

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ**  
**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования**  
**«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

**к практическим занятиям по дисциплине «Теоретическая и прикладная  
механика»**

для студентов направления подготовки 18.03.01 Химическая технология  
профиль Основной органический и нефтехимический синтез

Ставрополь

2026

Данные методические указания предназначены для подготовки студентов к практическим занятиям по дисциплине «Прикладная механика». Методические указания составлены в соответствии с рабочим учебным планом и программой дисциплины. Методические указания содержат основные теоретические положения по соответствующей теме практического занятия; практические задачи; приводятся примеры решения типовых задач. Приведены задачи, предлагаемые студенту для самостоятельного решения; вопросы для самопроверки, список рекомендуемой литературы по каждой теме.

Практические занятия по дисциплине «прикладная механика» имеют целью расширение знаний по этому предмету, получение навыков практических расчётов и принятия конструкторских решений, способствуют освоению компетенции.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Практическое занятие 1. <b>Строение механизмов</b>                                                                               | 5   |
| Практическое занятие 2. <b>Структурный анализ и синтез механизмов</b>                                                            | 14  |
| Практическое занятие 3. <b>Графический метод сложения сил плоской сходящейся системы</b>                                         | 22  |
| Практическое занятие 4. <b>Графоаналитический и аналитический методы сложения сил плоской сходящейся системы</b>                 | 36  |
| Практическое занятие 5. <b>Определение реакций опор твёрдого тела</b>                                                            | 46  |
| Практическое занятие 6. <b>Определение скоростей и ускорений точек твёрдого тела при поступательном и вращательном движениях</b> | 68  |
| Практическое занятие 7. <b>Применение основных теорем динамики к исследованию движения материальной точки</b>                    | 77  |
| Практическое занятие 8. <b>Изучение результатов испытания малоуглеродистой стали на растяжение</b>                               | 87  |
| Практическое занятие 9. <b>Изучение результатов испытания различных материалов на сжатие</b>                                     | 97  |
| Практическое занятие 10. <b>Проверка прочности стержней</b>                                                                      | 102 |
| Практическое занятие 11. <b>Построение эпюр внутренних сил и напряжений при растяжении и сжатии</b>                              | 106 |
| Практическое занятие 12. <b>Построение эпюр внутренних силовых факторов при изгибе консольных балок</b>                          | 123 |
| Практическое занятие 13. <b>Определение геометрических характеристик сложных сечений</b>                                         | 134 |
| Практическое занятие 14. <b>Расчёт сжатого стержня на устойчивость</b>                                                           | 150 |
| Практическое занятие 15. <b>Определение геометрических</b>                                                                       | 160 |

**параметров резьбы**

Практическое занятие 16. Изучение методики расчёта 168

**резьбовых соединений**

Практическое занятие 17. Выбор электродвигателя. 178

**Кинематический и силовой расчёт приводных станций**

Практическое занятие 18. Расчет и конструирование валов 190

**редукторных механизмов**

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

### СТРОЕНИЕ МЕХАНИЗМОВ

**Цель работы:** Изучение строения рычажных механизмов, определение числа степеней свободы кинематической пары и механизма.

#### Теоретическое обоснование

Твердые тела, из которых образуется механизм, называют **звеньями**. Звено – либо одна деталь, либо совокупность нескольких деталей, жёстко соединённых между собой. Неподвижное звено механизма для краткости называют **стойкой**; понятие неподвижности стойки для механизмов транспортных машин, в частности летательных аппаратов, – условное, поскольку в этом случае сама стойка движется. Звеньям дают названия по характеру движения, которое они совершают.

**Кривошип** – звено, вращающееся на полный оборот вокруг оси, жёстко связанной со стойкой.

**Коромысло** – звено, делающее неполный оборот вокруг оси, жёстко связанной со стойкой.

**Ползун** – звено, совершающее поступательное прямолинейное движение относительно стойки.

**Шатун** – звено, соединённое вращательными парами с подвижными звеньями. Шатун совершает относительно стойки сложное (вращательное и поступательное) движение.

**Камень** – звено, совершающее поступательное движение по подвижной направляющей, называемой кулисой.

**Кулиса** – подвижная направляющая.

По названию звеньев обычно называется и механизм, например: кривошипно-ползунный, кулисно-коромысловый.

Свободное тело имеет число степеней свободы  $H=6$ , т.е. шесть возможных независимых движений. Их можно представить как изменения трёх

независимых координат точки тела, выбранной в качестве полюса, и трёх углов независимых поворотов тела вокруг полюса (рис. 1.1).

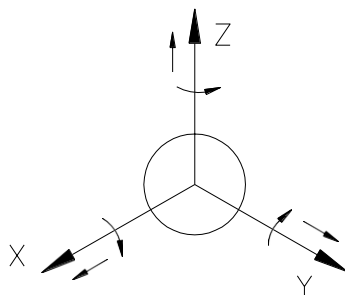


Рисунок 1.1 – Возможные независимые движения твёрдого тела

**Кинематической парой** (сокращенно – *парой*) называют подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев (рисунок 1.2).

Всякое ограничение движений называется условием связи. Совокупность поверхностей, линий и точек звена, входящих в соприкосновение (контакт) с другим звеном пары, называют **элементом** пары.

### Классификация кинематических пар

Пару называют **низшей**, если элементы звеньев соприкасаются только по поверхности, и **высшей**, если только по линиям или в точках. При этом линейный или точечный контакт понимается как первоначальный — при соприкосновении звеньев без усилия, — а под нагрузкой звенья, образующие высшую пару, будут соприкасаться по некоторой фактической поверхности, называемой пятном контакта.

Кинематические пары классифицируют по числу  **$H$  степеней свободы** в относительном движении звеньев (подвижность пары) и по числу  **$S$  условий связи** (ограничений), накладываемых парой на движение одного звена относительно другого. При этом предполагается, что все связи — геометрические, налагающие ограничения только на координаты точек звена, входящего в кинематическую пару, в его относительном движении.

Так как для свободного тела в пространстве число степеней свободы равно шести, то величины  $H$  и  $S$  связаны соотношением:  **$H=6-S$** , где  $S=1,2,3,4$  или 5. При  $S=0$  пары не существует, а имеются два тела, движущихся

независимо друг от друга; при  $S=6$  кинематическая пара становится жестким соединением деталей, т. е. одним звеном. По величине  $S$  определяют класс кинематической пары: различают одноподвижные пары (V класса,  $H=1$ ,  $S=5$ ), двухподвижные (IV класса,  $H=2$ ,  $S=4$ ), трехподвижные (III класса,  $H=3$ ,  $S=3$ ), четырехподвижные (II класса,  $H=4$ ,  $S=2$ ) и пятиподвижные (I класса,  $H=5$ ,  $S=1$ ).

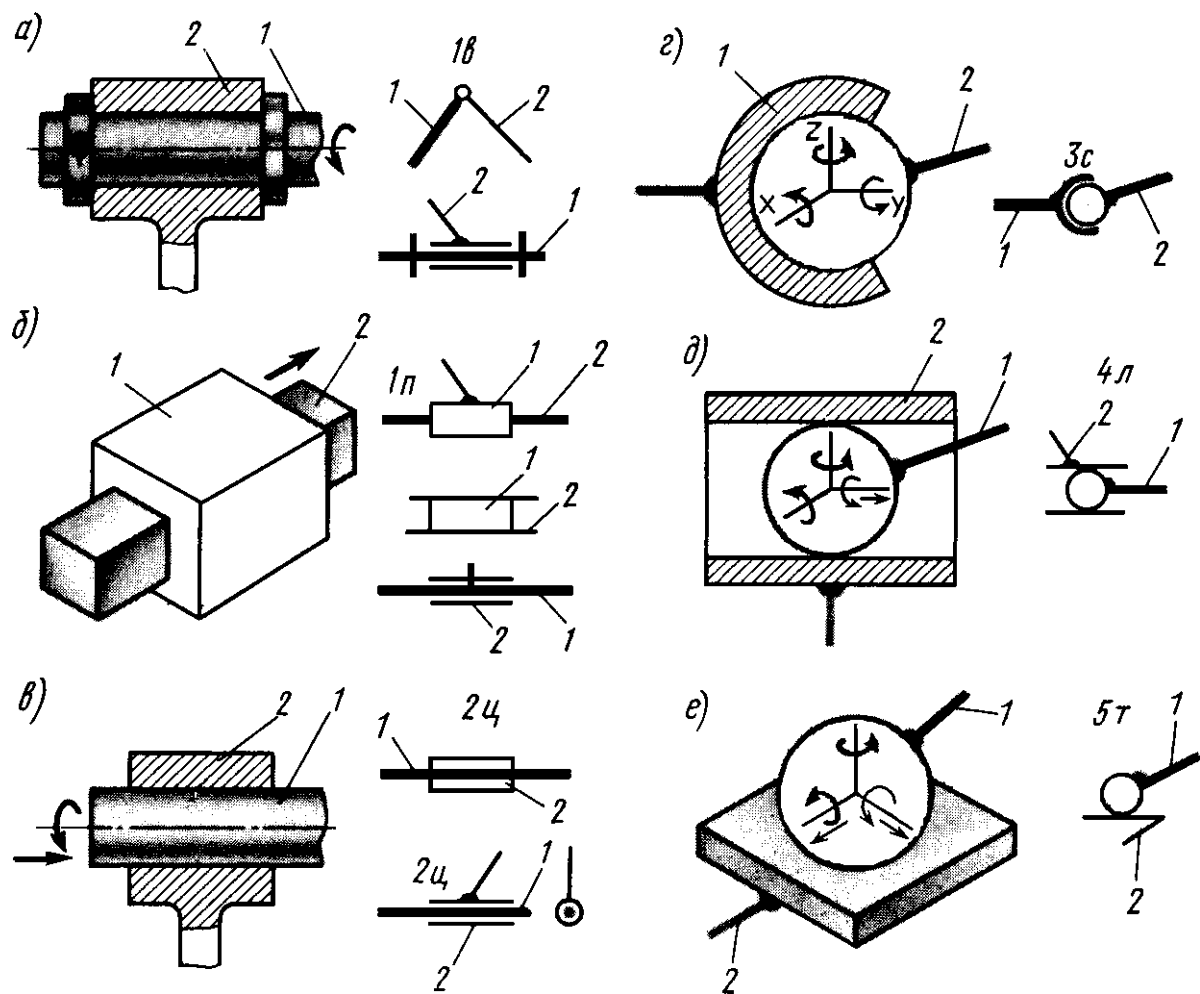


Рисунок 1.2 – Схемы кинематических пар: а) – вращательная, одноподвижная, низшая, замкнутая геометрически; б) – поступательная, одноподвижная, низшая, замкнутая геометрически; в) – цилиндрическая, двухподвижная, низшая, замкнутая геометрически, допускает независимые вращательное и поступательное движения; г) – сферическая, трёхподвижная, допускает три независимых относительных вращения звеньев вокруг осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , низшая, с геометрическим замыканием; д) – четырёхподвижная, высшая, замкнутая геометрически; е) – пятиподвижная, высшая пара с силовым замыканием.

