

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по дисциплине
**Математическое планирование и статистическая обработка результатов
эксперимента**

Направление подготовки

08.03.01 Строительство

Ставрополь,

ВВЕДЕНИЕ	3
Практическое занятие 1	5
Практическое занятие 2	34
Практическое занятие 3	48
Практическое занятие 4	62
Практическое занятие 5	70
Практическое занятие 6	81

ВВЕДЕНИЕ

Внедрение информационных технологий во все сферы деятельности человека, в том числе и строительную отрасль, позволило рассчитывать стержневые и нестержневые системы (пластинчатые, оболочечные, массивные, комбинированные) на действие самых разнообразных нагрузок (статических, динамических, тепловых и др.), рассматривая их с единых позиций. Современные универсальные программные комплексы позволяют выполнять расчеты не только задач строительной механики, но и других физических явлений, таких как теплопередача, течение жидкостей и газов и др. От расчетчика (пользователя программных комплексов) не требуется детального знания всех математических, вычислительных и компьютерных проблем. Однако ему необходимо иметь представление о том, как математически формулируются эти задачи и что собой представляют численные методы их решения. Без этого трудно рационально выбрать расчетную схему и правильно оценить достоверность окончательных результатов.

Для реализации численных методов на ЭВМ существует множество разнообразных программ и программных комплексов (MathCAD, MATLAB, Maple и др.). Может показаться, что это богатство программного обеспечения избавляет специалиста-прикладника от

необходимости глубокого знания отдельных разделов математики. Однако, чтобы воспользоваться этим богатством, надо владеть базовыми знаниями высшей математики. Кроме того, каждая программа имеет свою специфику и особенности и, естественно, требует навыков работы и наличия данного программного средства на компьютере.

Табличный процессор Microsoft Excel, изучаемый студентами в курсе информатики, является весьма доступным, постоянно совершенствующимся программным средством, обеспечивающим пользователю возможность самостоятельно решать различные задачи, не прибегая к услугам программиста. Для этого только нужно уметь сформулировать интересующую проблему, как математическую задачу, и выбрать соответствующий численный метод для ее решения. Большинство численных методов, представляющих интерес для специалиста-строителя, успешно реализуется в табличном процессоре Excel. Поэтому именно данное программное средство выбрано для выполнения численных процедур на ЭВМ.

При изучении данного курса предполагается, что читатель знаком с классическим курсом высшей математики в объеме, соответствующем программе вуза, а также владеет навыками работы на персональном компьютере в объеме вузовского курса информатики.

Практическое занятие 1

Основные понятия матричного исчисления

1 Цель работы

Матричная форма расчетов известна давно. Однако до появления ЭВМ она не находила широкого применения из-за трудоемкости матричных операций при ручном счете.

Решение алгебраических задач при расчете строительных объектов требует знания матричного аппарата, так как, работая на ЭВМ, удобнее всего процесс расчета представлять в матричном виде.

Данная работа направлена на изучение методов матричного исчисления по средствам электронных таблиц MS EXCEL

Теоретическое обоснование

Матрица – прямоугольная таблица, составленная из элементов (чисел), и имеющая m строк и n столбцов (размерность $m \times n$). Обозначается матрица чаще всего большими буквами A или $[A]$:

$$A_{[m \times n]} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Если $m = n$, матрица называется **квадратной**.

Если $m = 1$, это **матрица-строка** (вектор-строка).

Две матрицы $A = a_{ij}$ и $B = b_{ij}$ **равны** друг другу, если они одного типа (имеют одинаковое число строк и столбцов – размер $[m \times n]$) и соответствующие элементы этих матриц равны между собой: $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j .

Если $n = 1$, то матрица называется **матрица-столбец**, (**вектор-столбец**). Будем особо выделять **вектор** и обозначать его X :

$$\overline{X}_{[n \times 1]} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Квадратная матрица, у которой все элементы равны нулю, кроме элементов, стоящих на главной диагонали, называется **диагональной**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Диагональная матрица, у которой элементы, стоящие на главной диагонали равны 1, называется **единичной** и обозначается обычно буквой E :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Если в матрице строки и столбцы поменять местами, получается **транспонированная** матрица

(обозначается A^T). Каждой квадратной матрице A ставится в соответствие число, вычисляемое по определенным правилам – **определитель** ($\det A$). Например, определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов:

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}. \quad (1.5)$$

Алгоритм преобразования матрицы к треугольному виду приведен во второй главе.

Если определитель матрицы $\det A = 0$, то матрица называется **вырожденной**, и **невырожденной** в противном случае.

Эквивалентны следующие высказывания: *матрица A является невырожденной*, если:

столбцы (строки) матрицы A линейно независимы;
 $\overline{}$
 равенство $A\overline{X} = 0$ означает, что $\overline{X} = 0$.

Обратная матрица. Доказывается теорема, что если матрица A невырожденная ($\det A \neq 0$), то она имеет обратную матрицу (обозначается A^{-1}).

Матрица называется **обратной** по отношению к данной, если ее умножение как справа, так и слева на данную матрицу дает единичную матрицу:

$$A A^{-1} = A^{-1} A = E. \quad (1.6)$$

Процесс нахождения обратной матрицы называется обращением матрицы.

3 Методика и порядок выполнения работы

Умножение и деление матрицы на число

Рассмотрим матрицу **A** размерностью **3x4**. Умножим эту матрицу на число **k**. При умножении матрицы на число получается матрица такой же размерности, что и исходная, при этом каждый элемент матрицы **A** умножается на число **k**.

1. Введем элементы матрицы (рисунок 1.1) в диапазон **B3:E5**, а число **k** — в ячейку **H4**. В диапазоне **K3:N5** вычислим матрицу **B**, полученную при умножении матрицы **A** на число **k**: $B=A*k$. Для этого введем формулу **=B3*\$H\$4** в ячейку **K3**, где **B3** — элемент **a₁₁** матрицы **A**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1		Умножение и деление матрицы на число															
2		Матрица $A_{3 \times 4}$						Число k			Матрица $B=A*k$						
3		5	8	9	2												
4		6	12	11	4			2									
5		1	0	3	1												

Рисунок 1.1 – Ввод матрицы и числа

Примечание: адрес ячейки **H4** вводим как абсолютную ссылку, чтобы при копировании формулы ссылка не менялась (рисунок 1.2).

Умножение и деление матрицы на число															
	Матрица $A_{3 \times 4}$				Число k		Матрица $B=A*k$								
3	5	8	9	2			10								
4	6	12	11	4	2										
5	1	0	3	1											

Рисунок 1.2 – Ввод формулы

2. С помощью маркера автозаполнения копируем формулу ячейки **К3** вниз и вправо на весь диапазон матрицы **В** (рисунок 1.3).

Умножение и деление матрицы на число															
	Матрица $A_{3 \times 4}$				Число k		Матрица $B=A*k$								
	5	8	9	2			10								
	6	12	11	4	2										
	1	0	3	1											

Рисунок 1.3 – Автозаполнение диапазона матрицы В

3. Таким образом, мы умножили матрицу **А** в Excel и получим матрицу **В** (рисунок 4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Умножение и деление матрицы на число															
2	Матрица $A_{3 \times 4}$				Число k				Матрица $B=A*k$							
3	5	8	9	2							10	16	18	4		
4	6	12	11	4		2					12	24	22	8		
5	1	0	3	1							2	0	6	2		

Рисунок 1.4 – Результат умножения матрицы на число

Для деления матрицы **A** на число **k** в ячейку **K3** введем формулу **=B3/\$H\$4** и скопируем её на весь диапазон матрицы **B**.

3.1 Сложение и вычитание матриц

Способ 1.

Следует отметить, что складывать и вычитать можно матрицы одинаковой размерности (одинаковое количество строк и столбцов у каждой из матриц). Причем каждый элемент результирующей матрицы **C** будет равен сумме соответствующих элементов матриц **A** и **B**, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

1. Рассмотрим матрицы **A** и **B** размерностью **3x4**. Вычислим сумму этих матриц. Для этого в ячейку **N3** введем формулу **=B3+N3** (рисунок 1.5), где **B3** и **N3** – первые элементы матриц **A** и **B** соответственно. При этом формула содержит относительные ссылки (**B3** и **N3**), чтобы при копировании формулы на весь диапазон матрицы **C** они могли измениться.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1	Сложение и вычитание матриц																	
2	Матрица A _{3x4}				Матрица B _{3x4}				Матрица C=A+B									
3	5	8	9	2	+	5	-4	-8	-2	=B3+H3								
4	6	12	11	4		2	3	5	1									
5	1	0	3	1		6	3	1	0									

Рисунок 1.5 – Ввод матриц **A** и **B** и формулы для матрицы **C**

2. С помощью маркера автозаполнения скопируем формулу из ячейки **N3** вниз и вправо на весь диапазон матрицы **C** (рисунок 1.6)

N3																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Рисунок 1.6 – Автозаполнение матрицы **C**

3. Для вычитания матрицы **B** из матрицы **A** (**C=A - B**) в ячейку **N3** введем формулу **=B3 — H3** и скопируем её на весь диапазон матрицы **C**.

Способ 2. Этот способ отличается тем, что результат сложения/вычитания матриц сам является массивом. В этом случае нельзя удалить элемент массива.

1. Для деления матрицы на число этим способом выделяем диапазон, в котором будет вычислен результат, вводим знак «=», выделяем диапазон, содержащий первую матрицу **A**, нажимаем на клавиатуре знак сложения (+) и выделяем вторую матрицу **B**. После ввода формулы нажимаем сочетание клавиш **Ctrl+Shift+Enter**, чтобы значениями заполнился весь диапазон (рисунок 1.7).

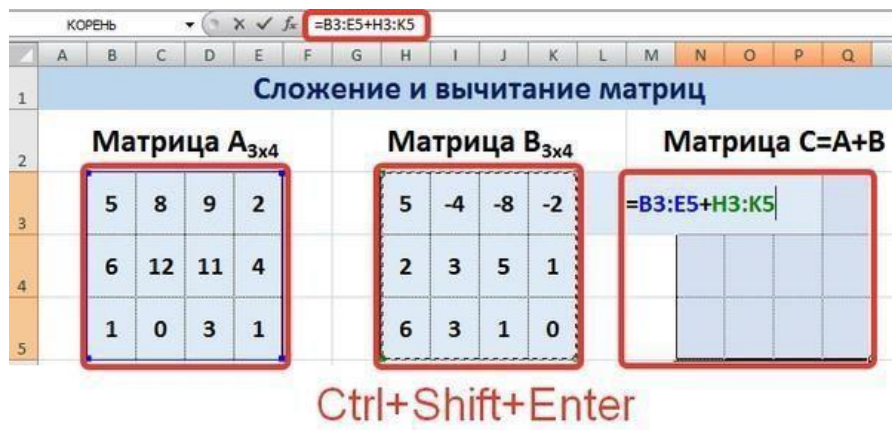


Рисунок 1.7 – Заполнение матрицы C

3.2 Умножение матриц

Следует отметить, что умножать матрицы можно только в том случае, если количество столбцов первой матрицы **A** равно количеству строк второй матрицы **B**.

Рассмотрим матрицы **A** размерностью **3x4** и **B** размерностью **4x2**. При умножении этих матриц получится матрица **C** размерностью **3x2** (рисунок 1.8)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Умножение матриц													
2	Матрица $A_{3 \times 4}$				Матрица $B_{4 \times 2}$				Матрица $C=A*B$					
3	5	8	9	2		5	-2							
4	6	12	11	4		2	1							
5	1	0	3	1		6	0							
6						6	0							

Рисунок 1.8 – Матрицы для множения

2. Вычислим произведение этих матриц $C=A*B$ с помощью встроенной функции **=МУМНОЖ()**. Для этого выделим диапазон **L3:M5** — в нём будут располагаться элементы матрицы **C**, полученной в результате умножения. На вкладке **Формулы** выберем **Вставить функцию**.

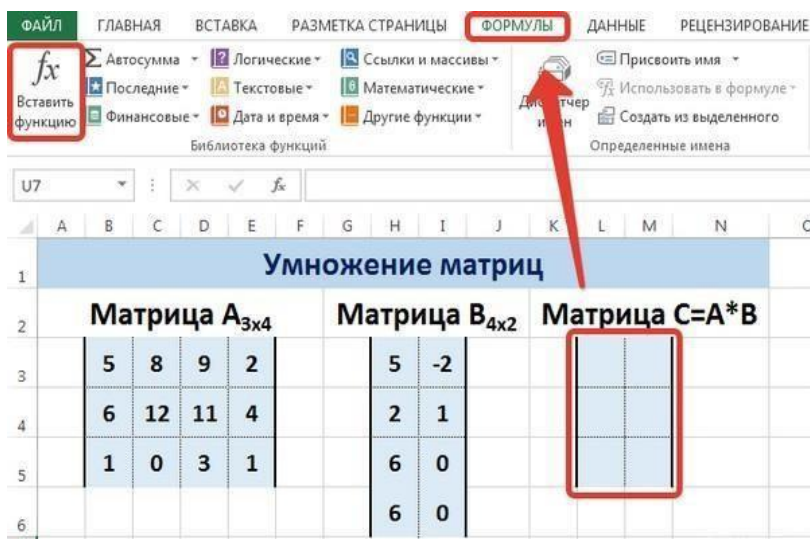


Рисунок 1.9 – Ввод формулы для матрицы C

3. В диалоговом окне **Вставка функции** выберем Категория **Математические** — функция **МУМНОЖ** — ОК (рисунок 1.10).

