

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Якушев В. М., Демин М.С.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ

ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

**по дисциплине «ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ
ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ»**

для студентов специальности

21.05.02 Прикладная геология

Специализация «Геология месторождений нефти и газа»

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

1. Лабораторная работа 1. Спектральный анализ
2. Лабораторная работа 2. Линейные системы
3. Лабораторная работа 3. Фильтрация
4. Лабораторная работа 4. Вейвлет анализ

Рекомендуемая литература

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания к выполнению практических занятий по дисциплине «Теоретические основы обработки геофизической информации» составлены в соответствии с программой дисциплины для студентов специальности 21.05.02 Прикладная геология.

В методических указаниях приведены основные алгоритмы обработки геофизической информации и рассмотрена их практическая реализация.

Структурно каждая из работ в предлагаемых методических указаниях состоит из формулировки её цели и содержания, краткого теоретического обоснования, формулировки требований к аппаратуре и материалам, указаний по технике безопасности, методики и порядка выполнения работы, требований к содержанию отчета и его форме, вопросов для защиты работы и списка рекомендуемой литературы.

Целью лабораторных работ является углубление знаний студентов в области теории и практики, обработки геофизической информации.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- знать основные методы, способы и средства получения, хранения, переработки геофизической информации; возможности современных компьютеризированных систем (включая специализированное программное обеспечение) для управления технологиями геофизической и геологической разведки;
- уметь обосновывать, выбирать и применять различные методы обработки геофизических данных для решения конкретных задач в условиях конкретных геологических ситуаций;
- владеть навыками использования комплекса методов обработки геофизических данных при поисках и разведке месторождений полезных ископаемых, организации и проведения вычислительных работ, способами

интерпретации данных геофизических измерений и представлением результатов работы.

Лабораторная работа 1

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Цель и содержание

Цель— приобретение навыков спектрального анализа и синтеза периодических сигналов.

Содержание:

- изучение теоретического обоснования и примера спектрального анализа и синтеза периодического сигнала;
- выполнение индивидуального задания и оформление отчета; - защита отчета.

Теоретическое обоснование

Разложение периодических сигналов в ряд Фурье. Периодический сигнал $s(t)$ может быть разложен в ряд Фурье. При этом он представляется в виде суммы гармонических функций либо комплексных экспонент с частотами, образующими арифметическую прогрессию. Чтобы такое разложение существовало, фрагмент сигнала длительностью в один период должен удовлетворять условиям Дирихле:

- не должно быть разрывов второго рода (с уходящими в бесконечность ветвями функции);
- число разрывов первого рода (скачков) должно быть конечным;
- число экстремумов должно быть конечным (в качестве примера функции, которая на конечном интервале имеет бесконечное число экстремумов, можно привести $\sin(1/x)$ в окрестности нуля).

В зависимости от конкретной формы базисных функций различают три формы записи ряда Фурье: синусно-косинусная форма, вещественная форма и комплексная форма.

Синусно-косинусная форма ряда Фурье имеет следующий вид:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)] \quad (1.1)$$

где $\omega_1 = 2\pi/T$ – круговая частота первой гармоники, рад/с, соответствующая периоду повторения сигнала, равному T , с; $k\omega_1$ – круговая частота k -той

гармоники, рад/с; $a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(k\omega_1 t) dt$ – коэффициент k -той косинусной составляющей

спектра Фурье периодического сигнала; $b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin(k\omega_1 t) dt$ –

коэффициент k -ой синусной составляющей спектра Фурье периодического

сигнала; $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$ – постоянная составляющая

спектра Фурье периодического сигнала, представляющая собой среднее значение сигнала на периоде.

Если сигнал $s(t)$ является четной функцией, то все коэффициенты b_k будут равны нулю, и в формуле ряда Фурье будут присутствовать только «косинусные» слагаемые. Если сигнал $s(t)$ является нечетной функцией, равны нулю будут, наоборот, косинусные коэффициенты a_k , и в формуле останутся лишь «синусные» слагаемые.

Некоторое неудобство синусно-косинусной формы ряда Фурье состоит в том, что для каждого значения индекса суммирования k (то есть для каждой гармоники с частотой $k\omega_1$) в формуле (1.1) фигурируют два слагаемых синус и косинус. Поскольку

$$u(\omega t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) = C \cos(\omega t - \varphi),$$

Где $C = \sqrt{a^2 + b^2}$ – амплитуда гармонического сигнала,
 $\varphi = \arctg b/a$ – начальная фаза гармонического сигнала, то ряд (1.1) можно также представить в компактной форме:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k) \quad (1.2)$$

Формула (1.2) представляет вещественную форму записи ряда Фурье.

Если сигнал $s(t)$ является четной функцией, фазы φ_k могут принимать только значения 0 и π , а если $s(t)$ – функция нечетная, то возможные значения для фазы равны $\pm\pi/2$.

Комплексная форма представления ряда Фурье является наиболее общей и получается из вещественной формы представлением косинуса в виде полусуммы комплексных экспонент (такое представление вытекает из формулы Эйлера $e^{jx} = \cos x + j \sin x$):

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}).$$

Применив данное преобразование к вещественной форме ряда Фурье, получим суммы комплексных экспонент с положительными и отрицательными показателями:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k [\exp(jk\omega_0 t + j\varphi_k) + \exp(-jk\omega_0 t - j\varphi_k)]$$

Будем трактовать экспоненты со знаком «минус» в показателе как члены ряда с отрицательными номерами. В рамках этого же общего подхода постоянное слагаемое $a_0/2$ станет членом ряда с нулевым номером. В результате получится комплексная форма записи ряда Фурье:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega t}$$

Комплексные коэффициенты ряда C_k связаны с амплитудами A_k и фазами φ_k , фигурирующими в вещественной форме записи ряда Фурье (1.2), следующими соотношениями:

$$C_k = \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k}, \quad A_k = 2|C_k| \quad \text{и} \quad \varphi_k = \arg(C_k).$$

Несложно выглядят и формулы связи C_k с коэффициентами a_k и b_k синусно-косинусной формы ряда Фурье (1.1):

$$C_k = \frac{1}{2} (a_k - jb_k), \quad a_k = 2\operatorname{Re}(C_k) \quad \text{и} \quad b_k = -2\operatorname{Im}(C_k).$$

Отсюда сразу же следует и формула непосредственного расчета коэффициентов C_k ряда Фурье в комплексной форме:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (1.5)$$

Если $s(t)$ является четной функцией, коэффициенты ряда C_k будут чисто вещественными, а если $s(t)$ – функция нечетная, коэффициенты ряда окажутся чисто мнимыми.

Совокупность амплитуд гармоник ряда Фурье часто называют амплитудным спектром периодического сигнала (спектр), а совокупность их фаз – фазовым спектром периодического сигнала (таблица 1.1).

Если анализируемый сигнал $s(t)$ является вещественным, то его амплитудный и фазовый спектры обладают соответственно четной и нечетной симметрией:

$$A_{-k} = A_k^*, \quad \varphi_{-k} = -\varphi_k,$$

а коэффициенты комплексного ряда Фурье – комплексно-сопряженной симметрией: $C_{-k} = C_k^*$

Таблица 1.1 – Характеристики периодических сигналов.

Термин	Определение	Математическая формула и обозначение величины
Период периодического сигнала (период)	Параметр, равный наименьшему интервалу времени, через который повторяются мгновенные значения периодического сигнала	T
Частота периодического сигнала (частота)	Параметр, представляющий собой величину, обратную периоду периодического сигнала	$F = \frac{1}{T}$
Комплексный спектр периодического сигнала	Комплексная функция дискретного аргумента, равного целому числу значений частоты периодического сигнала, представляющая собой значения коэффициентов комплексного ряда Фурье для периодического сигнала	Формула (1.5), где k –любое целое число
Амплитудный спектр периодического сигнала (спектр)	Функция дискретного аргумента, представляющая собой модуль комплексного спектра периодического сигнала	$ C_k = \sqrt{\operatorname{Re}^2\{C_k\} + \operatorname{Im}^2\{C_k\}}$
Фазовый спектр периодического сигнала	Функция дискретного аргумента, представляющая собой аргумент комплексного спектра периодического сигнала	$\varphi_k = \arg C_k = \arctg \frac{\operatorname{Im}\{C_k\}}{\operatorname{Re}\{C_k\}}$

		ReC [*] k
Гармоника	Гармонический сигнал с амплитудой и начальной фазой, равными соответственно значениям амплитудного и фазового спектра периодического сигнала при некотором значении аргумента	$s(t) = A \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$

Пример спектрального анализа и синтеза периодического сигнала в базисе Фурье. Рассмотрим пример разложения в ряд Фурье периодической последовательности прямоугольных импульсов с высотой U , длительностью τ и периодом T (рисунок 1.2).

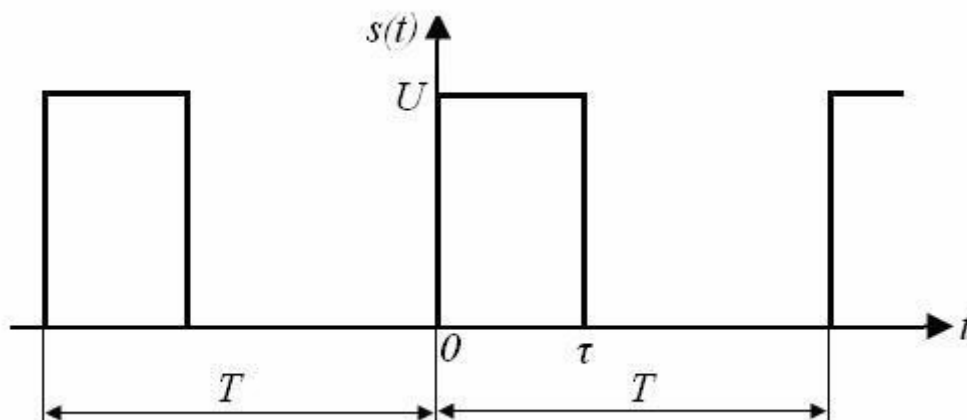


Рисунок 1.2 – Периодическая последовательность прямоугольных импульсов.

Для решения задачи спектрального анализа воспользуемся системой математического анализа MathCAD. В приводимом ниже документе MathCAD приняты следующие обозначения:

а) $s(t)$ – функция, описывающая зависимость отдельного импульса, составляющего периодическую последовательность импульсов, от текущего времени в пределах одного периода T ;

б) $x(t)$ – периодическая функция, восстановленная (спектральный синтез) по результатам спектрального анализа (разложению в ряд Фурье) функции $s(t)$;

в) T – период;

г) τ – длительность импульсов;

д) U – высота импульса;

е) N – число рассчитываемых гармоник спектра периодической последовательности импульсов (задача спектрального анализа);

ж) A_n, B_n – коэффициент n -ой косинусной и синусной составляющей спектра Фурье периодического сигнала (формула(1.1));

з) t_m – момент времени, когда восстановленный сигнал $x(t)$ принимает максимальное значение;

и) Δ – максимальное значение абсолютной ошибки восстановления сигнала, обусловленное наличием эффекта Гиббса;

к) Δ_1 – максимальное значение относительной ошибки восстановления сигнала, обусловленное наличием эффекта Гиббса;

Программа MathCAD по спектральному анализу и синтезу периодической последовательности прямоугольных импульсов представлена на рисунке 1.2, а результаты спектрального анализа и синтеза последовательности прямоугольных импульсов – на рисунках 1.3 – 1.6.

Разложение функции в ряд Фурье и её гармонический синтез

Программа вычисления коэффициентов ряда Фурье (Fourier series) с применением их интегрального представления

$$\text{FourierSeries}(s, N, T) := \left. \begin{array}{l} R^{(0)} \leftarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) dt \\ 0 \end{pmatrix} \\ \text{for } n \in 1..N \\ R^{(n)} \leftarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot t}{T}\right) dt \\ \frac{2}{T} \cdot \int_0^T s(t) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot t}{T}\right) dt \end{pmatrix} \\ R^T \end{array} \right|$$

Рисунок 1.2 – Программа спектрального анализа и синтеза периодического сигнала в базисе Фурье (начало документа MathCAD)

Дано: $U := 1$ - высота импульса, В;

$\tau := \frac{1}{5}$ - длительность импульса, с; Параметры сигнала

$T := 1$ - период колебаний.

$s(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{if } \tau \leq t \leq T \end{cases}$ Математическая модель сигнала в пределах одного периода

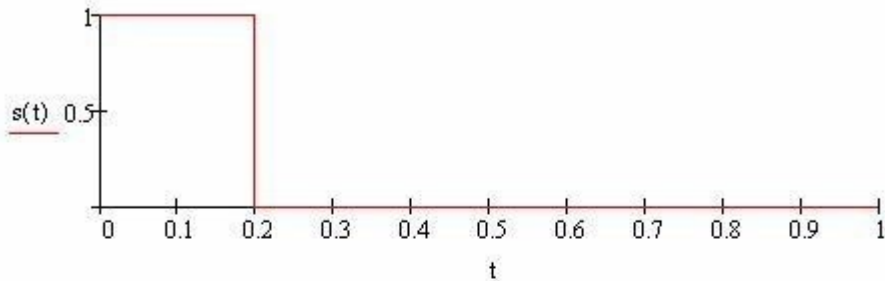


Рисунок 1 - Временная модель сигнала в пределах одного периода

Требуется: 1 Требуется выполнить спектральный анализ и синтез периодического сигнала в базисе Фурье.
2. Исследовать эффект Гиббса.

Решение: Число гармоник ряда: $N := 10$

$\text{result} := \text{FourierSeries}(s, N, T)$ $A := \text{result}^{(0)}$ $B := \text{result}^{(1)}$

$A =$

	0
0	0.4
1	0.303
2	0.094
3	-0.062
4	-0.076
5	$-1.411 \cdot 10^{-7}$
6	0.05
7	0.027
8	-0.023
9	-0.034
10	$-5.581 \cdot 10^{-7}$

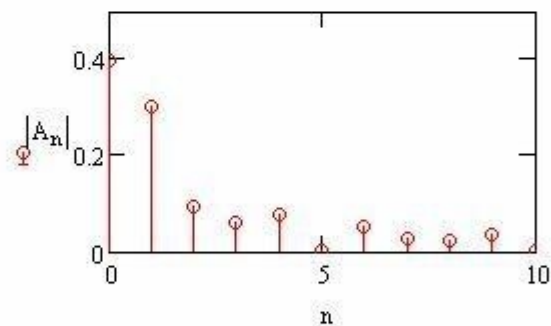


Рисунок 2 - Амплитуды косинусных составляющих спектра сигнала

$B =$

	0
0	0
1	0.22
2	0.288
3	0.192
4	0.055
5	$-1.128 \cdot 10^{-6}$
6	0.037
7	0.082
8	0.072
9	0.024
10	$-2.257 \cdot 10^{-6}$

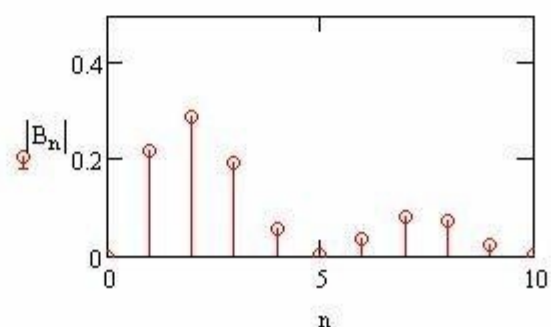


Рисунок 3 - Амплитуды синусных составляющих спектра сигнала

Рисунок 1.3 – Программа спектрального анализа и синтеза периодического сигнала в базисе Фурье (продолжение документа MathCAD)

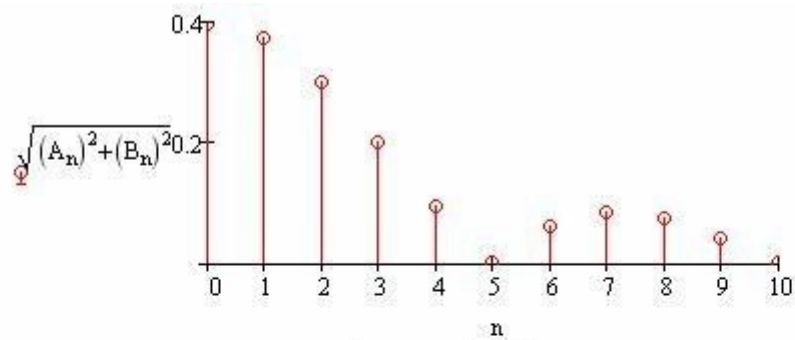


Рисунок 4 - АЧС сигнала

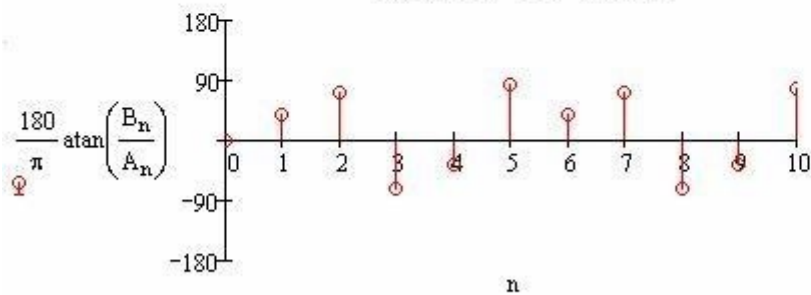


Рисунок 5 - ФЧС сигнала

Формула синтеза сигнала по ряду Фурье

$$x(t) := \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(A_n \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot t}{T}\right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot n \cdot t}{T}\right) \right)$$

$$t := 0, \frac{T}{50} \dots 2 \cdot T$$

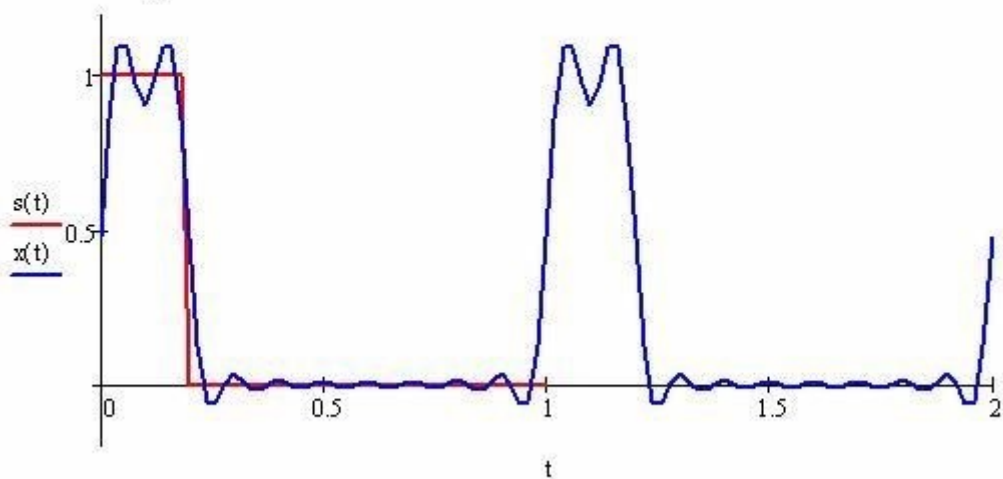


Рисунок 6 - Исходный и восстановленный сигнал при N = 10

Рисунок 1.4 – Программа спектрального анализа и синтеза периодического сигнала в базисе Фурье (продолжение документа MathCAD)

Как видно из рисунка 1.4, последовательность прямоугольных импульсов плохо подходит для представления рядом Фурье – она содержит скачки, а сумма любого числа гармонических составляющих с любыми амплитудами всегда будет непрерывной (и более того – бесконечно дифференцируемой во всех точках) функцией. Поэтому поведение ряда Фурье в окрестностях разрывов представляет особый интерес. На временной диаграмме, представленной на рисунке 1.4, хорошо видно, что в окрестности точки разрыва суммирование ряда Фурье дает наклонный участок, причем крутизна наклона возрастает с ростом числа суммируемых гармоник. В самой точке разрыва ряд Фурье сходится к полусумме правого и левого пределов:

$$x(t_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} s(t) + \lim_{t \rightarrow t_0 + 0} s(t) \right).$$

Здесь $s(t)$ – исходный сигнал, $x(t)$ – сумма ряда Фурье для него.

На примыкающих к разрыву участках сумма ряда Фурье дает заметные пульсации. Это явление, присущее рядам Фурье для любых сигналов с разрывами первого рода (скачками), называется эффектом Гиббса. В ряде работ, например [1 – 2], показано, что амплитуда первого (самого большого) выброса составляет примерно 9 % от величины скачка. Убедимся в этом самостоятельно (рисунок 1.5).

Исследование эффекта Гиббса

$$\begin{aligned} t &:= 0 \quad t_m := \text{Maximize}(x, t) \quad t_m = 0.05 \quad x(t_m) = 1.119 \quad s(t_m) = 1 \\ \Delta &:= |s(t_m) - x(t_m)| \quad \Delta = 0.119 \quad \text{- абсолютная ошибка} \\ \Delta_1 &:= \frac{|s(t_m) - x(t_m)|}{|s(t_m)|} \cdot 100 \quad \Delta_1 = 11.917 \quad \text{- относительная ошибка в \%} \end{aligned}$$

Рисунок 1.5 – Пример спектрального анализа и синтеза периодического сигнала в базе Фурье (окончание документа MathCAD)

Как видно из рисунка 1.5, вследствие эффекта Гиббса амплитуда первого (самого большого) выброса составляет примерно 12% от величины скачка. Исследуем, как повлияет на проявление эффекта Гиббса, изменение количества гармоник спектра сигнала. Для этого увеличим количество гармоник, принимающих участие в восстановлении сигнала в два раза ($N = 20$ на рисунке 1.4). Результат восстановления сигнала и исследования эффекта Гиббса показаны на рисунке 1.6.

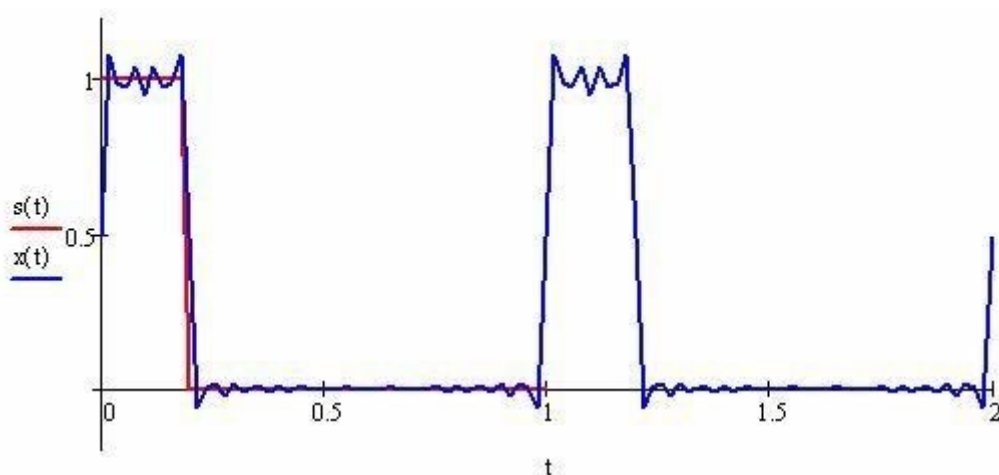


Рисунок 6 - Исходный и восстановленный сигнал при $N = 20$

Исследование эффекта Гиббса

$$\begin{aligned}
 t &:= 0 & t_m &:= \text{Maximize}(x, t) & t_m &= 0.075 & x(t_m) &= 1.051 & s(t_m) &= 1 \\
 \Delta &:= |s(t_m) - x(t_m)| & \Delta &= 0.051 & & \text{- абсолютная ошибка} \\
 \Delta_1 &:= \frac{|s(t_m) - x(t_m)|}{|s(t_m)|} \cdot 100 & \Delta_1 &= 5.147 & & \text{- относительная ошибка в \%}
 \end{aligned}$$

Рисунок 1.6 –Проявление эффекта Гиббса при числе гармоник $N = 20$

Анализ графика и данных, представленных на рисунке 1.6, свидетельствует о том, что при увеличении количество гармоник в два раза (с 10 до 20) количество пульсаций восстановленного сигнала тоже удвоилось, а амплитуда первого

(самого большого) выброса составляет примерно 5 % от величины скачка, то есть уменьшилась примерно в 2,4 раза. Таким образом, исследованный детерминированный, периодический сигнал (периодическая последовательность прямоугольных импульсов на рисунке 1.1) может быть задан функцией $s(t)$ (временной подход) или представлен в виде линейчатого спектра амплитуд (АЧС) и фаз (ФЧС) гармоник (рисунок 1.4) (спектральный подход).