Систему звеньев, образующих между собой кинематические пары, называют **кинематической цепью**. Различают замкнутые и незамкнутые кинематические цепи. В **замкнутой** цепи каждое звено входит не менее чем в две кинематические пары, в **незамкнутой** цепи есть звенья, входящие только в одну кинематическую пару.

**Простой** кинематической цепью называется такая кинематическая цепь, у которой каждое звено входит не более чем в две кинематических пары. **Сложной** – более чем в две.

Все подвижные звенья **плоской** кинематической цепи совершают движения, параллельные одной и той же неподвижной плоскости.

Применяя термин «кинематическая цепь», можно дать следующее определение механизма: **механизм** — кинематическая цепь, в которой при одном неподвижном звене (стойке) и заданном движении одного или нескольких звеньев (ведущих) все остальные звенья (ведомые) совершают однозначно определённые движения. *Выходным* (исполнительным) называют звено, совершающее движение, для которого предназначен механизм.

**Рычажными** называют механизмы, в которые входят жёсткие звенья, соединённые между собой при помощи шарниров и ползунов с направляющими. **Плоские рычажные механизмы** образованы при помощи только вращательных и поступательных пар.

Пусть в механизме имеется  $k$  звеньев (включая стойку). Число подвижных звеньев обозначим  $n=k-1$ . Если бы все подвижные звенья были свободными телами (относительно стойки), общее число степеней свободы их относительно стойки было бы равно  $6n$ . Однако каждая пара V класса накладывает на относительное движение звеньев, образующих пару, 5 связей, каждая пара IV класса – 4 связи, III – 3, II – 2, I – 1.

Поэтому число степеней свободы пространственного механизма, равное числу степеней свободы его подвижной кинематической цепи относительно стойки, определяется по следующей формуле Малышева:

$$W=6n-5p_5-4p_4-3p_3-2p_2-p_1, \quad (1.1)$$

где  $p_5$  – число пар V класса в кинематической цепи,  $p_4$  – число пар IV класса,  $p_3$  – число пар III класса,  $p_2$  – число пар II класса,  $p_1$  – число пар I класса.

В общее число наложенных связей может войти некоторое число  $q$  избыточных (повторных) связей, которые дублируют другие связи, не уменьшая подвижности механизма, а только обращая его в статически неопределимую систему. С учётом избыточных связей формула (1.1) принимает вид

$$W=6n-5p_5-4p_4-3p_3-2p_2-p_1+q. \quad (1.2)$$

**Если избыточных связей нет ( $q=0$ ), механизм – статически определимая система.** Сборка механизма происходит без деформирования звеньев, последние как бы самоустанавливаются; поэтому такие механизмы называют самоустанавливающимися. Если избыточные связи есть ( $q>0$ ) то механизм — статически неопределимая система. Сборка механизма и движение его звеньев становятся возможными только при деформировании последних (или при наличии зазоров в кинематических парах). Формула (1.2) впервые, в несколько ином виде, была дана П.И. Сомовым в 1887 г. и развита А.П. Малышевым в 1923 г. и носит название формулы Сомова–Малышева.

На относительное движение всех звеньев плоского механизма наложено 3 условия связи. Число степеней свободы плоского механизма, т. е. число степеней свободы его подвижной кинематической цепи относительно стойки, определяется по следующей формуле Чебышева (1869 г.):

$$W_{\Pi}=3n-2p_5-p_4. \quad (1.3)$$

Т.к.  $p_5 = p_n$  – число низших пар,  $p_4 = p_v$  – число высших пар, и учитывая избыточные связи получаем

$$W_{\Pi}=3n-(2p_n+p_v-q_n). \quad (1.4)$$

Проанализируем влияние подвижности на характер движения звеньев в механизме.

Если  $W=0$ , то звенья механизма не имеют возможности двигаться, (имеем неподвижную ферму).

Если  $W=1$ , то необходимо одно ведущее звено, закон движения которого задан. Это позволит рассчитать движение остальных звеньев.

Если  $W=2$ , то при одном ведущем звене 1, движение других звеньев непредсказуемо. Они могут двигаться в произвольном направлении. Необходимо два ведущих звена, чтобы однозначно определить движение всех остальных звеньев, иначе механизм является кинематически неопределимым.

**Аппаратура и материалы:** Модели рычажных механизмов.

### Пример выполнения работы

**Дано:** модель рычажного механизма.

**Требуется:** изобразить структурную схему механизма, обозначить на ней все звенья и кинематические пары, классифицировать звенья и кинематические пары, определить число степеней свободы механизма как плоского и как пространственного.

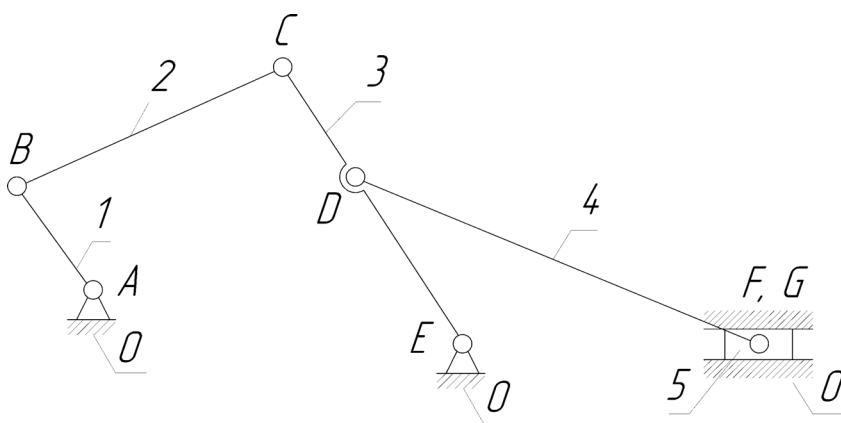
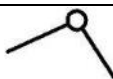
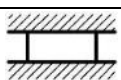


Рисунок 1.3 – Структурная схема кривошипно-коромыслового механизма.

1. Обозначаем все звенья цифрами. Стойку обозначаем нулём, ведущее звено – кривошип обозначаем единицей. (Рисунок 1.3).
2. Называем звенья механизма по характеру их движения: 0 – стойка; 1 – кривошип; 2 – шатун; 3 – коромысло; 4 – шатун; 5 – ползун.
3. Обозначаем кинематические пары буквами алфавита. (Рисунок 1.3).

4. Классифицируем кинематические пары. Результаты сводим в таблицу.  
(Таблица 1.1). Вид движения в парах рычажных механизмов может быть вращательным или поступательным.

Таблица 1.1 – Классификация кинематических пар механизма.

| №<br>п/п | Обозначение | Звенья | Изображение к.п.                                                                    | Класс | Вид движения |
|----------|-------------|--------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------|--------------|
| 1        | A           | 0; 1   |    | 5     | вр.          |
| 2        | B           | 1; 2   |    | 5     | вр.          |
| 3        | C           | 2; 3   |    | 5     | вр.          |
| 4        | D           | 3; 4   |   | 5     | вр.          |
| 5        | E           | 0; 3   |  | 5     | вр.          |
| 6        | F           | 4; 5   |  | 5     | вр.          |
| 7        | G           | 5; 0   |  | 5     | пост.        |

5. Число степеней свободы данного плоского механизма без избыточных связей определяем по формуле (1.4):

$$W_{\pi}=3n-2p_5-p_4.=3\cdot5-2\cdot7=1$$

6. С учётом неточности изготовления этот механизм рассмотрим как пространственный. Определим число избыточных связей по формуле (1.2), при условии, что механизм имеет одну степень свободы.

$$W=6n-5p_5-4p_4-3p_3-2p_2-p_1+q$$

$$q=W-6n+5p_5+4p_4+3p_3+2p_2+p_1=1-6\cdot5+5\cdot7=6.$$

Механизм 6 раз статически неопределимый. Избыточные связи требуют повышенной точности изготовления механизма.

### **Задание**

1. Изобразить структурную схему заданного механизма.
2. Пронумеровать звенья, обозначив стойку нулевым звеном, входное звено - первым.
3. Назвать звенья механизма по характеру их движения.
4. Обозначить кинематические пары заглавными буквами, учитывая, что кинематическая пара – это подвижное соединение только двух звеньев.
5. Заполнить таблицу классификации кинематических пар механизма, где указать соединяемые звенья, условное изображение кинематической пары, её класс и вид движения.
6. Определить число степеней свободы механизма по формуле Чебышева.
7. Определить число избыточных связей по формуле Сомова-Малышева, при условии, что механизм имеет одну степень свободы.

### **Вопросы для защиты работы**

1. Что называется кинематической парой?
2. Что называется классом кинематической пары?
3. Что называется кинематической цепью?
4. Сколько степеней свободы может иметь кинематическая пара?
5. Как определяется число степеней свободы плоского механизма?
6. Число степеней свободы пространственного механизма.
7. Назначение структурной схемы механизма.
8. Сколько неподвижных звеньев может быть в механизме?