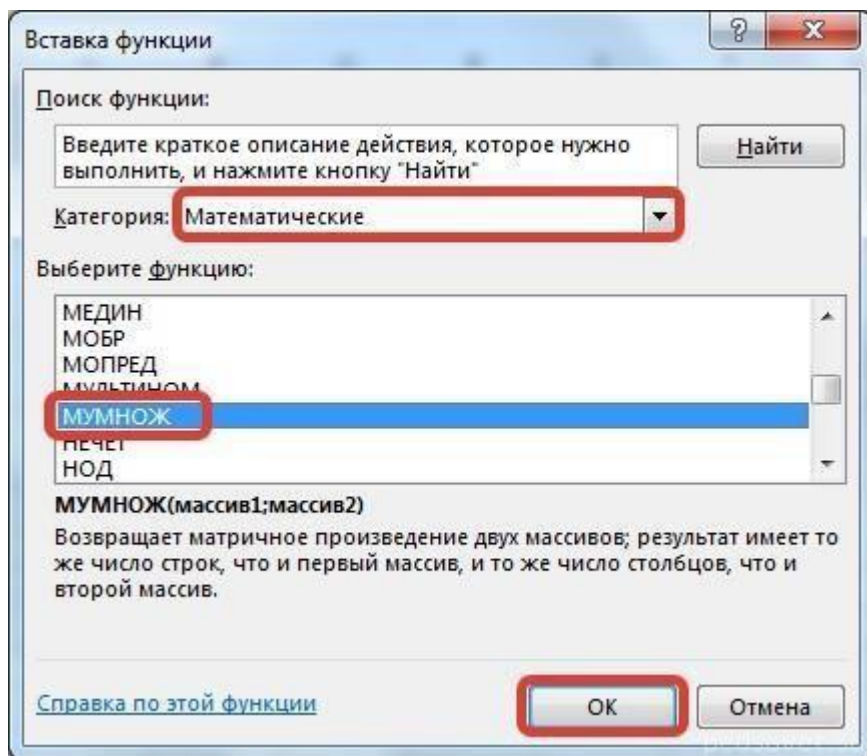


Рисунок 1.10 – Диалоговое окно «Вставка функции»

4. В диалоговом окне **Аргументы функции** (рисунок 1.11) выберем диапазоны, содержащие матрицы **A** и **B**. Для этого напротив массива1 щёлкнем по красной стрелке.

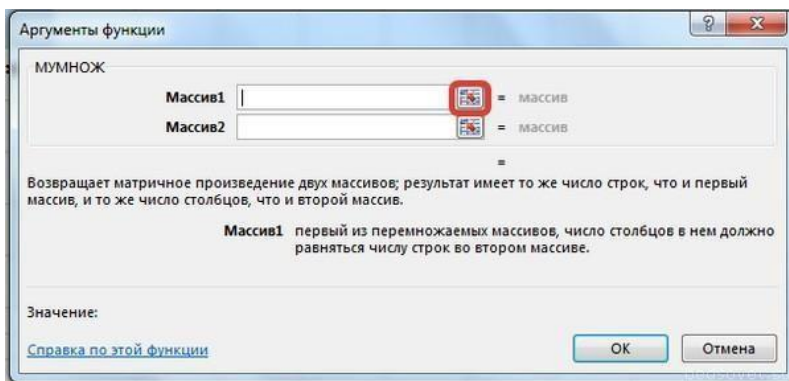


Рисунок 1.11 – Диалоговое окно «Аргументы функции»

5. Выделим диапазон, содержащий элементы матрицы **A** (имя диапазона появится в строке аргументов), и щелкнем по красной стрелке (рисунок 1.12).

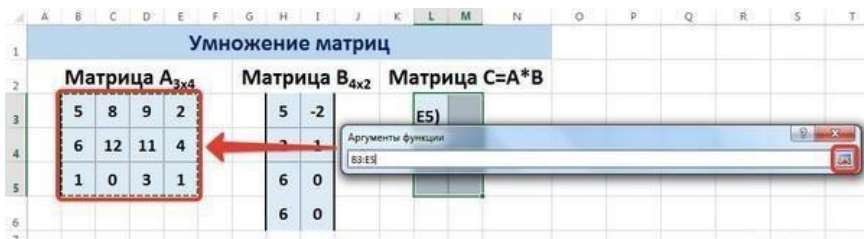


Рисунок 1.12 – Выделение диапазона матрицы A

6. Для массива2 выполним те же действия. Щёлкнем по стрелке напротив массива2 (рисунок 1.13).

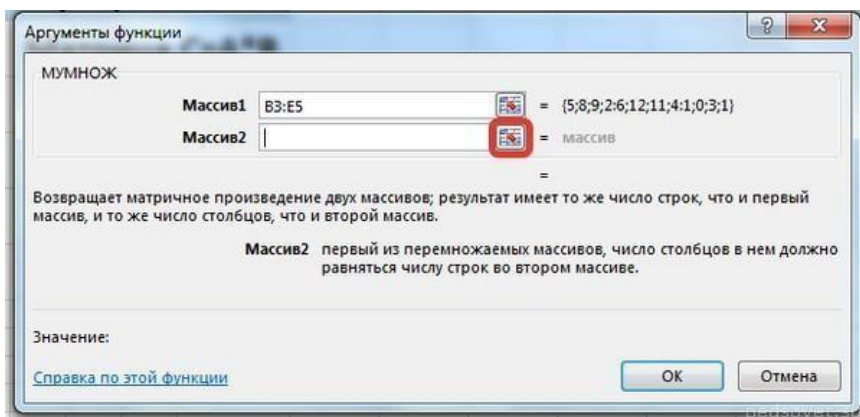


Рисунок 1.13 – Диалоговое окно «Аргумент функции» для матрицы В

7. Выделим диапазон, содержащий элементы матрицы **В**, и щелкнем по красной стрелке (рисунок 1.14).

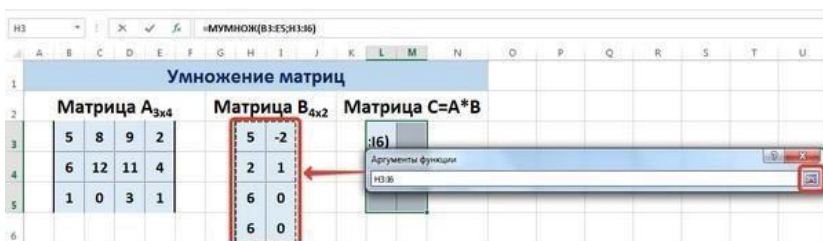
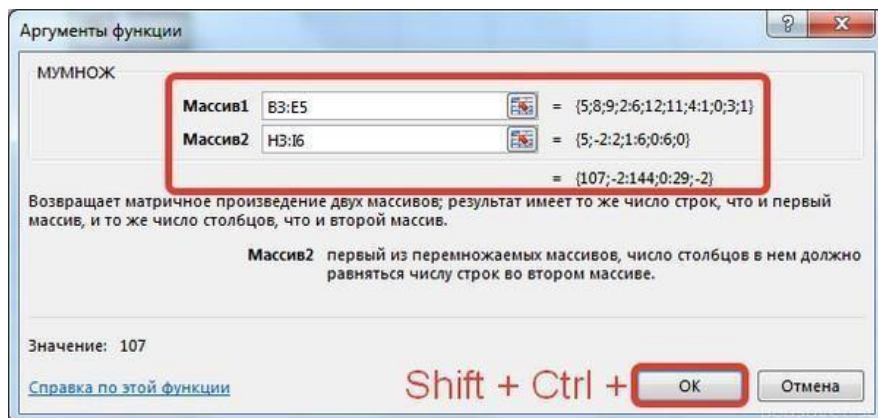


Рисунок 1.14 – Выделение диапазона матрицы В

8. В диалоговом окне рядом со строками ввода диапазонов матриц появятся элементы матриц, а внизу — элементы матрицы **С**. После ввода значений нажимаем на клавиатуре сочетание клавиш **Shift+Ctrl** и щелкаем левой кнопкой мыши по кнопке **ОК**.

ВАЖНО. Если просто нажать **ОК**, то программа вычислит значение только первой ячейки диапазона

матрицы С.



9. Мы получим результат умножения матриц А и В (рисунок 1.15.)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Умножение матриц													
2	Матрица A _{3x4}				Матрица B _{4x2}				Матрица C=A*B					
3	5	8	9	2	5	-2			107	-2				
4	6	12	11	4	2	1			144	0				
5	1	0	3	1	6	0			29	-2				
6					6	0								

Рисунок 1.15 – Результат умножения матриц А и В.

Мы можем изменить значения ячеек матриц А и В, значения матрицы С поменяются автоматически.

3.3 Транспонирование матрицы

Транспонирование матрицы — операция над матрицей, при которой столбцы заменяются строками с соответствующими номерами. Обозначим транспонированную матрицу A^T .

1. Пусть дана матрица **A** размерностью **3x4** (рисунок 1.16), с помощью функции **=ТРАНСП()** вычислим транспонированную матрицу **A^T**, причем размерность этой матрицы будет **4x3**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Транспонирование матрицы										
2	Матрица A _{3x4}					Матрица B _{4x3} =A ^T					
3		5	8	9	2						
4		6	12	11	4						
5		1	0	3	1						
6											

Рисунок 1.16 – Ввод данных для транспонирования матрицы A

2. Выделим диапазон **H3:J6**, в который будут введены значения транспонированной матрицы (рисунок 1.17).

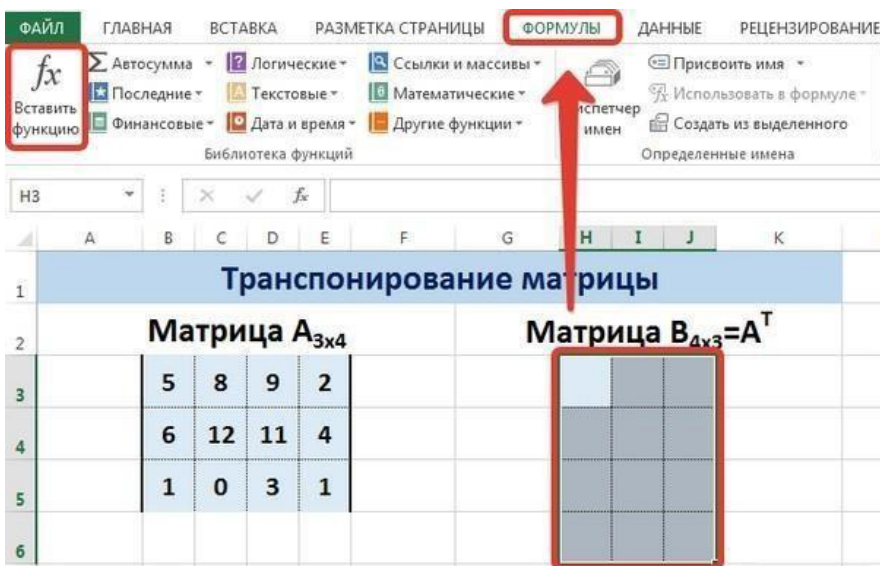


Рисунок 1.17 – Выделение диапазона для транспонирования матрицы

3. На вкладке **Формулы** выберем **Вставить функцию**, выберем категорию **Ссылки и массивы** — функция **ТРАНСП** — **ОК** (рисунок 1.18).

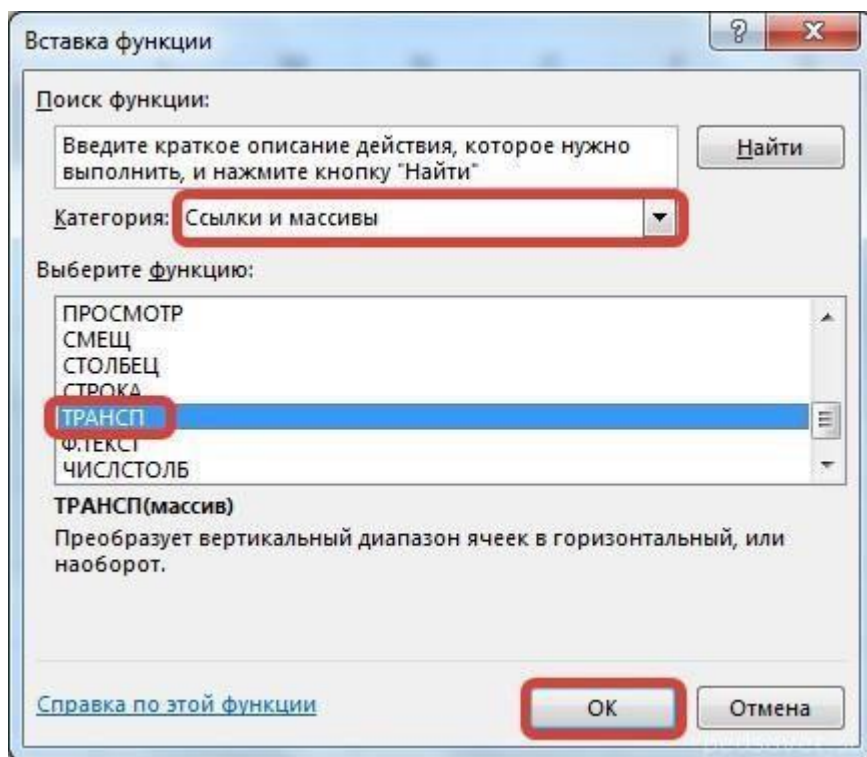


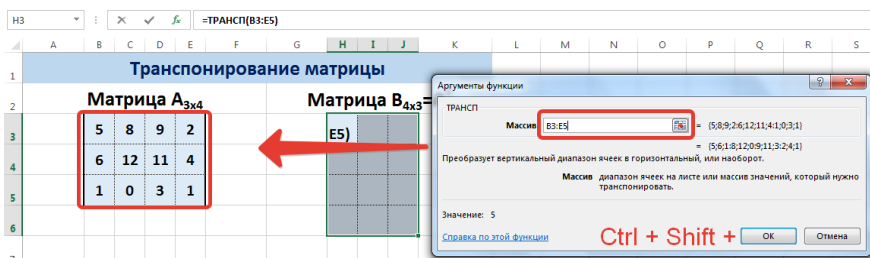
Рисунок 1.18 – Диалоговое окно «Вставка функции» для транспонирования матрицы

4. В диалоговом окне **Аргументы функции** указываем диапазон массива **B3:E5**, содержащего элементы матрицы **A**. Нажимаем на клавиатуре сочетание

клавиш **Shift+Ctrl** и щелкаем левой кнопкой мыши по кнопке **ОК** (рисунок 1.19).

5. **ВАЖНО.** Если просто нажать **ОК**, то программа вычислит значение только первой ячейки диапазона матрицы A^T .

Рисунок 1.19 – Массив матрицы A для транспонирования.



Мы получили транспонированную матрицу (рисунок 1.20).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Транспонирование матрицы										
2		Матрица A _{3x4}					Матрица B _{4x3} =A ^T				
3		5	8	9	2		5	6	1		
4		6	12	11	4		8	12	0		
5		1	0	3	1		9	11	3		
6							2	4	1		

Рисунок 1.20 – Результат транспонирования матрицы

3.4 Нахождение обратной матрицы

Матрица A^{-1} называется обратной для матрицы A, если $AdA^{-1}=A^{-1}dA=E$, где E — единичная матрица. Следует отметить, что обратную матрицу можно найти только для квадратной матрицы (одинаковое количество строк и столбцов).

