _{ПК-1}	Подготовка к лекциям	Тестирование, собеседование	7,5	0,5	8
ИД-1 _{ПК-1}	Подготовка к практическим занятиям	Тестирование, собеседование	7,5	0,5	8
ИД-1 _{ПК-1}	Самостоятельное изучение литературы	Тестирование, собеседование	59	1	60
Итого за 6 семестр			74	2	76
Итого			74	2	76

4. Порядок выполнения самостоятельной работы студентом

4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют **четыре основные установки в чтении научного текста**:

информационно-поисковый (задача - найти, выделить искомую информацию) усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения, излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)

аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)

творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде - как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. - использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

Аннотирование - предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;

Планирование - краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;

Тезирование - лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;

Цитирование - дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;

Конспектирование - краткое и последовательное изложение содержания прочитанного. Конспект - сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы,

делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта.

2. Выделите главное, составьте план.

3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора.

4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.

5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

4.2. Методические рекомендации по подготовке к лабораторным занятиям

Для того чтобы лабораторные занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на лабораторных занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется провести самопроверку усвоенных знаний, ответив на контрольные вопросы по изученной теме.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала – умение отвечать на вопросы для собеседования.

Контроль самостоятельной работы студентов

Контроль самостоятельной работы проводится преподавателем.

Предусмотрены следующие виды контроля: собеседование.

Подробные критерии оценивания компетенций приведены в Фонде оценочных средств для проведения текущей и промежуточной аттестации.

Вопросы для собеседования

1. Статистические методы анализа

1. Что такое случайная величина и как она применяется в геофизике?
2. Объясните разницу между выборкой и генеральной совокупностью.
3. Что такое математическое ожидание и дисперсия?
4. Как оценивается корреляция между двумя геофизическими параметрами?
5. Как определить, имеет ли геофизический сигнал тренд?
6. В чем суть регрессионного анализа и как его применяют к скважинным данным?
7. Что показывает коэффициент корреляции?
8. Зачем используются доверительные интервалы?
9. Что такое РСА (анализ главных компонент) и зачем он нужен в геофизике?
10. Как различить шум и полезный сигнал с помощью статистики?

2. Спектральный анализ

11. Что такое спектр сигнала?
12. Объясните физический смысл преобразования Фурье.
13. Чем дискретное преобразование Фурье отличается от быстрого (FFT)?
14. Какие характеристики спектра наиболее важны в интерпретации геофизических данных?
15. Что происходит при увеличении длины окна в спектральном анализе?
16. Как спектральный анализ помогает в выявлении циклических структур?
17. Приведите пример геофизической задачи, решаемой с помощью FFT.
18. Что такое разрешающая способность спектра?
19. Почему важно использовать окно (например, Хэмминга, Ханна) при спектральном анализе?
20. Как интерпретировать пики в спектре?

3. Линейные системы

21. Что такое линейная система в контексте обработки сигналов?
22. Что означает стационарность системы?
23. Объясните, что такое импульсная характеристика.
24. Как свёртка применяется в обработке сейсмических данных?
25. Что такое частотная характеристика линейной системы?
26. Что такое передаточная функция и как её интерпретировать?
27. Приведите пример линейной системы в геофизике.
28. В чем разница между каузальной и некаузальной системой?
29. Что означает устойчивость линейной системы?
30. Как линейные системы используются при моделировании откликов геологических слоев?

4. Фильтрация

31. Зачем фильтровать геофизические данные?
32. В чем разница между пространственной и временной фильтрацией?
33. Какие типы фильтров вы знаете? Примеры.
34. Что такое полосовой фильтр и где он применяется?
35. Как определить, что фильтрация была успешной?
36. Чем отличается медианный фильтр от гауссового?
37. В чем преимущества адаптивных фильтров?
38. Какие типы шумов типичны для сейсмических данных и как их устраняют?
39. Что такое фильтр Калмана и в чем его особенность?
40. Какие ошибки могут возникать при неправильной фильтрации?

5. Вейвлет-анализ

41. В чем основное отличие вейвлет-преобразования от Фурье-преобразования?

42. Что такое масштаб в контексте вейвлет-преобразования?
43. Для чего применяются дискретные вейвлеты в геофизике?
44. Приведите примеры вейвлетов и их особенности.
45. Как вейвлет-анализ помогает обнаруживать геологические границы?
46. Что такое мультиразрешающий анализ и зачем он нужен?
47. Как визуализировать результаты вейвлет-анализа?
48. В чем преимущества Morlet-вейвлета в интерпретации сигналов?
49. Что такое синхронная и асинхронная вейвлет-трансформация?
50. Какие геофизические задачи лучше решаются с помощью вейвлетов, а не Фурье?

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он:

Уверенно применяет статистические, спектральные, фильтрационные, линейные и вейвлет-методы обработки геофизических данных, демонстрируя высокий уровень понимания теоретических основ и практического применения.