### **Рекомендуемая литература по данной теме**

1. Федорова, М. А. Краткий курс по прикладной механике : учебное пособие : / М. А. Федорова, Е. П. Степанова, С. П. Андросов ; Омский государственный технический университет. – Омск : Омский государственный технический университет (ОмГТУ), 2018. – 152 с. : ил.,

- табл., схем., граф. – Режим доступа: по подписке. – URL:  
<https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=682101> (дата обращения:  
09.05.2022). – Библиогр.: с. 136. – ISBN 978-5-8149-2610-4. – Текст :  
электронный.
2. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика :  
учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. —  
279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-  
библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL:  
<http://www.iprbookshop.ru/87388.html> (дата обращения: 19.04.2021). —  
Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI:  
<https://doi.org/10.23682/87388>
3. Глухов, Б.В. Прикладная механика : учебное пособие / Б.В. Глухов,  
Д.С. Воронцов. - М. ; Берлин : Директ-Медиа, 2016. - 188 с. : ил., схем.,  
табл. - Библиогр.: с. 165. - ISBN 978-5-4475-6919-8 ; То же [Электронный  
ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=437454>  
(04.09.2016).

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

### СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ И СИНТЕЗ МЕХАНИЗМОВ

**Цель работы:** Изучение структурных групп рычажных механизмов и способа устранения избыточных связей в кинематических парах.

#### Теоретическое обоснование

**Структурная группа** – кинематическая цепь, присоединение которой к механизму не изменяет числа его степеней свободы и которая не распадается на более простые кинематические цепи с нулевой степенью свободы. Таким образом, структурная группа (группа Ассура) обладает нулевой подвижностью относительно тех звеньев, к которым группа присоединяется.

Определим количественное соотношение звеньев и кинематических пар в структурной группе для плоских механизмов.

$$W_{\text{III}} = 3n - 2p_5 - p_4 = 0. \quad (2.1)$$

В случае плоских рычажных механизмов без кинематических пар 4-го класса, (которые заменяются парами пятого класса), имеем:

$$W_{\text{III}} = 3n - 2p_5 = 0; \quad (2.2)$$

$$3n - 2p_5 = 0;$$

$$p_5 = \frac{3n}{2} \quad \text{или} \quad \frac{p_5}{3} = \frac{n}{2}.$$

Т.е. в структурной группе количество кинематических пар в 1,5 раза больше количества звеньев. Учитывая, что  $p_5$  и  $n$  могут быть только целыми числами, данное соотношение представлено ниже в виде таблицы.

**Таблица 2.1 – Условия образования структурных групп.**

|       |   |   |   |    |       |
|-------|---|---|---|----|-------|
| $n$   | 2 | 4 | 6 | 8  | ..... |
| $p_5$ | 3 | 6 | 9 | 12 | ..... |

Примеры структурных групп приведены на рисунке 2.1. Для схем *а)* и *б)*, по формуле (1) получаем:

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0, \quad \text{где } n = 4, p_5 = 6$$

Для схем *в), з)* и *д)*:

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0, \quad \text{где } n = 2, p_5 = 3$$

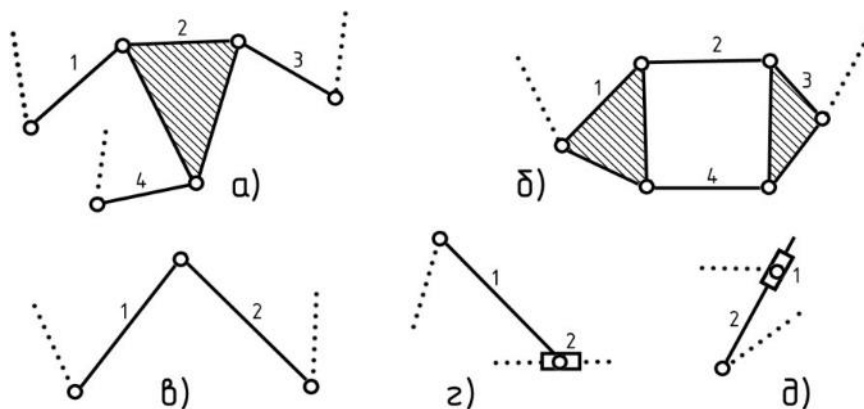


Рисунок 2.1 – Примеры структурных групп (свернутые схемы) : а) 3 класс, 3 порядок; б) 4 класс, 2 порядок; в)-д) 2 класс, 2 порядок

**Класс структурной группы** (по И. И. Артоболовскому) определяется числом кинематических пар, образующих наиболее сложный замкнутый контур группы. По этой аналогии, несмотря на то, что нет такого понятия «двуугольник», структурные группы, приведенные на рисунке 2.1в–д (а также любые другие, состоящие из двух звеньев), относят ко 2 классу.

**Порядок структурной группы** определяется числом элементов звеньев, которыми она присоединяется к имеющемуся механизму (т. е. числом её внешних (незавершённых) кинематических пар). На рисунке 2.1 звенья, не принадлежащие данной структурной группе, показаны пунктиром. Структурная группа на рисунке 1а имеет 3 порядок, а структурные группы на рисунке 1б–д имеют 2 порядок. Вообще все структурные группы 2 класса имеют 2 порядок, поэтому такие структурные группы классифицируются по видам.

**Вид структурной группы 2 класса** определяется расположением вращательных (В) и поступательных (П) кинематических пар 5 класса (рисунок 2.2).

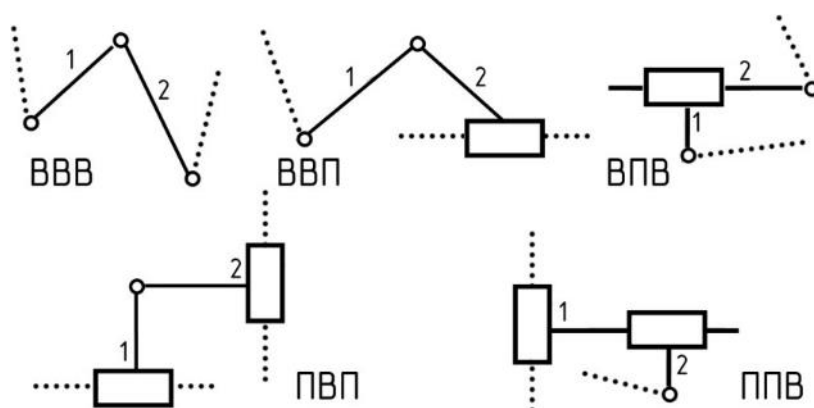


Рисунок 2.2 – Виды структурных групп второго класса и второго порядка (развернутые схемы): BBB-1, BBП-2, ВПВ-3, ПВП-4, ППВ-5

**Первичный механизм** (по И. И. Артоблевскому – механизм I класса, начальный механизм), представляет собой простейший двухзвенный механизм, состоящий из подвижного звена и стойки. Эти звенья образуют либо вращательную кинематическую пару «кривошип – стойка» (рисунок 2.3, а), либо поступательную пару «ползун – направляющие» (рисунок 2.3, б). Начальный механизм имеет одну степень подвижности. Число первичных механизмов равно числу степеней свободы механизма.

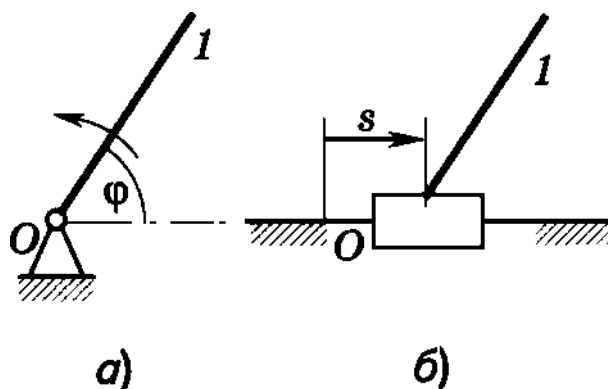


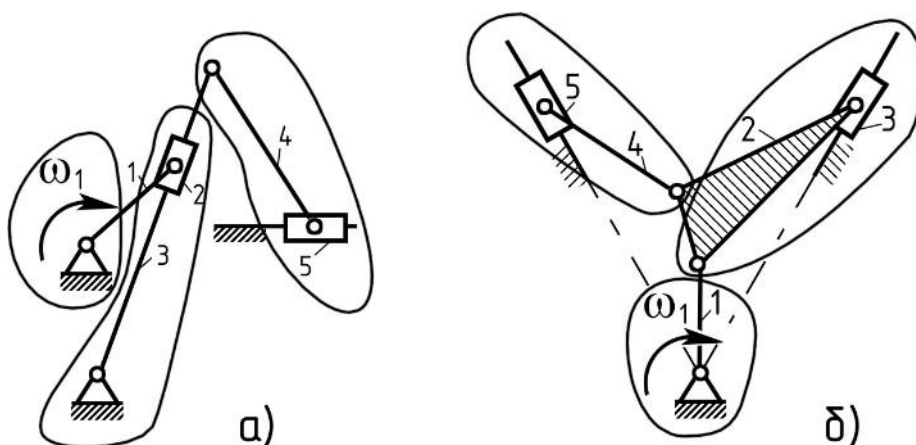
Рисунок 2.3 – Первичные механизмы:

а) обобщённая координата – угловая координата  $\varphi$ ;

б) обобщённая координата – прямолинейная координата  $s$ .

**Анализ механизмов** заключается в разделении (расчленении) механизма на структурные группы (рисунок 2.4). Рекомендуется отделение групп начинать со звеньев, наиболее удалённых от ведущего звена. В первую очередь отделяются группы Ассура наиболее низкого класса. Каждое звено и каждая кинематическая пара могут входить только в одну структурную группу. Разделение кинематической цепи механизма на группы Ассура ведётся до тех пор, пока не останутся только начальные механизмы.

Класс механизма определяется наивысшим классом входящей в него структурной группы; при структурном анализе заданного механизма класс его зависит и от выбора первичных механизмов.