1. Пусть дана матрица A размерностью 3×3 (рисунок 1.20), найдем для неё обратную матрицу с помощью функции **=МОБР()**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Вычисление обратной матрицы									
2	Матрица $A_{3 \times 3}$				Матрица $B_{3 \times 3} = A^{-1}$					
3		5	9	2						
4		6	11	4						
5		1	3	1						

Рисунок 1.20 – Ввод данных матрицы A для детерминации.

2. Для этого выделим диапазон **G3:I5**, который будет содержать элементы обратной матрицы, на вкладке **Формулы** выберем **Вставить функцию** (рисунок 1.21).

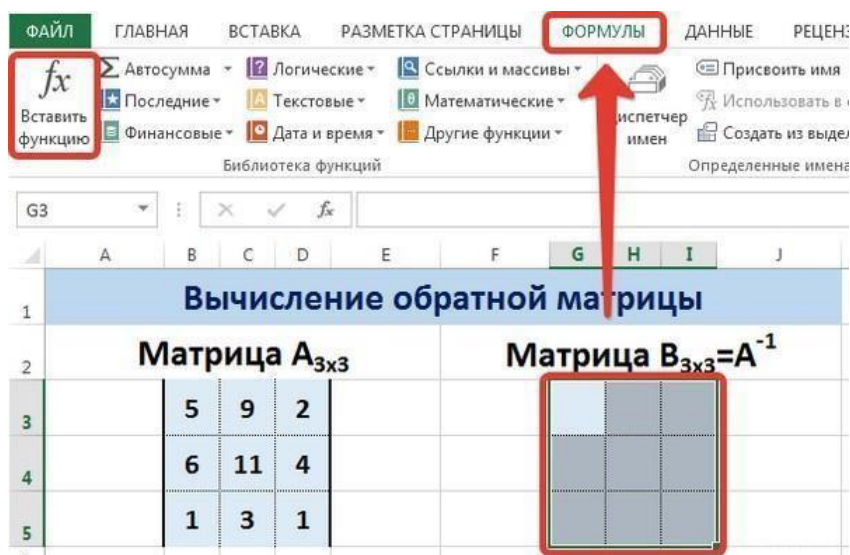


Рисунок 1.20 – Выделение диапазона матрицы

3. В диалоговом окне **Вставка функции** выберем категорию **Математические** — функция **МОБР** — **ОК**.

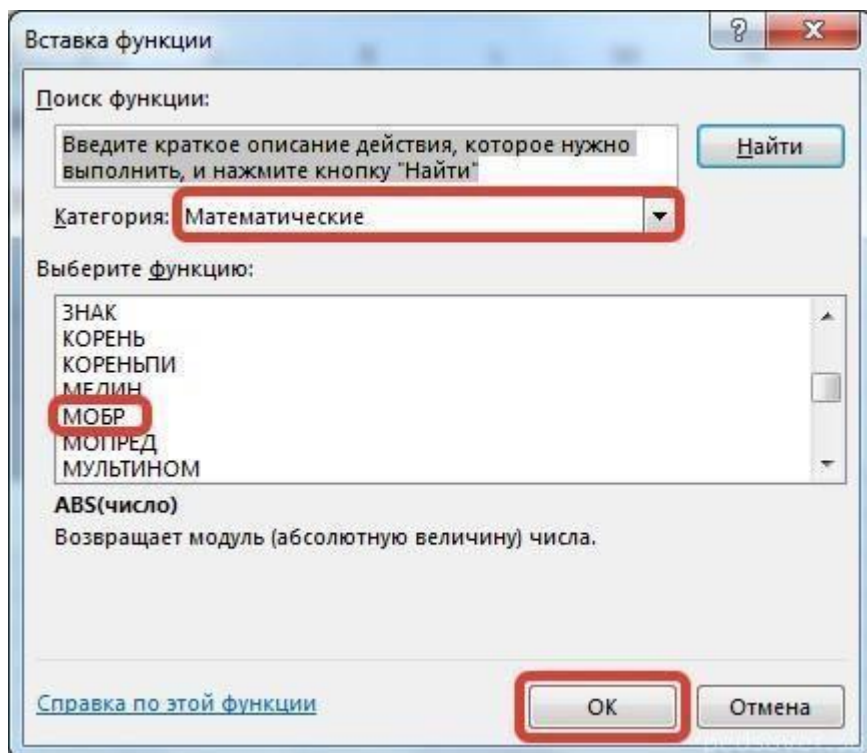


Рисунок 1.21 – Ввод функции для обратной матрицы **МОБР**

4. В диалоговом окне **Аргументы функции** указываем диапазон массива **B3:D5** (рисунок 1.22), содержащего элементы матрицы **A**. Нажимаем на клавиатуре сочетание клавиш **Shift+Ctrl** и щелкаем левой кнопкой мыши по кнопке **ОК**.

ВАЖНО. Если просто нажать **ОК**, то программа вычислит значение только первой ячейки диапазона матрицы A^{-1} .

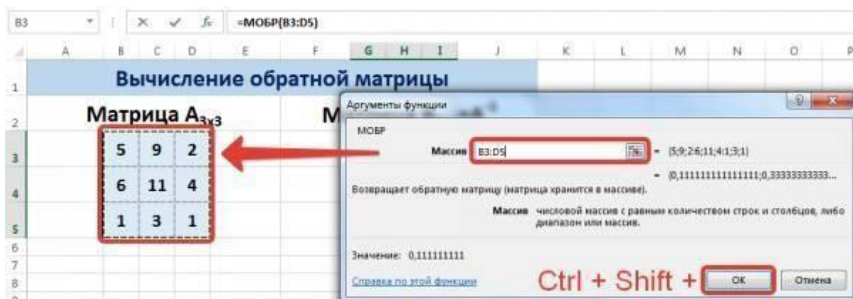


Рисунок 1.22 – Выбор массива матрицы для функции МОБР

5. Мы получили обратную матрицу.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Вычисление обратной матрицы									
2	Матрица $A_{3 \times 3}$					Матрица $B_{3 \times 3} = A^{-1}$				
3		5	9	2			0,1	0,3	-2	
4		6	11	4			0,2	-0	0,9	
5		1	3	1			-1	0,7	-0	

Рисунок 1.23 – Результат вычисления обратной матрицы

3.5 Нахождение определителя матрицы

Определитель матрицы — это число, которое является важной характеристикой квадратной матрицы.

1. Пусть дана матрица **A** размерностью **3x3** (рисунок 1.24), вычислим для неё определитель с помощью функции **=МОПРЕД()**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Вычисление определителя матрицы									
2	Матрица $A_{3 \times 3}$					detA				
3		5	9	2						
4		6	11	4						
5		1	3	1						
6										

Рисунок 1.24 – Ввод данных для нахождения детерминанта матрица

2. Для этого выделим ячейку **H4**, в ней будет вычислен определитель матрицы, на вкладке **Формулы** выберем **Вставить функцию** (рисунок 1.25).

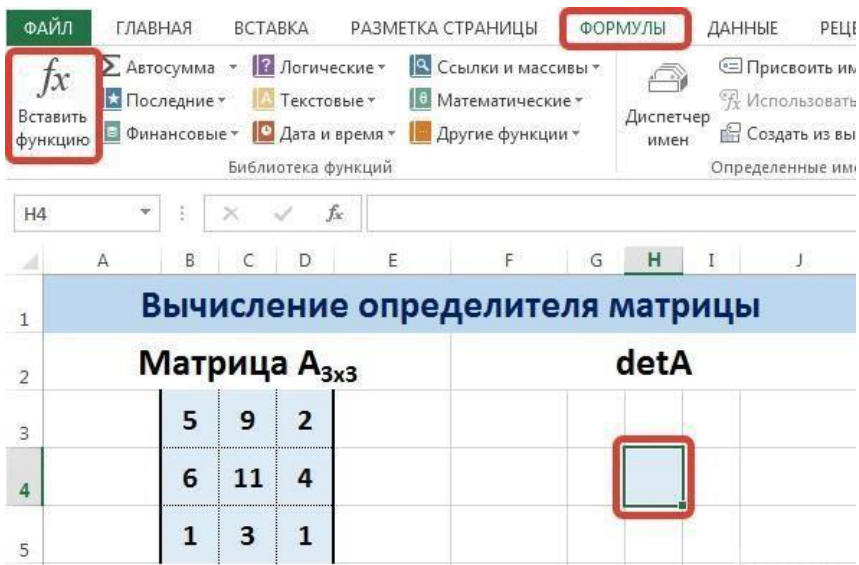


Рисунок 1.25 – Выделение ячейки для вставки функции

3. В диалоговом окне **Вставка функции** выберем категорию **Математические** — функция **МОПРЕД** — **ОК** (рисунок 1.26).

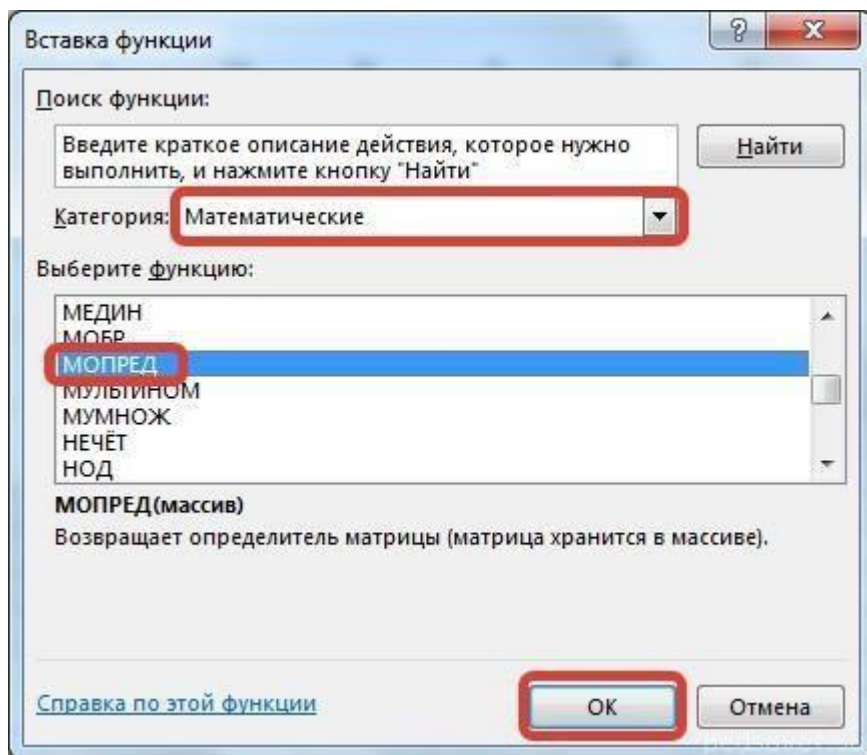


Рисунок 1.26 – Выбор функции МОПРЕД

4. В диалоговом окне **Аргументы функции** указываем диапазон массива **B3:D5**, содержащего элементы матрицы **A**. Нажимаем **ОК** (рисунок 1.27).

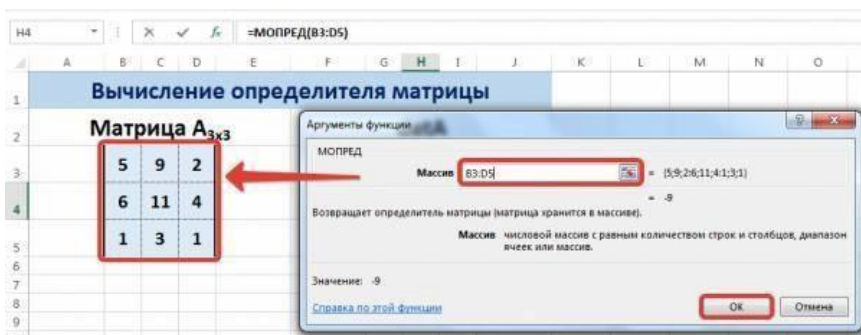


Рисунок 1.27 – Выбор массива матрицы для определения детерминанта

5. Мы вычислили определитель матрицы A (рисунок 1.28).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Вычисление определителя матрицы									
2	Матрица $A_{3 \times 3}$					detA				
3		5	9	2						
4		6	11	4						
5		1	3	1						
6										

Рисунок 1.28 – Конечный результат

6. В заключение обратим внимание на важный момент. Он касается тех операций над матрицами, для которых мы использовали встроенные в программу функции, а в результате получали новую матрицу (умножение матриц, нахождение обратной и транспонированной матриц). В

матрице, которая получилась в результате операции, нельзя удалить часть элементов. Т.е. если мы выделим, например, один элемент матрицы и нажмём **Del**, то программа выдаст предупреждение: **Нельзя изменять часть массива** (рисунок 1.29).

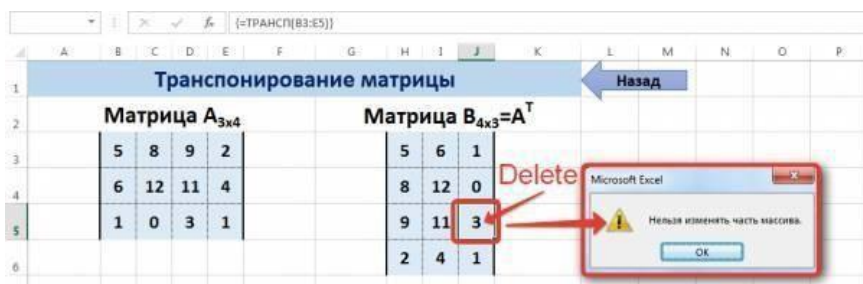


Рисунок 1.29 – Изменение транспонирования

Мы можем удалить только все элементы этой матрицы.

4 Контрольные вопросы

1. Какие типы матриц вы знаете?
2. Определитель матрицы. Для всякой ли матрицы существует определитель? Какая матрица является вырожденной?
3. Обратная матрица. Для всякой ли матрицы существует обратная?
4. Произведение матриц. Всякие ли матрицы можно перемножать?
5. Что такое нормы матрицы (вектора)? Как они определяются?
6. Что такое транспонированная матрица

5 Список рекомендуемой литературы

1. Антонов В.И., Копелевич Ф.И. Элементарная математика для первокурсника. – СПб.: Лань, 2013. – 112 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2009. – 840 с

Практическое занятие 2

Численные методы решения нелинейных уравнений

1 Цель работы

Решение некоторых строительных задач сводится к решению достаточно сложных *нелинейных уравнений*. В отдельных случаях они представляют собой самостоятельную задачу. Например, при проектировании очистных сооружений *зависимости, связывающие проектные параметры процесса очистки*, являются чаще всего нелинейными. В других случаях решение *нелинейных уравнений* является составной частью более сложных задач, например частью *расчета сооружения на устойчивость*, и т.д.