Аппаратура и программное обеспечение.

Для выполнения поставленных задач необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 МВ Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (число цветов 256). Также необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 10 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении работы **запрещается:**

- самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;
- нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т. д.;
- принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

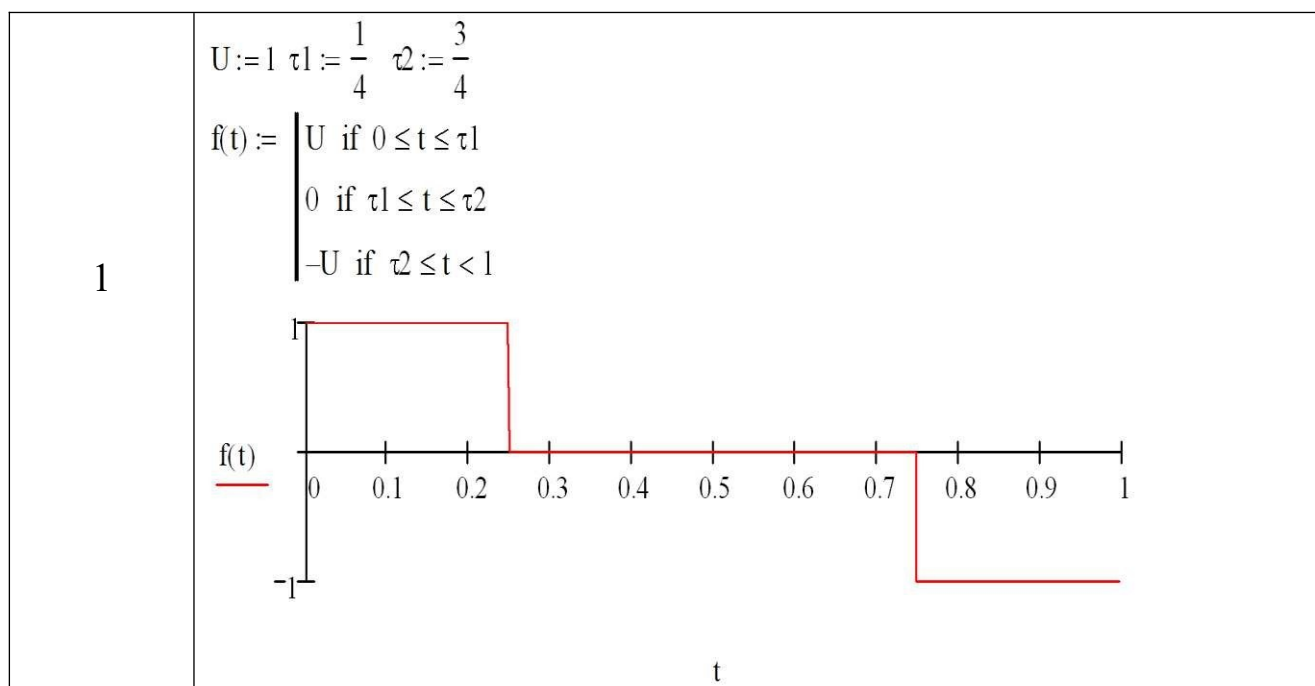
Методика и порядок выполнения работы.

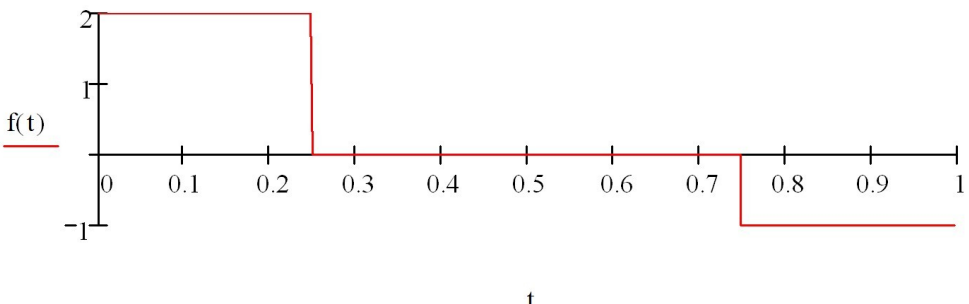
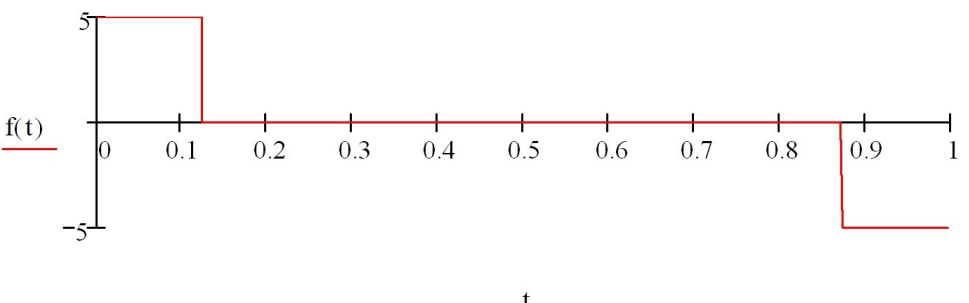
1. Запустите систему MathCAD.
2. Реализуйте программу спектрального анализа и синтеза периодических сигналов (рисунок 1.2 – 1.5) в соответствии с вариантом индивидуального задания (таблица 1.2, 1.3).
3. Исследуйте изменение количества гармоник на проявление эффекта Гиббса при восстановлении периодических сигнала рядом Фурье.
4. Сохраните результаты спектрального анализа и синтеза заданных периодических сигналов.
5. Сформируйте отчет по работе.
6. Защитите работу.

Варианты заданий

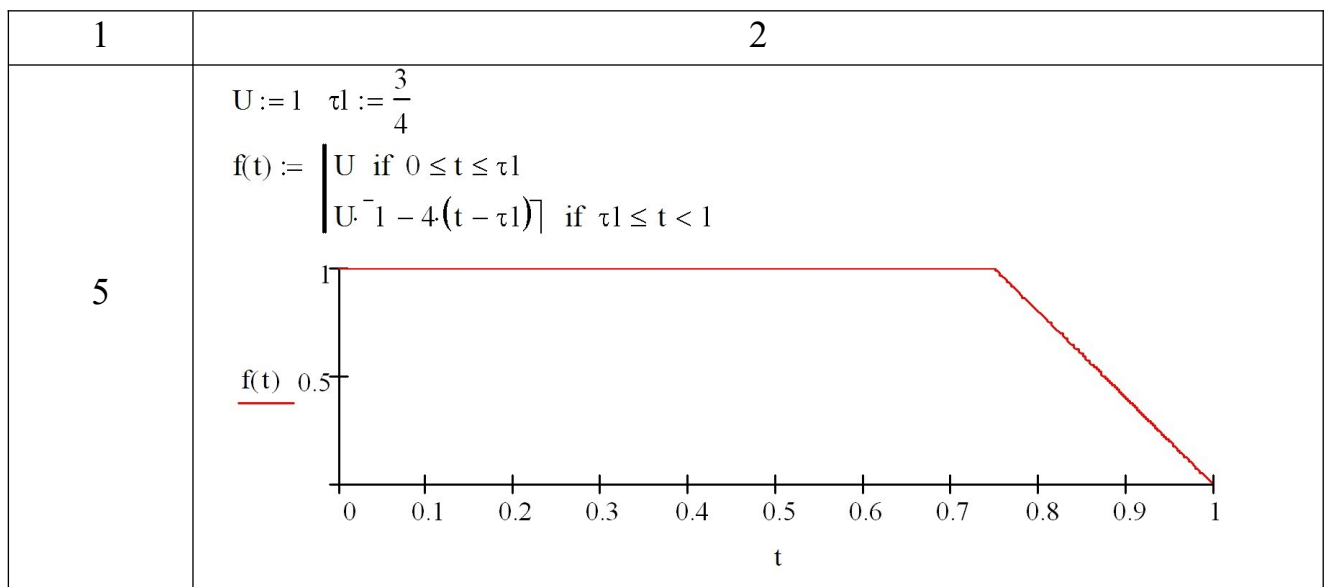
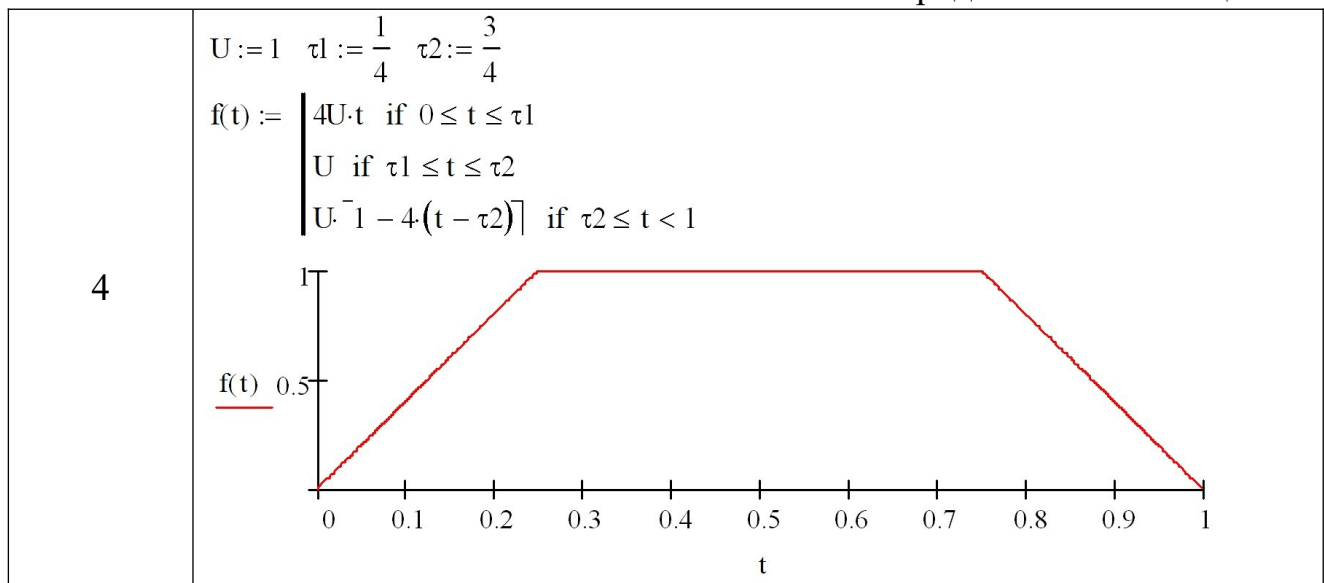
Таблица 1.2 – Варианты исследуемых сигналов

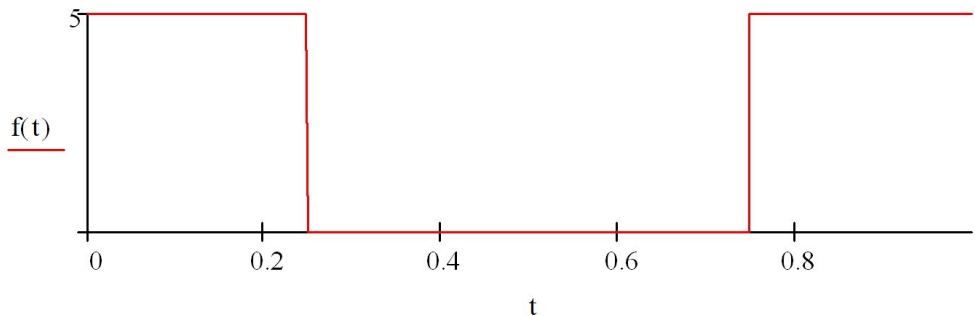
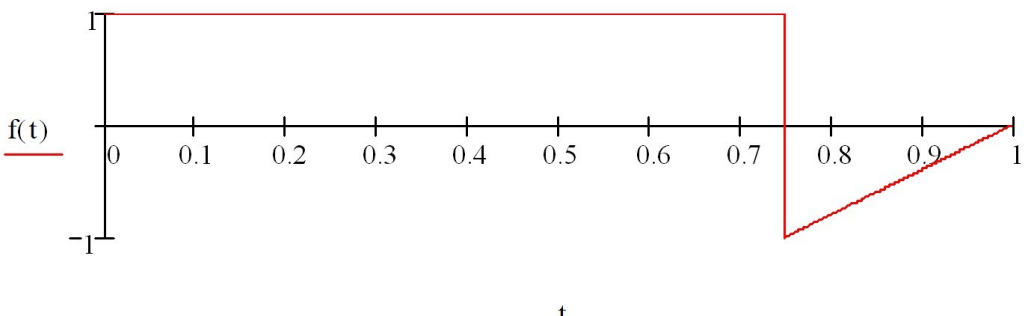
Код сигнала	Параметры, аналитическое определение и временная диаграмма сигнал в пределах одного периода
1	2



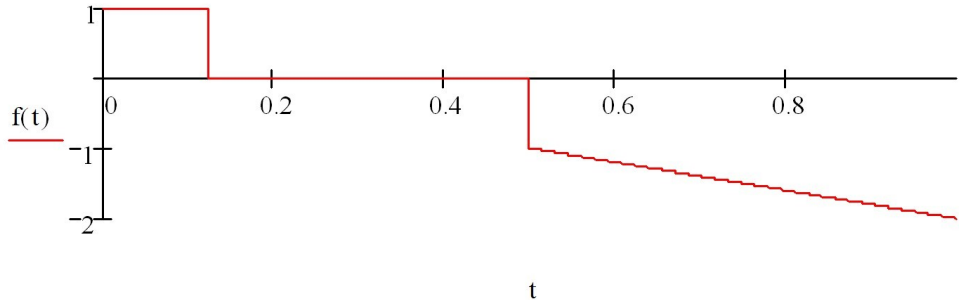
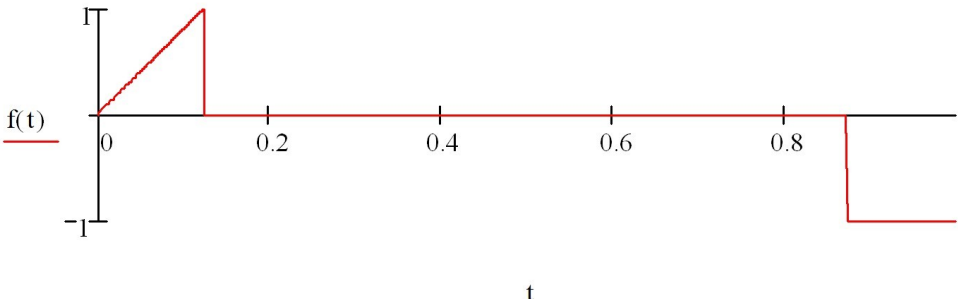
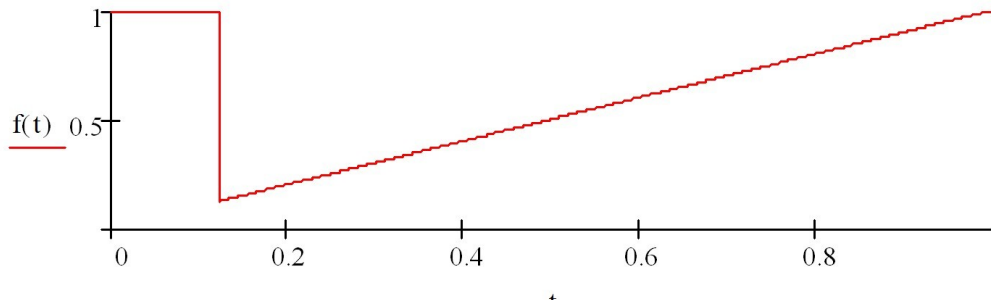
1	2
2	$U := 1 \quad \tau_1 := \frac{1}{4} \quad \tau_2 := \frac{3}{4}$ $f(t) := \begin{cases} 2U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & \text{if } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ -U & \text{if } \tau_2 \leq t < 1 \end{cases}$ 
3	$U := 5 \quad \tau_1 := \frac{1}{8} \quad \tau_2 := \frac{7}{8}$ $f(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & \text{if } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ -U & \text{if } \tau_2 \leq t < 1 \end{cases}$ 

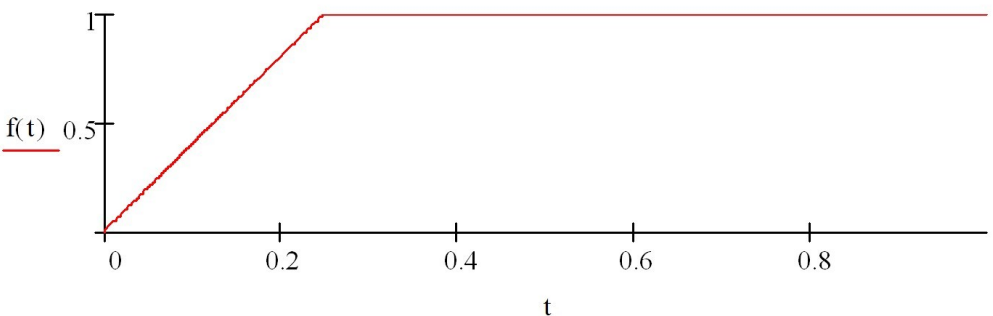
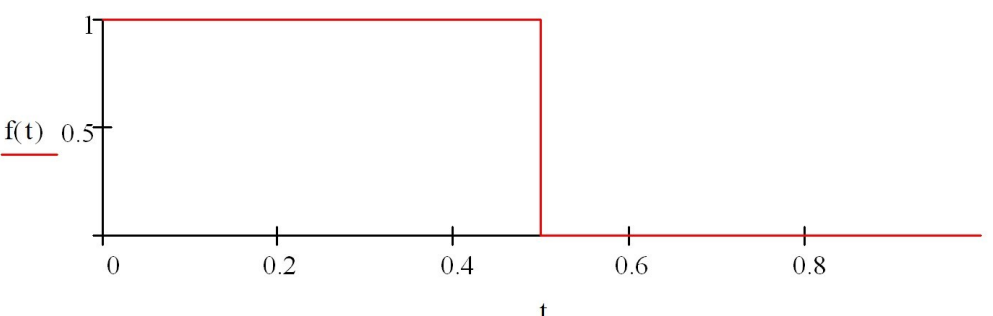
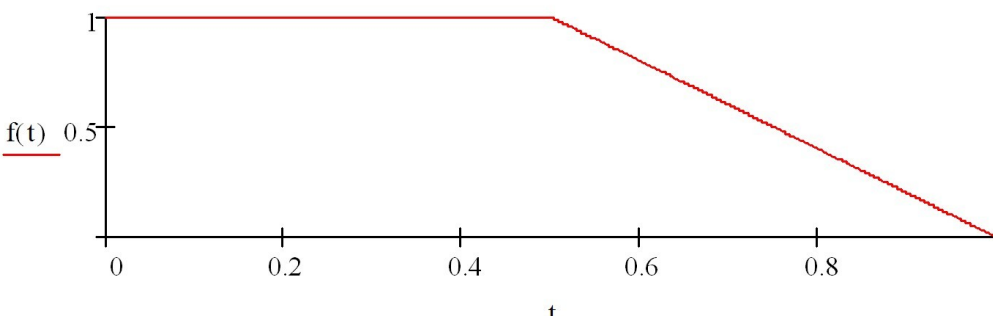
Продолжение таблицы 1.2



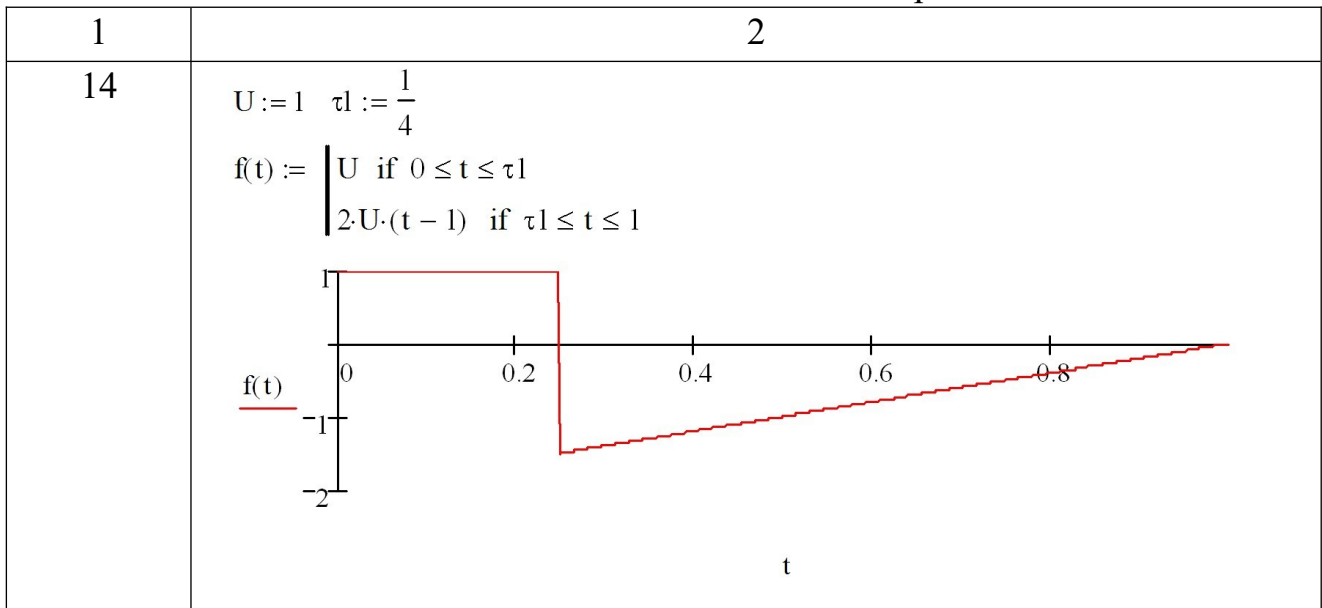
6	$U := 5 \quad \tau_1 := \frac{1}{4} \quad \tau_2 := \frac{3}{4}$ $f(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & \text{if } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ U & \text{if } \tau_2 \leq t \leq 1 \end{cases}$ 
7	$U := 1 \quad \tau_1 := \frac{3}{4}$ $f(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ -U \cdot [1 - 4 \cdot (t - \tau_1)] & \text{if } \tau_1 \leq t < 1 \end{cases}$ 

1	2
---	---

8	$U := 5 \quad \tau_1 := \frac{1}{8} \quad \tau_2 := \frac{1}{2}$ $f(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & \text{if } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ -U \cdot \frac{t}{\tau_2} & \text{if } \tau_2 \leq t \leq 1 \end{cases}$ 
9	$U := 5 \quad \tau_1 := \frac{1}{8} \quad \tau_2 := \frac{7}{8}$ $f(t) := \begin{cases} 8U \cdot t & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & \text{if } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ -U & \text{if } \tau_2 \leq t \leq 1 \end{cases}$ 
10	$U := 1 \quad \tau_1 := \frac{1}{8} \quad \tau_2 := \frac{7}{8}$ $f(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ U \cdot t & \text{if } \tau_1 \leq t \leq 1 \end{cases}$ 

1	2
11	$U := 1 \quad \tau_1 := \frac{1}{4}$ $f(t) := \begin{cases} 2U \cdot t & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ U & \text{if } \tau_1 \leq t \leq 1 \end{cases}$ 
12	$U := 1 \quad \tau_1 := \frac{1}{2}$ $f(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ 0 & \text{if } \tau_1 \leq t \leq 1 \end{cases}$ 
13	$U := 1 \quad \tau_1 := \frac{1}{2}$ $f(t) := \begin{cases} U & \text{if } 0 \leq t \leq \tau_1 \\ 2 \cdot U \cdot (1 - t) & \text{if } \tau_1 \leq t \leq 1 \end{cases}$ 

Продолжение таблицы 1.2



Примечание – В таблице 1.2 параметр U измеряется в вольтах, а временные интервалы τ_1 и τ_2 – в секундах.