Р

исун  
ок 2.4  
–

Прим  
еры  
расчл

енения: а) кулисного механизма строгального станка, б) V-образного двигателя внутреннего сгорания

**Правило образования механизмов (принцип Ассура).** Любой механизм образуется последовательным присоединением к ведущему звену и стойке любого количества структурных групп. Процесс образования называется **синтезом механизма** (рисунок 2.5). Первая группа присоединяется к первичному механизму, каждая последующая – к полученному механизму, при этом нельзя присоединять группу к одному звену.

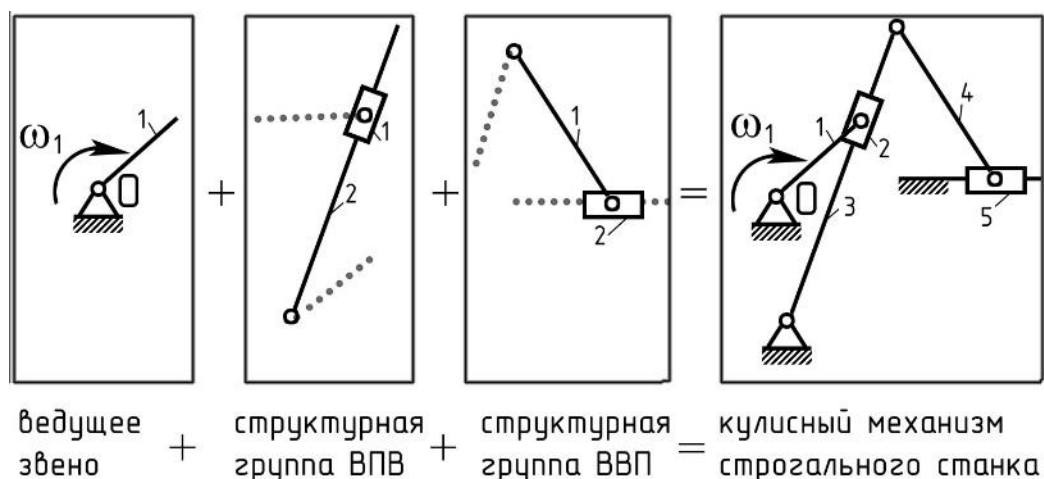


Рисунок 2.5 – Пример синтеза механизма

**Структурный синтез плоских механизмов** следует проводить, применяя метод Ассура, который обеспечивает статически-определимую плоскую схему механизма ( $q_n=0$ ), и формулу Малышева, поскольку вследствие неточностей изготовления плоский механизм в какой-то мере получается пространственным.

**Аппаратура и материалы:** Модели рычажных механизмов.

### Пример выполнения работы

**Дано:** Структурная схема механизма (продолжаем изучать механизм, приведённый в примере предыдущего занятия).

**Требуется** разделить механизм на структурные группы, определить их класс, порядок и вид. С учётом возможной неточности изготовления рассмотреть этот механизм как пространственный. Предложить структурную схему этого пространственного механизма, лишённую избыточных связей. Записать формулу для числа степеней свободы пространственного механизма.

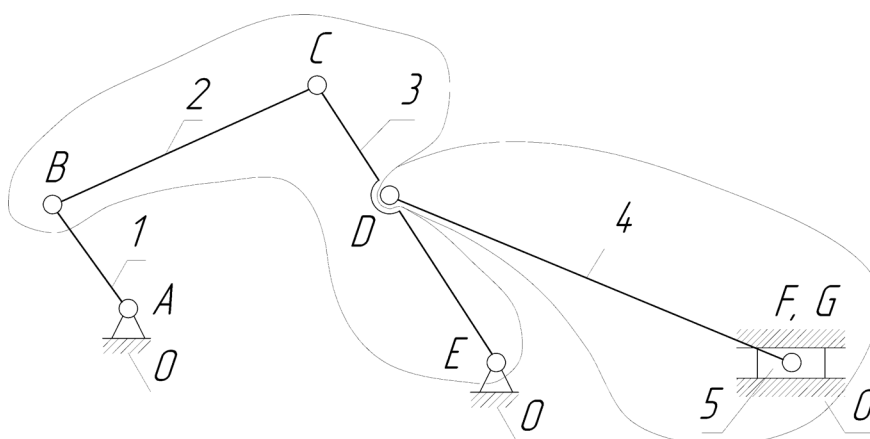


Рисунок 2.6 – Ведомая цепь разделена на две группы Асура 2-го класса.

1. Выделяем на структурной схеме структурные группы (рисунок 2.6) и проводим их классификацию. Результаты сводим в таблицу.

Таблица 2.1 – Классификация структурных групп механизма.

| №<br>п/п | Звенья | Кине-<br>мат.<br>пары | Изображение с.г. | Класс                                | Вид      |
|----------|--------|-----------------------|------------------|--------------------------------------|----------|
| 1        | 0, 1   | A                     |                  | Условный<br>механизм<br>1-го класса. |          |
| 2        | 2, 3   | B, C, E               |                  | 2                                    | 1<br>BBB |
| 3        | 4, 5   | D, F, G               |                  | 2                                    | 2<br>BBП |

2. Предлагаем структурную схему этого механизма, лишённую избыточных связей (рисунок 2.7). Вращательные пары пятого класса C и D заменяем

цилиндрическими парами четвёртого класса. Вращательные пары пятого класса В и F заменяем сферическими парами третьего класса.

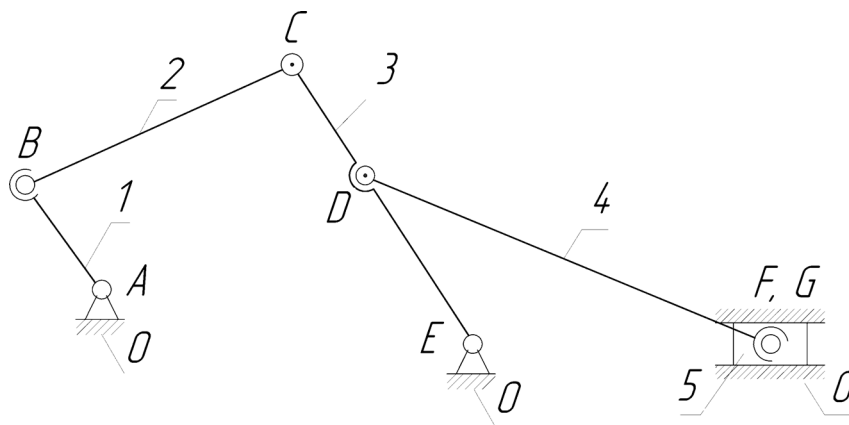


Рисунок 2.7 – Структурная схема пространственного механизма без избыточных связей

3. Записываем формулу для числа степеней свободы пространственного механизма

$$W=6n-5p_5-4p_4-3p_3-2p_2-p_1=6\cdot 5-5\cdot 3-4\cdot 2-3\cdot 2=1$$

Сборка такого механизма происходит без деформации звеньев.

### Контрольные вопросы для самопроверки

1. Что называется структурной группой.
2. Что называется классом (порядком, видом) структурной группы.
3. Как связано количество звеньев и кинематических пар в структурной группе для плоских механизмов?
4. Сколько первичных механизмов содержит механизм с одной степенью свободы? С двумя степенями свободы?
5. Анализ механизмов.
6. Правило образования механизмов.

### ЗАДАНИЕ

Для механизма, заданного преподавателем, определить структурные группы, их класс, порядок и вид. С учётом возможной неточности изготовления

рассмотреть этот механизм как пространственный. Предложить структурную схему этого пространственного механизма, лишённую избыточных связей. Записать формулу для числа степеней свободы пространственного механизма.

### **Рекомендуемая литература по данной теме**

1. Федорова, М. А. Краткий курс по прикладной механике : учебное пособие : / М. А. Федорова, Е. П. Степанова, С. П. Андросов ; Омский государственный технический университет. – Омск : Омский государственный технический университет (ОмГТУ), 2018. – 152 с. : ил., табл., схем., граф. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=682101> (дата обращения: 09.05.2022). – Библиогр.: с. 136. – ISBN 978-5-8149-2610-4. – Текст : электронный.
2. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика : учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87388.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/87388>
3. Глухов, Б.В. Прикладная механика : учебное пособие / Б.В. Глухов, Д.С. Воронцов. - М. ; Берлин : Директ-Медиа, 2016. - 188 с. : ил., схем., табл. - Библиогр.: с. 165. - ISBN 978-5-4475-6919-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=437454> (04.09.2016).

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

**ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД СЛОЖЕНИЯ СИЛ ПЛОСКОЙ СХОДЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ**

**Цель работы:** получение навыков графического сложения векторов и определения неизвестных слагаемых.

**Теоретическая часть**

Для выполнения задания необходимо знать аксиомы статики.

1. Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю ( $F_1=F_2$ ) и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 1).

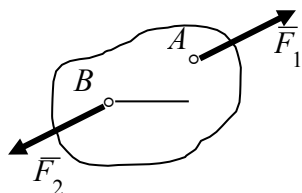


Рисунок 1 – Равновесие абсолютно твёрдого тела под действием двух сил

В конструкциях часто используют лёгкий (представляемый невесомым) стержень, который прикрепляют с помощью двух шарниров, расположенных по концам. На такой стержень действуют только две силы. При равновесии эти силы, согласно первой аксиоме, направлены вдоль прямой, соединяющей центры шарниров. По закону равенства действия и противодействия стержень действует на детали конструкции силами, направленными вдоль той же прямой.

**Закон параллелограмма сил:** две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют *равнодействующую*, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.