Данная работа направлена на изучение методов решения нелинейных уравнений по средствам электронных таблиц MS EXCEL

2 Теоретическое обоснование

Корни таких уравнений сравнительно редко удается найти точными методами. Кроме того, в некоторых случаях и коэффициенты уравнения, полученные в процессе эксперимента или как результаты предварительных расчетов, известны лишь приблизительно. Следовательно, сама задача о

точном определении корней уравнения теряет смысл, и важное значение приобретают методы приближенного нахождения корней уравнения и оценки степени их точности.

Нелинейные уравнения можно разделить на два класса: алгебраические и трансцендентные.

Алгебраические уравнения содержат только алгебраические функции, например:

$$x^2 + 5,4x - 1,34 = 0, \sqrt{x} - 1 + 0,8x - 6,76 = 0.$$

Уравнения, содержащие любые другие функции (тригонометрические, логарифмические, показательные и др.), называются *трансцендентными*, например:

$$e^x - x = 0, \sin x - \ln 2,3x = 0.$$

Любое нелинейное уравнение с одним неизвестным можно представить в общем виде:

$$f(x) = 0 \quad (2.1)$$

где функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором конечном или бесконечном интервале $A < x < B$.

Всякое значение x^* , обращающее уравнение (2.1) в тождество, называется **корнем** этого уравнения, т.е. $f(x^*) = 0$.

С геометрической точки зрения задача нахождения корней уравнения (2.1) эквивалентна задаче нахождения нулей функции $y = f(x)$, т.е. абсцисс точек пересечения графика функции с осью X (значений x_i , для которых выполняется условие $f(x_i) = 0$ (для $i = 1, 2, \dots$)) (рис. 2.1).

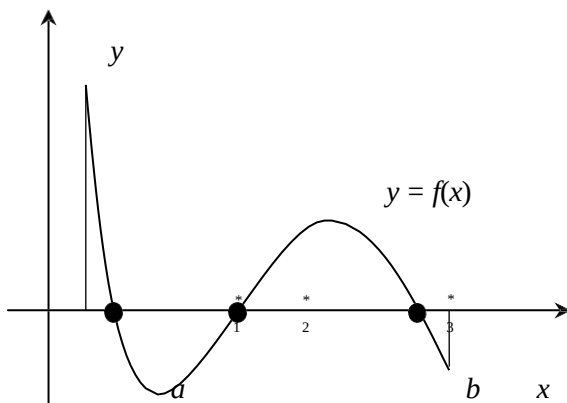


Рисунок 2.1 – Схема локализации корней

Исходя из специфики строительных задач будем рассматривать только действительные корни уравнения (2.1).

Методы решения нелинейных уравнений делятся на прямые (*точные*) и итерационные (*приближенные*).

Прямые методы позволяют записать корни уравнения в аналитическом виде, т.е. в виде некоторой формулы. На практике класс таких уравнений весьма невелик.

Итерационные (*приближенные*) методы – это методы последовательных приближений.

Алгоритм нахождения корней уравнения (2.1) с помощью итерационных методов складывается из двух этапов.

Первый этап – *отделение или локализация корней*. На этом этапе необходимо решить следующие задачи:

- определить *количество и расположение* корней;
- найти их *приближенные значения (нулевые итерации)* или определить отрезок, *содержащий единственный корень*.

Второй этап – *уточнение приближенного значения корня* до некоторой заданной точности ε .

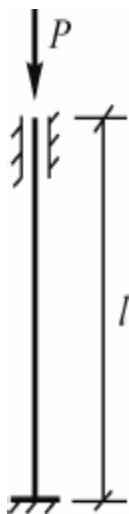
3 Методика и порядок выполнения работы

3.1 Отделение (локализация) корней

Локализовать корни уравнения

$$x - \operatorname{tg}(x) = 0, \quad (2.2)$$

которое получается при решении задачи устойчивости стержня (рис. 2.3), где $x = \sqrt{\frac{P_{кр}}{EJ}} l$.



При решении задач устойчивости нас обычно интересует *наименьшее* значение критической нагрузки, т.е. надо найти наименьший положительный корень уравнения (2.2).

Если при решении данной задачи отделение корней производить на основании таблицы табулирования (табл. 2.1), то можно допустить ошибку, предположив, что корень уравнения находится на отрезке $[1, 5, 2]$, где функция меняет знак.

Рисунок 2.1 – Схема к задаче устойчивости стержня.

Таблица 2.1 – Таблица табулирования

x	$f(x) = x - \text{tg}(x)$	x	$f(x) = x - \text{tg}(x)$
0	0,000	3	3,143
0,5	−0,046	3,5	3,125
1	−0,557	4	2,842
1,5	−12,601	4,5	−0,137
2	4,185	5	8,381
2,5	3,247		

В действительности на этом участке функция $f(x) = x - \text{tg}(x)$ терпит разрыв (т.е. не выполняются условия теоремы 2.1), и это хорошо видно на рис. 2.2.

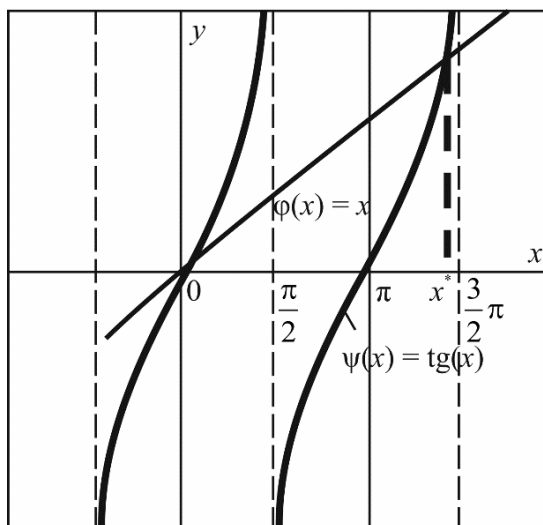


Рисунок 2.2 – Локализация корней уравнения $x - \operatorname{tg}(x) = 0$

Таким образом, искомый корень уравнения находится на отрезке $[4, 4,5]$, где выполняются условия теоремы 2.1.

Теорема 2.1. Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ принимает на концах его противоположные знаки, т.е. $f(a)f(b) < 0$, то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения $f(x) = 0$

Корень заведомо будет единственным, если производная функции $y = f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала (a, b) , т.е. функция монотонна на отрезке $[a, b]$.

Искомый корень уравнения находится на отрезке $x \in [4;$

4,5], что и видно на графике (рис. 2.3).

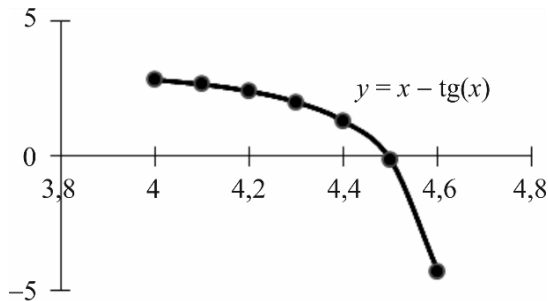


Рисунок 2.3 – Этап отделения корней

Этап **уточнения корня** реализуем средствами Excel. Продemonстрируем это на примере *метода половинного деления*. Схемы расчетов для *методов касательных* и *хорд* мало чем отличаются от приведенной ниже схемы.

Последовательность действий:

1. Подготовим таблицу, как показано на рис. 2.10, и введем значения a , b , ϵ соответственно в ячейки В3, В4, В5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Метод половинного деления										
2				$x - tg(x)=0$							
3	$a=$	4.0		n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$x_n = \frac{a+b}{2}$	$f(x_n)$	$ a - b $
4	$b=$	4.5		0	4.000	4.500	2.842	-0.137	4.250	2.244	0.500
5	$\epsilon =$	0.1		1	4.250	4.500	2.244	-0.137	4.375	1.524	0.250
6				2	4.375	4.500	1.524	-0.137	4.438	0.892	0.125
7				3	4.438	4.500	0.892	-0.137	4.469	0.446	0.063
8				4	4.469	4.500	0.446	-0.137	4.484	0.175	0.031
9				5	4.484	4.500	0.175	-0.137	4.492	0.025	0.016
10				6	4.492	4.500	0.025	-0.137	4.496	-0.055	0.008
11				7	4.492	4.496	0.025	-0.055	4.494	-0.015	0.004

Рисунок. 2.4 – Схема решения нелинейного уравнения
методом бисекции

2. Заполним первую строку таблицы:

- $D4 = 0$ номер итерации;
- $E4 = B3$, $F4 = B4$ для вычисления $f(a)$: $G4 = E4 - \text{TAN}(E4)$,
- аналогично в ячейки $H4$, $I4$, $J4$ введем формулы для вычисления соответственно $f(b)$, $x_n = (a + b)/2$ и $f(x_n)$;
- в ячейке $K4$ вычислим длину отрезка $[a, b]$:
 $K4 = \text{ABS}(E4 - F4)$.

3. $D5 = D4 + 1$ для формирования номера итерации.

4. В ячейки $E5$, $F5$ введем формулы для формирования концов вложенных отрезков в соответствии с алгоритмом, изложенным в подразд. 2.2.1:

- $E5 = \text{ЕСЛИ}(J4 * H4 < 0; I4; E4)$;
- $F5 = \text{ЕСЛИ}(J4 * H4 > 0; I4; F4)$.

5. Выделим ячейки $G4:K4$ и скопируем их вниз на одну строку.

6. Выделим ячейки $D5:K5$ и скопируем их вниз до конца таблицы.

Деление отрезков продолжаем до тех пор, пока длина последнего не станет меньше заданного ε , т.е. до

тех пор, пока не выполнится условие $|b - a| < \varepsilon$.

Чтобы сделать наглядным окончание итерационного процесса, воспользуемся **Условным форматированием**.

Условное форматирование – это форматирование выделенных ячеек на основе некоторого критерия, в результате чего произойдет цветовое оформление ячеек, содержание которых удовлетворяет заданному условию (в нашем случае $|b - a| < \varepsilon$).

Последовательность действий:

- выделим ячейки последнего столбца (К) расчетной схемы (см. рис. 2.4), где будет задаваться критерий окончания итерационного процесса;

- выполним команду **Главная/Стили/Условное форматирование**;

- в появившемся окне (рис. 2.5) выберем строку: Правила выделения ячеек / Меньше;

- в левой части появившегося диалогового окна **Меньше** (рис. 2.6) зададим значение, которое будем использовано в качестве критерия (в нашем примере это адрес ячейки B5, где находится значение ε);

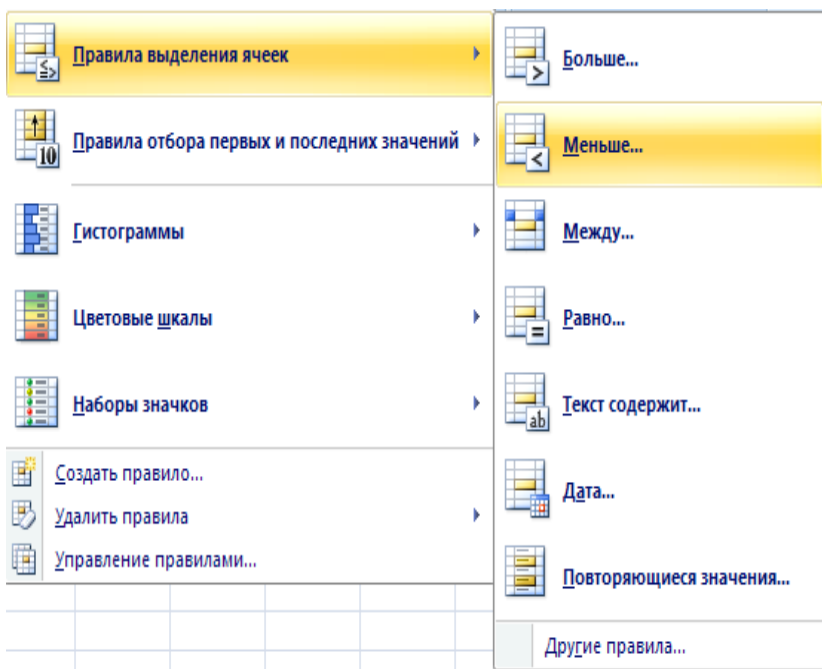


Рисунок 2.5 – Окно условного форматирования

- в правой части окна ***Меньше*** выберем цвет, которым будут окрашены ячейки, отвечающие заданному условию, и нажмем кнопку ОК.

В результате такого форматирования ячейки столбца К, значения которых **меньше 0,1**, тонированы (см. рис. 2.4).

Таким образом, за приближенное значение корня уравнения $x - \text{tg}(x) = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,1$ принимается

3-я итерация, т.е. $x^* \approx 4,46875$. Для $\varepsilon = 0,01$ – $x^* \approx 4,49609$ (6-я итерация).

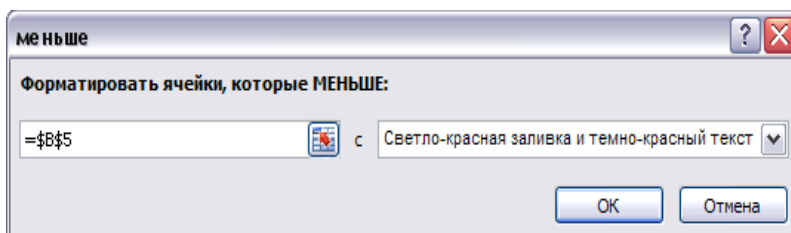


Рисунок 2.6 – Диалоговое окно *Меньше*

Решение нелинейных уравнений с использованием надстройки «Подбор параметра»

Решение нелинейных уравнений можно реализовать в приложении MS Excel с использованием *надстройки Подбор параметра*, где реализуется некоторый итерационный процесс.

Найдем корни рассмотренного выше уравнения.

За нулевое приближение решения уравнения, как это видно из рис. 2.7, можно принять $x_0 = 4$ или $x_0 = 4,5$.

Последовательность действий:

1. Подготовим таблицу, как показано на рис. 2.7. В ячейку **A2** введем некоторое значение x_0 (например, $x_0 = 4$) из ОДЗ функции $y = f(x)$. Это будет начальным приближением для итерационного процесса, реализуемого приложением

Подбор параметра.