Таблица 1.3 – Варианты индивидуальных заданий

Вариант	Код сигнала	
1	1	9
2	2	10
3	3	11
4	4	12
5	5	13
6	6	14
7	7	9
8	8	10
9	1	11
10	2	12

Продолжение таблицы 1.2

11	3	13
12	4	14
13	5	9
14	6	10

Примечание – Исследование эффекта Гиббса выполнить при трех значениях числа гармоник, например $N = 10, 15$ и 20 .

Содержание отчета и его форма.

Отчет по работе оформляется в виде текстового документа и должен включать:

- а) название работы;
- б) цель и программу работы;
- в) формулировку индивидуального задания и результат его выполнения;
- г) краткие выводы по результатам выполнения работы.

Вопросы для защиты работы

1. Как определить постоянную составляющую спектра Фурье периодического сигнала?
2. Как определить коэффициент k -ой косинусной (синусной) составляющей спектра Фурье периодического сигнала?
3. Что такое комплексный спектр периодического сигнала?
4. Что такое амплитудный спектр периодического сигнала?
5. Что такое фазовый спектр периодического сигнала?
6. Что такое гармоника?
7. Каковы особенности спектров периодических сигналов?
8. Как определить период периодического сигнала по его спектру?
9. Какие характеристики формы периодических сигналов вы знаете?
10. Что такое коэффициент гармоник?
11. Какова методика выполнения индивидуального задания?
12. Какие выводы можно сделать по результатам выполнения индивидуального задания?

Лабораторная работа 2

Линейные системы

Цель и содержание

Цель – приобретение навыков спектрального анализа и синтеза импульсных сигналов.

Содержание работы:

- изучение теоретического обоснования и примера спектрального анализа и синтеза импульсного сигнала;
- выполнение индивидуального задания и оформление отчета; - защита отчета по работе.

Теоретическое обоснование

Спектральный анализ и синтез одиночных импульсных сигналов

Анализ одиночного импульса позволяет определить спектр разнообразных сигналов. Перейти от периодической функции к одиночному импульсу можно путем увеличения периода T . При этом промежутки между отдельными спектральными составляющими $\Delta f = 1/T$ будут уменьшаться, что позволяет определять спектральные составляющие с помощью выражения: $c_k = S(\omega_k) \Delta f = S(\omega_k) / T$,
где $S(\omega_k)$ называется спектральной плотностью, размерность которой В/Гц.

Подставив последнее выражение в формулу (1.4), преобразуем ряд Фурье в комплексной форме к виду:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(\omega_k) \exp(jk\omega_1 t) \Delta$$

В пределе при периоде $T \rightarrow \infty$ и частоте $\omega_1 = 2\pi/T \rightarrow 0$ дискретные значения частоты $\omega_k = k\omega_1$ заменяются непрерывной величиной ω , а сумма ряда Фурье, записанного в комплексной форме, – на интеграл:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.1)$$

Входящая в (2.1) функция $S(\omega)$ есть спектральная функция импульса:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.2)$$

Примечание – В отечественной технической литературе функцию $S(\omega)$ часто называют спектральной плотностью импульсного сигнала.

Интегралы (2.2) и (2.1) называются соответственно прямым и обратным интегральным преобразованием Фурье.

Чтобы интегральное преобразование Фурье было применимо, сигнал $s(t)$ должен удовлетворять следующим требованиям:

-должны выполняться условия Дирихле (см. теоретическое обоснование работы 1);

-сигнал должен быть абсолютно интегрируемым. Это означает, что интеграл от его модуля на интервале $-\infty < t < \infty$ должен быть конечной величиной:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty.$$

Примечание – Привлечение математического аппарата обобщенных функций предоставляет возможность выполнения Фурье-анализа и для некоторых сигналов, не удовлетворяющих перечисленным требованиям[3].

Если использовать не круговую частоту ω , а циклическую $f=2\pi/\omega$, формулы прямого и обратного преобразования Фурье становятся симметричными, отличаясь лишь знаком в показателе экспоненты:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad (2.3)$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df. \quad (2.4)$$

Поясним физический смысл приведенных выражений прямого и обратного преобразований Фурье. Согласно (2.4) одиночный импульс произвольной формы, описываемый вещественной функцией $s(t)$ представляется бесконечной суммой гармонических колебаний. Сами эти колебания бесконечно малы по амплитуде и отличаются по частоте на бесконечно малую величину. Это отличие по частоте составляет df , а амплитуда составляющей $S(f)df$, где $S(f)$ – есть спектральная плотность размерностью В/Гц. Поскольку $S(f)$ – есть непрерывная функция, то спектр одиночного импульса является сплошным.

Если анализируемый сигнал $s(t)$ – вещественная функция, то соответствующая спектральная функция импульса $S(\omega)$ является «сопряженносимметричной» относительно нулевой частоты. Это означает, что значения спектральной функции импульса $S(\omega)$ на частотах ω и $-\omega$ являются комплексно-сопряженными по отношению друг другу: $S(-j\omega) = S^*(j\omega)$.

Если $s(t)$ – четная функция, то, как и в случае ряда Фурье, спектр будет чисто вещественным и, следовательно, будет являться четной функцией. Если,

напротив, $s(t)$ – функция нечетная, то спектральная функция импульса $S(\omega)$ будет чисто мнимой и нечетной.

Модуль спектральной функции импульса часто называют амплитудным спектром, а ее аргумент – фазовым спектром: □

$$|S(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 S(j\omega) + \operatorname{Im}^2 S(j\omega)}, \quad (2.5)$$

$$\arg(S(j\omega)) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(S(j\omega))}{\operatorname{Re}(S(j\omega))}. \quad (2.6)$$

$$\operatorname{Re}(S(j\omega))$$

Легко показать, что для вещественного сигнала амплитудный спектр является четной, а фазовый – нечетной функцией частоты: $S(-j\omega) = S^*(j\omega)$, $\arg(S(-j\omega)) = -\arg(S(j\omega))$.

Пример расчета спектральной функции импульсного сигнала и соответствующие графики будут приведены далее.

Итак, прямое интегральное преобразование Фурье (2.2) и (2.3) ставит в соответствие сигналу, заданному во времени, его спектральную функцию. При этом осуществляется переход из временной области в частотную область. Прямое и обратное интегральное преобразование Фурье являются взаимнооднозначными, поэтому представление сигнала в частотной области (спектральная функция импульса) содержит ровно столько же информации, сколько и исходный импульсный сигнал, заданный во временной области.

При частоте $f=0$ из формулы (2.3) следует результат:

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt,$$

позволяющий по «площади импульса» быстро определить центральное значение амплитуды спектральной плотности импульса.

Определим энергию одиночного импульса, исходя из спектрального и временного представлений сигнала. При активной нагрузке в 1 Ом соответственно запишем:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df, \quad (2.7)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt. \quad (2.8)$$

Значения энергии, полученные по обоим методам – спектральному и временному – должны быть равны: $W_1 = W_2$. Однако поскольку полоса пропускания физических устройств обработки сигналов всегда ограничена, то в первом случае следует записать:

$$W = \int_{f_v}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

и соответственно получить $W_1 < W_2$, где f_v – верхняя частота полосы пропускания физического устройства обработки сигналов.

Введем параметр $K_W = W_1/W_2$, который назовем коэффициентом уменьшения энергии импульса по причине ограниченной полосы пропускания физического устройства обработки сигналов. При этом можно решить и обратную задачу: исходя из допустимой величины коэффициента K_W , следует определить минимально возможное значение частоты f_v . В приводимой ниже программе MathCAD принято значение $K_W = 0,95$, для которого определено значение f_v . Очевидно, что в зависимости от формы импульса при одном и том же значении K_W могут быть получены различные величины f_v .

Рассмотрим пример определения спектральной плотности одиночного прямоугольного импульса (рисунок 2.1).

Рисунок 2.1 – Одиночный прямоугольный импульс

В основе приводимой ниже программы MathCAD (рисунок 2.2 – 2.4) лежат выражения (2.3) – (2.6). В программе используются следующие допущения и условные обозначения:

а) длительность одиночного импульса $s(t)$ равна τ , вне импульса функция $s(t) = 0$. Поэтому бесконечные пределы интегрирования в формулах (2.3) и (2.8) заменяются конечными величинами. Размерность величин при расчете следующая:

- при значении t и временного интервала τ в секундах – частота f измеряется в Гц;
- при значении t и временного интервала τ в миллисекундах – f измеряется в кГц;
- при значении t и временного интервала τ в микросекундах – f измеряется в МГц;

б) коэффициент уменьшения энергии импульса по причине ограниченной полосы пропускания K_W обозначается как KW, верхняя частота полосы пропускания f_v , – как fv;

в) в программе сначала представлены исходные параметры и функция $s(t)$. Затем согласно (2.3), (2.5) и (2.6) рассчитываются зависимости $S(f)$, $|S(f)|$ и $\arg S(f)$. Далее строится график спектральной функции импульса $S(f)$, амплитудного $S_{mod}(f) = |S(f)|$ и фазового $\Theta(f) = \arg S(f)$ спектров импульса. Исходя из выбранного значения fv, рассчитывается коэффициент KW.

Программа и результаты спектрального анализа одиночного импульса прямоугольной формы (рисунок 2.1) приведены на рисунках 2.2 – 2.4.

Программа спектрального анализа и синтеза прямоугольного импульса

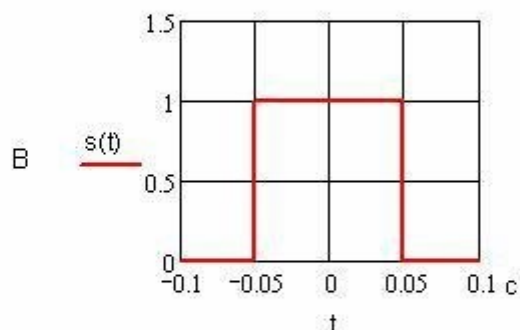
Дано: $AM := 1 \text{ В}$ $\tau := 0.1 \text{ с}$

Решение:

Шаг 1. Задаем импульсный сигнал $s(t)$.

$$s(t) := \begin{cases} AM & \text{if } 0 \leq |t| \leq 0.5 \cdot \tau \\ 0 & \text{if } |t| \geq 0.5 \cdot \tau \end{cases}$$

Шаг 2. Строим временную диаграмму сигнала $s(t)$.



Шаг 3. Применяем прямое интегральное преобразование Фурье к сигналу $s(t)$.

$j := \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

$$S(f) := \int_{-0.5 \cdot \tau}^{0.5 \cdot \tau} s(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt \quad \text{- спектральная функция импульса, В/Гц.}$$

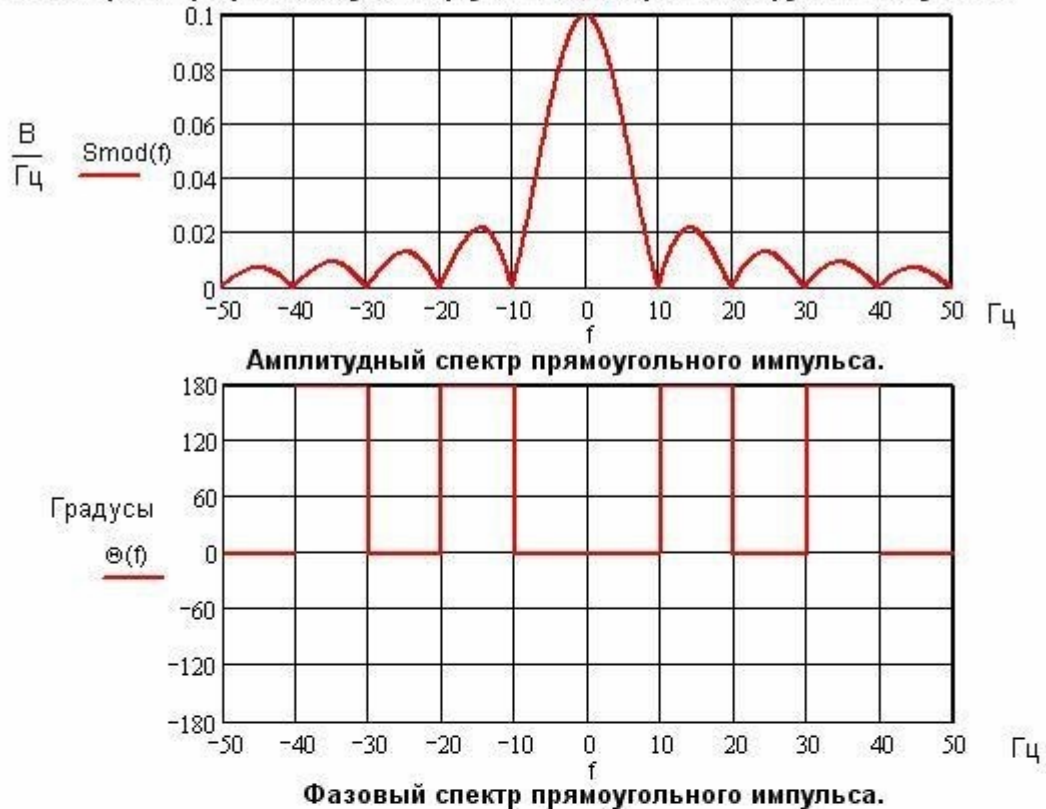
Шаг 4. Находим модуль и аргумент спектральной функции импульса.

$S_{\text{mod}}(f) := |S(f)|$ - модуль спектральной функции импульса, В/Гц.

$\Theta(f) := \frac{180}{\pi} \arg(S(f))$ - аргумент спектральной функции импульса, градусы.

Рисунок 2.2 – Начало программы спектрального анализа и синтеза прямоугольного импульса

Шаг 5. Строим графики модуля и аргумента спектральной функции импульса.



Шаг 6. Определяем верхнюю частоты полосы пропускания f_v исходя из требования, что коэффициент уменьшения энергии импульса, по причине ограниченной полосы пропускания, должен удовлетворять условию $KW=0,95$.

Шаг 6.1. Задаемся начальным значением f_v в Гц

$$f_v := 20$$

Шаг 6.2. Определим энергию одиночного импульса, исходя из спектрального и временного представлений сигнала:

$$W1 := \int_{-f_v}^{f_v} (|S(f)|)^2 df \quad W1 = 0.095 \quad W2 := \int_{-0.5 \cdot \tau}^{0.5 \cdot \tau} s(t)^2 dt \quad W2 = 0.1$$

Шаг 6.3. Находим коэффициент уменьшения энергии импульса по причине ограниченной полосы пропускания ($f_v = 20$ Гц):

$$KW := \frac{W1}{W2} \quad KW = 0.95$$

Шаг 6.4. Убеждаемся в том, что коэффициент уменьшения энергии импульса по причине ограниченной полосы пропускания не менее требуемого значения $KW=0,95$.

Ответ: $f_v = 20$ Гц

Примечание - Если найденное значение параметра KW окажется меньше требуемого ($KW=0,95$), то необходимо увеличит верхнюю частоту полосы пропускания f_v и повторить шаги с 6.1 по 6.4.

Рисунок 2.3 – Продолжение программы спектрального анализа и синтеза прямоугольного импульса

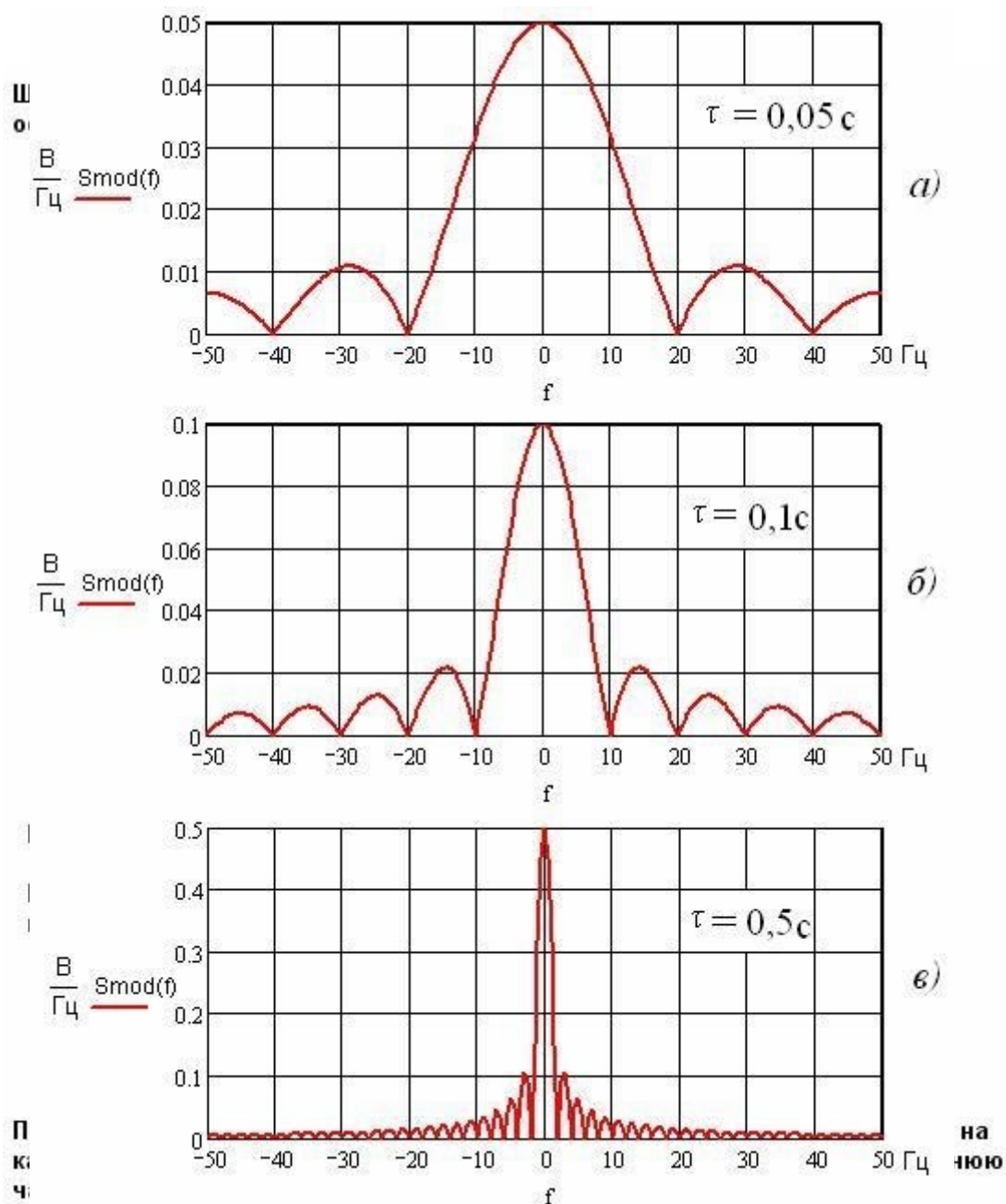


Рисунок 2.4 – Окончание программы спектрального анализа и синтеза прямоугольного импульса.

Графики модуля спектральной функции импульса, рассчитанные по программе (рисунок 2.2 – 2.4) при условии, что длительность прямоугольного импульса измеряется в секундах и равна $\tau=0,05 \text{ c}$, $0,1 \text{ c}$ и $0,5 \text{ c}$, построены на рисунке 2.5.

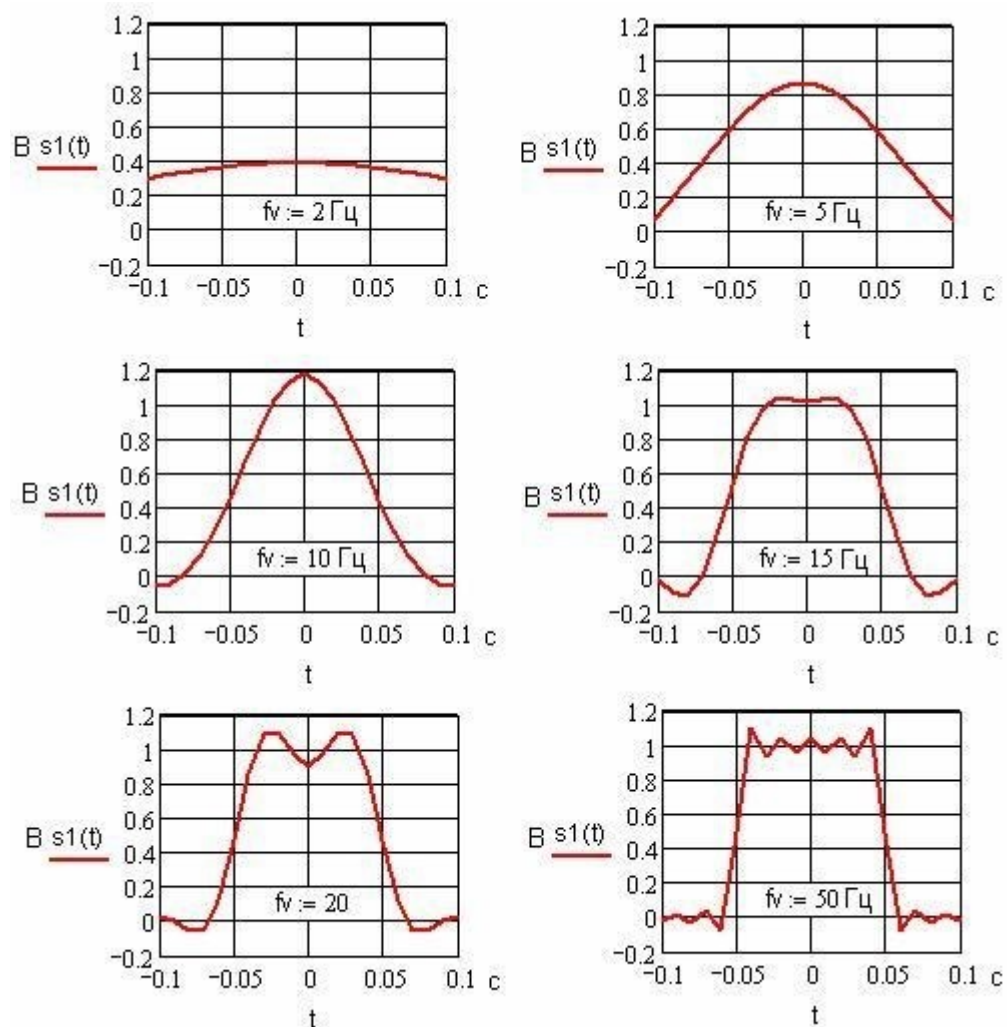


Рисунок 2.5 – Графики модуля спектральной функции прямоугольного импульса.