Вектор  $\vec{R}$ , равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (рис. 2), называется *геометрической суммой* векторов  $F_1$  и  $F_2$ :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1)$$

Следовательно, закон параллелограмма сил соответствует правилу сложения векторов, известному из геометрии и векторной алгебры, и его можно еще сформулировать так: **две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, равную геометрической (векторной) сумме этих сил и приложенную в той же точке.**

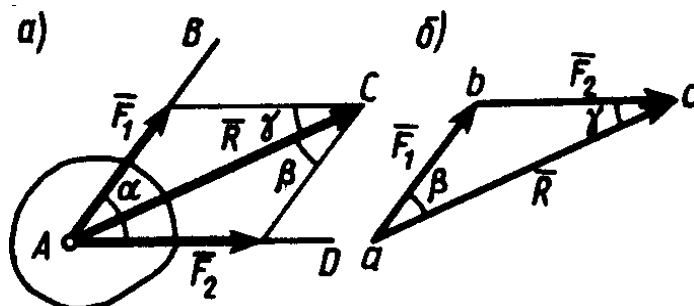


Рисунок 2 – Сложение двух сил: а – по правилу параллелограмма; б – построением силового треугольника

Систему сил, приложенных к одному твёрдому телу, называют *сходящейся*, если линии действия всех сил пересекаются в одной точке. Перенеся все силы к точке пересечения их линий действия, можно рассматривать такую систему как силы, приложенные к одной точке, или как *пучок сил*. Система сходящихся сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  эквивалентна одной равнодействующей силе  $\vec{R}$ , которую можно определить построением силового многоугольника

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_k = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad \text{или в упрощённой записи} \quad \vec{R} = \sum \vec{F}_k. \quad (2)$$

Слагаемые являются векторами, и сложение производится геометрически в любой последовательности. Сила  $\vec{R}$  приложена в точке пересечения линий действия всех слагаемых сил. Но она может быть перенесена вдоль своей линии действия.

Для нахождения графическим способом суммы сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$  (рис. 3, а) откладываем от произвольной точки  $O$  (рис. 3, б) вектор  $\vec{Oa}$ , изображающий в выбранном масштабе силу  $\vec{F}_1$ , от точки  $a$  – вектор  $\vec{ab}$ , изображающий силу  $\vec{F}_2$ , от точки  $b$  – вектор  $\vec{bc}$ , изображающий силу  $\vec{F}_3$ , и т.д.; от конца  $t$  предпоследнего вектора откладываем вектор  $\vec{tn}$ , изображающий силу  $\vec{F}_n$ . Соединяя начало

первого вектора с концом последнего, получаем вектор  $\overrightarrow{On} = \overline{R}$ , изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил:

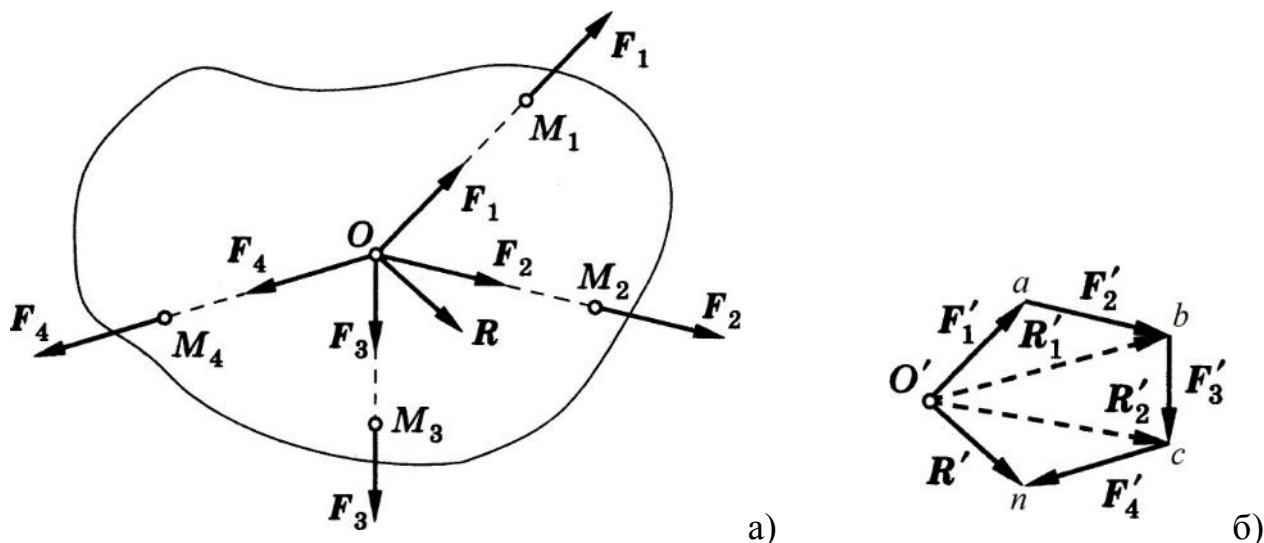


Рисунок 3 – Система сходящихся сил и её геометрическая сумма (главный вектор)  $\overline{R}$ , являющийся равнодействующей

Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твёрдому телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая была равна нулю.

$$\overrightarrow{R} = \sum_{k=1}^n \overrightarrow{F_k} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \dots + \overrightarrow{F_n} = \vec{0}. \quad (3)$$

В *геометрической форме* необходимое и достаточное условие равновесия системы сходящихся сил выражается в том, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнутым (рис. 4). В замкнутом многоугольнике сил все силы направлены по контуру многоугольника в одну сторону по обходу многоугольника.

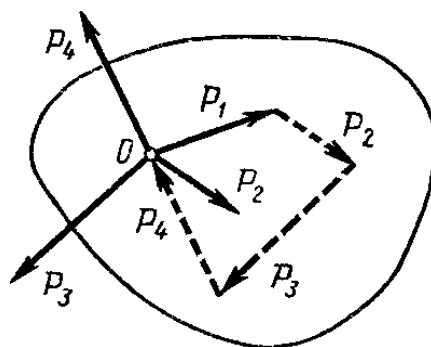


Рисунок 4 – Уравновешенная система сходящихся сил

Из условий равновесия системы сходящихся сил в пространственной задаче можно определить три неизвестных, а в плоской задаче – две неизвестных. В качестве неизвестных в плоской системе сходящихся сил могут выступать:

- а) модуль и направление одной силы;
- б) модуль одной из сил и направление второй;
- в) направления двух сил данной системы;
- г) модули двух сил.

Направление силы на плоскости выражается величиной угла между вектором силы и заданным направлением (другой силы). Точки приложения сил можно переносить вдоль их линий действия, не изменяя условие равновесия, поэтому положение точки приложения силы на линии действия не определяется. Точкой приложения всех сил системы сходящихся сил можно считать точку пересечения их линий действия.

Можно выделить три метода нахождения неизвестных составляющих векторных величин (три метода решения задач): графический, графоаналитический, аналитический.

Графический метод предполагает изображение многоугольника сил в выбранном масштабе. Неизвестные величины модулей и направлений получают измерением на чертеже. Метод непригоден для пространственной системы сил и имеет невысокую точность, определяемую точностью построений и измерений. Но графический метод – самый наглядный метод.

### **Задача 1 и её решение**

Фонарь весом 90 Н подвешен на кронштейне ВАС (рисунок 5). Определить реакции горизонтального стержня АВ и наклонной тяги АС, если угол ВАС равен  $\alpha=30^\circ$ , крепления в точках А, В и С шарнирные.

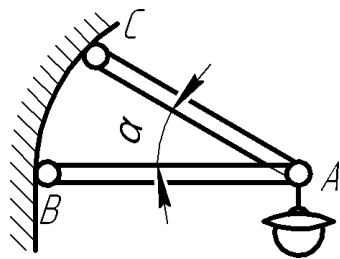


Рисунок 5 – Схема кранштейна

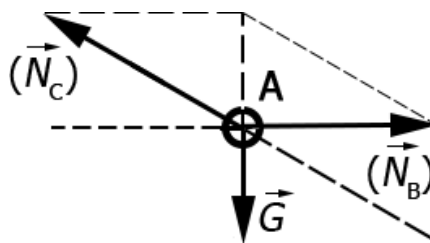


Рисунок 6 – Силы, действующие на шарнир А. В скобках – те силы, модули которых не известны.

### Анализ условий задачи 1.

Линия действия силы  $\vec{G}$  – веса фонаря проходит через точку  $A$ , в которой фонарь подвешен. Но точка  $A$  неподвижна благодаря действию приложенных к ней сил реакции со стороны стержней  $\vec{N}_B$  и  $\vec{N}_C$ . От шарнира к шарниру через стержень любой формы передаётся только сила, линия действия которой проходит через центры шарниров. Следовательно, линия действия  $\vec{N}_B$  – это прямая  $AB$ , линия действия  $\vec{N}_C$  – это прямая  $AC$ . Точка  $A$  находится в равновесии под действием трёх сходящихся сил, расположенных в одной плоскости (рис. 6). Сила  $\vec{G}$  известна полностью, у двух других сил известны линии действия, но неизвестны модули. Две неизвестных величины можно определить из одного векторного уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил.