2. Ячейка **B2** является *изменяемой ячейкой* в процессе работы надстройки. Введем в нее это значение x_0 , а в ячейке **C2** вычислим значение функции $f(x_n)$ для этого приближения.

3. Выберем команду *Данные / Работа с данными /*

Анализ «что-если» / Подбор параметра.

4. В окне «Подбор параметра» сделаем установки, как показано на рис. 2.7, и нажмем кнопку ОК.

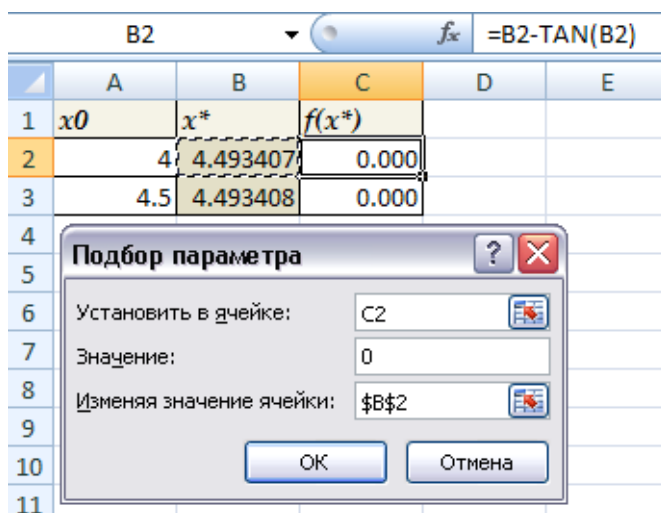


Рисунок 2.7 – Решение нелинейного уравнения с помощью надстройки «Подбор параметра»

Если все было проделано правильно, то в ячейке B2 (см. рис. 2.7) будет получено приближенное значение корня нашего уравнения.

Проделайте все эти операции ещё раз с другим значением начального приближения, например $x_0 = 4,5$.

4 Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется нелинейным? Что является решением нелинейного уравнения?
2. Геометрическая интерпретация решения нелинейного уравнения.
3. Методы решения нелинейного уравнения (прямые и итерационные). В чем разница?
4. Два этапа численного решения нелинейного уравнения. Какие задачи ставятся на первом и втором этапах?
5. Первый этап решения нелинейного уравнения. Как выбирается нулевое приближение (нулевая итерация)?
6. Построение итерационной последовательности. Понятие сходимости итерационной последовательности. Нахождение приближенного значения корня нелинейного уравнения с точностью ε .
7. Геометрическая интерпретация численных методов решения нелинейного уравнения: половинного деления, Ньютона (касательных), хорд.

Список рекомендуемой литературы

1. Антонов В.И., Копелевич Ф.И. Элементарная математика для первокурсника. – СПб.: Лань, 2013. – 112 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2009. – 840 с

Практическое занятие 3

Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

1 Цель работы

Применение численных методов для решения задач строительства часто сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Данная работа направлена на изучение методов решения СЛАУ по средствам электронных таблиц MS EXCEL

2 Теоретическое обоснование

Системы линейных алгебраических уравнений могут непосредственно составлять задачу из области строительных технологий, которую необходимо решить. Это *канонические уравнения метода сил, метода перемещений, смешанного, комбинированного методов* в расчетах статически неопределимых систем. Это *уравнения равновесия* (баланс сил) в расчетах статически определимых систем и др. С другой стороны, многие задачи строительства при их математической постановке сводятся к решению системы линейных алгебраических уравнений той или иной структуры. Это *краевые задачи, описываемые дифференциальными уравнениями, вариационные задачи* и др.

Система линейных алгебраических уравнений в общем случае имеет вид (3.1)

Эту систему удобнее записывать в матричной форме:

$$A \cdot \bar{X} = B \quad (3.1a)$$

где A – матрица системы; $\bar{X}$ – вектор решения; $\bar{B}$ – вектор свободных членов.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Решение систем линейных алгебраических уравнений представляет собой типичный образец численных расчетов, которыми занимались еще в древности. Это основной «строительный блок» для алгоритмов решения большинства задач, в которых используются математические модели.

Система (3.1) имеет *единственное решение*, если матрица A невырожденная ($\det A \neq 0$).

Если использовать понятие обратной матрицы (A^{-1}), то решение СЛАУ можно записать так:

$$\bar{X} = A^{-1} \cdot \bar{B} \quad (3.2)$$

Такой подход к решению СЛАУ крайне неэффективен, так как вычислительные потери при вычислении обратной матрицы очень большие. И если нет необходимости исследовать непосредственно элементы обратной матрицы, то

лучше не вычислять ее.

В курсе линейной алгебры решение системы (3.1) обычно находится по формулам Крамера в виде отношения определителей.

Для численного решения систем высокого порядка (а именно такие встречаются при решении задач строительства) этот метод непригоден, так как требует вычисления $(n + 1)$ -го определителя. Даже при выборе наилучшего метода вычисления одного определителя потребуется такое же время, как и для решения самой системы современными численными методами.

Методы решения СЛАУ. Все методы решения СЛАУ можно условно разбить на два класса: прямые (или точные) и итерационные. Имеются и «гибридные» методы [1, 2].

Прямые методы позволяют за конечное число действий получить точное решение системы. Слова «точное решение» нужно понимать условно, как характеристику алгоритма, а не реального вычислительного процесса.

Итерационные методы дают решение СЛАУ в виде предела последовательности некоторых векторов, построение которых осуществляется посредством единообразного процесса, называемого *итерационным процессом*. Они позволяют найти приближенное решение системы с заданной точностью.

Выбор того или иного метода зависит от многих обстоятельств: от вида матрицы коэффициентов; от порядка

системы; от имеющегося программного обеспечения; от объема оперативной памяти ЭВМ и др

3 Методика и порядок выполнения работы

3.1 Реализация метода Гаусса

Рассмотрим решение системы линейных алгебраических уравнений (пример 3.1) методом Гаусса, используя таблицы Excel

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7. \end{cases} \quad (3.3)$$

Последовательность действий:

Введем расширенную матрицу системы, как показано на рис. 3.1, в ячейки A3:D5.

Прямой ход метода Гаусса

Поделим элементы 1-й строки на a_{11} . Для этого в ячейку A7 введем формулу

$$A7 = A3/\$A\$3^*$$

и скопируем ее вправо до конца строки.

Умножим элементы 1-й строки на $(-a_{21})$ и прибавим ко 2-й строке. Для этого введем формулу:

$$A8 = A7*(-\$A\$4)+A4$$

и скопируем ее вправо до конца строки.

*Данная запись означает, что в ячейку A7 вводится формула начинающаяся со знака «=» (равно).

1. Умножим элементы 1-й строки на $(-a_{31})$ и прибавим к 3-й строке. Для этого введем формулу

$$A9 = A7*(-A\$5\$) + A5$$

и скопируем ее вправо до конца строки.

Таким образом исключили неизвестное x_1 из 2-го и 3-го уравнений системы (смотри 1-й шаг рис. 3.1).

	А	В	С	Д	Е	Ф	Г
1	Метод Гаусса		Прямой ход		Обратный ход		
2	Матрица А		В			X1=	1,000
3	2	4	3	4	$A^{(0)}$	X2=	-1,000
4	3	1	-2	-2	$B^{(0)}$	X3=	2,000
5	4	11	7	7	$C^{(0)}$		
6	1-й шаг						
7	1	2	1,5	2	$A^{(1)} = A^{(0)} / a_{11}$		
8	0	-5	-6,5	-8	$B^{(1)} = B^{(0)} + A^{(1)} \cdot (-a_{21})$		
9	0	3	1	-1	$C^{(1)} = C^{(0)} + A^{(1)} \cdot (-a_{31})$		
10	2-й шаг						
11	1	2	1,5	2	$A^{(2)} = A^{(1)}$		
12	0	1	1,3	1,6	$B^{(2)} = B^{(1)} / a_{22}^{(1)}$		
13	0	0	-2,9	-5,8	$C^{(2)} = C^{(1)} + B^{(2)} \cdot (-a_{32}^{(1)})$		

Рисунок. 3.1 – Реализация метода Гаусса в MS Excel

Осталось исключить неизвестное x_2 из 3-го уравнения системы. Для этого реализуем описанный выше алгоритм для 2-й и 3-й строк (смотри 2-й шаг рис. 3.1).

На этом *прямой ход метода Гаусса закончен*, матрица системы приведена к треугольному виду.

Обратный ход метода Гаусса

Найдем последовательно неизвестные, начиная с последней строки. Для этого в ячейки G2:G4 запишем формулы:

$$G4 = D13/C13 \text{ (для вычисления } x_3),$$

$$G3 = D12 - C12 * G4 \text{ (для вычисления } x_2),$$

$$G2 = D11 - C11 * G4 - B11 * G3 \text{ (для вычисления } x_1).$$

3.2 Решение СЛАУ с помощью надстройки «Поиск решения»

Систему линейных алгебраических уравнений можно также решить, используя надстройку «Поиск решения». При использовании данной надстройки строится последовательность приближений $\bar{X}^{(i)}$ $i = 0, 1, \dots, n$.

Назовем вектором невязок следующий вектор:

$$\bar{R}^{(i)} = \bar{A}\bar{X}^{(i)} - \bar{B} \quad (3.4)$$

Задача Excel заключается в том, чтобы найти такое приближение $\bar{X}^{(i)}$, при котором вектор невязок стал бы нулевым, т.е. добиться совпадения значений правых и левых частей системы $\bar{A} \cdot \bar{X} = \bar{B}$

В качестве примера рассмотрим СЛАУ (3.3).

Последовательность действий:

1. Оформим таблицу, как показано на рис. 3.2. Введем коэффициенты системы (матрицу A) в ячейки A3:C5.

	A	B	C	D	E	F
1	Матрица A			Левая часть A*X	Свободн. члены B	Невязки R=B-A*X
2	x1	x2	x3			
3	2	4	3	4	4	0
4	3	1	-2	-2	-2	0
5	4	11	7	7	7	0
6						
7	Решение СЛАУ					
8	1	-1	2	Изменяемые ячейки		

Рисунок 3.1 – Решение СЛАУ с помощью надстройки «Поиск решения»

2. В ячейках A8:C8 будет сформировано решение системы (x_1, x_2, x_3) . Первоначально они остаются пустыми, т.е. равными нулю. В дальнейшем будем их называть **изменяемыми ячейками**. Однако для контроля правильности вводимых далее формул удобно ввести в эти ячейки какие-либо значения, например единицы. Эти значения можно рассматривать как нулевое приближение решения системы, $\bar{X}^{(0)} = (1, 1, 1)$.

3. В столбец D введем выражения для вычисления левых частей исходной системы. Для этого в ячейку D3 введем и затем скопируем вниз до конца таблицы формулу

$D3 = \text{СУММПРОИЗВ} (A3:C3;\$A\$8:\$C\$8)$.

Используемая функция **СУММПРОИЗВ** принадлежит категории **Математические**.

4. В столбец Е запишем значения правых частей системы (матрицу В).

5. В столбец F введем невязки в соответствии с формулой (3.4), т.е. введем формулу $F3 = D3 - E3$ и скопируем ее вниз до конца таблицы

6. Будет нелишним проверить правильность вычислений для случая $\bar{X}^{(0)} = (1, 1, 1)$.

7. Выберем команду *Данные/Поиск решения*.

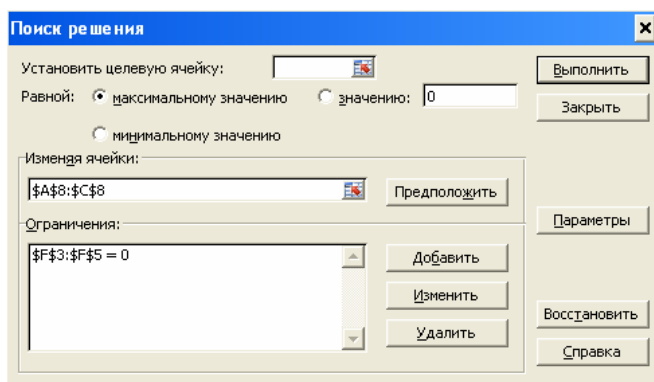


Рисунок 3.3 – Окно надстройки «Поиск решения»

В окне *Поиск решения* (рис. 3.3) в поле *Изменяемые ячейки* укажем блок $\$A\$8:\$C\8 , а в поле *Ограничения* –

$\$F\$3:\$F\$5 = 0$. Далее щелкнем по кнопке *Добавить* и введем эти ограничения. И затем – кнопка *Выполнить*.

Полученное решение систем (3.4) $x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 2$ записано в ячейках A8:C8, рис. 3.2. **Реализация метода Якоби средствами приложения MS Excel(3.5):**

В качестве примера рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 - 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 = -9, \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases} \quad (3.5)$$

Приведем эту систему к нормальному виду:

$$\begin{cases} x_1 = 0,75 - 0,125x_2 + 0,5x_3, \\ x_2 = 1,5 + 0,333x_1 + 0,167x_3, \\ x_3 = 0,125 + 0,25x_1 - 0,25x_2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Последовательность действий:

8. Оформим таблицу, как показано на рис. 3.4:

- матрицы α и β (3.15) введем в ячейки B6:E8;
- значение ε – в H5;
- номер итерации k сформируем в столбце A таблицы с

помощью автозаполнения;

- в качестве нулевого приближения выберем вектор

$$\bar{X}^{(0)} = (0, 0, 0) \text{ и введем его в ячейки B11:D11.}$$

9. Используя выражения (3.6), в ячейки B12:D12 запишем формулы для вычисления первого приближения:

$$B12 = \$E\$6 + B11 * \$B\$6 + C11 * \$C\$6 + D11 * \$D\$6,$$

$$C12 = \$E\$7 + B11 * \$B\$7 + C11 * \$C\$7 + D11 * \$D\$7,$$

$$D12 = \$E\$8 + B11 * \$B\$8 + C11 * \$C\$8 + D11 * \$D\$8.$$

Эти формулы можно записать иначе, используя функцию Excel **СУММПРОИЗВ**.