Легко ориентируется в профессиональных задачах, обоснованно выбирает методы анализа и интерпретации геофизической информации, демонстрирует системный подход и аналитическое мышление.

Свободно объясняет назначение и принципы работы каждого метода, грамотно интерпретирует результаты анализа в контексте геологической модели.

Активно использует полученные знания при выполнении лабораторных работ, проявляет инициативу и самостоятельность, предлагает обоснованные альтернативные решения.

Теоретический материал курса усвоен в полном объеме, студент демонстрирует глубокое понимание ключевых понятий и уверенно отвечает на вопросы.

Выполнил все предусмотренные задания качественно и в срок.

Компетенция ПК-1 сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он:

Применяет методы обработки и интерпретации геофизических данных в рамках изученного материала, делает это уверенно, но с отдельными методическими неточностями.

Способен самостоятельно выбрать подходящий метод анализа, но может затрудняться в интерпретации сложных ситуаций.

В целом понимает принципы работы методов, но допускает незначительные ошибки при их пояснении и практическом применении.

Уверенно выполняет лабораторные задания, но требует дополнительного пояснения по отдельным этапам работы.

Освоил теоретический материал на хорошем уровне, демонстрирует логичность мышления и способность к аргументации.

Выполнил все задания, однако некоторые из них выполнены с техническими или логическими недочетами.

Компетенция ПК-1 сформирована на достаточном уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он:

Демонстрирует поверхностное знание методов обработки геофизической информации, может применять их лишь по шаблону, без глубокого понимания.

Частично понимает назначение и возможности методов, испытывает трудности в обосновании выбора подхода.

Делает ошибки при интерпретации результатов, слабо связывает технические данные с геологическим содержанием.

Выполняет лабораторные задания с заметными ошибками, требует постоянной помощи преподавателя.

Теоретические знания фрагментарны, допускает путаницу в терминах и не всегда

понимает суть применяемых методик.

Задания выполнены не полностью или с серьезными методическими упущениями.

Компетенция ПК-1 сформирована на минимальном уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он:

Не способен применить методы обработки геофизических данных даже на базовом уровне.

Не понимает назначения и принципов большинства методов, не способен обосновать выбор способа анализа.

Ошибается в базовых расчетах, демонстрирует полное непонимание алгоритмов и логики анализа данных.

Не способен интерпретировать результаты даже простых лабораторных заданий.

Теоретические знания отсутствуют или крайне фрагментарны, не может ответить на простые вопросы.

Большинство заданий не выполнено или выполнено формально, без понимания сути.

Компетенция ПК-1 не сформирована.

2. Описание шкалы оценивания

Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя

устный ответ на практическом занятии по предложенным вопросам.

Для подготовки к данному оценочному мероприятию необходимо изучить рекомендованную основную и дополнительную литературу, материалы интернет-ресурсов, ознакомиться с медиа-текстами.

При проверке задания, оцениваются степень владения теоретическим материалом, , умение применять теоретические знания на практике. Умение грамотно, аргументировано и непротиворечиво излагать теоретический материал и собственные суждения, оценки, примеры.

Оценочный лист

Тема занятия:								
		Базовый уровень				Повышенны й уровень		
№	ФИО студен та	Степень владения теоретическ им материалом (0-5 баллов)	Пример ы (0-5 баллов)	Уровень аргументац ии (0-5 баллов)	Собственн ая точка зрения (0-5 баллов)	Апелляция к самостоятел ьно найденным научным источникам (0-5 баллов)	Сум ма балл ов	Итогов ая оценка

Тесты

Номер задания	Правильный ответ	Содержание вопроса	Компетенция
1.	3	Дан ряд чисел: 4, 10, 8, 9, 7, 4. Оценка математического ожидания равна. 1) 5 2) 6 3) 7 4) 8	ПК-1
2.	1	Дан ряд чисел: 6, 10, 10, 7, 9, 6. Выборочная дисперсия равна. 1) 3,0 2) 3,2 3) 3,4 4) 3,6	ПК-1
3.	4	Дан ряд чисел: 6, 10, 10, 7, 9, 6. Исправленная дисперсия равна. 1) 3,0 2) 3,2 3) 3,4 4) 3,6	ПК-1
4.	1	Ряд 1: 8, 6, 5, 5, 8, 7, 7. Ряд 2: 6, 5, 9, 6, 8, 7, 8. Определить статистический корреляционный момент рядов. 1) 0 2) -1 3) 1 4) 0,5	ПК-1