### Решение задачи 1 графическим методом

Так как шарнир  $A$  под действием трёх сил находится в равновесии, силовой треугольник, составленный из них, должен быть замкнутым. Выбираем произвольную точку  $D$  (рисунок 7) и откладываем от неё отрезок  $DE$ , изображающий силу  $\vec{G}$ . Если выбрать длину отрезка  $DE$ , например, 22,5 мм, то масштаб изображения сил

$$\mu_{\text{сил}} = \frac{G}{DE} = \frac{90 \text{ Н}}{22,5 \text{ мм}} = 4 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}.$$

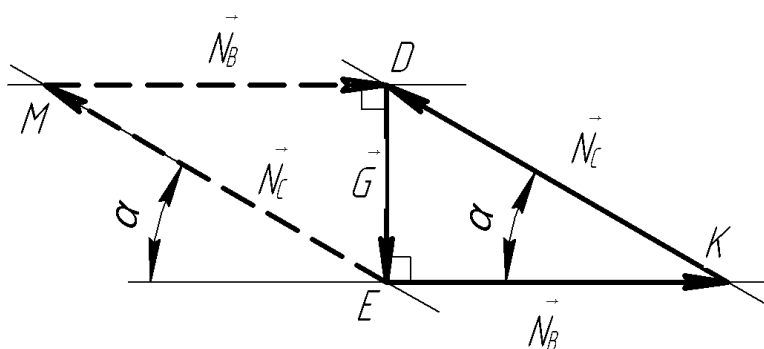


Рисунок 7 – Два варианта построения треугольника сил

Поскольку сила реакции стержня АВ перпендикулярна к  $\vec{G}$ , то через точку Е (или D) проводим вспомогательную прямую, перпендикулярную к DE. Поскольку сила реакции стержня АС проходит под углом  $\alpha=30^\circ$  к АВ, отложенным по часовой стрелке, то через точку D (или E) проводим вспомогательную прямую под углом  $\alpha=30^\circ$  к проведённой ранее вспомогательной прямой. Находим точку пересечения вспомогательных прямых К (или М). Полученный треугольник DEК (или DEM) изображает замкнутый многоугольник сил, действующих на точку А. Направления сил на полученных отрезках обозначаем стрелками так, чтобы начало следующего вектора совпало с концом предыдущего. Треугольник DEК соответствует порядку слагаемых  $\vec{G} + \vec{N}_B + \vec{N}_C = 0$  (а треугольник DEM соответствует порядку слагаемых  $\vec{G} + \vec{N}_C + \vec{N}_B = 0$ ). Измеряем на плане сил отрезки  $EK=MD=39$  мм,  $KD=EM=45$  мм.

Следовательно,

$$N_B = \mu_{\text{сил}} \cdot |EK| = 4 \frac{\text{Н}}{\text{мм}} \cdot 39 \text{ мм} = 156 \text{ Н},$$

$$N_C = \mu_{\text{сил}} \cdot |KD| = 4 \frac{\text{Н}}{\text{мм}} \cdot 45 \text{ мм} = 180 \text{ Н}.$$

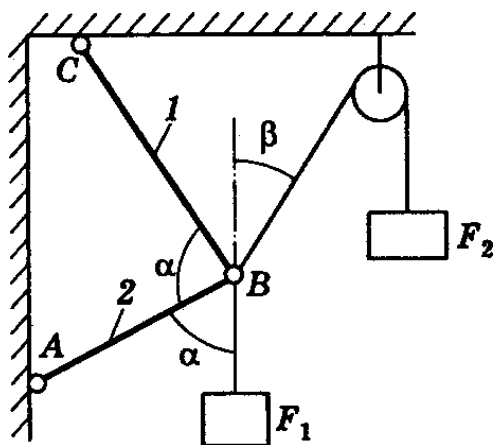
В рассмотренной задаче была задана одна сила – вес фонаря  $\vec{G}$ . Если будут заданы несколько сил, можно их сложить как векторы и получить одну силу – равнодействующую заданных сил.

### Задача 2 и её решение

**Задача 2.** Два стержня соединены шарниром В между собой, а шарнирами А и С соединены с основанием (рисунок 8). К собранному таким образом кронштейну в точке В привязаны два каната, натянутые заданными силами  $F_1$  и  $F_2$ . Стержни и

канаты располагаются в одной плоскости, к которой перпендикулярны оси шарниров и ось блока, направляющего канат.

Определить продольные силы в стержнях  $BC$  (1) и  $BA$  (2). Собственный вес стержней и канатов, а также трение не учитывать.



Дано:

Значения углов:  $\alpha=80^\circ$ ,  $\beta=60^\circ$ ;

силы натяжения канатов:

$F_1=100$  кН,  $F_2=75$  кН.

Рисунок 8 – Исходная схема к задаче 2

### Решение задачи 2. Уточнение схемы конструкции.

Так как силы действуют только вдоль стержней и канатов, а вес стержней и канатов не учитывается, то не имеют значения длины стержней и канатов. Их можно изображать любой длины. Важны только направления, задаваемые углами.

Углы наклона стержней и канатов  $\alpha$  и  $\beta$  различаются по вариантам задания (таблица 2), поэтому общую схему нужно уточнить, вычертить её в соответствии с заданными углами. На нашей схеме базой отсчёта всех углов служит вертикаль – направление первого каната и силы  $F_1$ . От неё откладываем по часовой стрелке угол  $\alpha=80^\circ$  и получаем направление стержня  $BA$  и линию действия силы  $N_A$ , с которой стержень 2 действует на шарнир  $B$  (рисунок 9).

От направления силы  $F_1$  откладываем по часовой стрелке угол  $2\alpha=160^\circ$  и получаем направление стержня  $BC$  и линию действия силы  $N_C$ , с которой стержень 1 действует на шарнир  $B$ .

От направления, противоположного силе  $F_1$ , откладываем по часовой стрелке угол  $\beta=60^\circ$  и получаем направление второго каната и силы  $F_2$  (рисунок 9).

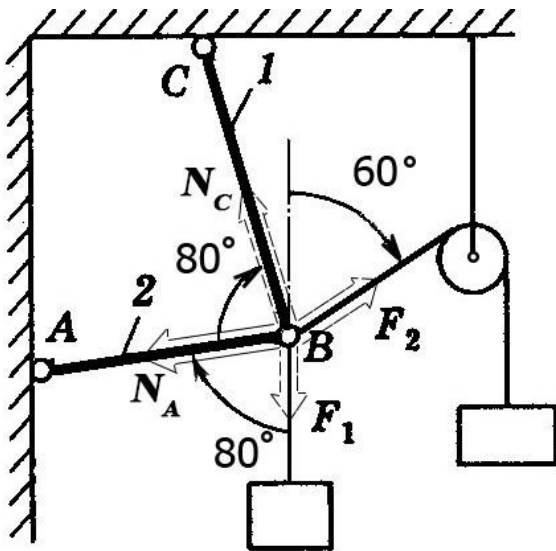


**Рисунок 9** – Уточнённая по заданным углам схема конструкции

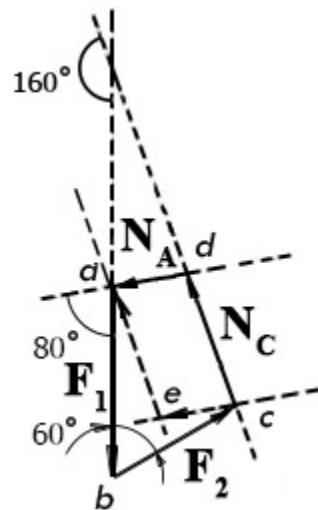


**Рисунок 10** – План сил, действующих на шарнир *B*.

### Решение графическим методом

Далее рассмотрим равновесие точки *B* под действием двух заданных сил  $F_1$ ,  $F_2$  и двух сил реакции стержней  $N_A$ ,  $N_C$ . **Построим план сил**, то есть цепочку сил (рисунок 10), приложенных к точке *B* кронштейна. Начинаем с известных сил  $F_1$  и  $F_2$ . Строим сумму  $F_1 + F_2$  (или  $F_2 + F_1$ ). От произвольной точки *a* проводим вектор *ab* произвольной длины, например 50 мм, изображающий силу  $F_1$ . (Рисунок 10 и рисунок 11 (а)). Находим масштаб изображения силы

$$\mu_{\text{сил}} = \frac{F_1}{ab} = \frac{100 \text{ кН}}{50 \text{ мм}} = 2 \frac{\text{кН}}{\text{мм}}.$$

К силе  $F_1$  прибавляем известную силу  $F_2$ . Для этого из точки *b* конца первого слагаемого проводим луч в направлении силы  $F_2$  (рисунок 10 и рисунок 11 (б)) под углом  $\beta = 60^\circ$  по часовой стрелке к направлению, обратному вектору *ab*. На луче откладываем длину вектора *bc*, изображающего силу  $F_2$  в том же масштабе

$$bc = \frac{F_2}{\mu_{\text{сил}}} = \frac{75}{2} \frac{\text{кН}}{\text{кН/мм}} = 37,5 \text{ мм}.$$

Сумму известных сил  $F_1 + F_2$  (или  $F_2 + F_1$ ) можно изобразить вектором *ac*, но не будем перегружать чертёж. Достаиваем замкнутый четырёхугольник неизвестными по модулю силами. Через точки *a* и *c* проводим вспомогательные прямые, параллельные силам  $N_A$  и  $N_C$  под углом  $\alpha = 80^\circ$  и  $2\alpha = 160^\circ$  соответственно к вектору *ab*

по часовой стрелке. (Штриховые линии на рисунке 10 и на рисунке 11 (в)). Находим точку пересечения линий действия  $d$  (или  $e$ ). Получили замкнутый многоугольник векторов  $abcd$  (или  $abce$ ), который изображает многоугольник сил в масштабе 2 кН/мм (рис. 10 и рис. 11 (г)). Измеряем линейкой отрезок  $cd$  (или  $ea$ ), получаем  $|cd|=|ea|=37$  мм и находим модуль силы  $N_C$ :

$$N_C = \mu_{сил} cd = 2 \frac{\text{кН}}{\text{мм}} 37 \text{ мм} = 74 \text{ кН}.$$

Измеряем линейкой отрезок  $da$  (или  $ce$ ), получаем  $|da|=|ce|=20$  мм и находим модуль силы  $N_A$ :

$$N_A = \mu_{сил} da = 2 \frac{\text{кН}}{\text{мм}} 20 \text{ мм} = 40 \text{ кН}.$$

Стрелки векторов, изображающих неизвестные силы, на плане сил расставляем так, чтобы начало следующего вектора совпадало с концом предыдущего.