В ячейку E12 введем формулу E12=ABS(B11-B12) и скопируем ее вправо, в ячейки F12:G12.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Метод Якоби для решения СЛАУ:				$\overline{X} = \overline{\beta} + \alpha \overline{X}$		
3								
4		Матрица		α	$\overline{\beta}$			
5		x1	x2	x3			E= 0.1	
6		0	-0.125	0.5	0.75			
7		0.333	0	0.167	1.5			
8		0.25	-0.25	0	1.25			
9								
10	n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$	$ x_1^{(n)} - x_1^{(n-1)} $	$ x_1^{(n)} - x_1^{(n-1)} $	$ x_1^{(n)} - x_1^{(n-1)} $	$\ \overline{M}^{(k,j)}\ $
11	0	0.0000	0.0000	0.0000				
12	1	0.7500	1.5000	1.2500	0.7500	1.5	1.25	1.5
13	2	1.1875	1.9585	1.0625	0.4375	0.4585	0.1875	0.4585
14	3	1.0364	2.0729	1.0573	0.1511	0.11438	0.00525	0.15106
15	4	1.0195	2.0217	0.9909	0.0169	0.05118	0.06636	0.06636
16	5	0.9927	2.0050	0.9995	0.0268	0.01672	0.00856	0.02678
17	6	0.9991	1.9975	0.9969	0.0064	0.00749	0.00252	0.00749
18	7	0.9988	1.9992	1.0004	0.0003	0.00170	0.00347	0.00347
19	8	1.0003	1.9997	0.9999	0.0015	0.00047	0.00051	0.00152
20	9	1.0000	2.0001	1.0002	0.0003	0.00042	0.00026	0.00042

Рисунок 3.4 – Схема решения СЛАУ методом Якоби

2. В ячейку H12 введем формулу для вычисления $\|\overline{M}^{(k)}\|$ используя выражение (3.18): H12 = МАКС(E12:G12).
Функция МАКС находится в категории **статистические**.

$$\|M^{(k)} - M^{(k-1)}\| = \max_i |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| \leq \varepsilon \quad (3.7)$$

4. Выделим ячейки B12:H12 и скопируем их вниз до конца таблицы. Таким образом, получим k приближений решения СЛАУ.

5. Определим приближенное решение системы и количество итераций, необходимое для достижения заданной точности ε .

Для этого оценим степень близости двух соседних итераций по формуле (3.7). Воспользуемся **Условным форматированием** в ячейках столбца.

Результат такого форматирования виден на рис. 3.4. Ячейки столбца H, значения которых удовлетворяют условию (3.7), т.е. меньше $\varepsilon = 0,1$, тонированы.

Анализируя результаты, принимаем за приближенное решение исходной системы с заданной точностью $\varepsilon = 0,1$ четвертую итерацию, т.е. $\bar{X}^{(0)} \approx (1,022; 2,022; 0,991)$.

Исследуем *характер итерационного процесса*. Для этого выделим блок ячеек A10:D20 и, используя **Мастер диаграмм**, построим графики изменения каждой компоненты вектора решения в зависимости от номера итерации.

Приведенные графики (рис. 3.5) подтверждают сходимость итерационного процесса.

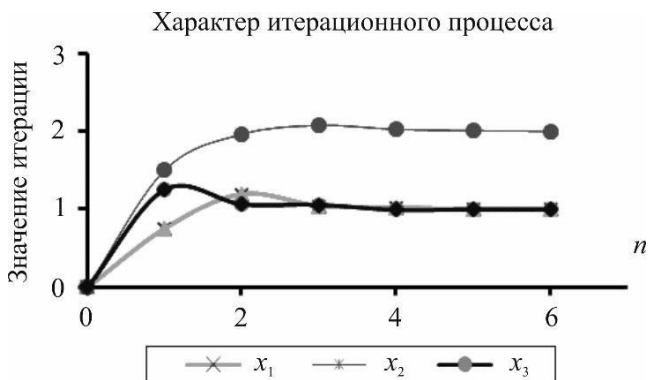


Рисунок 3.5 — Иллюстрация сходящегося итерационного процесса

Изменяя значение ε в ячейке Н5, получим новое приближенное решение исходной системы с новой точностью.

Контрольные вопросы

1. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Что является решением СЛАУ? Когда существует единственное решение СЛАУ?
2. Общая характеристика прямых (точных) методов решения СЛАУ. Методы Гаусса и прогонки.
3. Общая характеристика итерационных методов решения СЛАУ. Методы Якоби (простых итераций) и Гаусса–Зейделя.
4. Условия сходимости итерационных процессов.
5. Что понимают под терминами обусловленности задач и вычислений, корректности задачи решения СЛАУ?

Список рекомендуемой литературы

1. Вержбицкий В.М. Основы численных методов.
–М.: Высш. шк., 2009. – 840 с.
2. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. –
М.: Добросвет, 2009. – 320 с.

Практическое занятие 4

Численное интегрирование

1 Цель работы

При решении достаточно большого круга технических задач приходится сталкиваться с необходимостью вычисления определенного интеграла.

Данная работа направлена на изучение методов вычисления интегралов по средствам электронных таблиц MS EXCEL

2 Теоретическое обоснование

Вычисление *площадей*, ограниченных кривыми, *работы*, *моментов инерции*, *перемножение эпюр* по формуле Мора и т.д. сводится к вычислению определенного интеграла (например 4.1).

$$J = \int\limits_a^b f(x)dx \quad (4.1)$$

Если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную $F(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$, то интеграл (4.1) может быть вычислен по формуле Ньютона–Лейбница

$$J = \int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (4.2)$$

Однако только для узкого класса функций $y = f(x)$ первообразная $F(x)$ может быть выражена в элементарных функциях. Кроме того, функция $y = f(x)$ может задаваться графически или таблично. В этих случаях применяют различные формулы для приближенного вычисления интегралов.

Такие формулы называют *квадратурными формулами*, или *формулами численного интегрирования*.

Формулы численного интегрирования хорошо иллюстрируются графически. Известно, что значение определенного интеграла (4.1) *пропорционально* площади криволинейной трапеции, образованной подынтегральной функцией $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, осью OX (рис. 4.1).

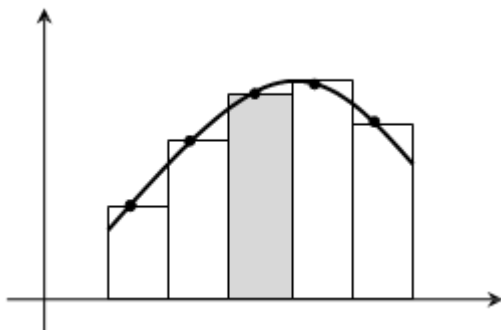


Рисунок 4.1 – Геометрическая интерпретация численного интегрирования

Задачу вычисления определенного интеграла (4.1) заменяем задачей вычисления площади этой криволинейной трапеции. Однако задача нахождения площади криволинейной не является простой.

Отсюда идея численного интегрирования будет заключаться в замене криволинейной трапеции фигурой, площадь которой вычисляется достаточно просто.

Для этого отрезок интегрирования $[a, b]$ разобьем на n равных элементарных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$), с шагом $h = (b - a)/n$. При этом криволинейная трапеция разобьется на n элементарных криволинейных трапеций с основаниями, равными h (см. рис. 4.1).

Каждая элементарная криволинейная трапеция заменяется фигурой, площадь которой вычисляется довольно просто. Обозначим эту площадь S_i . Сумма всех этих площадей называется *интегральной суммой* и вычисляется по формуле

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n S_i. \quad (4.3)$$

Тогда приближенная формула вычисления определенного интеграла (4.1) имеет вид

$$J = \int_a^b f(x)dx \approx \sigma_n. \quad (4.4)$$

Точность вычисления по формуле (4.4) зависит от шага h , т.е. от числа разбиений n . С увеличением n интегральная сумма σ_n приближается к точному значению интеграла

$$J = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n.$$

Это хорошо проиллюстрировано на рис. 4.2.

(4.5)



Рисунок 4.2 – Зависимость точности вычисления интеграла от числа разбиений

В математике доказывается *теорема*: если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел интегральной суммы σ существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на элементарные отрезки.

Формулу (4.4) можно использовать, если известна степень точности такого *приближения*. Существуют различные формулы для оценки погрешности выражения (4.4), но, как правило, они достаточно сложны.

3 Методика и порядок выполнения работы

3.1 Интегрирование средствами MS Excel

Вычислим определенный интеграл

$$J = \int_1^2 x^2 dx \tag{4.6}$$

методом **прямоугольников (входящих)** и методом **трапеций**.

На отрезке $x \in [a, b]$ построим разностную сетку

$$\Omega_n \{x_0 = a, x_i = x_{i-1} + h, i = 1, 2, \dots, n-1, x_n = b, h = (b-a)/n\}$$

и создадим таблицу по образцу рис. 4.3.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a=	1	n= 10			Численное интегрирование		
2	b=	2				$J = \int_a^b f(x) dx$ $f(x)=x^2$		
3	h=	0.1						
4	Номер узла	X_i	$f(X_i)$	Метод				
5				вх.прямоуг	трапец.	ячейки ввода формул		
6	0	1	1.0000	0	0			
7	1	1.1	1.2100	0.1	0.1105			
8	2	1.2	1.4400	0.221	0.243			
9	3	1.3	1.6900	0.365	0.3995			
10	4	1.4	1.9600	0.534	0.582			
11	5	1.5	2.2500	0.73	0.7925			
12	6	1.6	2.5600	0.955	1.033			
13	7	1.7	2.8900	1.211	1.3055			
14	8	1.8	3.2400	1.5	1.612			
15	9	1.9	3.6100	1.824	1.9545			
16	10	2	4.0000	2.185	2.335			
17						σ_n		

Рисунок 4.3 – Схема численного интегрирования

1. В ячейки B1, B2 и D1 введем значения нижнего и верхнего пределов интегрирования **a**, **b** и количество разбинок **n**.

2. В ячейке B3 вычислим шаг разбишки **h**: B3 = (B2 –

– B1)/D1. В столбце A сформируем номер узла следующим образом: A6 = 0; в ячейку A7 введем формулу A7 = A6 + 1 и скопируем ее вниз до конца таблицы. (Это позволит в дальнейшем приспособить таблицу для любого значения шага **h**, т.е. для любого **n**).

3. В столбце B сформируем значения узлов следующим образом: $x_{i+1} = x_i + h$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Введем в

ячейку B6 значение a , т.е. $B6 = B1$. В ячейку B7 запишем формулу $B7 = B6 + \$B\3 и скопируем ее вниз до значения нижнего предела интегрирования b .

4. В столбце C формируем значения подынтегральной функции $f(x)$ в узлах сетки. Для этого в ячейку C6 введем формулу $C6 = B6*B6$ и скопируем ее вниз.

5. В столбцах D и E накапливаются результаты суммирования в соответствии с формулами (4.8), (4.11). Для этого обнулим ячейки D6 и E6. В ячейки D7 и E7 запишем формулы численного интегрирования:

$$D7 = D6 + C6 * \$B\$3,$$

$$E7 = E6 + (C6 + C7) * \$B\$3 / 2$$

и скопируем их вниз до конца таблицы.

Приближенные значения интеграла (интегральные суммы) получены в ячейках D16 и E16 по **методу прямоугольников** и **трапеций** соответственно.

В данном случае не составляет труда найти точное значение этого интеграла:

$$J = \int_1^2 x^2 dx = 2,3333$$

И сравнить с полученными результатами.

Изменяя значения ячеек B1, B2 (пределы интегрирования a и b), D1 (количество разбинок n), C6 (формула подынтегральной функции $f(x)$), можно использовать эту схему для вычисления любого определенного интеграла с необходимой точностью.

Например, уменьшим шаг разбишки (количество разбинок при этом увеличилось вдвое, $n = 20$), т.е. введем в ячейку D1 величину 20. Выделим последнюю строку таблицы на рис 4.7 и копируем ее вниз до значения $b = 2$. Получим приближенное значение интеграла с шагом $h = 0,05$.

Аналогичным образом можно изменять и другие параметры.

4

Контрольные вопросы

1. Геометрический смысл определенного интеграла. Когда возникают задачи численного интегрирования?

2. Идея численного интегрирования. Понятие интегральной суммы.

3. Оценка погрешности численного интегрирования. Метод половинного шага.

4. Методы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Геометрическая интерпретация методов численного интегрирования.

5. Сравнение численных методов интегрирования

между собой.

5

Список рекомендуемой литературы

1. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высш. шк., 2009. – 840 с.
2. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Добросвет, 2009. – 320 с.

Практическое занятие 5

Аппроксимация

1 Цель работы

Большинство численных методов основаны на замене одной функции $f(x)$ (известной или неизвестной) другой функцией $\varphi(x)$, близкой к $f(x)$. Как правило, функция $\varphi(x)$ обладает «хорошими» свойствами и является «удобной» в аналитических и вычислительных операциях

Данная работа направлена на изучение методов аппроксимации по средствам электронных таблиц MS EXCEL

2 Теоретическое обоснование

Задача о приближении (аппроксимации) функции $f(x)$ функцией $\varphi(x)$ состоит в построении функции $\varphi(x)$, близкой (в некотором смысле) к функции $f(x)$ на заданном отрезке $[a, b]$, т.е.

$$f(x) \cong \varphi(x) \quad (5.1)$$

Для решения этой задачи необходимо ответить на ряд вопросов.

1. Что известно о функции $f(x)$? Задана она аналитически или таблицей своих значений, какова степень ее гладкости?
2. Какую функцию $\varphi(x)$ выбрать в качестве аппроксимирующей функции?
3. Что понимать под близостью между функциями

$f(x)$ и $\varphi(x)$, т.е. какова степень приближения (5.1)?

Термин *близости* (отклонения) двух функций понимается по-разному в зависимости от обстоятельств. При этом мы получаем различные задачи теории приближения, из которых рассмотрим две: *интерполирование* и *среднеквадратичное приближение*.

3 Методика и порядок выполнения работы

3.1 Построение уравнений регрессии методом наименьших квадратов с использованием надстройки «Поиск решения»

Имеются результаты (табл. 5.1) некоторой серии экспериментов, в которой выявлена некоторая зависимость параметров x и y .

Таблица 5.1 – Значения результатов экспериментов

x	1	2	4	5	7	8	9
y	1	3,5	5	4	5.5	6	9

В таких случаях ставится задача о выявлении некоторой аналитической зависимости между величинами x и y , полученными в процессе эксперимента.

В качестве аппроксимирующих функций рассмотрим полиномы разной степени:

$$y = P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \quad (5.2)$$

Поиск коэффициентов такого уравнения осуществляется с помощью МНК. При этом минимизацию суммы квадратов отклонений можно реализовать с помощью надстройки MS Excel «Поиск решения».