Номер задания	Правильный ответ	Содержание вопроса	Компетенция
5.	3	Регрессия вида $y(x) = Ax^B$ это: 1) логарифмическая 2) линейная 3) степенная 4) полиномиальная	ПК-1
6.	2	Регрессия вида $y = Ax + B$ это: 1) логарифмическая 2) линейная 3) степенная 4) полиномиальная	ПК-1
7.	4	Ряд 1: 4, 4, 10, 3, 5, 5, 4. Ряд 2: 5, 8, 8, 3, 9, 4, 5. Определите коэффициент корреляции рядов. 1) 0 2) -0,5 3) 1 4) 0,5	ПК-1
8.	1	Преобразование Фурье задаётся формулой: 1) $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx.$ 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega$ 3) $\ f\ _2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) ^2 dx.$ 4) $(\Delta f)^2 = \frac{1}{\ f\ _2^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 f(x) ^2 dx.$	ПК-1

Номер задания	Правильный ответ	Содержание вопроса	Компетенция
9.	2	Обратное преобразование Фурье задаётся формулой: $1) \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx.$ $2) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega$ $3) \ f\ _2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) ^2 dx.$ $4) (\Delta f)^2 = \frac{1}{\ f\ _2^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 f(x) ^2 dx.$	ПК-1
10.	4	Требования к сигналу для разложения в ряд Фурье: 1) Не должно быть разрывов второго рода и число экстремумов должно быть конечным. 2) Не должно быть разрывов второго рода и число разрывов первого рода должно быть конечным. 3) Число разрывов первого рода должно быть конечным и число экстремумов должно быть конечным. 4) Не должно быть разрывов второго рода, число разрывов первого рода должно быть конечным и число экстремумов должно быть конечным.	ПК-1
11.	3	Дискретное преобразование Фурье используется для: 1) Корреляционного анализа. 2) Анализа предельных циклов. 3) Спектрального анализа. 4) Квантового анализа.	ПК-1
12.	3	Интегрированию сигнала во временной области соответствует следующая операция в частотной области: 1) Умножению на $j\omega$. 2) Умножению на 2π. 3) Умножению на $1/(j\omega)$. 4) Умножению на $1/(2\pi)$.	ПК-1

Номер задания	Правильный ответ	Содержание вопроса	Компетенция
13.	1	Локальная аномалия это 1) Аномалия, в 5 раз меньшая изучаемой площади. 2) Аномалия, в 2 раза меньше изучаемой площади. 3) Аномалия, в 5 раз большая изучаемой площади. 4) Аномалия, в 2 раза больше изучаемой площади.	ПК-1
14.	4	Аддитивная модель геофизического поля представляет собой: 1) Поле = Сигнал · помеха. 2) Поле = Сигнал * помеха. 3) Поле = Сигнал / помеха. 4) Поле = Сигнал + помеха.	ПК-1

Критерии оценивания компетенций

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он правильно выполнил 88-100 % тестовых заданий

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он правильно выполнил 72-87 % тестовых заданий

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он правильно выполнил 53-71 % тестовых заданий

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он правильно выполнил менее 53 % тестовых заданий

Список источников для выполнения СРС

Перечень основной литературы

1. Митрофанов, Г. М. Обработка и интерпретация геофизических данных : учебное пособие : [16+] / Г. М. Митрофанов ; Новосибирский государственный технический университет. - 2-е изд. - Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2019. -

168 с. : ил. - Режим доступа: по подписке. - URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=574895>. - Библиогр. с. 106. - ISBN 978-57782-3805-3. - Текст : электронный.

2. Набатов В.В. Обработка и интерпретация результатов геофизических исследований и неразрушающего контроля : учебное пособие / Набатов В.В.. — Москва : Издательский Дом МИСиС, 2018. — 78 с. — ISBN 978-5-906953-55-1. — Текст : электронный // IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/84415.html>. — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

3. Умняшкин, С. В. Основы теории цифровой обработки сигналов : учебное пособие : [16+] / С. В. Умняшкин. - 5-е изд., исправл. и доп. - Москва : Техносфера, 2019. - 550 с. : ил., схем. - (Мир цифровой обработки). - Режим доступа: по подписке. - URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=597188>. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-594836-557-2. - Текст : электронный.

Перечень дополнительной литературы

1. Шахова, О. А. Статистическая обработка результатов исследований : учебное пособие / О. А. Шахова. — Тюмень : Издательство «Титул», 2022. — 103 с. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/119099.html>. — Режим доступа: для авторизир. Пользователей

2. Соловицкий, А. Н. Дистанционные методы при геофизических исследованиях : учебное пособие : [16+] / А. Н. Соловицкий ; Кемеровский государственный университет. - Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2020. - 84 с. : ил., табл., схем. - Режим доступа: по подписке. - URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=685053>. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-8353-2738-6. - Текст : электронный.

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине по дисциплине «Теоретические основы обработки геофизической информации». Ставрополь: СКФУ, 2025.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. <http://catalog.ncfu.ru> - электронные каталоги Ассоциации электронных библиотек учебных заведений и организаций СКФО.

2. <http://www.biblioclub.ru> - электронно-библиотечная система «Университетская библиотека онлайн».

3. <http://www.iprbookshop.ru/> - ЭБС «IPRbooks».