Временные диаграммы, иллюстрирующие результаты спектрального синтеза прямоугольного импульса программе (рисунок 2.2 – 2.4) при

длительности импульса $\tau = 0,1$ с и разных значениях верхней частоты укороченного спектра $f_v = 2, 5, 10, 20$ и 50 Гц, приведены на рисунке 2.6.

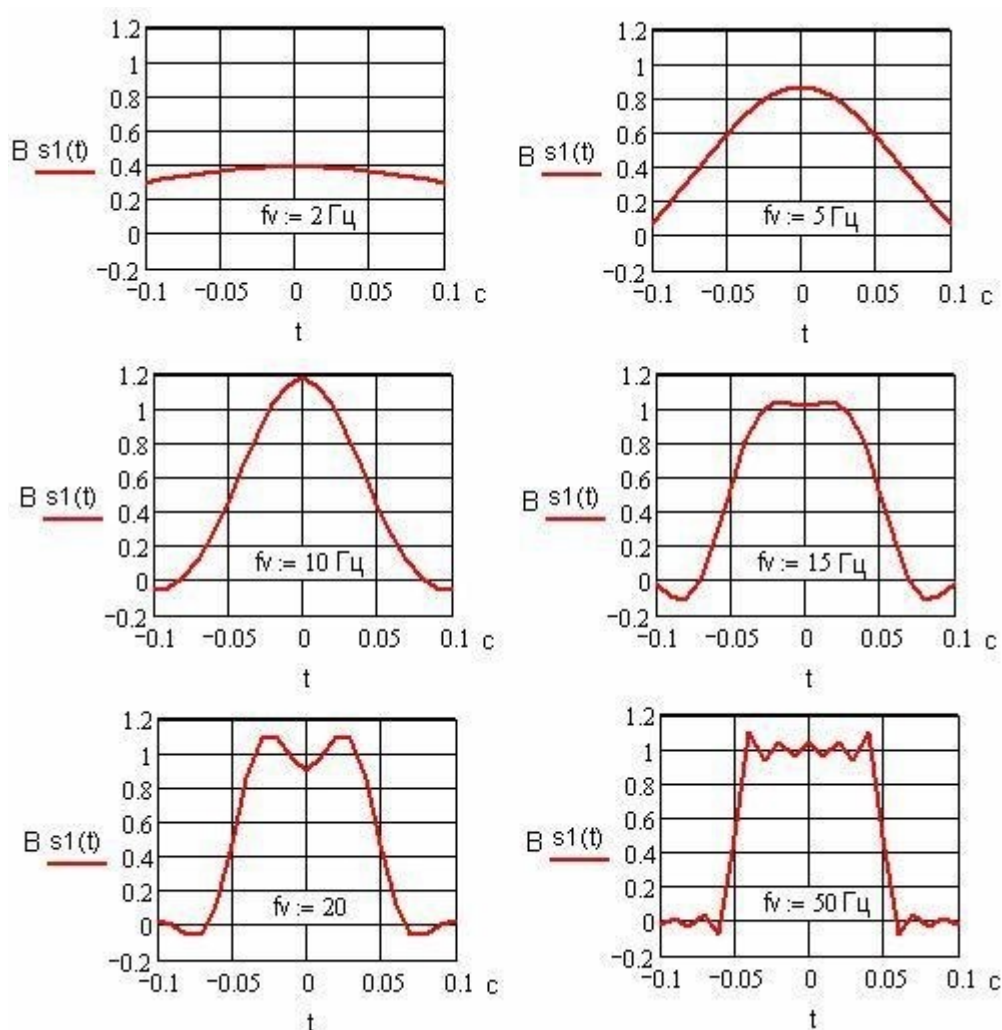


Рисунок 2.6 – Результаты синтеза прямоугольного импульса.

Из анализа временных диаграмм (рисунок 2.6) следует вывод о том, что чем больше величина верхней частоты полосы пропускания f_v , тем лучше качество восстановления прямоугольного импульса. Количественной мерой качества восстановления прямоугольного импульса служит евклидова метрика (рисунок 2.4). Чем меньше значение параметра метрики ϵ , тем лучше качество восстановления.

При прямоугольном симметричном импульсе (рисунок 2.1) выражение для спектральной плотности (2.3) легко найти аналитическим путем:

$$S(f) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A_m e^{-j2\pi f t} dt = A_m \left[\frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = A_m \frac{\sin(2\pi f \tau)}{\pi f} \quad (2.9)$$

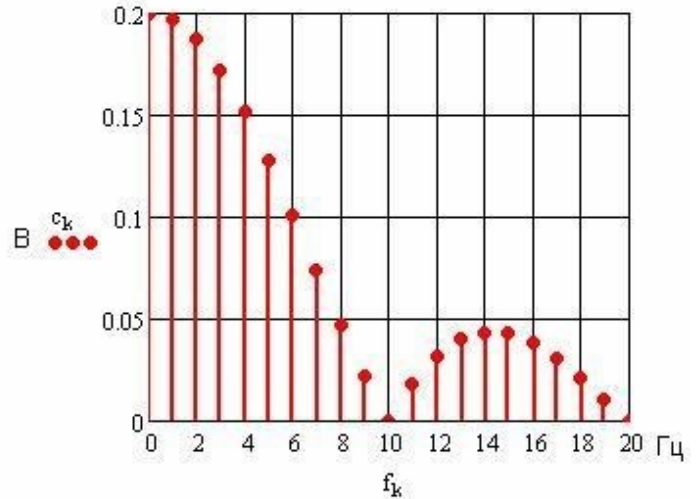
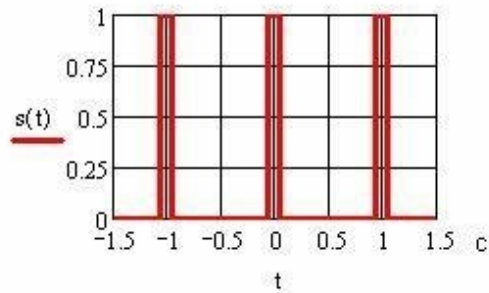
где A_m — амплитуда; τ — длительность импульса (рисунок 2.1).

При частоте $f=0$ из формулы (2.9) имеем: $S(0) = A_m \tau$.

Установим связь между сплошным спектром одиночного импульса и линейчатым спектром периодического сигнала, составленного из таких одиночных импульсов. Для упрощения анализа выберем импульс симметричной формы, описываемый четной функцией $s(t)$ (рисунок 2.7). □ □

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

$\tau := 0.1 \text{ c}$ $T := 1 \text{ c}$ $AM := 1 \text{ B}$ $N := 20$



Одиночный прямоугольный импульс

$\tau := 0.1 \text{ c}$ $AM := 1 \text{ B}$

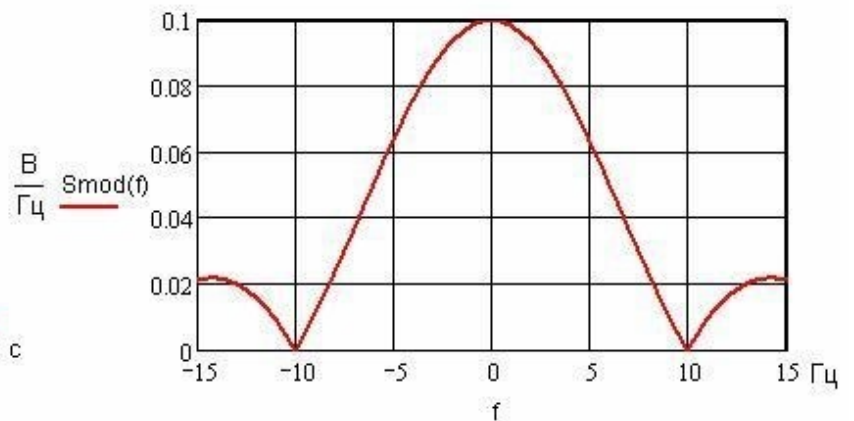
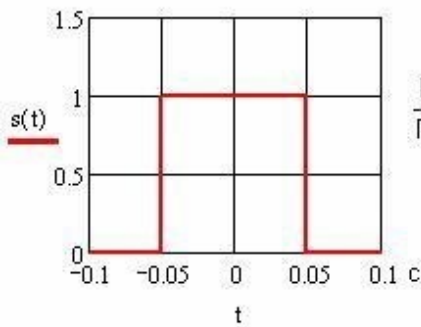


Рисунок 2.7 – Периодический сигнал, одиночный импульс и их спектры.

На основании формулы (1.3) при четной функции $s(t)$ для спектральной составляющей с частотой $k\omega_1$ периодической последовательности импульсов, представляемой в виде ряда Фурье, запишем:

$$A_k = T \int_{-0.5\tau}^{0.5\tau} s(t) \cos(k\omega_1 t) dt$$

Согласно интегралу Фурье (2.2), для спектральной функции одиночного импульса на той же частоте $\omega = k\omega_1$, имеем:

$$S^k = \int_{-0.5\tau}^{0.5\tau} s(t) e^{-jk\omega t} dt = \int_{-0.5\tau}^{0.5\tau} s(t) \cos(k\omega t) dt$$

Из сравнения полученных выражений следует:

$$A = \frac{2}{k} S = 2f S \cdot k T$$

Последнее выражение позволяет сделать такой вывод: по форме оба спектра совпадают, причем огибающая линейчатого спектра периодической последовательности импульсов с точностью до постоянного множителя, равного $2 T$, повторяет сплошной спектр одиночного импульса. Этот вывод справедлив и для импульсов несимметричной формы, что подтверждают результаты проведенных расчетов и построенных на их основании графиков (рисунок 2.6).

В зависимости от формы импульса его энергия сосредоточена в определенной полосе частот. При этом ширину математического спектра $\Delta f_{\text{сп}}$ можно количественно определять с помощью введенного коэффициента уменьшения энергии импульса $K_W = W_1/W_2 < 1$ по причине ограниченной полосы пропускания цепи. Связь между длительностью одиночного импульса τ и шириной его физического спектра Δf определяет равенство $\Delta f \tau = \text{const}$, где $\Delta f = 0,5 \Delta f_{\text{сп}}$. Из последнего равенства следует известный вывод о том, что чем короче по времени импульс (отдельный или периодически повторяющийся), тем больше ширина его спектра. При $\tau \rightarrow 0$ ширина спектра $\Delta \rightarrow \infty$.

Произведение $\Delta f \tau$ зависит от выбранного значения K_W и вида импульса. Так, для прямоугольного импульса при $K_W \approx 0,9$ имеем $\Delta f \tau = 1$.

Примечание – Произведение длительности импульса на ширину его физического спектра (эффективную ширину спектра) называется базой сигнала и обозначается B . Таким образом, база прямоугольного импульса равна $B \approx f \tau \approx 1$. Сигналы, у которых база равна или близка к единице, называются простыми.

Из формулы (2.3) следует, что амплитуда основного лепестка спектра одиночного импульса равна так называемой площади импульса:

∞

$$S \approx S(0) = \int_0^{\infty} s(t) dt.$$

Для прямоугольного одиночного импульса $S_0 \approx AM$, где AM – амплитуда импульса (рисунок 2.1). Размытость спектра, характеризуемая количеством «лепестков» и их амплитудой (рисунок 2.5), зависит от формы импульса.

Все сказанное следует учитывать при построении систем телекоммуникации[3]. Так, при близком расположении по частоте каналов телекоммуникации из-за размытости спектра излучения сигналов происходит их взаимное влияние друг на друга: часть энергии из одного канала проникает в другой, что приводит к взаимным помехам и снижает качество связи. В таком случае следует выбирать такие формы сигнала, у которых спектр излучения по возможности сжат. Сужение ширины спектра излучения сигнала необходимо также в рамках проблемы электромагнитной совместимости работы радиоэлектронных средств.

В другом случае, например, в широкополосных системах радиосвязи, спектр сигнала должен быть, наоборот, по возможности «размыт» в широкой полосе частот, и поэтому следует выбирать сигнал, имеющий расширенный спектр излучения и значение базы $B \gg 1$.

Приведенная программа MathCAD (рисунки 2.2 – 2.4) является универсальной и может быть использована для спектрального анализа и синтеза любого детерминированного импульсного сигнала $s(t)$.

Основные свойства преобразования Фурье, используемые при спектральном анализе импульсных сигналов, приведены в[3].

Аппаратура и программное обеспечение

Аппаратура. Для выполнения работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками:

процессор Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (числоцветов 256).

Программное обеспечение. Для выполнения работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 10 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении работы **запрещается:**

- самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;

- нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т. д.;

- принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

Методика и порядок выполнения работы

1. Запустите программу MathCAD.

2. По программе MathCAD (рисунки 2.2 – 2.4) выполните спектральный анализ и синтез одиночных импульсных сигналов в соответствии с вариантом индивидуального задания (таблицы 2.1 – 2.7).

3. Сохраните результаты выполнения индивидуального задания.
4. Сформируйте отчет по работе.
5. Подготовьтесь к ответу на вопросы для защиты работы.
6. Защитите работу.

Варианты заданий

В соответствии с вариантом индивидуального задания (таблица 2.1) необходимо:

- выполнить спектральный анализ и синтез двух из восьми одиночных импульсных сигналов, представленных в таблице 2.2;
- исследовать влияние параметров импульсов на их спектр (таблицы 2.3 – 2.9);
- исследовать влияние времени задержки импульсов на их спектр.

Номер варианта соответствует номеру фамилии студента в списке учебной группы (подгруппы). Импульсные сигналы, подлежащие исследованию для указанного варианта, отмечены в таблице 2.1 символом ■.

Примечание – Программу MathCAD исследования влияния параметров импульсов и времени задержки импульсов на их спектр разработать, обосновать и реализовать самостоятельно.

Таблица 2.1 – Типы импульсных сигналов, исследуемых в работе,
по вариантам.

Тип сигнала	Номер варианта													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Трапецеидальный импульс	■			■			■				■		■	
Односторонний экспоненциальный импульс								■		■				
Двусторонний экспоненциальный импульс		■				■						■	■	

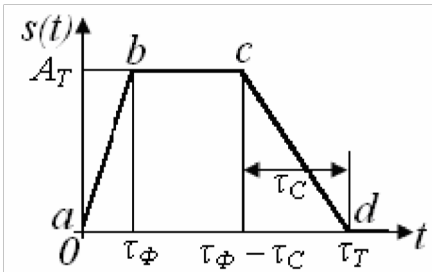
Пилообразный импульс		■			■				■					
Треугольный импульс			■				■							■
Колоколообразный импульс			■					■			■	■		
Косинус-квадратный импульс				■		■		■						
Импульс типа $\sin x/x$	■				■					■				■

Содержание отчета и его форма

Отчет по работе оформляется в виде текстового документа и должен включать:

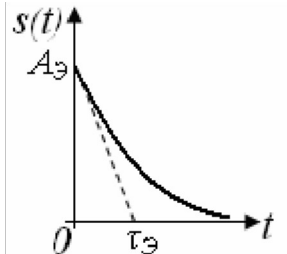
1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Формулировку индивидуального задания и результат его выполнения.
4. Краткие выводы по результатам выполнения работы.

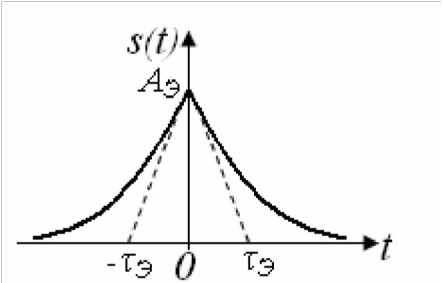
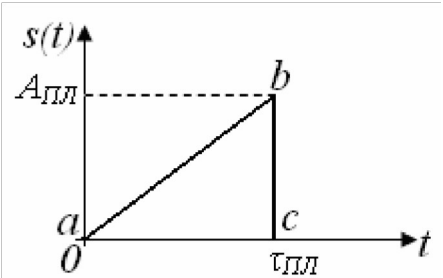
Таблица 2.2 – Термины, аналитическое и графическое определение номинальных форм и параметров исследуемых импульсов

Термин	Графическое определение	Аналитическое определение и параметры
Трапецеидальный импульс		$s(t) = \begin{cases} 0; & t < 0; \\ A_T \frac{t}{\tau_\phi}; & 0 \leq t \leq \tau_\phi; \\ A_T; & \tau_\phi \leq t \leq \tau_\phi + \tau_C; \\ A_T \frac{\tau_T - t}{\tau_C}; & \tau_\phi + \tau_C \leq t \leq \tau_T; \\ 0; & t \geq \tau_T \end{cases}$ A_T – высота трапецеидального импульса; τ_ϕ – длительность фронта трапецеидального импульса; τ_C –

		длительность среза трапецеидального импульса. <i>Примечание</i>– Отрезок ab называется фронтом трапецеидального импульса, отрез bc – вершиной трапецеидального импульса, отрезок cd – срезом трапецеидального импульса.
--	--	--

Продолжение таблицы 2.2

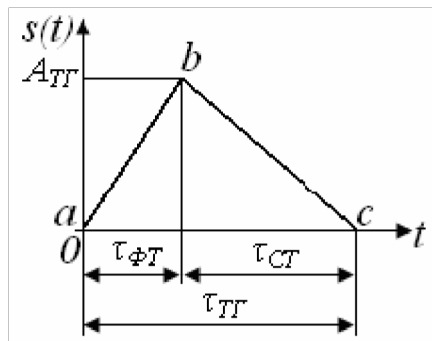
Термин	Графическое определение	Аналитическое определение и параметры
Односторонний экспоненциальный импульс		$\text{Ⓢ} \quad - \text{---} t$ $s(t) = \begin{cases} A_{\text{Э}} e^{-t/\tau_{\text{Э}}}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$ $A_{\text{Э}}$ – высота одностороннего экспоненциального импульса; $\tau_{\text{Э}}$ – постоянная времени одностороннего экспоненциального импульса

Двусторонний экспоненциальный импульс		$s(t) = A_{\text{Э}} e^{-\frac{ t }{\tau_{\text{Э}}}}$ $A_{\text{Э}}$ – высота двустороннего экспоненциального импульса; $\tau_{\text{Э}}$ – постоянная времени двустороннего экспоненциального импульса.
Пилообразный импульс		$s(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \frac{A_{\text{ПЛ}}}{\tau_{\text{ПЛ}}} t, & 0 \leq t \leq \tau_{\text{ПЛ}}; \\ 0, & t > \tau_{\text{ПЛ}} \end{cases}$ $A_{\text{ПЛ}}$ – высота пилообразного импульса $\tau_{\text{ПЛ}}$ – длительность пилообразного импульса. <i>Примечание</i> – Отрезок ab называется прямым ходом пилообразного импульса, отрезок bc – обратным ходом пилообразного импульса.

Продолжение таблицы 2.2

Термин	Графическое определение	Аналитическое определение и параметры
--------	-------------------------	---------------------------------------

Треугольный импульс



$$s(t) = 0; \quad t < 0$$

$$s(t) = A_{ТГ} \frac{t}{\tau_{ФГ}}; \quad 0 \leq t \leq \tau_{ФГ}$$

$$s(t) = A_{ТГ} \frac{\tau_{ТГ} - t}{\tau_{СТ}}; \quad \tau_{ФГ} \leq t \leq \tau_{ТГ}$$

$$s(t) = 0; \quad t > \tau_{ТГ}$$

длительность фронта треугольного импульса
длительность среза треугольного импульса; длительность
треугольного импульса.

Отрезок ab называется фронтом треугольного

срезом треугольного импульса.

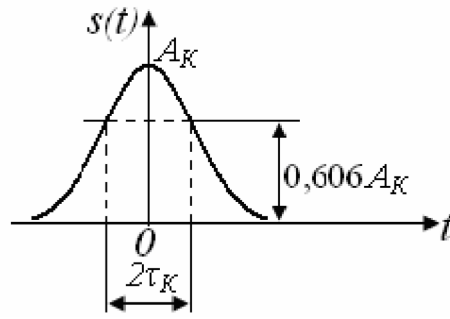
Амплитуда $A_{ТГ}$ — высота треугольн

$t_{ФГ} - t_{СТ}$

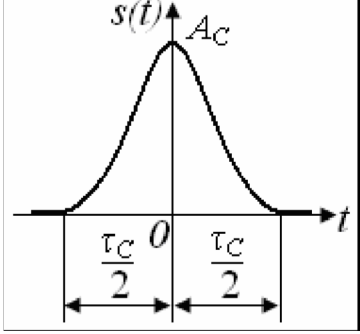
—

$t_{ТГ} -$

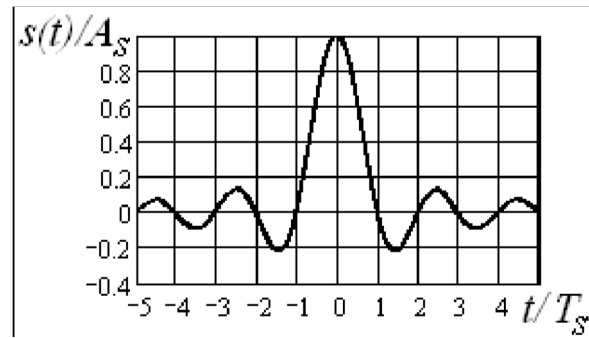
Примечание —
импульса, отрезок bc —

Колоколообразный импульс		$s(t) = A_K e^{-\frac{ t }{\tau_K}}$ A_K – высота колоколообразного импульса; $2\tau_K$ – интервал времени между точками перегиба колоколообразного импульса. Примечание – Значение параметра $2\tau_K$ определяется также по уровню $0,606A_K$.
--------------------------	---	--

Продолжение таблицы 2.2

Термин	Графическое определение	Аналитическое определение и параметры
Косинусквадратный импульс		$s(t) = A_C \cos^2 \left(\frac{\pi t}{\tau_C} \right); -\frac{\tau_C}{2} \leq t \leq \frac{\tau_C}{2}$ A_C – высота косинус-квадратного импульса; τ_C – длительность косинус-квадратного импульса. Примечание – Значение параметра τ_C определяется также по уровню $0,5A_C$.