Рассмотрим 3 вида уравнений регрессий:

1. Прямая $P_1(x) = a + bx$.
 2. Парабола $P_2(x) = a + bx + cx^2$.
 3. Куб.Парабола $P_3(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$
- Оформим таблицу, как показано на рис. 5.1.

Значения x_i и y_i из табл. 5.1 введем в массив ячеек

A9:B15.

В столбцах **Квадраты отклонений (F, G, H)** будем записывать *квадраты отклонений* между *экспериментальными значениями y_i и полиномами* первой $P_1(x)$, второй $P_2(x)$ и третьей $P_3(x)$ степени соответственно для $x = x_i, i = 1, 2, \dots, n$.

В общем виде эти выражения имеют вид $[y_i - P_m(x_i)]^2$.

Рассмотрим случай линейной регрессии, т.е.

$$P_1(x) = a + bx.$$

Последовательность действий:

Для контроля проводимых ниже расчетов принимаем $a = 1, b = 1$ (ячейки B3, C3). С точки зрения надстройки «Поиск решения» эти значения можно считать *начальным приближением*, а ячейки B3, C3 – *изменяемыми ячейками*.

1. Итак, введем B3 = 1, C3 = 1 (рис. 5.5).
2. В столбце **Прямая** (столбец C) вычислим значения УР в экспериментальных точках: C9=\$B\$3+\$C\$3*A9. Копируем эту формулу вниз до конца таблицы.
3. В столбце F сформируем квадраты отклонений,

$\sigma^2 = (y_i - a - bx_i)^2$, т.е. введем формулу $F9=(B9-C9)^2$ и скопируем ее вниз до конца таблицы.

4. В ячейке F16 вычислим сумму квадратов отклонений для всех точек: $F16=\text{СУММ}(F9:F15)$.

5. Нашей задачей является *минимизация этой суммы* путем изменения значений коэффициентов уравнения a и b (ячеек B3 и C3). В исходном состоянии они пусты или имеют какие-либо значения (см. пункт 1).

6. Для поиска оптимальных значений коэффициентов выполним команду: *Данные/Поиск решения* и в появившемся окне «*Поиск решения*» сделаем следующие установки:

- целевая ячейка – F16;
- изменяемые ячейки – B3:C3;
- поставим флажок в поле **минимальному значению**;
- нажмем кнопку **выполнить**.

Результаты, полученные в ячейках B3, C3, соответствуют коэффициентам линейной регрессии вида

$$y=8,828+0,770x$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Подбор коэффициентов уравнения регрессии.							
2		a	b	c	d			
3	y=P1(X)	0,828	0,770			Прямая	$P_1(x) = a+bx$	
4	y=P2(X)	1,187	0,559	0,021		Парабола	$P_2(x) = a+bx+cx^2$	
5	y=P3(x)	-2,799	4,642	-0,965	0,066	КубПарабола	$P_3(x) = a+bx+cx^2+dx^3$	
6						Квадраты отклонений		
7	Xi, Yi - экспертные		Yi - расчетные			$(y_i - P(x_i))^2$		
8	x	y	Прямая	Парабола	Куб.параб.	Прямая	Парабола	Куб.параб.
9	1,000	1,000	1,598	1,768	0,945	0,357	0,589	0,003
10	2,000	3,000	2,367	2,390	3,154	0,400	0,372	0,024
11	4,000	5,000	3,906	3,762	4,555	1,196	1,534	0,198
12	5,000	4,000	4,676	4,510	4,537	0,457	0,261	0,288
13	7,000	5,500	6,215	6,134	5,043	0,511	0,402	0,209
14	8,000	6,000	6,984	7,009	6,358	0,969	1,019	0,128
15	9,000	9,000	7,754	7,926	8,909	1,553	1,152	0,008
16			Суммы квадратов отклонений			5,4434	5,3288	0,8588
17			Средние квадратичные отклонения			0,7378	0,7300	0,2931

Рисунок 5.1 – Схема построения уравнения регрессии

7. Среднеквадратичное отклонение вычислим по формуле (5.19) в ячейке F17: F17=КОРЕНЬ(A16/7).

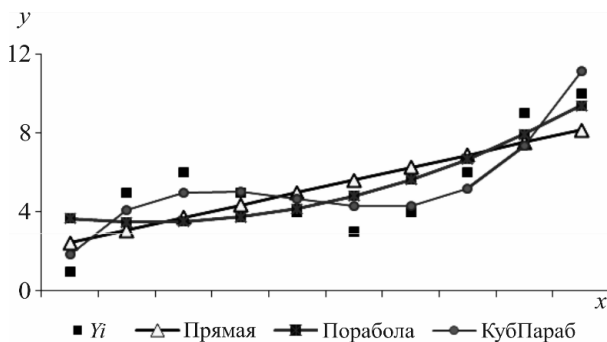
Аналогичным образом получим уравнения регрессии второго и третьего порядков:

$$y = 1,187 + 0,559x + 0,021x^2,$$

$$y = -2,779 + 4,642x - 0,965x^2 + 0,066x^3.$$

Точно так же можно сформировать уравнение регрессии *любого* порядка.

Графическое отображение результатов вычисления



приведено на рис. 5.2 для полученных выше уравнений регрессии.

Рисунок 5.2 – Графическое отображение аппроксимирующих полиномов и экспериментальных данных

Таким образом, в этом примере *увеличение степени* аппроксимирующего полинома *снижает погрешность приближения*. Однако это не всегда так. Самая высокая степень такого уравнения *на единицу меньше числа экспериментальных точек*. В рассмотренном примере теоретически возможен полином шестой степени. Но на практике не следует стремиться к полному устранению погрешности, поскольку и сами экспериментальные данные не являются точными, и с увеличением степени полинома возрастают погрешности округления.

3.2 Построение линейной эмпирической формулы с использованием встроенных функций ЛИНЕЙН и ТЕНДЕНЦИИ

Для построения линейной эмпирической формулы в приложении Excel предусмотрены *встроенные функции* **ЛИНЕЙН** и **ТЕНДЕНЦИЯ** из категории *Статистические*.

ЛИНЕЙН(<известное Y>;<известное X>) – вычисляет коэффициенты линейного уравнения регрессии для множества значений независимой переменной **X** и зависимой переменной **Y**. Результаты выводятся в две смежные ячейки – сначала коэффициент при **x**, затем свободный член.

Поскольку **X** и **Y** являются массивами, то функция вводится как функция обработки массивов:

- выделяются две смежные ячейки для результатов;
- вводится функция;
- **одновременно** нажимаются клавиши Ctrl+Shift+Enter.

ТЕНДЕНЦИЯ (<известное **Y**>;<известное **X**>;<новое **X**>) – вычисляет ожидаемое новое значение **y** для нового **x**, если известны некоторые опытные значения **X** и **Y**.

Ввод этой функции аналогичен вводу функции **ЛИНЕЙН**.

Пример. Для исходных данных, заданных табл. 5.1, найдем коэффициенты линейной эмпирической формулы $y = a + bx$, используя функцию **ЛИНЕЙН**.

Таблица исходных данных приведена рис. 5.3.

	A	B	C	D	E	F
1	Эмпирическая формула					
2		$Y = a + bX$			Функция ЛИНЕЙН	
3					b	a
4					0,636364	1,8
5	i	X_i	Y_i			
6	1	1	1		Функция ТЕНДЕНЦИЯ	
7	2	2	5		x	y
8	3	3	6		0,0	1,80
9	4	4	5		1,0	2,44
10	5	5	4		1,5	2,75
11	6	6	3		3,0	3,71
12	7	7	4		4,0	4,35
13	8	8	6		8,0	6,89
14	9	9	9		8,5	7,21
15	10	10	10		10,0	8,16

Рисунок 5.2 – Определение коэффициентов линейной регрессии с помощью функции **ЛИНЕЙН**

Выделим ячейки E4:F4 и используя *Мастер функции* введем формулу =ЛИНЕЙН (\$C\$6:\$C\$15;\$B\$6:\$B\$15).

Результаты в ячейках E4 и F4 можно интерпретировать как коэффициенты линейного уравнения $y = 1,8 + 0,64x$.

Пример. Для тех же исходных данных, приведенных на рис. 5.7, вычислим ожидаемое новое значение y для нового значения x , используя функцию ТЕНДЕНЦИЯ.

Последовательность действий:

Вычисления производятся в предположении, что x и y зависят *линейно*.

1. Новые значения x запишем в ячейках E8:E15.
2. Результаты вычислений новых значений y будем записывать в ячейки F8:F15.
3. Выделим ячейку F8 и с помощью Мастера функций введем формулу

=ТЕНДЕНЦИЯ(\$C\$6:\$C\$15;\$B\$6:\$B\$15;F8).

4. **Одновременно** нажмем клавиши Ctrl+Shift+Enter.

Скопируем формулу вниз для всех новых значений x

4 Контрольные вопросы

1. Понятие численного эксперимента. Приведите пример такого эксперимента.
2. Что понимается под термином *аппроксимация* (приближение). Когда возникают задачи аппроксимации?
3. Как ставится задача интерполирования функций?
4. Среднеквадратичное приближение. Суть метода наименьших квадратов (МНК).

5. Среднее квадратичное отклонение. Выбор «наи-

лучшего» приближения.

6. Геометрический смысл точности аппроксимации исследуемого процесса.

7. Аппроксимация с помощью эмпирической формулы с двумя параметрами. Метод выравнивания.

5 Список рекомендуемой литературы

1. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. –М.: Высш. шк., 2009. – 840 с.

2. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Добросвет, 2009. – 320 с.

Практическое занятие 6

Численные методы оптимизации

1 Цель работы

Решение задач оптимизации в Microsoft Excel производится с помощью *надстройки «Поиск решения»*.

При поиске оптимального решения задачи можно изменять условия и варианты поиска решения, используя диалоговое окно «Параметры поиска решения». Пользователь при этом может сам выбрать алгоритм оптимизации.

Данная работа направлена на изучение методов решения задач оптимизации по средствам электронных таблиц MS EXCEL

2 Теоретическое обоснование

Термин *«оптимизация»* в литературе обозначает процесс отыскания наилучшего или оптимального решения. На практике под оптимизацией понимается стремление к совершенству, которое, возможно, не будет достигнуто по ряду объективных причин.

С оптимизацией явно или неявно мы встречаемся в любой сфере человеческой деятельности, в том числе и в строительстве. При решении *организационно-управленческих задач* методы оптимизации позволяют получить наилучшее распределение ресурсов или оптимальные объемы выпуска продукции с целью получения максимальной прибыли; *в задачах технического проектирования* – выбрать наилучший

вариант конструкции или сооружения и т.д.

Проблема оптимизации имеет *два основных аспекта*:

- 1) разработка *математической модели поставленной задачи* в виде математических выражений (при этом формализовав понятие «оптимальный»);
- 2) решение математически сформулированной задачи выбранным подходящим численным методом.

Постановка задачи оптимизации является наиболее сложным и ответственным этапом. Она осуществляется с учетом *назначения* реального объекта, *целей проектирования (управления)* и *конкретных условий* реализации задачи.

Далее на примерах наиболее типичных задач экономики, управления и проектирования мы рассмотрим *приемы*

и *особенности* построения математических моделей задач оптимизации, а также методы их решения.

Но прежде рассмотрим, что представляет собой *математическая модель* задачи оптимизации, и введем ряд *понятий и определений*, используемых в этих задачах.

3 Методика и порядок выполнения работы

3.1 Решение задачи планирования производства

Рассмотрим задачу о минимизации целевой функции

$$Z_{\min} = 1 - x - y \quad (6.1)$$

при ограничениях:

$$P_1: x - y + 1 \geq 0,$$

$$P_2: 3x + 2y - 6 \geq 0,$$

$$P_3: -3x - y + 9 \geq 0,$$

$$P_4: x \geq 0,$$

$$P_5: y \geq 0 \quad (6.2)$$

Последовательность действий:

1. Подготовим таблицу, как показано на рис. 6.1. Ячейки, содержащие целевую функцию (A10) и изменяемые ячейки (проектные параметры x_1, x_2) B10:C10, тонируем. Для контроля счета в ячейки B10:C10 введем единицы. Значения проектных параметров $x_1=1$ и $x_2=1$ можно рассматривать как начальное приближение решения задачи.

2. Систему ограничений (6.12) запишем в виде, как показано на рис. 6.1, т.е.:

$$a_i x_1 + b_i x_2 - d_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$$

	A	B	C	D	E
1	№	Система ограничений			
2		a_i	b_i	d_i	$a_i x_1 + b_i x_2 + d_i \geq 0$
3	1	1	-1	1	1
4	2	3	2	-6	-1
5	3	-3	-1	9	5
6	4	1	0	0	1
7	5	0	1	0	1
8					
9	Zmin	x_1	x_2	$Z_{\text{нач}} = 1 - x_1 - x_2$	
10	-1	1	1	$x_1 - x_2 + 1 \geq 0,$	
11		Изменяемые ячейки		$3x_1 + 2x_2 - 6 \geq 0,$	
12				$-3x_1 - x_2 + 9 \geq 0,$	
13				$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$	
14					
15					

Рис. 6.1. Расчетная схема

Обратите внимание на то, что знаки неравенств одинаковы для всех строк системы ограничений. В рациональности этого вы убедитесь ниже.

3. В ячейки B3:D7 введем коэффициенты системы ограничений.

4. В ячейку E3 введем формулу для вычисления левой части 1-го ограничения, т.е.

$$E3=\text{СУММПРОИЗВ}(\$B\$10:\$C\$10;B3:C3)+D3,$$

и после ввода скопируем ее вниз до конца таблицы. Не лишним будет проверить результаты счета для заданных значений $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$.