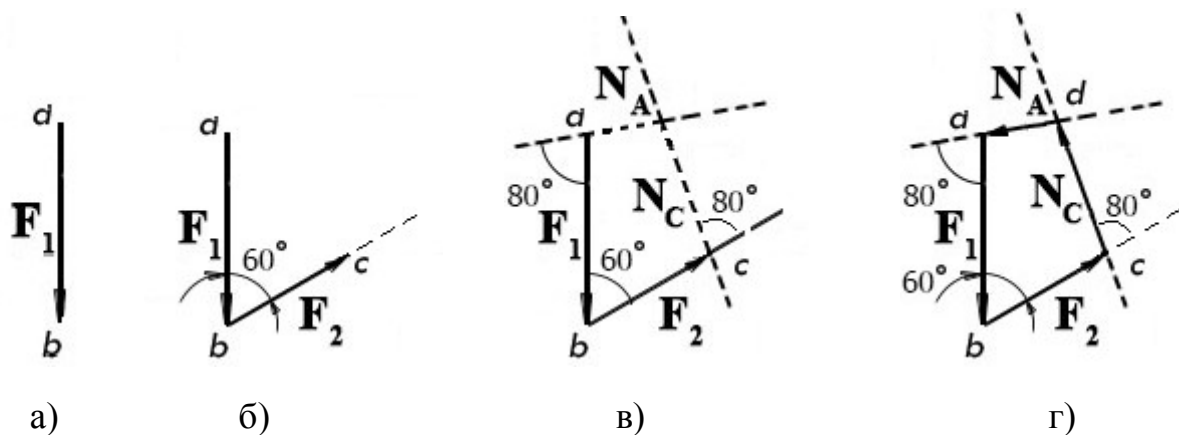


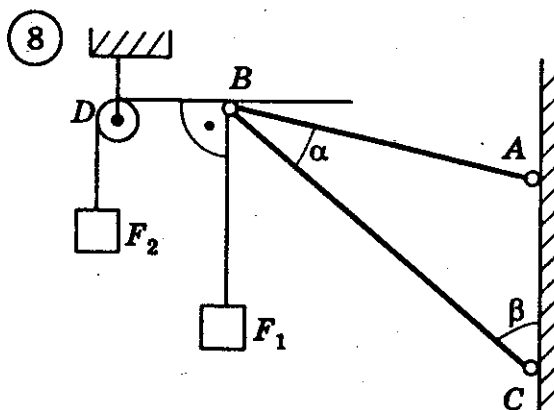
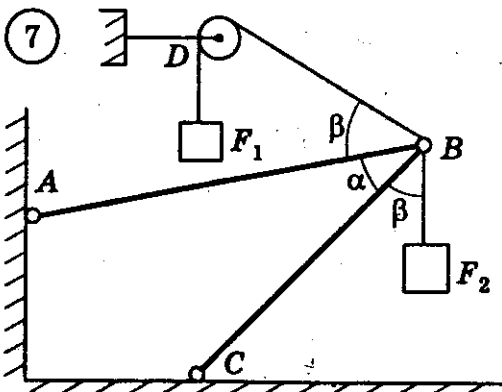
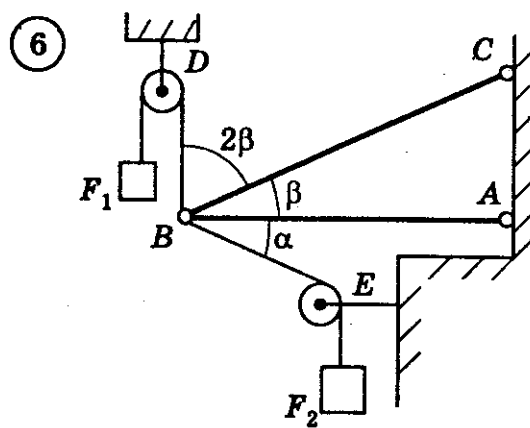
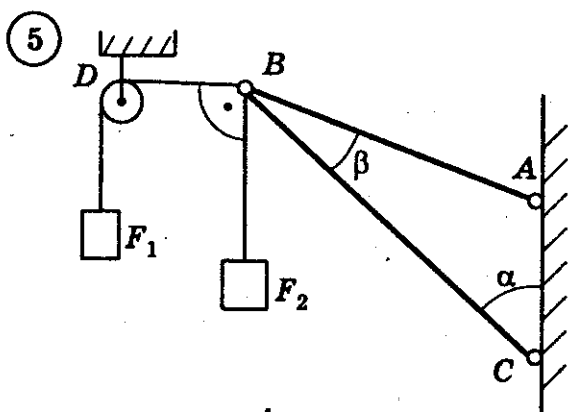
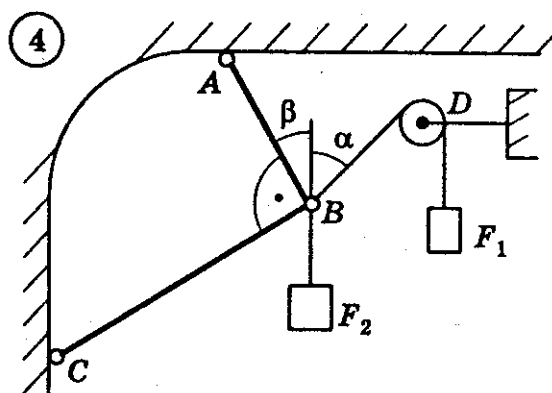
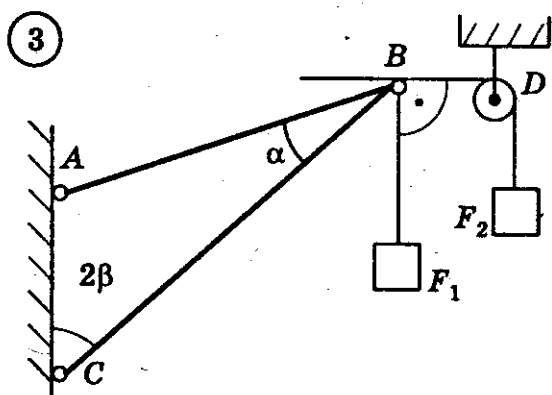
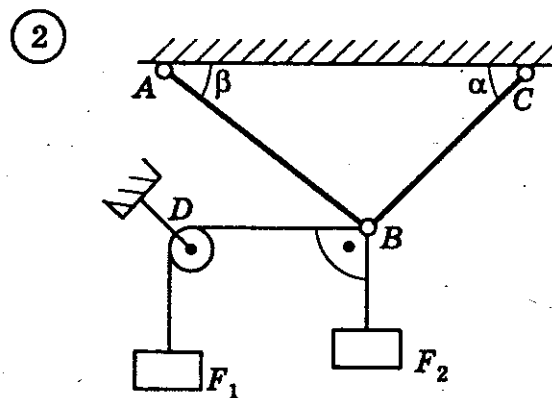
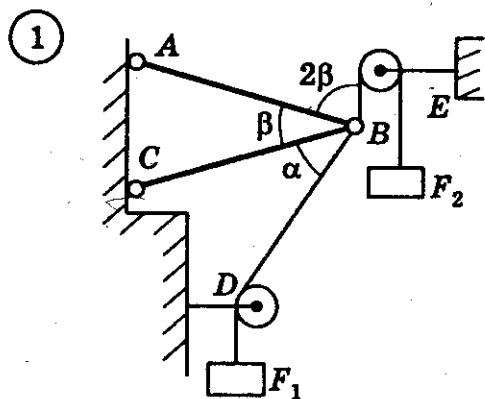
Рисунок 11 – Последовательность выполнения графических построений

### Задание

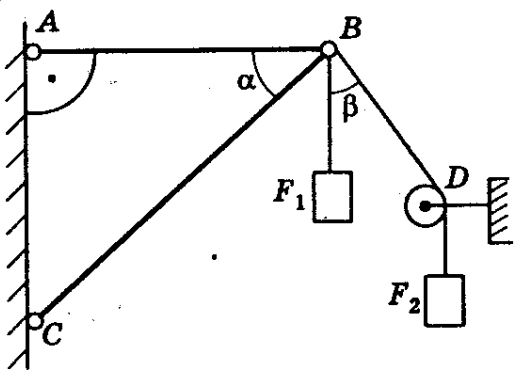
Для шарнирно-стержневой конструкции  $ABC$ , нагруженной в шарнире  $B$ , определить продольные силы в стержнях 1 и 2 графическим методом.

Схемы конструкций приведены в таблице 1. Как правило, номер схемы выбирается по номеру студента в списке группы. Числовые данные приведены в таблице 2. Номер варианта числовых данных, общий для всех студентов группы, назначает преподаватель.