Импульс типа
 $\sin x/x$



$$\sin\left(\pi t / T_s\right)$$

$$s(t) = A_s \frac{\sin(\pi t / T_s)}{\pi t / T_s}$$

A_s – высота импульса типа $\sin x/x$;

T_s – полупериод импульса типа $\sin x/x$.

Примечание – Значение параметра T_s определяется как расстояние между смежными точками пересечения графика функции $\sin x/x$ оси абсцисс.

Таблица 2.3 – Варианты заданий для исследования трапецеидального импульса

Вариант	$A_T, В$	$\tau_T, мс$	$\tau^\Phi, мс$	$\tau_C, мс$	Вариант	$A_T, В$	$\tau_T, мс$	$\tau_\Phi, мс$	$\tau_C, мс$
1	1	1,0	0,1	0,2	8	8	8,0	2,5	1,5
2	2	2,0	0,4	0,4	9	9	9,0	3,5	2,5
3	3	3,0	0,8	1,2	10	10	10,0	2,5	4,5
4	4	4,0	0,5	1,0	11	11	11,0	3,5	2,5
5	5	5,0	1,5	1,5	12	12	12,0	4,5	1,5
6	6	6,0	2,0	1,0	13	13	13,0	3,5	3,5
7	7	7,0	2,0	3,0	14	14	14,0	4,5	3,5

Примечание к таблице 2.3 – При расчете спектральной функции трапецеидального импульса пределы интегрирования по времени рекомендуется выбирать от 0 до τ_T .

Таблица 2.4 – Варианты заданий для исследования одностороннего и двустороннего экспоненциального импульса

Вариант	$A_\Sigma, В$	$\tau_\Sigma, мс$	Вариант	$A_\Sigma, В$	$\tau_\Sigma, мс$
1	1	1,0	8	8	8,0
2	2	2,0	9	9	9,0
3	3	3,0	10	10	10,0
4	4	4,0	11	11	11,0
5	5	5,0	12	12	12,0
6	6	6,0	13	13	13,0
7	7	7,0	14	14	14,0

Примечания к таблице 2.4:

1. При расчете спектральной функции одностороннего экспоненциального импульса пределы интегрирования по времени рекомендуется выбирать от 0 до $3\tau_\Sigma$

2. При расчете спектральной функции двустороннего экспоненциального импульса пределы интегрирования по времени рекомендуется выбирать от $-3\tau_{\Sigma}$ до $3\tau_{\Sigma}$.

Таблица 2.5 – Варианты заданий для исследования пилообразного импульса

Вариант	$A_{пл}, В$	$\tau_{пл}, мс$	Вариант	$A_{пл}, В$	$\tau_{пл}, мс$
1	1	1,0	8	8	8,0
2	2	2,0	9	9	9,0
3	3	3,0	10	10	10,0
4	4	4,0	11	11	11,0
5	5	5,0	12	12	12,0
6	6	6,0	13	13	13,0
7	7	7,0	14	14	14,0

Примечание к таблице 2.5 – При расчете спектральной функции пилообразного импульса пределы интегрирования по времени рекомендуется выбирать от 0 до $\tau_{пл}$

Таблица 2.6 – Варианты заданий для исследования треугольного импульса

Вариант	$A_{тг}, В$	$\tau_{\phi т}, мс$	$\tau_{с т}, мс$	$\tau_{т г}, мс$	Вариант	$A_{тг}, В$	$\tau_{\phi т}, мс$	$\tau_{с т}, мс$	$\tau_{т г}, мс$
1	1	0,4	0,6	1,0	8	8	3,0	5,0	8,0
2	2	0,8	1,2	2,0	9	9	3,0	6,0	9,0
3	3	1,2	1,8	3,0	10	10	4,5	5,5	10,0
4	4	1,0	3,0	4,0	11	11	3,0	8,0	11,0
5	5	1,5	3,5	5,0	12	12	6,0	6,0	12,0
6	6	2,0	4,0	6,0	13	13	4,0	9,0	13,0
7	7	3,0	4,0	7,0	14	14	8,0	6,0	14,0

Примечание к таблице 2.6 – При расчете спектральной функции пилообразного импульса пределы интегрирования по времени рекомендуется выбирать от 0 до $\tau_{ТГ}$.

Таблица 2.7 – Варианты заданий для исследования колоколообразного импульса

Вариант	$A_s, В$	$2\tau_k, мс$	Вариант	$A_s, В$	$2\tau_k, мс$
1	1	1,0	8	8	8,0
2	2	2,0	9	9	9,0
3	3	3,0	10	10	10,0
4	4	4,0	11	11	11,0
5	5	5,0	12	12	12,0
6	6	6,0	13	13	13,0
7	7	7,0	14	14	14,0

Примечание к таблице 2.7 – При расчете спектральной функции колоколообразного импульса пределы интегрирования по времени рекомендуется выбирать от $-3\tau_k$ до $3\tau_k$

Таблица 2.8 – Варианты заданий для исследования косинус-квадратного импульса

Вариант	$A_s, В$	$\tau_c, мс$	Вариант	$A_s, В$	$\tau_c, мс$
1	1	1,0	8	8	8,0
2	2	2,0	9	9	9,0
3	3	3,0	10	10	10,0
4	4	4,0	11	11	11,0

5	5	5,0	12	12	12,0
6	6	6,0	13	13	13,0
7	7	7,0	14	14	14,0

Примечание к таблице 2.8 – При расчете спектральной функции косинусквадратного импульса пределы интегрирования по времени следует выбирать от $-\tau_c/2$ до $\tau_c/2$.

Таблица 2.9 – Варианты заданий для исследования импульса

типа $\sin(x)/x$

Вариант	A_s , В	T_s , мс	Вариант	A_s , В	T_s , мс
1	1	1,0	8	8	8,0
2	2	2,0	9	9	9,0
3	3	3,0	10	10	10,0
4	4	4,0	11	11	11,0
5	5	5,0	12	12	12,0
6	6	6,0	13	13	13,0
7	7	7,0	14	14	14,0

Примечание к таблице 2.9 – При расчете спектральной функции косинусквадратного импульса пределы интегрирования по времени рекомендуется выбирать от $-5T_s$ до $5T_s$.

Вопросы для защиты работы

1. Что такое спектральная функция импульса?
2. Запишите прямое и обратное интегральное преобразование Фурье.

3. Каким требованиям должна удовлетворять импульсная функция времени $s(t)$ для того, чтобы её можно было подвергнуть спектральному анализу по Фурье?
4. Как определить модуль и фазу спектральной плотности импульса? 5.
Как можно быстро определить центральное значение амплитуды спектральной плотности импульса?
 6. Что такое коэффициент уменьшения энергии импульса?
 7. Что такое база сигнала?
 8. Каковы особенности спектральной функции прямоугольного импульса?
 9. Какую связь можно установить между сплошным спектром одиночного импульса и линейчатым спектром периодического сигнала, составленного из таких одиночных импульсов?
 10. Как решить задачу спектрального синтеза импульсных сигналов?
 11. Какова методика выполнения индивидуального задания?
 12. Каковы особенности спектральной функции исследованных импульсных сигналов?
 13. Как формулируется свойство линейности преобразования Фурье?
 14. Как сказывается на спектральной функции задержка сигнала во времени?
 15. Как сказывается на спектральной функции изменение масштаба оси времени сигнала?
 16. Как сказывается на спектральной функции дифференцирование сигнала во временной области?
 17. Как сказывается на спектральной функции интегрирование сигнала во временной области?
 18. Каковы свойства спектра свертки сигналов?
 19. Каковы свойства спектра произведения сигналов?

20. Как сказывается на спектральной функции умножение сигнала на гармоническую функцию?

21. Составьте программу, подтверждающую свойство линейности преобразования Фурье.

22. Составьте программу, подтверждающую свойство линейности преобразования Фурье.

23. Составьте программу, подтверждающую свойство преобразования Фурье, связанное с умножением сигнала на гармоническую функцию.

Лабораторная работа 3

Фильтрация

Цель и содержание

Цель— приобретение навыков исследования линейных систем, используемых для преобразования сигналов.

Содержание работы:

- изучение теоретического обоснования и примеров исследования линейных систем;
- выполнение индивидуального задания и оформление отчета; - защита отчета.

Теоретическое обоснование

Связь между входными $x(t)$ и выходным $y(t)$ сигналом линейной стационарной системы (рисунок 3.1)

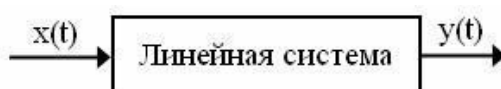


Рисунок 3.1 – Линейная система

может быть выражена в виде линейного дифференциального уравнения вида

$$b_0 y(t) + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \dots + b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} = \dots \quad (3.1)$$

$$a_0 x(t) + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \dots + a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n}$$

где a_i, b_i – постоянные коэффициенты.

При анализе линейных систем операторным методом используется преобразование Лапласа[1], согласно которому уравнение (3.1) в операторной форме примет вид:

$$(b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m) (y) + (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n) (x) = 0 \quad (3.2)$$

Операторной передаточной функцией линейной системы $H(s)$

называется отношение изображения $y(s)$ по Лапласу выходного сигнала к изображению $x(s)$ входного сигнала [2 – 4]:

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m} \quad (3.3)$$

или при разложении числителя и знаменателя на множители ($n < m$):

$$H(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = k \frac{(s - a_1)(s - a_2) \dots (s - a_n)}{(s - b_1)(s - b_2) \dots (s - b_m)}, \quad (3.4)$$

где $k = a_n / b_m$ – коэффициент усиления (gain) линейной системы;

s_{a1}, s_{a2}, s_{an} – корни уравнения

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n = 0,$$

называемые нулями (zero) операторной передаточной функции $H(s)$;

s_{b1}, s_{b2}, s_{bm} – корни уравнения

$$B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m = 0$$

называемые полюсами (pole) операторной передаточной функции $H(s)$.

Здесь m – порядок линейной системы.

Комплексная передаточная функция линейной системы есть отношение

спектральной функции $S_y(j\omega)$ выходного сигнала к спектральной функции $S_x(j\omega)$ входного сигнала [2 – 4]:

$$H(j\omega) = \frac{S_y(j\omega)}{S_x(j\omega)} \quad (3.5)$$

$$S_x(j\omega)$$

Определить $H(j\omega)$ можно основываясь на положении о том, что интеграл Фурье есть частный случай преобразования Лапласа при $s = j\omega$ (приложение А). Поэтому путем подстановки $s = j\omega$ из передаточной функции (3.3) получим для комплексной передаточной функции системы:

51

$$H(j\omega) = S(j\omega) = ab_0 + jba_1\omega + ba_2\omega^2 + jba_3\omega^3 + \dots + ba_m((j\omega)^n) \quad (3.6)$$

Выражение (3.6) представим в виде:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\arg(H(j\omega))} = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = |H(j\omega)| [\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)] \quad (3.7)$$

где $|H(j\omega)|$ – модуль комплексной передаточной функции системы:

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2[H(j\omega)] + \operatorname{Im}^2[H(j\omega)]} \quad (3.8)$$

$\varphi(\omega)$ – аргумент комплексной передаточной функции системы:

$$\varphi(\omega) = \arg K(j\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im}[K(j\omega)]}{\operatorname{Re}[K(j\omega)]} \quad (3.9)$$

$\operatorname{Re}[H(j\omega)]$, $\operatorname{Im}[H(j\omega)]$ – действительная и мнимая части комплексной передаточной функции системы.

Амплитудно-частотная характеристика линейной системы (АЧХ) есть

модуль комплексной передаточной функции системы. Физически АЧХ определяет зависимость отношения амплитуды $U_y(\omega)$ выходного сигнала к амплитуде $U_x(\omega)$ входного сигнала от частоты ω входного сигнала при его

постоянной амплитуде $U_x(\omega) = \text{const}$:

$$\left. \frac{H(j\omega)}{U_x(j\omega)} \right|_{U_x(j\omega)=const} = \frac{U_y(j\omega)}{U_x(j\omega)}$$

Фазочастотная характеристика линейной системы (ФЧХ) есть аргумент комплексной передаточной функции системы. Физически ФЧХ отражает зависимость разности фазы выходного и входного сигнала от частоты входного сигнала при его постоянной амплитуде:

$$\varphi(\omega) = \arg K(j\omega) = \arg \left[\frac{U_y(j\omega)}{U_x(j\omega)} \right]_{U_x(j\omega)=const}$$

Переходная характеристика линейной системы $h(t)$ есть отклик

линейной системы на входное воздействие в виде единичного скачка $\Phi(t)$

52

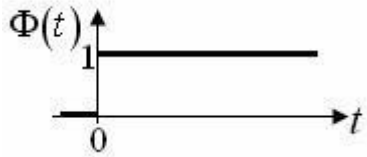
1

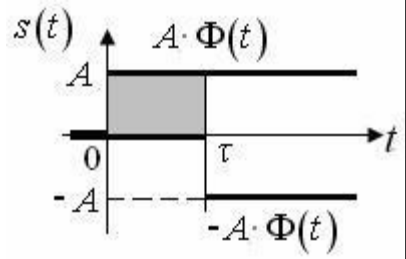
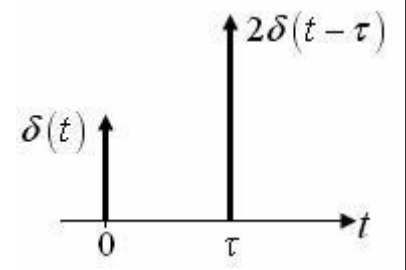
(таблица 3.1) при нулевых начальных условиях. Нулевые начальные условия подразумевают отсутствие в системе запасенной энергии.

Согласно определению $h(t)$ задается выражением:

$$h(t) = y(t) \Big|_{x(t)=\Phi(t)} \quad (3.10)$$

Таблица 3.1 – Единичный скачек и единичный импульс

Термин	Математическая формула, обозначение величины и свойства	График
Единичный скачек (функция Хевисайда)	$\Phi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$	

	 Функцию единичного скачка удобно использовать при создании математических выражений для сигналов конечной длительности. Простейшим примером является формирование прямоугольного импульса амплитудой A и длительностью τ: $s(t) = A[\Phi(t) - \Phi(t - \tau)]$	
Единичный импульс	 $\delta(t)$  Площадь единичного импульса: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ Фильтрующее свойство единичного импульса: $\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \delta(t - t_0) dt = s(t_0)$	

Найти аналитическую зависимость для временной характеристики типа $h_1(t)$ можно по изображению выходного сигнала: $y(s) = x(s)H(s)$. Поскольку изображение единичной функции по Лапласу $\Phi(t) \rightarrow 1/s$, то переходная

характеристика есть оригинал передаточной функции, умноженной на $1/s$: $H(s)/s \rightarrow h_1(t)$.

Найти оригинал функции по ее изображению можно согласно правилам операционного исчисления по формуле разложения. Для этого необходимо

определить полюсы передаточной функции, т. е. согласно (3.4) найти действительные и комплексные корни уравнения:

$$B(s) = \sum_{k=1}^m b_k s^k \quad (3.11)$$

Известно несколько численных методов определения действительных и комплексных корней полинома с действительными коэффициентами (3.10), в частности способ Ньютона-Рафсона [1]. Подобные вычисления можно выполнить и с помощью математического пакета программ MathCAD [4].

Другой способ расчета переходной характеристики исходит из выражения для передаточной функции (3.4) и не требует предварительного определения корней полинома (3.10). Вновь основываясь на связи интеграла Фурье с преобразованием Лапласа, при выполнении условия устойчивости линейной системы $\text{Re}(s_{bk}) < 0$, при $H(0) \neq \infty$ и условии интегрируемости подынтегральных функций можно получить следующую формулу для переходной характеристики линейной системы, выраженную через действительную $\text{Re}[H(j\omega)]$ часть комплексной передаточной функции системы:

$$h(t) = \pi^{-1} \int_0^\infty \text{Re}[H(j\omega)] \sin(\omega t) d\omega \quad (3.12)$$

Примечание– Если входной и выходной сигналы системы имеют одинаковую размерность, то переходная характеристика является безразмерной.

Импульсная характеристика линейной системы $h_\delta(t)$ есть отклик линейной системы на входное воздействие в виде единичного импульса (таблица 3.1). Согласно определению $h_\delta(t)$ задается выражением:

$$h_\delta(t) = y(t) \Big|_{u(t) = \delta(t)} \quad (3.13)$$

Так же как и переходная характеристика, импульсная характеристика линейной системы определяется при нулевых начальных условиях.

Примечание— Если входной и выходной сигналы системы имеют одинаковую физическую природу (то есть одинаковую размерность), то импульсная характеристика, как и дельта-функция времени, имеет размерность частоты.

Поскольку дельта-функция — это производная от единичного скачка (функции Хевисайда), импульсная и переходная характеристики линейной системы связаны друг с другом операциями дифференцирования и интегрирования:

$$h(t) = \frac{dh(t)}{dt}, h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(s) e^{st} ds \quad (3.14)$$

Поскольку изображение единичного импульса $\delta(t)$ по Лапласу равно единице[1], то согласно (3.3) выполняется условие: $y(s)=H(s)$. При этом импульсная характеристика есть оригинал операторной передаточной функции системы:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - \infty}^{\sigma + \infty} H(s) e^{st} ds \quad (3.15)$$

Переходная и импульсная характеристика относится к классу временных характеристик линейной системы.

Выходной сигнал линейной системы с постоянными параметрами равен свертке выходного сигнала и импульсной характеристики системы:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') h(t-t') dt' \quad (3.16)$$

Примечание – системы, имеющие вещественную импульсную характеристику, в дальнейшем будут называться вещественными системами.

Условия физической реализуемости. Любая физически реализуемая система обладает свойством причинности – выходная реакция не может возникнуть раньше входного сигнала. Отсюда следует, что для физически реализуемой системы импульсная и переходная характеристики должны быть равны нулю при $t < 0$.

4

Примечание– Под физической реализуемостью здесь понимается только выполнение свойства причинности, а не возможность создать систему в каком-нибудь конкретном виде.

Устойчивость линейных систем. Линейная система называется устойчивой, если при нулевом входном сигнале выходной сигнал затухает при любых начальных условиях[3]:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \text{ если } x(t) = 0$$

Это требование равносильно требованию затухания импульсной характеристики системы:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$$

Общее условие устойчивости линейных систем: линейная система является устойчивой тогда и только тогда, когда полюсы её передаточной функции лежат левой комплексной полуплоскости:

$$\operatorname{Re}(s_{bi}) < 0$$

Рассмотрим пример определения амплитудно-частотной, фазочастотной, переходной и импульсной характеристик линейной системы в среде MathCAD. В приводимом ниже примере приняты следующие обозначения:

- t – время, ω – частота (при размерности времени в с, мс или мкс; частота соответственно в рад/с, крад/с или Мрад/с);
- TOL – требуемая точность вычислений в MathCAD (используется при численном интегрировании и др. вычислениях) [4];

- $A(\omega)$ – модуль комплексной передаточной функции системы– амплитудно-частотная характеристика системы;
 - $\varphi(\omega)$ – аргумент комплексной передаточной функции системы– фазочастотная характеристика системы;
 - $h\delta(t)$ – импульсная характеристика системы;
 - $h1(t)$ – переходная характеристика системы;
- 5
- $h10(t)$ – переходная характеристика системы, найденная по формуле (3.12);
 - $\square \text{invlaplace}, s \rightarrow$ – команда MathCAD, реализующая поиск результата обратного преобразования Лапласа в символьном виде. Эта команда находится на панели Symbolic (рисунок 3.2).

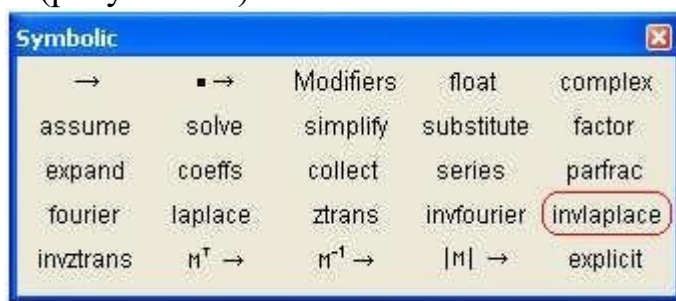


Рисунок 3.2 – Команда invlaplace , реализующая поиск результата обратного преобразования Лапласа в символьном виде

На рисунках 3.3 и 3.4 приведены фрагменты документа MathCAD, реализующего исследование временных и частотных характеристик линейной системы 2-го порядка. Данный пример легко адаптировать для исследования временных и частотных характеристик линейной системы n -го порядка.

Примечание– Не забывайте задавать требуемую точность вычисления (параметр TOL на рисунке 3.3). Если этот параметр не будет задан, время расчетов может существенно увеличиться.

Определение частотных и временных характеристик линейной системы по её операторной передаточной функции

Дано:

$$H(s) := \frac{1s}{1 + s + s^2} \quad \text{- операторная передаточная функция системы.}$$

Требуется определить: частотные и временные характеристики системы.

Решение:

Шаг 1. Задаем мнимую единицу и требуемую точность вычислений:

$$j := \sqrt{-1} \quad \text{TOL} := 0.01 \quad \text{TOL (tolerance in numerical calculation)}$$

Рисунок3.3 – Пример анализа частотных и временных характеристик линейной системы (начало документа MathCAD)

Шаг 2. Находим комплексную передаточную функцию, АЧХ и ФЧХ системы:

$$A(\omega) := |H(j\omega)| \quad - \text{АЧХ системы.} \quad \phi(\omega) := \frac{180}{\pi} \arg(H(j\omega)) \quad - \text{ФЧХ системы.}$$

Шаг 3. Строим графики АЧХ (рисунок 1) и ФЧХ (рисунок 2) системы:

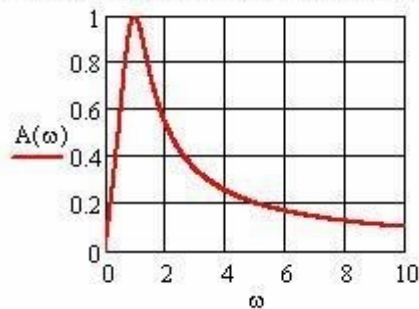


Рисунок 1 – АЧХ системы

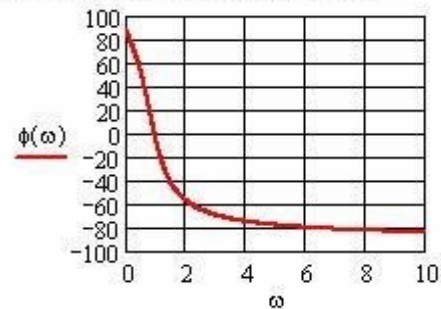


Рисунок 2 – ФЧХ системы

Шаг 4. Находим импульсную характеристику системы и строим её график:

$$h\delta(t) := H(s) \text{ invlaplace, } s \rightarrow e^{\frac{-1}{2} \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) - \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot t} \cdot \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot t\right)$$

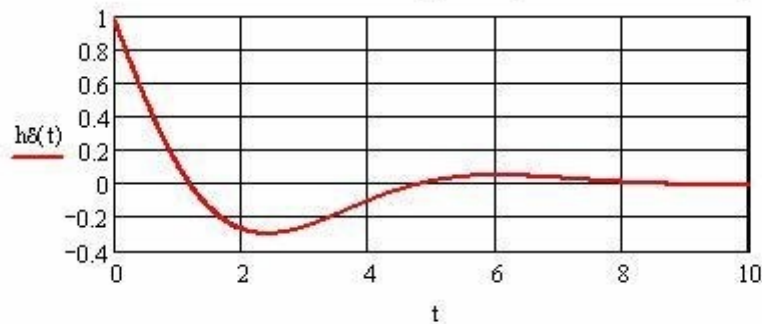


Рисунок 3 – Импульсная характеристика системы

Шаг 5. Находим переходную характеристику системы и строим её график:

$$h1(t) := \frac{H(s)}{s} \text{ invlaplace, } s \rightarrow \frac{2}{3} \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot t} \cdot \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) \quad - \text{первый метод.}$$

$$h10(t) := \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Re}(H(j\omega)) \cdot \frac{\sin(\omega \cdot t)}{\omega} d\omega \quad - \text{второй метод}$$

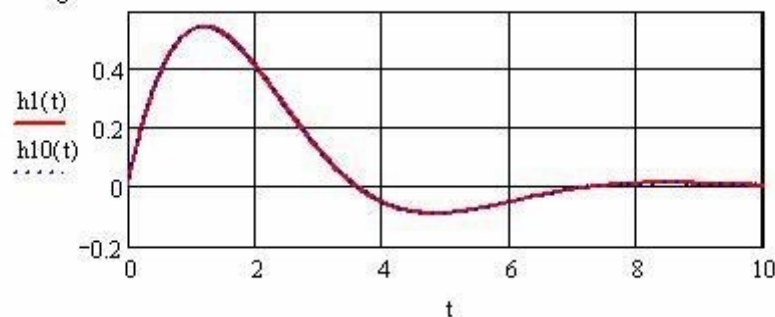


Рисунок 4 – Переходная характеристика системы

Рисунок 3.4 – Пример анализа частотных и временных характеристик

Как видно из рисунка (3.4), импульсная характеристика исследуемой линейной системы 2-го порядка удовлетворяет условию $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$,

следовательно, система является устойчивой.