5. Формулу для целевой функции запишем в ячейке A10:

$$A10=1-B10-C10$$

6. Выберем команду меню *Данные\Поиск решения* и в появившемся окне сделаем соответствующие установки (рис. 6.2). Ограничения устанавливаются с помощью кнопки *Добавить*, которая вызывает окно *Добавление ограничения* для ввода этих ограничений (см. рис. 6.2)

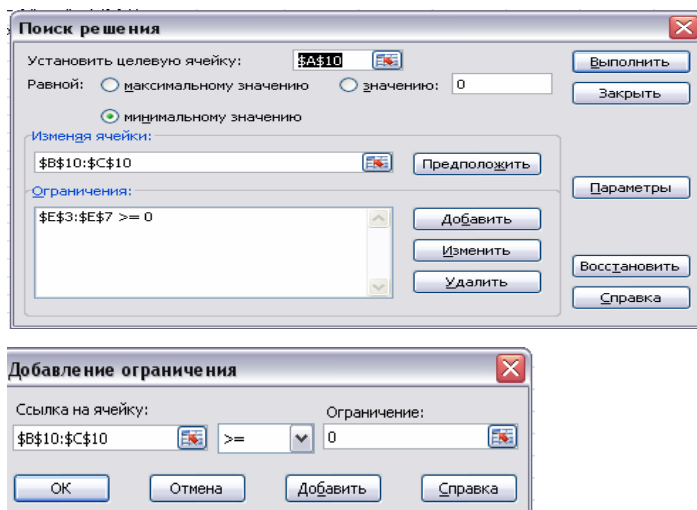


Рисунок 6.2 – Окно «Поиск решения»

7. После щелчка на кнопке *Выполнить*, при условии, что введено все верно, результат решения будет иметь вид, как показано на рис. 6.3.

	A	B	C	D	E
1	№	<i>Система ограничений</i>			
2		a_i	b_i	d_i	$a_i x_1 + b_i x_2 + d_i \geq 0$
3	1	1	-1	1	0
4	2	3	2	-6	6
5	3	-3	-1	9	0
6	4	1	0	0	2
7	5	0	1	0	3
8					
9	Zmin	x_1	x_2		
10	-4	2	3		
11		Изменяемые яч-ки			

Рисунок 6.3 – Результаты решения

Результаты можно сохранить или отказаться от них (восстановив исходные значения). Можно получить один из видов отчетов (*Результаты*, *Устойчивость*, *Пределы*). Отчет можно оформить на отдельном листе *Книги* с соответствующим именем

3.2 Решение транспортной задачи

Исходные данные:

Построить математическую модель транспортной задачи.

На трех цементных заводах производится цемент одной и той же марки в количествах соответственно 100, 130,

170 тонн. Цемент следует доставить на четыре ЖБК, потребляющих его соответственно в количествах 150, 120, 80, 50 тонн. Стоимости (у.е.) перевозок одной тонны продукта с i -го ($i = 1, 2, 3$) завода на j -й ($j = 1, 2, 3, 4$) ЖБК приведены в таблице. Спланировать перевозки так, чтобы их стоимость была минимальной. Условия задачи записываем в виде таблицы.

Проектные параметры: x_{ij} – количество (т) продукта, перевозимого с i -го ($i = 1, 2, 3$) завода на j -й ($j = 1, 2, 3, 4$) ЖБК.

Целевая функция:

$$Z_{\min} = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 11x_{14} + x_{21} + 4x_{22} + 6x_{23} + 3x_{24} + 5x_{31} + 8x_{32} + 12x_{33} + 7x_{34}, \quad (6.3)$$

Ограничения:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 130,$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 150,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 120, \quad (6.4)$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80,$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 50,$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4)$$

Последовательность действий:

1. Подготовим таблицу, как показано на рис. 6.4. Ячейки, содержащие *целевую функцию* I10 и изменяемые ячейки (*проектные параметры* x_{ij} , $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$) D4:D6, F4:F6; H4:H6, J4:J6, тонированы. Для контроля сче- та в изменяемые ячейки введем какие-либо числа, напри- мер единицы. Эти значения проектных параметров можно рассматривать как начальное приближение решения.
2. Введем исходные данные (цены перевозок) из таблицы примера 6.8 в соответствующие ячейки рис. 6.4.

3. В ячейку I10 введем целевую функцию: I10 =

$$\begin{aligned} & \text{СУММПРОИЗВ}(C4:C6;D4:D6) + \\ & + \text{СУММПРОИЗВ}(E4:E6;F4:F6) + \\ & + \text{СУММПРОИЗВ}(G4:G6;H4:H6;) + \\ & + \text{СУММПРОИЗВ}(I4:I6;J4:J6). \end{aligned}$$

4. Подготовим таблицу ограничений. Для этого в ячейку D10 введем формулу $D10=D4+F4+H4+J4-B4$, а затем скопируем ее вниз на две строки.

Для ввода следующих четырех ограничений воспользуемся *автосуммированием*. Например: $D13=\text{СУММ}(D4:D6)-D7$, аналогичные формулы запишем в ячейки D15:D17.

G22												
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J		
1	Цементный завод (i)	Объем производства (t)	Пункты назначения (j)									
2			ЖБК-1		ЖБК-2		ЖБК-3		ЖБК-4			
3			цена перевозок (y.e.)	объем перевозок (t)	цена перевозок (y.e.)	объем перевозок (t)	цена перевозок (y.e.)	объем перевозок (t)	цена перевозок (y.e.)	объем перевозок (t)		
4			№1	100	3	1,00	5	1,00	7	1,00	11	1,00
5			№2	130	1	1,00	4	1,00	5	1,00	3	1,00
6	№3	170	5	1,00	8	1,00	12	1,00	32	1,00		
7	Объем потребления:		150		120		80		50			
8												
9	Система ограничения											
10	$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} - 100 = 0$				Целевая функция (y.e.) =				98			
11	$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} - 130 = 0$											
12	$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} - 170 = 0$											
13	$x_{11} + x_{21} + x_{31} - 150 = 0$											
14	$x_{12} + x_{22} + x_{32} - 120 = 0$											
15	$x_{13} + x_{23} + x_{33} - 80 = 0$											
16	$x_{14} + x_{24} + x_{34} - 50 = 0$											
17	$x_{ij} \geq 0; (i=1,2,3; j=1,2,3,4)$											
18												

Рис. 6.4. Схема решения транспортной задачи

5. Последнюю строку ограничений добавим непосредственно в окне «Поиск решения».

6. Выделим ячейку I10 (целевая ячейка) и выберем команду меню Данные\Поиск решения. В появившемся окне «Поиск решения» сделаем установки, как показано на рис 6.5. Для ввода ограничений используем кнопку *Добавить*

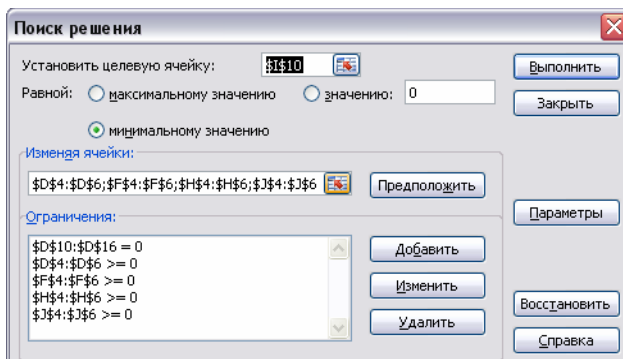


Рисунок 6.4 – Окно «Поиск решения»

Результат счета приведен на рис.6.5, минимальная стоимость перевозок составляет 2040 у.е.

N26										
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Центр лагод (i)	Объем произ- водства (t)	Пункты назначения (j)							
2			ЖБК-1		ЖБК-2		ЖБК-3		ЖБК-4	
3			цена пере- возки (y.e.)	объем пере- возки (t)	цена пере- возки (y.e.)	объем пере- возки (t)	цена пере- возки (y.e.)	объем пере- возки (t)	цена пере- возки (y.e.)	объем пере- возки (t)
4			№1	100	3	0,00	5	100,00	7	0,00
5	№2	130	1	30,78	4	0,05	6	80,00	3	19,17
6	№3	170	5	119,22	8	19,95	12	0,00	7	30,83
7	Объем потребления:		150		120		80		50	
8										
9	Система ограничения									
10	$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} - 100 = 0$									
11	$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} - 130 = 0$									
12	$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} - 170 = 0$									
13	$x_{11} + x_{21} + x_{31} - 150 = 0$									
14	$x_{12} + x_{22} + x_{32} - 120 = 0$									
15	$x_{13} + x_{23} + x_{33} - 80 = 0$									
16	$x_{14} + x_{24} + x_{34} - 50 = 0$									
17	$x_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,3; j=1,2,3,4)$									
Целевая функция (y.e.) =										2040

Рисунок 6.5 – Результаты решения транспортной задачи

4 Контрольные вопросы

1. Математическая постановка задач оптимизации в строительстве.
2. Классификация задач математического программирования.
3. Общая постановка задачи линейного

программирования.

4. Геометрический метод решения задач линейного программирования.

5. В чем заключается идея симплекс-метода решения задач линейного программирования?

6. Основные задачи линейного программирования в сфере проектирования и управления строительным производством

5 Список рекомендуемой литературы

3. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высш. шк., 2009. – 840 с.

4. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Добросвет, 2009. – 320 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ
РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**Математическое планирование и статистическая
обработка результатов эксперимента**

Направление подготовки: 08.03.01 Строительство

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа студентов – это планируемая учебная и внеаудиторная работа студентов, выполняемая по заданию преподавателя и под его методическим руководством, но без его непосредственного участия.

Целью самостоятельной работы студентов является приобретение новых знаний, систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТА ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА»

В результате изучения дисциплины «Вычислительные методы в строительстве и компьютерная графика» студенты должны:

знать: основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования

уметь: проводить теоретические и экспериментальные исследования с использованием современного оборудования и средств вычислительной техники; эффективные проектные решения, отвечающие требованиям перспективного развития отрасли, в том числе с использованием САПР;

владеть: методами использования математических моделей, элементов прикладного математического обеспечения САПР в решении проектно-конструкторских и технологических задач; методами расчёта зданий и сооружений.

Самостоятельная работа студентов подразумевает проработку лекционного материала с использованием рекомендуемой литературы, самостоятельное изучение необходимых нормативных материалов, готовность к выполнению практических работ в течение семестра, а также выполнение контрольной работы.

Практические занятия	Конспектирование рекомендуемых источников. Работа с конспектом лекций, подготовка ответов к контрольным вопросам, просмотр рекомендуемой литературы.
----------------------	--

Основной формой обучения студента является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих

элементов:

- изучение материала по методическим указаниям,
- решение задач и самопроверка.

Кроме того, студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения консультации. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе анализа самостоятельных работ. Однако студент должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе помощь преподавателя будет достаточно эффективной. Завершающим этапом изучения разделов курса

«Вычислительные методы в строительстве и компьютерная графика» является зачет с оценкой.

ЧТЕНИЕ УЧЕБНЫХ МЕТОДИЧЕСКИХ УКАЗАНИЙ

1. Изучая материал по учебным методическим указаниям, следует переходить к следующему вопросу только после правильного понимания предыдущего.
2. Особое внимание следует обращать на определение основных понятий, необходимо подробно разбирать примеры, которые поясняют определения, и уметь приводить аналогичные примеры самостоятельно.
3. При изучении материала по учебным методическим указаниям полезно вести конспект, в который рекомендуется выписывать определения, формулировки и т. п. На полях конспекта следует отмечать вопросы, выделенные студентом для получения консультации преподавателя.
4. Письменное оформление работы студента имеет исключительно важное значение. Записи в конспекте должны быть сделаны чисто, аккуратно и расположены в определенном порядке. Хорошее внешнее оформление конспекта по изученному материалу не только приучит к необходимому в работе порядку, но и позволит избежать многочисленных ошибок, которые происходят из-за небрежных, беспорядочных записей.
5. Выводы рекомендуется в конспекте подчеркивать или обводить рамкой, чтобы при перечитывании конспекта они выделялись и лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает в работе составление листа, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы дисциплины (опорные конспекты, интеллектуальные карты, информационные карты). Такой лист не только помогает запомнить формулы, но и может служить постоянным справочником для студента.

КОНСУЛЬТАЦИИ, ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАНЯТИЯ

Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении поставленных задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся (неясность терминов, сомнения в правильности ответов на вопросы для самопроверки и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него консультации.

С целью более полного усвоения материала проводятся дополнительные занятия.

СИСТЕМА ОЦЕНИВАНИЯ УРОВНЯ УСВОЕНИЯ ЗНАНИЙ, УМЕНИЙ И СФОРМИРОВАННОСТИ КОМПЕТЕНЦИЙ

Оценочные средства для текущего контроля направлены на проверку знаний и умений, являющихся основой формирования компетенции «владеть методами количественного анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования».

В процессе подготовки к занятиям по дисциплине и самостоятельной работе необходимо ориентироваться на следующие учебную литературу:

1. Ильин, В.П. Численные методы решения задач строительной механики : учебное пособие / В.П. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников. – М. : Изд-во АСВ, 2005. – 426 с. .
2. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD : учебное пособие / В.С. Карпиловский [и др.]. – М. : Изд-во АСВ, 2007. –592 с. .
3. Трушин, С.И. Строительная механика. Метод конечных элементов [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.И. Трушин. – М. :

НИЦ ИНФРА-М, 2016. – 305 с. .

Антонов В.И., Копелевич Ф.И. Элементарная математика для первокурсника. – СПб.: Лань, 2013. – 112 с.

2. Вержбицкий В.М. Вычислительная и линейная алгебра. – М.: Высш. шк., 2009. – 351 с.

3. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высш. шк., 2009. – 840 с.

4. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М.: Добросвет, 2009. – 320 с.

5. Горлач Б.А. Линейная алгебра: учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2012. – 480 с.

6. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – СПб.: Лань, 2007. – 664 с.

7. Информатика в строительстве (с основами численного моделирования) / А.Б. Золотов, П.А. Акимов, В.Н. Сидоров, М.Л. Мозгалева. – М.: Архитектура –С. 2010. – 336 с.

8. Полещук Н.Н. AutoCAD 2011. - СПб.: БХВ-Петербург, 2011. - 752 с.: ил. + CD-ROM.

9. Жарков Н.В., Прокди Р.Г., Финков М.В. AutoCAD 2014. Книга + DVD с библиотеками, шрифтами по ГОСТ, модулем СПДС от Autodesk, форматками, дополнениями и видеоуроками AutoCAD 2014. - СПб.: Наука и Техника, 2014. - 624 с.: ил. + DVD

10. Орлов А. AutoCAD 2014 (+CD с видеокурсом). - СПб.: Питер, 2014. - 384 с.:ил.

11.Вычислительные методы в строительстве и компьютерная графика: методические указания к самостоятельной работе / СКФУ, - Ставрополь: СКФУ, 2019

12. Вычислительные методы в строительстве и компьютерная графика: методические указания к контрольной работе / СКФУ, - Ставрополь: СКФУ, 2019