Операторный метод анализа прохождения сигнала через линейную систему. В основе данного метода лежат два соотношения. С помощью первого, основанного на формуле (3.3):

$$y(s) = H(s) \cdot x(s) \quad (3.17)$$

определяем изображение выходного сигнала $y(s)$ при известном изображении входного сигнала $x(s)$ и операторной передаточной функции системы $H(s)$. С помощью второго соотношения:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} y(s) e^{s t} ds \quad (3.18)$$

основанного на обратном преобразовании Лапласа[1], находим выходной сигнал $y(t)$, исходя из изображения $y(s)$. Продемонстрируем эту методику на конкретном примере расчет выходного сигнала $y(t)$ при воздействии прямоугольного импульса, на линейную систему, рассмотренную ранее (рисунки 3.3 и 3.4). В документе MathCAD (рисунок 3.5) приняты следующие обозначения:

- $\Phi(t)$ – функция единичного скачка;
- $Y(s)$ – изображение выходного сигнала по Лапласу;
- $y(t)$ – выходной сигнал линейной системы.
- $\square \text{ laplace, } s$ – команда MathCAD, реализующая поиск результата

прямого преобразования Лапласа в символьном виде (команда находится на панели Symbolic).

Остальные обозначения совпадают с обозначениями, рассмотренными ранее в программе, представленной на рисунках 3.3 и 3.4.

Анализ прохождения прямоугольного импульса через линейную систему операторным методом

Шаг 6. Задаем входной сигнал $x(t)$ в виде прямоугольного импульса со следующими параметрами: высота импульса - 2, длительность импульса - 1.

$x(t) := 2(\Phi(t) - \Phi(t - 1))$ - прямоугольный импульс представлен суммой двух единичных скачков.

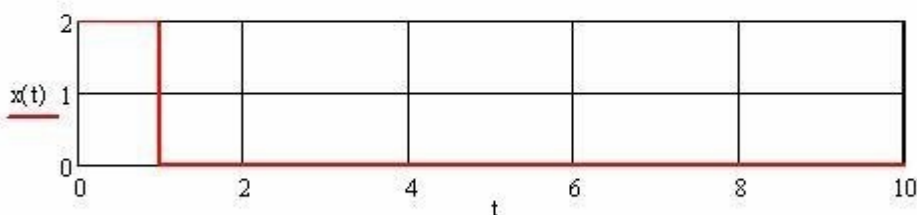


Рисунок 5 – Временная диаграмма входного сигнала $x(t)$

Шаг 7. Находим изображение входного сигнала по Лапласу:

$$X(s) := x(t) \text{ laplace, } t \rightarrow \frac{2}{s} - 2 \cdot \frac{e^{-s}}{s}$$

Шаг 8. Находим изображение выходного сигнала по Лапласу:

$$Y(s) := X(s) \cdot H(s)$$

Шаг 9. Воспользовавшись обратным преобразованием Лапласа, находим оригинал выходного сигнала и строим его график:

$$y(t) := Y(s) \text{ invlaplace, } s \rightarrow \frac{4}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \cdot \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) - \frac{4}{3} \cdot \Phi(t-1) \cdot e^{-\frac{1}{2}(t-1)} \cdot \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \cdot \sin\left[\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot (t-1)\right]$$

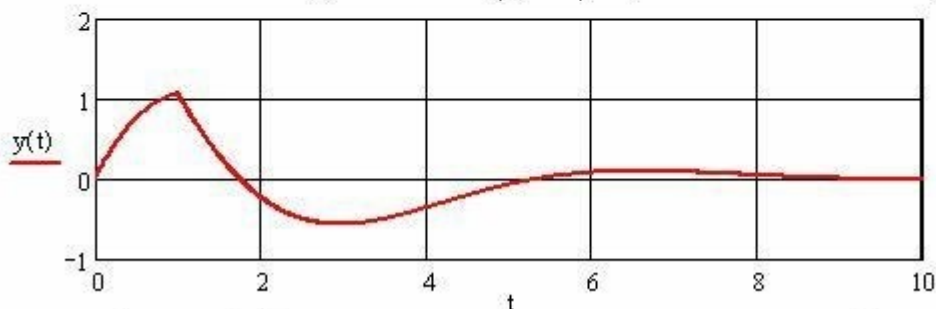


Рисунок 6 – Временная диаграмма выходного сигнала $y(t)$

Рисунок 3.5 – Пример анализа прохождения прямоугольного импульса через линейную систему операторным методом (конец документа MathCAD)

Примечание– Программа, приведенная на рисунке 3.5, является логическим продолжением ранее рассмотренной программы (рисунок 3.3 и 3.4) и без неё не работает. По этой причине нумерация этапов (шагов) алгоритма на рисунке 3.5 продолжает начатую нумерацию на рисунках 3.3 и 3.4.

9

Аппаратура и программное обеспечение

Аппаратура. Для выполнения работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа Super VGA (число цветов 256).

Программное обеспечение. Для выполнения работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 10 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении работы **запрещается**:

- самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения;
- нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т. д.;
- принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

Методика и порядок выполнения работы

1. Запустите систему MathCAD.
2. Составьте документ MathCAD, позволяющий исследовать заданные линейные системы (таблицы 3.2 и 3.3). Требуется:
 - а) выполнить анализ частотных и временных характеристик заданных линейных систем (всего четыре системы);

б) выполнить операторным методом анализ прохождения заданного прямоугольного импульса (таблица 3.4) через исследованные Вами линейные системы;

в) найти полюсы операторной передаточной функции исследованных линейных систем и сделать вывод об их устойчивости. При определении полюсов операторной передаточной функции линейной системы, воспользуйтесь встроенной в среду MathCAD функцией $\text{polyroots}(v)$, предназначенной для поиска корней полинома от 2 до 99 степени по заданному вектору v коэффициентов полинома (рисунок 3.5).

Шаг 1. Записываем полином знаменателя комплексной передаточной функции (см. рисунок 3.2):

$$B(s) := 1 + s + s^2$$

Шаг 2. Находим коэффициенты полинома:

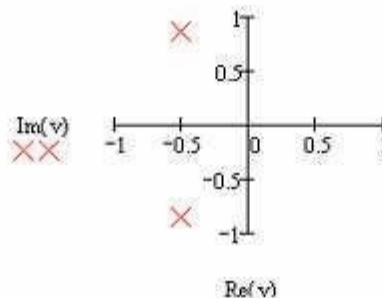
$$z := B(s) \text{ coeffs}, s \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Шаг 3. Находим корни полинома:

$$v := \text{polyroots}(z)$$

$$v = \begin{pmatrix} -0.5 + 0.866i \\ -0.5 - 0.866i \end{pmatrix}$$

Шаг 4. Строим распределение корней полинома (полюсов передаточной функции) на комплексной плоскости:



Вывод - Линейная система является устойчивой, так как полюсы ее передаточной функции лежат в левой комплексной полуплоскости.

Рисунок 3.5 – Программа для поиска полюсов операторной передаточной функции линейной системы

3. Сохраните результаты выполнения индивидуального задания.
4. Сформируйте отчет.
5. Подготовьтесь к ответу на вопросы для защиты работы.
6. Защитите работу.

Варианты заданий

Таблица 3.2 – Варианты операторных передаточных функций систем

Название системы	Операторная передаточная функция системы
Система 1-го порядка	$H(s) = \frac{a_0}{b_0 + b_1 s}$
Система 2-го порядка	$H(s) = \frac{a_0 + a_1 s}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}$
Система 3-го порядка	$H(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3}$
Система 4-го порядка	$H(s) = \frac{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3}{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4}$

Таблица 3.3 – Коэффициенты полиномов числителя и знаменателя операторной передаточной функции линейной системы

Вариант	Коэффициенты полиномов								
	Числителя				Знаменателя				
	a_0	a_1	a_2	a_3	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
1	4	-1	1	1	22	28	19	5	1
2	9	-1	1	2	36	42	26	5	1
3	16	-1	1	-1	54	60	35	5	1
4	25	-1	1	-2	76	82	46	5	1
5	36	-1	1	1	102	108	59	5	1
6	49	-1	1	2	132	138	74	5	1
7	64	-1	1	-1	166	172	91	5	1
8	81	-1	1	-2	416	181	94	5	1

9	100	-1	1	1	832	196	99	5	1
10	121	-1	1	2	1415	217	106	5	1
11	144	-1	1	-1	2164	244	115	5	1
12	169	-1	1	-2	3080	277	126	5	1
13	196	-1	1	1	4162	315	139	5	1
14	225	-1	1	2	5411	361	154	5	1

Таблица 3.4 – Варианты заданий для прямоугольного импульса

Вариант	A, В	τ , с	Вариант	A, В	τ , с
1	1	1,0	8	8	8,0
2	2	2,0	9	9	9,0
3	3	3,0	10	10	10,0
4	4	4,0	11	11	11,0
5	5	5,0	12	12	12,0
6	6	6,0	13	13	13,0
7	7	7,0	14	14	14,0

Примечание– Программы MathCAD, для исследования частотных и временных характеристик линейных систем 1 – 4-го порядков, необходимо оформить в виде отдельных файлов.

Содержание отчета и его форма

Отчет по работе оформляется в виде текстового документа и должен включать:

1. Названия работы.
2. Цель работы.
3. Формулировку индивидуального задания и результат его выполнения.
4. Краткие выводы по результатам выполнения работы.

В выводах необходимо отразить:

- наличие полос пропускания (затухания) для АЧХ систем 1 – 4-го порядков – граничные частоты, ширину полосы пропускания (затухания), равномерность АЧХ в пределах указанных полос;

- тип исследуемой системы 1 – 4-го порядка с точки зрения взаимного расположения полос пропускания и задерживания в пределах её АЧХ (фильтр нижних частот, фильтр верхних частот, полосовой фильтр, режекторный фильтр и т. п.);
- форма и длительность импульсной характеристики системы;
- форма и длительность переходной характеристики системы;
- искажения, вносимые системой в форму выходного сигнала;

- количество и распределение на комплексной плоскости полюсов операторной передаточной функции исследованных линейных систем;
- степень устойчивости (система устойчива, находится на границе устойчивости, не устойчива) исследованных линейных систем.

Вопросы для защиты работы

1. Какие системы называются линейными?
2. Как классифицируются линейные системы?
3. Области применения линейных систем?
4. Какие частотные характеристики используются для описания свойств линейных систем?
5. Какие временные характеристики используются для описания свойств линейных систем?
6. Что такое операторная передаточная функция линейной системы? 7.
Что такое нули и полюсы операторной передаточной функции линейной системы?
8. Какая линейная система считается вещественной?
9. Какая линейная система считается устойчивой?
10. Что такое комплексная передаточная функция линейной системы?
11. Что такое амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) линейной системы?
12. Что такое фазочастотная характеристика (ФЧХ) линейной системы?
13. Как экспериментально определить АЧХ и ФЧХ линейной системы? 14.
Чему равны нули и полюсы комплексной передаточной функции исследованной линейной системы?
15. Является ли линейная система, исследованная в работе, устойчивой? Как вы можете это доказать?
16. Что такое переходная характеристика линейной системы?

17. Что такое импульсная характеристика линейной системы?

65

18. Как взаимосвязаны между собой переходная и импульсная характеристика линейной системы?

19. Как определить импульсную характеристику линейной системы, если известны её АЧХ и ФЧХ или операторная передаточная функция системы?

20. Каково содержание операторного метода анализа линейной системы?

21. На вход исследованной Вами линейной системы поступает гармонический сигнал $x(t) = A \cos(\omega_0 t)$. Какими будут амплитуда и начальная фаза сигнала на выходе системы, если, например, $A = 2$ В, а $\omega_0 = 3$ рад/с.

22. Какие выводы можно сделать по результатам выполнения индивидуального задания?

Лабораторная работа 4

Вейвлет анализ

Цель и содержание

Цель– приобретение навыков применения теоремы В. А. Котельникова при дискретизации аналоговых сигналов.

Содержание работы:

- изучение теоретического обоснования и примеров исследования Дискретных сигналов;
- выполнение индивидуального задания и оформление отчета; - защита отчета по работе.

Теоретическое обоснование

Аналоговый сигналом называется сигнал $s(t)$, который является непрерывным как во времени, так и по значению.

Дискретным сигналом называется сигнал, который получается в результате дискретизации значений аналогового сигнала $s(t)$.

Дискретизация– это определение значений аналогового сигнала в дискретные моменты времени[3].

Пример аналогового сигнала, подвергшегося дискретизации, показан на рисунке 4.1.

Отметим, что после дискретизации (рисунок 4.1) аналоговый сигнал представлен только в дискретные моменты времени, причем значения сигнала в эти моменты равны соответствующим значениям исходного аналогового сигнала. Таким образом, дискретный сигнал непрерывен по амплитуде, но определяется только в дискретных точках во времени.

Как правило, при дискретизации отсчеты аналогового сигнала берутся через равные промежутки времени T (рисунок 4.1), называемые периодом

дискретизации (или интервалом, шагом дискретизации – sample time).

Величина, обратная периоду дискретизации, называется частотой дискретизации (sampling frequency): $f_s = 1/T$. Соответствующая ей круговая частота определяется следующим образом: $\omega_s = 2\pi/T$.

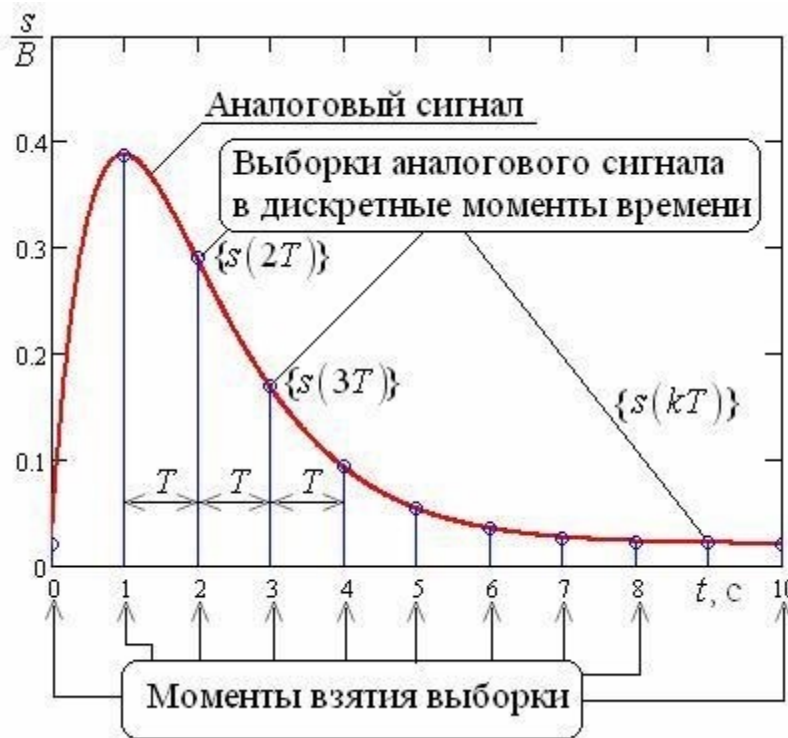


Рисунок 4.1 – Пример аналогового сигнала, подвергнутого дискретизации

Ясно, что в общем случае представление аналогового сигнала набором дискретных отсчетов приводит к потере информации, так как остается неизвестным поведение сигнала в промежутках между отсчетами (выборками).

Однако, существует класс аналоговых сигналов, для которых такой потери информации не происходит и которые могут быть точно восстановлены по значениям своих дискретных отсчетов. К этому классу относятся сигналы, подчиняющиеся теореме В. А. Котельникова[3]: «Любой сигнал $s(t)$, спектр которого не содержит составляющих с частотами выше некоторого значения $f_{\max}$ ($\omega_{\max} = 2\pi f_{\max}$), может быть без потерь информации представлен своими

дискретными отсчетами $\{s(kT)\}$, взятыми с интервалом T , удовлетворяющим следующему неравенству:

$$T \leq \frac{1}{2f_{\max}} = \frac{\omega_{\max}}{2\pi} \quad (4.1)$$

Таким образом, если $f_{\max}$ – самый высокочастотный компонент сигнала, то, чтобы элементы выборки полностью описывали сигнал, дискретизация сигнала должна осуществляться с частотой не ниже $2f_{\max}$.

Примечание – В зарубежных источниках данная теорема называется *теоремой Найквиста* (Nyquist theorem), а также теоремой Шеннона (Shannon theorem) или *теоремой дискретизации* (sampling theorem).

Восстановление исходного непрерывного сигнала $s(t)$ по набору его дискретных отсчетов $\{s(kT)\}$ производится по формуле:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{s(kT) \sin\left(\frac{\pi(t-kT)}{T}\right)}{T} \quad (4.2)$$

Формула (4.2) представляет собой разложение сигнала $s(t)$ в ряд по системе функций, называемой базисом Котельникова:

$$\varphi_k(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi(t-kT)}{T}\right)}{T}.$$

$$\frac{(t - kT)}{T}$$

Формирование непрерывного сигнала по его дискретным отсчетам поясняет рисунок 4.2. Пунктиром показаны графики отдельных слагаемых формулы (4.2), сплошной линией – восстановленный аналоговый сигнал.

Следовательно, если максимальная частота аналогового сигнала составляет 4 кГц, то для того, чтобы собрать или сохранить всю информацию, содержащуюся в сигнале, его дискретизация должна осуществляться с частотой 8 кГц или больше.

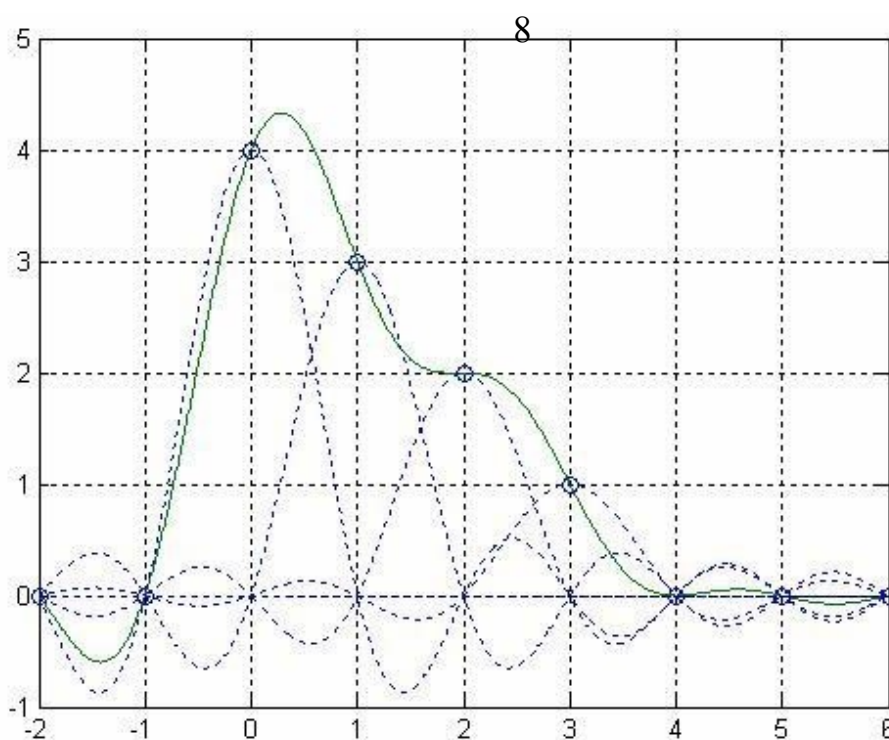


Рисунок 4.2 – Восстановление аналогового сигнала по его дискретным отсчетам

Для применения теоремы В. А. Котельникова на практике необходимо определить максимальную частоту аналогового сигнала $f_{\max}$. Рассмотрим методику определения $f_{\max}$ для случая, когда в качестве аналогового сигнала $s(t)$ выступает одиночный прямоугольный импульс высотой $A=2$ В и длительностью $\tau=1$ с (рисунок 4.3).

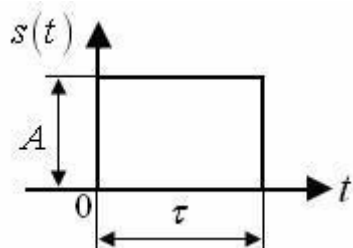


Рисунок 4.3 – Одиночный прямоугольный импульс

Алгоритм определения $f_{\max}$ состоит из следующих пунктов:

1. Используя прямое интегральное преобразование Фурье (2.3) находим спектральную функцию $S(f)$ прямоугольного импульса и строим график

9

модуля $|S(f)|$ спектральной функции (рисунок 4.4). Убеждаемся в том,

что спектр одиночного прямоугольного импульса неограничен по частоте.

2. Определяем энергию одиночного импульса, исходя из спектрального и временного представлений сигнала:

$$W_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \quad (4.3)$$

$$W_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \quad (4.4)$$

Значения энергии, полученные по обоим методам – спектральному и временному – должны быть равны: $W_1 = W_2$. Однако поскольку наша задача состоит в определении максимальной частоты аналогового сигнала $f_{\max}$, то в первом случае следует записать:

$$W_1 = \int_{-\infty}^{f_{\max}} |S(f)|^2 df$$

и соответственно получить $W_1 < W_2$.

Введем параметр $KW = W_1 / W_2$, который назовем коэффициентом уменьшения энергии импульса по причине искусственного ограничения ширины его спектра (работа 2). При этом можно решить и обратную задачу: исходя из допустимой величины коэффициента KW , определим минимально возможное значение частоты $f_{\max}$. Потребуем, чтобы в интервале частот от $-f_{\max}$ до $f_{\max}$ содержалось 95% всей энергии сигнала, то есть, чтобы $KW = 0,95$. Как видно из программы MathCAD на рисунке 4.4, сформулированному требованию удовлетворяет значение $f_{\max} = 2$ Гц.

Дано: $A := 1$ В - высота прямоугольного импульса;
 $\tau := 1$ с - длительность прямоугольного импульса

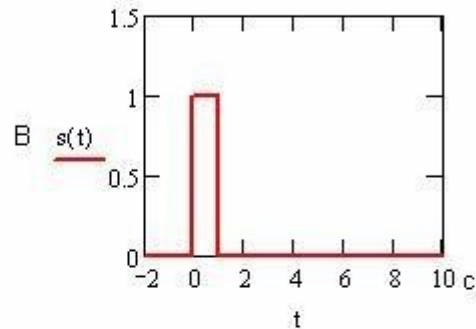
Требуется определить: $f_{\max}$ - ?

Решение:

Шаг 1. Задаем аналоговый импульсный сигнал $s(t)$.

$$s(t) := A \cdot (\Phi(t) - \Phi(t - \tau))$$

Шаг 2. Строим временную диаграмму аналогового сигнала $s(t)$.



Шаг 3. Применяем прямое интегральное преобразование Фурье к сигналу $s(t)$.

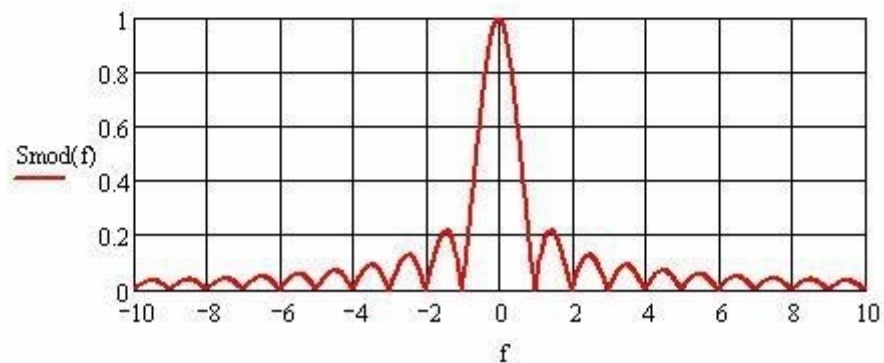
$j := \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

$$S(f) := \int_0^{\tau} s(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt \text{ - спектральная функция импульса, В/Гц.}$$

Шаг 4. Находим модуль и аргумент спектральной функции импульса.

$S_{\text{mod}}(f) := |S(f)|$ - модуль спектральной функции импульса, В/Гц.

Шаг 5. Строим графики модуля и аргумента спектральной функции импульса.



Амплитудный спектр прямоугольного импульса.

Рисунок 4.4 – Начало программы определения $f_{\max}$

Шаг 6. Определяем максимальную частоту аналогового сигнала $f_{\max}$ исходя из требования, чтобы в интервале частот от $-f_{\max}$ до $f_{\max}$ содержалось 95% всей энергии сигнала, т. е. $KW=0,95$.

Шаг 6.1. Задаемся начальным значением $f_{\max}$ в Гц:

$$f_{\max} := 2 \text{ Гц}$$

Шаг 6.2. Определим энергию одиночного импульса, исходя из спектрального и временного представлений сигнала:

$$W1 := \int_{-f_{\max}}^{f_{\max}} (|S(f)|)^2 df \quad W1 = 0.95 \quad W2 := \int_0^{\tau} s(t)^2 dt \quad W2 = 1$$

Шаг 6.3. Находим коэффициент уменьшения энергии импульса по причине ограниченной полосы спектра частот от $-f_{\max}$ до $f_{\max}$:

$$KW := \frac{W1}{W2} \quad KW = 0.95$$

Шаг 6.4. Убеждаемся в том, что коэффициент уменьшения энергии импульса по причине ограниченной полосы спектра частот от $-f_{\max}$ до $f_{\max}$ не менее требуемого значения $KW=0,95$.

Ответ: $f_{\max} = 2 \text{ Гц}$

Примечание - Если найденное значение параметра KW окажется меньше требуемого ($KW=0,95$), то необходимо увеличить $f_{\max}$ и повторить шаги с 6.2 по 6.4.

Рисунок 4.5 – Окончание программы определения $f_{\max}$

Вывод. В интервале частот от -2 Гц до 2 Гц содержится 95% всей энергии прямоугольного импульса. Поэтому, с энергетической точки зрения, спектральными составляющими прямоугольного импульса, лежащими за пределами интервала $-2 \text{ Гц} \leq f \leq 2 \text{ Гц}$, можно пренебречь и считать, что для рассматриваемого аналогового сигнала $f_{\max}=2 \text{ Гц}$.

Примечание– Очевидно, что в зависимости от формы прямоугольного импульса (амплитуде и его длительности) при одном и том же значении KW могут быть получены различные величины параметра $f_{\max}$.

Таким образом, приходим к выводу о том, что частота дискретизации рассматриваемого прямоугольного импульса должна быть не ниже $f_s \geq 2 f_{\max} \approx 2 \cdot 2 \approx 4$ Гц,

а период дискретизации должен быть не более

$$T \leq \frac{1}{4025}, \text{ с.}$$

Рассчитаем параметры фильтра защиты от наложения спектра при дискретизации аналогового сигнала.

Положим, что антиэлайсинговый фильтр реализуется фильтром нижних частот Баттерворта n -го порядка, с передаточной функцией вида[2]:

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}} \quad (4.5)$$

где f_c – частота среза; n – порядок фильтра.

Зависимость модуля передаточной функции фильтром нижних частот Баттерворта 2-го порядка от отношения f/f_c приведена на рисунке 4.6.

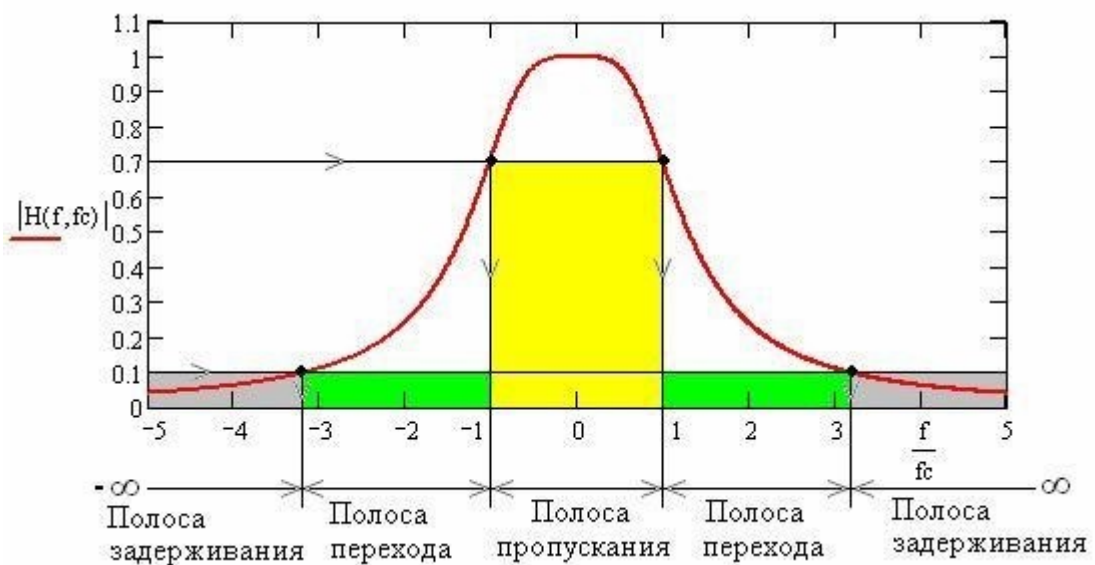


Рисунок 4.6 – АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта 2-го порядка

На рисунке 4.6 для определения граничных частот полосы пропускания (частот среза $\pm f_c$) использовался уровень 0,707, а граничных частот полос задерживания—уровень 0,1. Как видно из рисунка 4.6 между полосой пропускания и полосами задерживания фильтра находятся полосы перехода. Чем уже полоса перехода, тем ближе форма АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта к прямоугольной (идеальной) форме. Управлять шириной полосы перехода

73

можно при помощи порядка фильтра. Чем больше порядок фильтра, тем уже полоса перехода АЧХ фильтра (рисунок 4.7).

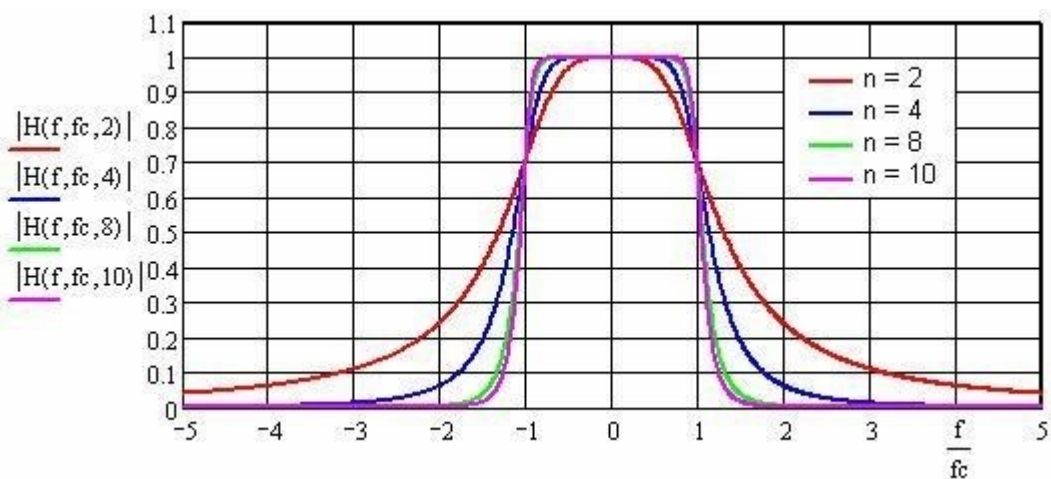


Рисунок 4.7 – Зависимость формы АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта от порядка фильтра

Определим частоту среза f_c , чтобы при порядке фильтра Баттерворта $n = 4$ отношение сигнала к уровню искажения от наложения составляло 10:1 при частоте $f = f_{\max} = 2$ Гц.

Как следует из уравнения (4.5) и графиков на рисунке 4.7 при $f = f_c$ уровень сигнала составляет 0,707. Отношение уровня сигнала к уровню наложения 10:1

предполагает уровень наложения 0,0707. Зеркальный компонент спектра дискретного сигнала, который вызывает наложение при частоте $f=f_{\max}$, определяется уравнением Баттерворта (4.5). Следовательно, из указанного уравнения находим:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2f}{f_c}\right)^{2n}}} = 0,0707, \quad (4.6)$$

Решая уравнение (4.6) относительно f_c получим:

$$f_c = \frac{1}{\sqrt[8]{1 - \frac{1}{0,0707^2}}} = 0,953 - j0,395, \quad (4.7)$$

Так как искомая частота среза получилась комплексной (формула (4.7)), то для дальнейших расчетов примем значение частоты среза:

$$f_c = |0,953 - j0,395| = 1,032 \approx 1 \text{ Гц}. \quad (4.8)$$

Подставим полученный результат $f_c = 1$ Гц в уравнение Баттерворта, считая $f = f_{\max} = 2$ Гц и $n = 4$, получим следующее значение отношения сигнала к уровню искажения от наложения:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{1}\right)^{2 \cdot 4}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 256}} = \frac{1}{\sqrt{257}} = \frac{1}{16,031} = 0,062, \quad (4.9)$$

Как видно из (4.9) значение отношения сигнала к уровню искажения от наложения 0,062 меньше требуемого 0,0707. Следовательно, полученный результат $f_c = 1$ Гц является корректным.

Убедимся в справедливости выводов и положим $f_c = f_{\max} = 2$ Гц. Используя программу MathCAD и спектральный метод анализа прохождения сигналов через линейную систему, построим АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта 4-го

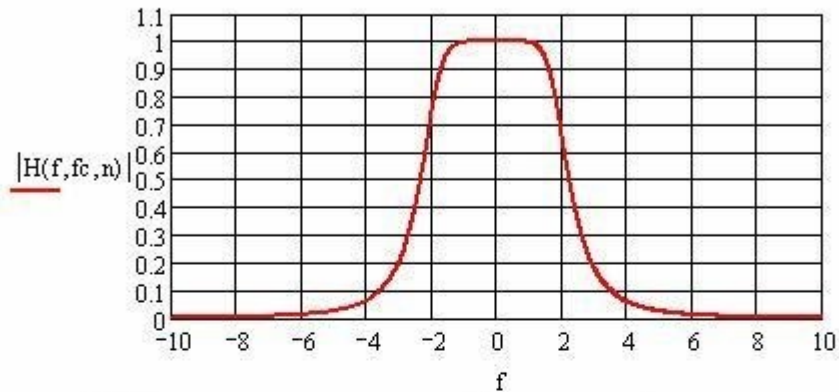
порядка и спектр сигнала после дискретизации с частотой дискретизации $f_s=2 f_{\max}=4$ Гц (рисунок 4.8).

Убеждаемся в том, что при частоте среза $f_c=f_{\max}=2$ Гц в спектре сигнала после дискретизации с частотой дискретизации $f_s=2 f_{\max}=4$ Гц присутствует ярко выраженный эффект наложения зеркальных спектров на основной спектр. Следовательно, частоту среза необходимо уменьшать. Положим $f_c=1$ Гц и повторим расчеты (рисунок 4.9). Убеждаемся в том, что при частоте среза $f_c=1$ Гц в спектре сигнала после дискретизации с частотой дискретизации $f_s=2 f_{\max}=4$ Гц отсутствует эффект наложения спектров. Поэтому для дальнейших расчетов принимаем $f_c=1$ Гц.

Шаг 7. Определяем и строим АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта 4-го порядка

$n := 4$ $f_c := f_{\max}$ $f_c = 2$ Гц

$$H(f, f_c, n) := \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2 \cdot n}}}$$



АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта 4-го порядка с $f_c = 2$ Гц

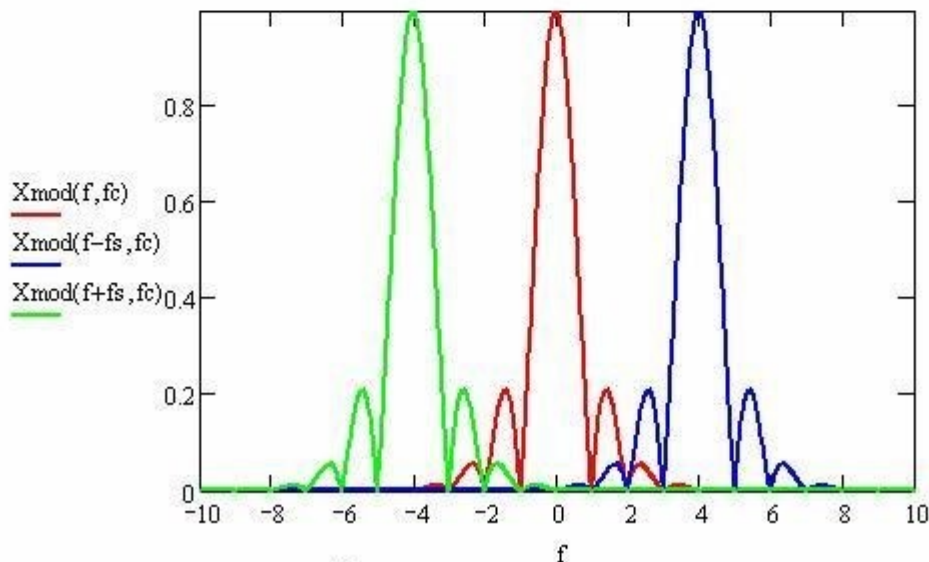
Шаг 8. Находим спектральную функцию импульса, прошедшего через фильтр нижних частот Баттерворта 4-го порядка.

$$X(f, f_c) := S(f) \cdot H(f, f_c, n)$$

Шаг 9. Находим модуль спектральной функции импульса и строим спектр сигнала после дискретизации.

$$X_{\text{mod}}(f, f_c) := |X(f, f_c)| \quad - \text{модуль спектральной функции импульса, В/Гц}$$

$$f_s := 2 \cdot f_{\max}$$



Спектр сигнала после дискретизации

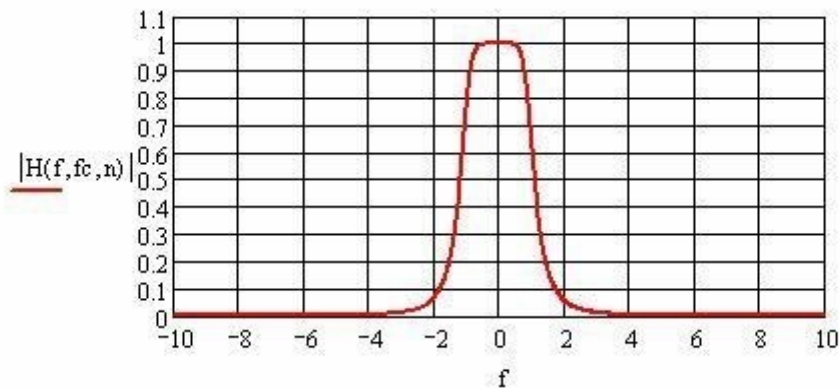
Рисунок 4.8 – Ярko выражен эффект наложения спектров после дискретизации

Используя обратное преобразование Фурье, находим сигнал на выходе фильтра защиты от наложения спектра и строим его временную диаграмму (рисунок 4.10).

Шаг 7. Определяем и строим АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта 4-го порядка

$$n := 4 \quad f_c := \frac{f_{\max}}{2} \quad f_c = 1 \quad \Gamma\text{ц}$$

$$H(f, f_c, n) := \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2 \cdot n}}}$$



АЧХ фильтра нижних частот Баттерворта 4-го порядка с $f_c = 2$ Гц

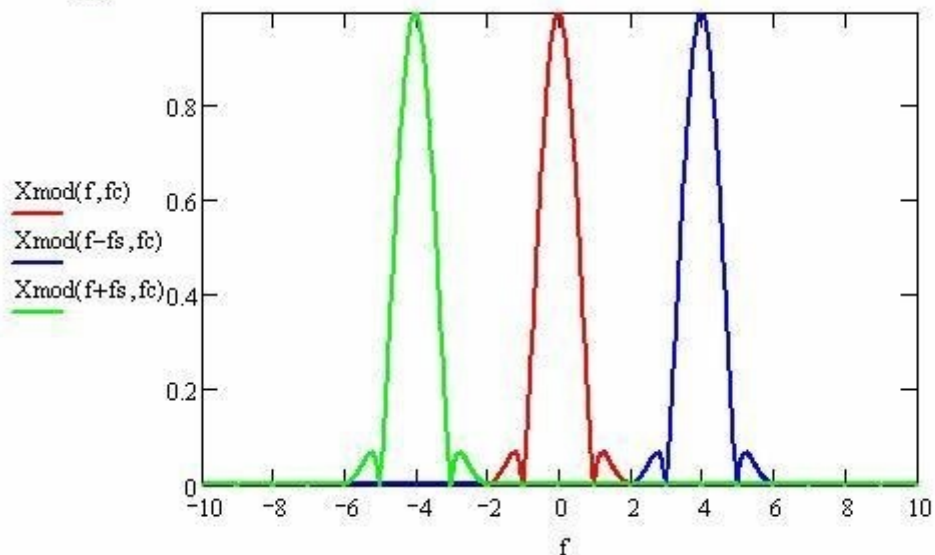
Шаг 8. Находим спектральную функцию импульса, прошедшего через фильтр нижних частот Баттерворта 4-го порядка.

$$X(f, f_c) := S(f) \cdot H(f, f_c, n)$$

Шаг 9. Находим модуль спектральной функции импульса и строим спектр сигнала после дискретизации.

$$X_{\text{mod}}(f, f_c) := |X(f, f_c)| \quad - \text{модуль спектральной функции импульса, В/Гц}$$

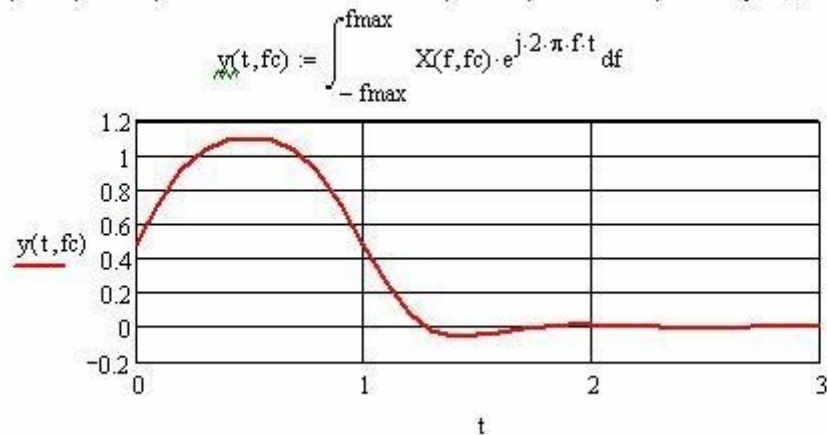
$$f_s := 2 \cdot f_{\max}$$



Спектр сигнала после дискретизации

Рисунок 4.9 – Эффект наложения спектров после дискретизации отсутствует

Шаг 10. Используя обратное преобразование Фурье находим сигнал на выходе фильтра защиты от наложения спектра и строим его временную диаграмму.



Временная диаграмма сигнала на выходе фильтра защиты от наложения спектра

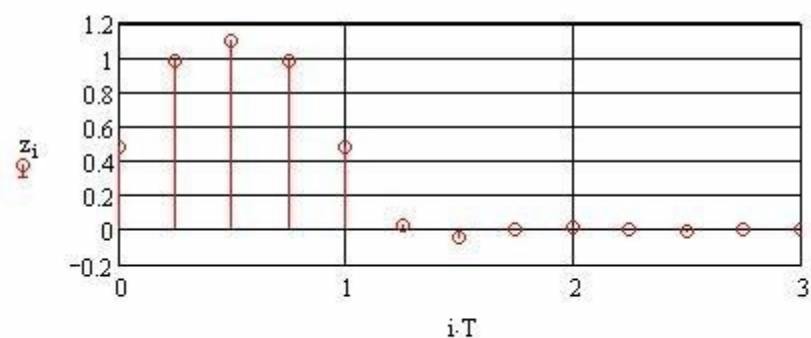
Рисунок 4.10 – Находим аналоговый сигнал на выходе антиэлайсингового фильтра

Формируем набор дискретных отсчетов $\{z(iT)\}$ аналогового сигнала, прошедшего через антиэлайсинговый фильтр (рисунок 4.11).

Шаг 11. Формируем дискретные отсчеты сигнала, прошедшего через фильтр защиты от наложения спектра и строим его временную диаграмму.

$$i := 0..12 \quad T := \frac{1}{f_s} \quad T = 0.25 \text{ c}$$

$$z_i := y(i \cdot T, f_c)$$



Дискретные отсчеты сигнала, прошедшего через фильтр защиты от наложения спектра

Рисунок 4.11 – Дискретный сигнал сформирован

Воспользовавшись формулой (4.2), восстанавливаем аналоговый сигнал на выходе антиэлайсингового по набору его дискретных отсчетов $\{z(iT)\}$ и строим временную диаграмму исходного и восстановленного по теореме Котельникова сигнала (рисунок 4.12).

Шаг 12. Воспользовавшись формулой (4.2), восстанавливаем аналоговый сигнал $y(t,fc)$ по его дискретным отсчетам z_1 и строим временную диаграмму исходного $y(t,fc)$ и восстановленного $v(t)$ по теореме Котельникова сигнала

$$v(t) := \sum_{i=0}^{12} \left[z_1 \cdot \text{sinc} \left[\frac{\pi}{T} \cdot (t - iT) \right] \right] \quad t := 0, 0.1 \dots 3$$

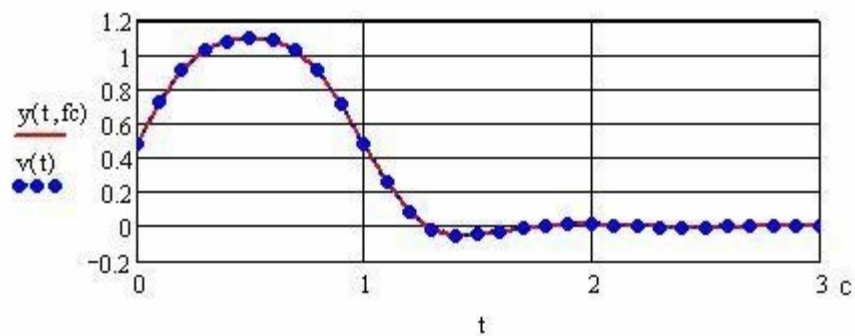


Рисунок 4.12 – На основании теоремы Котельникова аналоговый сигнал восстановлен из дискретного сигнала

Более подробно процесс восстановления аналогового сигнала по его дискретным отсчетам показан на рисунке 4.13.

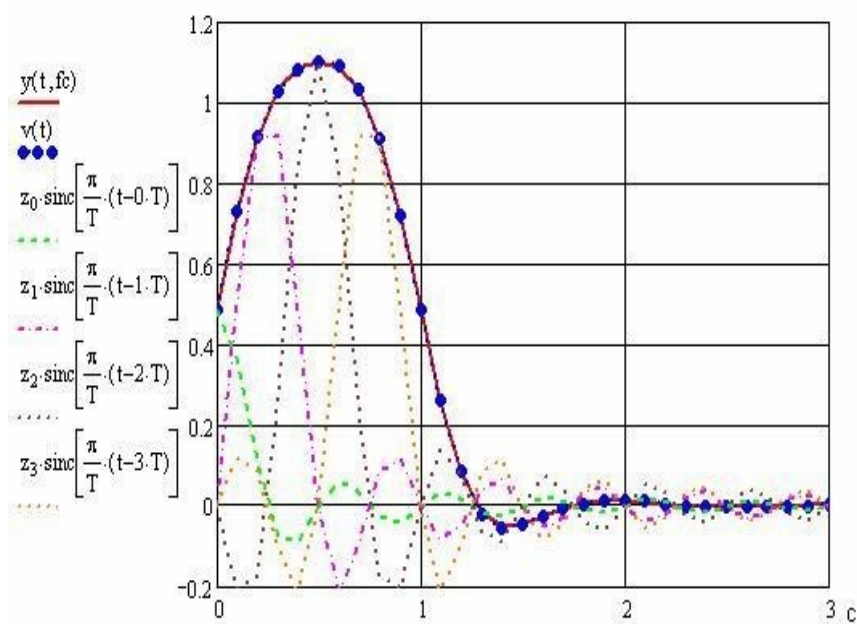


Рисунок 4.1 Восстановление аналогового сигнала по его дискретным

отсчетам

Вывод. Как видно из рисунков 4.12 и 4.13 восстановление аналогового сигнала по его дискретным отсчетам выполнено успешно, что полностью подтверждает справедливость теоремы В. А. Котельникова.

Аппаратура и программное обеспечение

Аппаратура. Для выполнения работы необходим персональный компьютер со следующими характеристиками: процессор типа Pentium/Celeron с тактовой частотой 300 МГц и выше, оперативная память не менее 128 Мбайт и более, свободное дисковое пространство не менее 100 МВ Мбайт, устройство для чтения компакт-дисков, монитор типа SuperVGA (число цветов 256).

Программное обеспечение. Для выполнения работы необходима операционная система WINDOWS 2000/ XP Professional, библиотека Microsoft .NET Framework версии 1.1 или выше, программа MathCAD 10 и выше.

Указания по технике безопасности

При выполнении работы **запрещается**:

- самостоятельно производить ремонт персонального компьютера, а также установку и удаление имеющегося программного обеспечения; - нарушать общепринятые правила техники безопасности при работе с электрооборудованием, в частности, касаться электрических розеток металлическими предметами и т. д.;
- принимать пищу, напитки и сорить на рабочем месте пользователя персонального компьютера.

В случае неисправности персонального компьютера необходимо **немедленно** сообщить об этом обслуживающему персоналу лаборатории (системному администратору, оператору).

Методика и порядок выполнения работы

1. Запустите программу MathCAD.
2. Для каждого из двух аналоговых импульсных сигналов, исследованных вами на работе 2:
 - а) определите частоту дискретизации и период дискретизации, удовлетворяющие теореме В. А. Котельникова;
 - б) исходя из требования отсутствия эффекта наложения спектров после дискретизации, сформулируйте требования к антиэлайсинговому фильтру, реализуемому фильтром нижних частот Баттерворта n -го порядка (определите частоту среза и порядок фильтра);
 - в) реализуйте операцию дискретизации и восстановления в базисе Котельникова.
3. Сохраните результаты выполнения индивидуального задания.
4. Сформируйте отчет по работе.
5. Подготовьтесь к ответу на вопросы для защиты работы.
6. Защитите работу.

Варианты заданий

Варианты заданий совпадают с соответствующими вариантами, сформулированными в работе 2.

Номер варианта соответствует номеру фамилии студента в списке учебной группы (подгруппы).

Вопросы для защиты работы

1. Какой сигнал называется аналоговым?
2. С какой целью производится дискретизация аналоговых сигналов?
3. Какой сигнал называется дискретным?
4. Как формулируется теорема В. А. Котельникова?
5. Как восстановить исходный аналоговый сигнал по набору его дискретных отсчетов?
6. Как формируется базис Котельникова?
7. Каково прикладное значение теоремы В. А. Котельникова для цифровых систем радиосвязи?
8. Каковы свойства спектра дискретного сигнала?
9. Что такое частота Найквиста?
10. Как определить максимальную частоту в спектре импульсного аналогового сигнала?
11. В чем проявляется эффект наложения спектров при дискретизации?
12. Как обосновать требования к фильтру защиты от наложения спектра при дискретизации аналогового сигнала?
13. Каковы свойства фильтра нижних частот Баттерворта n -го порядка?

14. Как при помощи спектрального метода определить сигнал, прошедший через фильтр нижних частот Баттерворта n -го порядка?
15. Как выглядит схема цифровой обработки сигналов?
16. Какова методика выполнения индивидуального задания?
17. Какие выводы можно сделать по результатам выполнения индивидуального задания?

Список рекомендуемой литературы

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике / Пер. с англ.; под ред. И. Г. Арамановича. М.: Наука, 1978.
2. Куприянов М. С., Матюшкин Б. Д. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. СПб.: Политехника, 1998.
3. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов: Учебник для вузов. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2006. – 751 с.
4. Дьяконов В. П. MathCAD 8-12 для студентов. – М.: СОЛОН-Пресс,

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
«Теоретические основы обработки геофизической информации» для
студентов специальности
21.05.02 Прикладная геология
Специализация «Геология месторождений нефти и газа»

Ставрополь, 2026

1. Общие положения

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научноисследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов (СРС) в вузе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения.

К основным видам самостоятельной работы студентов относятся:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание докладов;
- подготовка к семинарам, практическим и лабораторным работам, их оформление;
- выполнение учебно-исследовательских работ, проектная деятельность;
- подготовка практических разработок и рекомендаций по решению проблемной ситуации;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;
- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов и др.

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Самостоятельная работа по дисциплине «Теоретические основы обработки геофизической информации» направлена на формирование следующих **компетенций**:

Код	Формулировка
ОПК-3	Способен применять основные положения фундаментальных естественных наук и научных теорий при проведении научно-исследовательских работ по изучению

и воспроизводству минерально сырьевой базы различия

2. Цель и задачи самостоятельной работы

Ведущая цель организации и осуществления СРС совпадает с целью обучения студента - формирование набора компетенций будущего бакалавра.

При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности. Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности.

Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельной работы и лабораторных занятий.

3. Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций, индикатора(ов)	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
6 семестр					
ИД-2 _{опк-3}	Подготовка к лекциям	Тестирование, собеседование	7,5	0,5	8
ИД-2 _{опк-3}	Подготовка к лабораторным работам	Тестирование, собеседование	7,5	0,5	8
ИД-2 _{опк-3}	Самостоятельное изучение литературы	Тестирование, собеседование	59	1	60
Итого за 6 семестр			74	2	76
Итого			74	2	76

4. Порядок выполнения самостоятельной работы студентом

4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют **четыре основные установки в чтении научного текста**:

информационно-поисковый (задача - найти, выделить искомую информацию) усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения, излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений) аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему) творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде - как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. - использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

Аннотирование - предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;

Планирование - краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;

Тезирование - лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;

Цитирование - дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;

Конспектирование - краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект - сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта.
2. Выделите главное, составьте план.
3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора.
4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.
5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

4.2. Методические рекомендации по подготовке к лабораторным занятиям

Для того чтобы лабораторные занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на лабораторных занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и

самостоятельно студенту рекомендуется провести самопроверку усвоенных знаний, ответив на контрольные вопросы по изученной теме.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала – умение отвечать на вопросы для собеседования.

Контроль самостоятельной работы студентов Контроль самостоятельной работы проводится преподавателем.

Предусмотрены следующие виды контроля: собеседование.

Подробные критерии оценивания компетенций приведены в Фонде оценочных средств для проведения текущей и промежуточной аттестации.

Вопросы для собеседования

1. Статистические методы анализа

1. Что такое случайная величина и как она применяется в геофизике?
2. Объясните разницу между выборкой и генеральной совокупностью.
3. Что такое математическое ожидание и дисперсия?
4. Как оценивается корреляция между двумя геофизическими параметрами?
5. Как определить, имеет ли геофизический сигнал тренд?
6. В чем суть регрессионного анализа и как его применяют к скважинным данным?
7. Что показывает коэффициент корреляции?
8. Зачем используются доверительные интервалы?
9. Что такое РСА (анализ главных компонент) и зачем он нужен в геофизике?
10. Как различить шум и полезный сигнал с помощью статистики?

2. Спектральный анализ

11. Что такое спектр сигнала?
12. Объясните физический смысл преобразования Фурье.
13. Чем дискретное преобразование Фурье отличается от быстрого (FFT)?
14. Какие характеристики спектра наиболее важны в интерпретации геофизических данных?
15. Что происходит при увеличении длины окна в спектральном анализе?
16. Как спектральный анализ помогает в выявлении циклических структур?
17. Приведите пример геофизической задачи, решаемой с помощью FFT.
18. Что такое разрешающая способность спектра?
19. Почему важно использовать окно (например, Хэмминга, Ханна) при спектральном анализе?
20. Как интерпретировать пики в спектре?

3. Линейные системы

21. Что такое линейная система в контексте обработки сигналов?
22. Что означает стационарность системы?
23. Объясните, что такое импульсная характеристика.
24. Как свёртка применяется в обработке сейсмических данных?
25. Что такое частотная характеристика линейной системы?

26. Что такое передаточная функция и как её интерпретировать?
27. Приведите пример линейной системы в геофизике.
28. В чем разница между каузальной и некаузальной системой?
29. Что означает устойчивость линейной системы?
30. Как линейные системы используются при моделировании откликов геологических слоев?

4. Фильтрация

31. Зачем фильтровать геофизические данные?
32. В чем разница между пространственной и временной фильтрацией?
33. Какие типы фильтров вы знаете? Примеры.
34. Что такое полосовой фильтр и где он применяется?
35. Как определить, что фильтрация была успешной?
36. Чем отличается медианный фильтр от гауссового?
37. В чем преимущества адаптивных фильтров?
38. Какие типы шумов типичны для сейсмических данных и как их устраняют?
39. Что такое фильтр Калмана и в чем его особенность?
40. Какие ошибки могут возникать при неправильной фильтрации?

5. Вейвлет-анализ

41. В чем основное отличие вейвлет-преобразования от Фурье-преобразования?
42. Что такое масштаб в контексте вейвлет-преобразования?
43. Для чего применяются дискретные вейвлеты в геофизике?
44. Приведите примеры вейвлетов и их особенности.
45. Как вейвлет-анализ помогает обнаруживать геологические границы?
46. Что такое мультиразрешающий анализ и зачем он нужен?
47. Как визуализировать результаты вейвлет-анализа?
48. В чем преимущества Morlet-вейвлета в интерпретации сигналов?
49. Что такое синхронная и асинхронная вейвлет-трансформация?
50. Какие геофизические задачи лучше решаются с помощью вейвлетов, а не Фурье?

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он:

Уверенно применяет статистические, спектральные, фильтрационные, линейные и вейвлет-методы обработки геофизических данных, демонстрируя высокий уровень понимания теоретических основ и практического применения.

Легко ориентируется в профессиональных задачах, обоснованно выбирает методы анализа и интерпретации геофизической информации, демонстрирует системный подход и аналитическое мышление.

Свободно объясняет назначение и принципы работы каждого метода, грамотно интерпретирует результаты анализа в контексте геологической модели.

Активно использует полученные знания при выполнении лабораторных работ, проявляет инициативу и самостоятельность, предлагает обоснованные альтернативные решения.

Теоретический материал курса усвоен в полном объеме, студент демонстрирует глубокое понимание ключевых понятий и уверенно отвечает на вопросы.

Выполнил все предусмотренные задания качественно и в срок.

Компетенция ОПК-3 сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он:

Применяет методы обработки и интерпретации геофизических данных в рамках изученного материала, делает это уверенно, но с отдельными методическими неточностями.

Способен самостоятельно выбрать подходящий метод анализа, но может затрудняться в интерпретации сложных ситуаций.

В целом понимает принципы работы методов, но допускает незначительные ошибки при их пояснении и практическом применении.

Уверенно выполняет лабораторные задания, но требует дополнительного пояснения по отдельным этапам работы.

Освоил теоретический материал на хорошем уровне, демонстрирует логичность мышления и способность к аргументации.

Выполнил все задания, однако некоторые из них выполнены с техническими или логическими недочетами.

Компетенция ОПК-3 сформирована на достаточном уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он:

Демонстрирует поверхностное знание методов обработки геофизической информации, может применять их лишь по шаблону, без глубокого понимания.

Частично понимает назначение и возможности методов, испытывает трудности в обосновании выбора подхода.

Делает ошибки при интерпретации результатов, слабо связывает технические данные с геологическим содержанием.

Выполняет лабораторные задания с заметными ошибками, требует постоянной помощи преподавателя.

Теоретические знания фрагментарны, допускает путаницу в терминах и не всегда понимает суть применяемых методик.

Задания выполнены не полностью или с серьезными методическими упущениями.

Компетенция ОПК-3 сформирована на минимальном уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он:

Не способен применить методы обработки геофизических данных даже на базовом уровне.

Не понимает назначения и принципов большинства методов, не способен обосновать выбор способа анализа.

Ошибается в базовых расчетах, демонстрирует полное непонимание алгоритмов и логики анализа данных.

Не способен интерпретировать результаты даже простых лабораторных заданий.

Теоретические знания отсутствуют или крайне фрагментарны, не может ответить на простые вопросы.

Большинство заданий не выполнено или выполнено формально, без понимания сути.

Компетенция ОПК-3 не сформирована.

2. Описание шкалы оценивания

Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя устный ответ на практическом занятии по предложенным вопросам.

Для подготовки к данному оценочному мероприятию необходимо изучить рекомендованную основную и дополнительную литературу, материалы интернет-ресурсов, ознакомиться с медиа-текстами.

При проверке задания, оцениваются степень владения теоретическим материалом, умение применять теоретические знания на практике. Умение грамотно, аргументировано и непротиворечиво излагать теоретический материал и собственные суждения, оценки, примеры.

Оценочный лист

Тема занятия:								
№	ФИО студента	Базовый уровень				Повышенный уровень	Сумма баллов Итоговая оценка	
		Степень владения теоретическим материалом (0-5 баллов)	Примеры (0-5 баллов)	Уровень аргументации (0-5 баллов)	Собственная точка зрения (0-5 баллов)	Апелляция к самостоятельно найденным научным источникам (0-5 баллов)		

Тесты

Номер задания	Правильный ответ	Содержание вопроса	Компетенция
1.	3	Дан ряд чисел: 4, 10, 8, 9, 7, 4. Оценка математического ожидания равна. 1) 5	ОПК-3

		2) 6 3) 7 4) 8	
2.	1	Дан ряд чисел: 6, 10, 10, 7, 9, 6. Выборочная дисперсия равна. 1) 3,0 2) 3,2 3) 3,4 4) 3,6	ОПК-3
3.	4	Дан ряд чисел: 6, 10, 10, 7, 9, 6. Исправленная дисперсия равна. 1) 3,0 2) 3,2 3) 3,4 4) 3,6	ОПК-3
4.	1	Ряд 1: 8, 6, 5, 5, 8, 7, 7. Ряд 2: 6, 5, 9, 6, 8, 7, 8. Определить статистический корреляционный момент рядов. 1) 0 2) -1 3) 1 4) 0,5	ОПК-3
5.	3	Регрессия вида $y(x) = Ax^B$ это: 1) логарифмическая 2) линейная 3) степенная 4) полиномиальная	ОПК-3
6.	2	Регрессия вида $y = +Ax$ B это: 1) логарифмическая 2) линейная 3) степенная 4) полиномиальная	ОПК-3

Номер задания	Правильный ответ	Содержание вопроса	Компетенция
7.	4	Ряд 1: 4, 4, 10, 3, 5, 5, 4. Ряд 2: 5, 8, 8, 3, 9, 4, 5. Определите коэффициент корреляции рядов. 1) 0 2) -0,5 3) 1 4) 0,5	ОПК-3
8.	1	Преобразование Фурье задаётся формулой:	ОПК-3

		1) $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx.$ 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega$ 3) $\ f\ _2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) ^2 dx.$ 4) $(\Delta f)^2 = \frac{1}{\ f\ _2^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 f(x) ^2 dx.$	
9.	2	Обратное преобразование Фурье задаётся формулой: $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx.$ 1) $2) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ix\omega} d\omega$ $3) \quad \ f\ _2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) ^2 dx.$ $4) \quad (\Delta f)^2 = \frac{1}{\ f\ _2^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 f(x) ^2 dx.$	ОПК-3
Номер задания	Правильный ответ	Содержание вопроса	Компетенция
10.	4	Требования к сигналу для разложения в ряд Фурье: 1) Не должно быть разрывов второго рода и число экстремумов должно быть конечным. 2) Не должно быть разрывов второго рода и число разрывов первого рода должно быть конечным. 3) Число разрывов первого рода должно быть конечным и число экстремумов должно быть конечным. 4) Не должно быть разрывов второго рода, число разрывов первого рода должно быть	ОПК-3

		конечным и число экстремумов должно быть конечным.	
11.	3	Дискретное преобразование Фурье используется для: 1) Корреляционного анализа. 2) Анализа предельных циклов. 3) Спектрального анализа. 4) Квантового анализа.	ОПК-3
12.	3	Интегрированию сигнала во временной области соответствует следующая операция в частотной области: 1) Умножению на $j\omega$. 2) Умножению на 2π . 3) Умножению на $1/(j\omega)$. 4) Умножению на $1/(2\pi)$.	ОПК-3
13.	1	Локальная аномалия это 1) Аномалия, в 5 раз меньшая изучаемой площади. 2) Аномалия, в 2 раза меньше изучаемой площади. 3) Аномалия, в 5 раз большая изучаемой площади. 4) Аномалия, в 2 раза больше изучаемой площади.	ОПК-3
14.	4	Аддитивная модель геофизического поля представляет собой: 1) Поле = Сигнал + помеха. 2) Поле = Сигнал * помеха. 3) Поле = Сигнал / помеха. 4) Поле = Сигнал + помеха.	ОПК-3

Критерии оценивания компетенций

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он правильно выполнил 88-100 % тестовых заданий

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он правильно выполнил 72-87 % тестовых заданий

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он правильно выполнил 53-71 % тестовых заданий

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он правильно выполнил менее 53 % тестовых заданий

Список источников для выполнения СРС

Перечень основной литературы

1. Митрофанов, Г. М. Обработка и интерпретация геофизических данных : учебное пособие : [16+] / Г. М. Митрофанов ; Новосибирский государственный технический университет. - 2-е изд. - Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2019. 168 с. : ил. - Режим доступа: по подписке. - URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=574895>. - Библиогр. с. 106. - ISBN 978-577823805-3. - Текст : электронный.
2. Набатов В.В. Обработка и интерпретация результатов геофизических исследований и неразрушающего контроля : учебное пособие / Набатов В.В.. — Москва : Издательский Дом МИСиС, 2018. — 78 с. — ISBN 978-5-906953-55-1. — Текст : электронный // IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/84415.html>. — Режим доступа: для авторизир. Пользователей
3. Умняшкин, С. В. Основы теории цифровой обработки сигналов : учебное пособие : [16+] / С. В. Умняшкин. - 5-е изд., исправл. и доп. - Москва : Техносфера, 2019. - 550 с. : ил., схем. - (Мир цифровой обработки). - Режим доступа: по подписке. - URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=597188>. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-594836-5572. - Текст : электронный.

Перечень дополнительной литературы

1. Шахова, О. А. Статистическая обработка результатов исследований : учебное пособие / О. А. Шахова. — Тюмень : Издательство «Титул», 2022. — 103 с. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/119099.html>. — Режим доступа: для авторизир. Пользователей
2. Соловицкий, А. Н. Дистанционные методы при геофизических исследованиях : учебное пособие : [16+] / А. Н. Соловицкий ; Кемеровский государственный университет. - Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2020. - 84 с. : ил., табл., схем. - Режим доступа: по подписке. - URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=685053>. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-8353-2738-6. - Текст : электронный.

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Теоретические основы обработки геофизической информации». Ставрополь: СКФУ, 2022.
2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов по дисциплине «Теоретические основы обработки геофизической информации». Ставрополь: СКФУ, 2022. **Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины** 1. <http://catalog.ncfu.ru> - электронные каталоги Ассоциации электронных библиотек учебных заведений и организаций СКФО.
2. <http://www.biblioclub.ru> - электронно-библиотечная система «Университетская библиотека онлайн».
3. <http://www.iprbookshop.ru/> - ЭБС «IPRbooks».