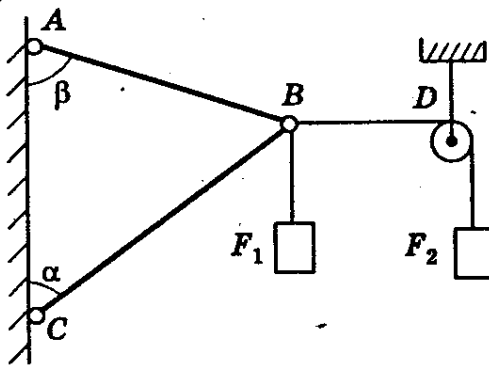
Таблица 1 – Схемы к заданию



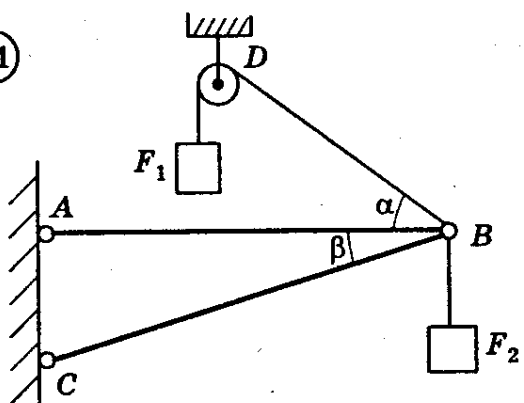
9



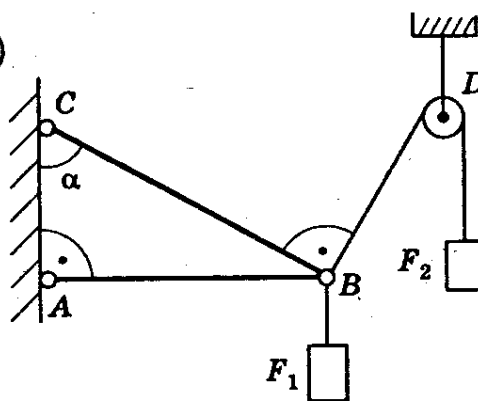
10



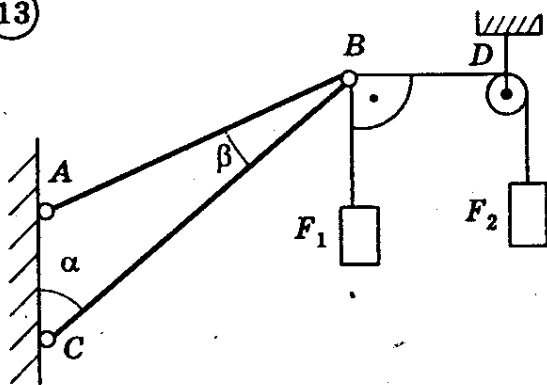
11



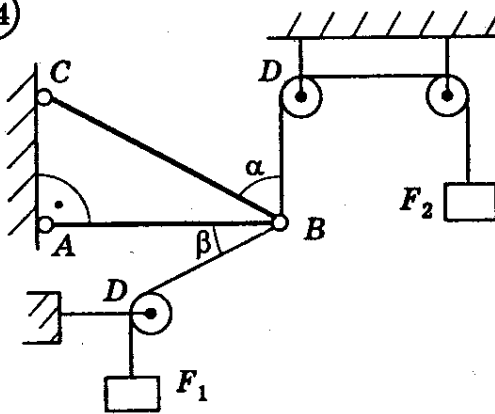
12



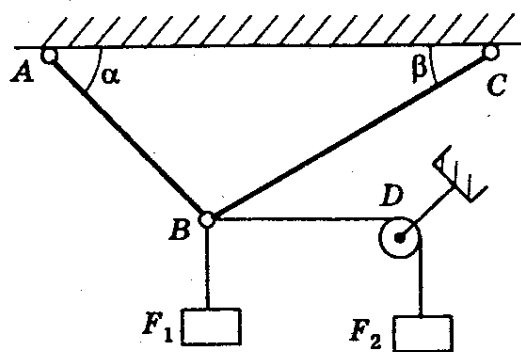
13



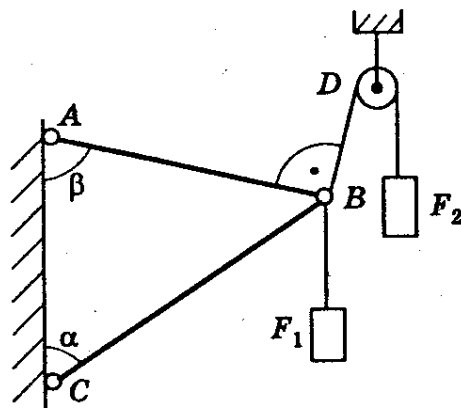
14

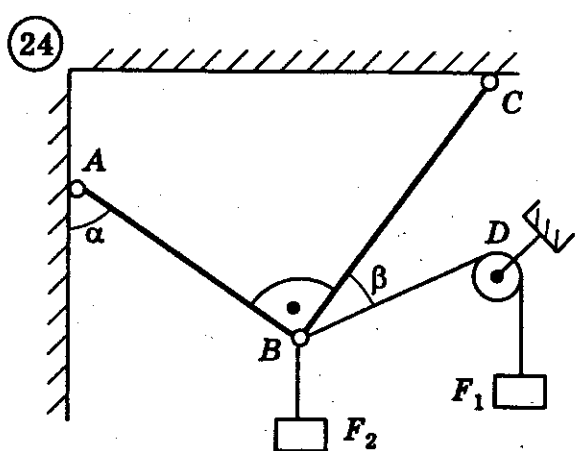
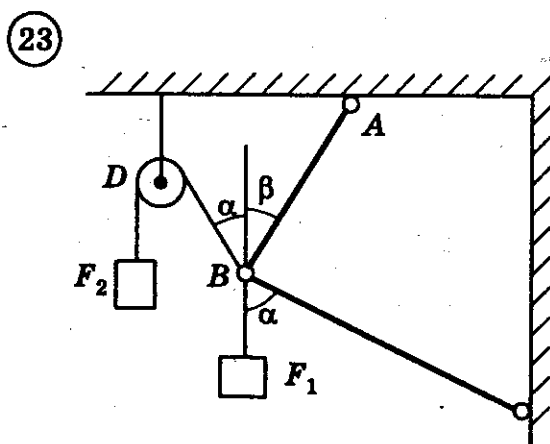
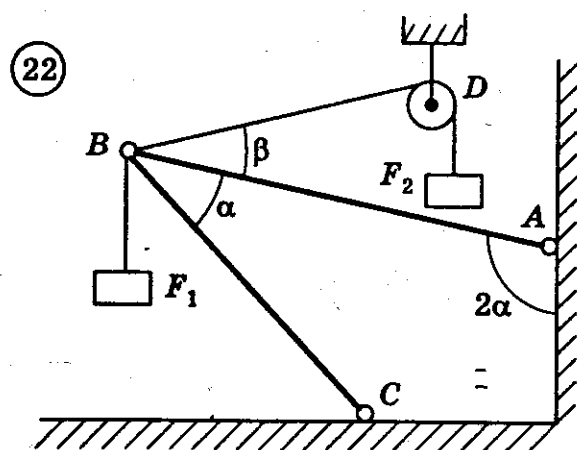
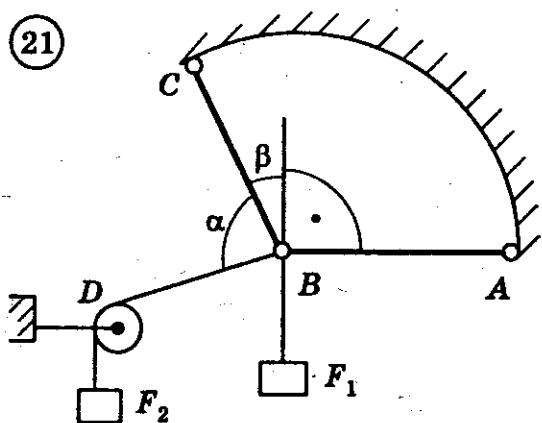
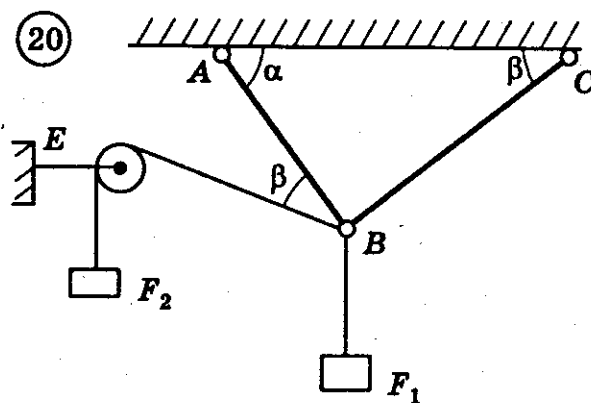
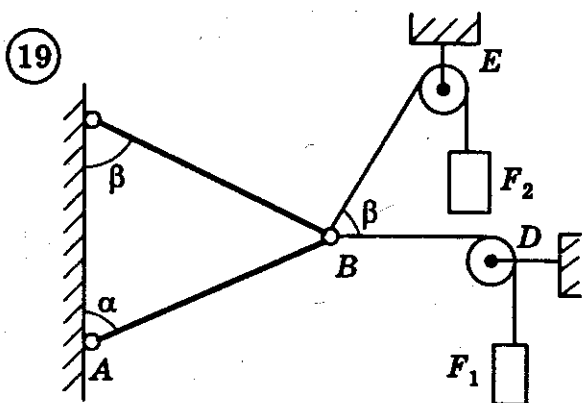
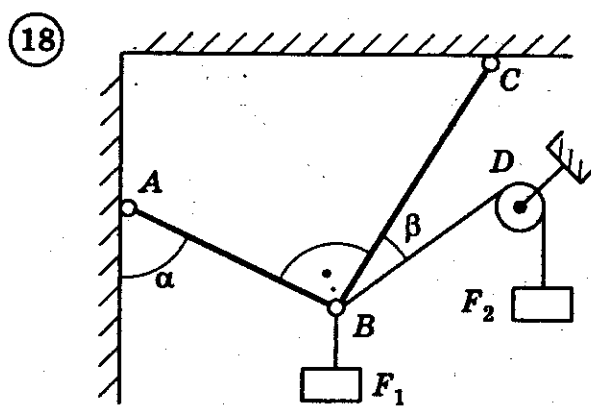
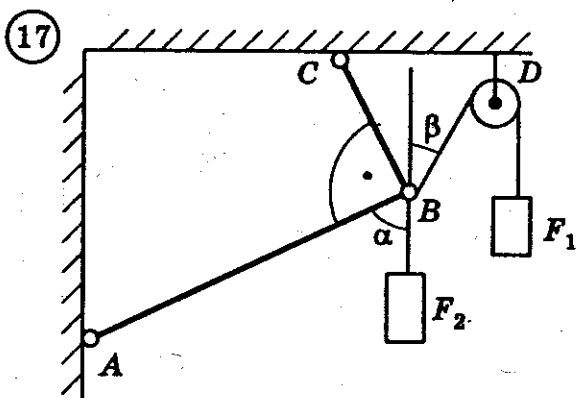


15

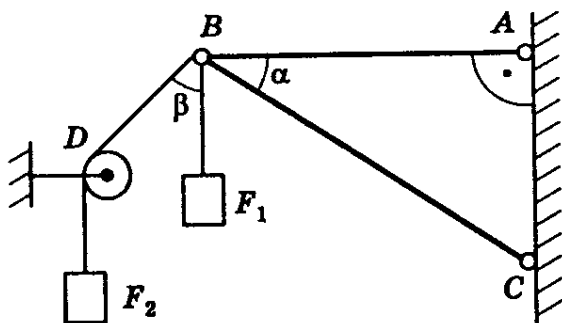


16

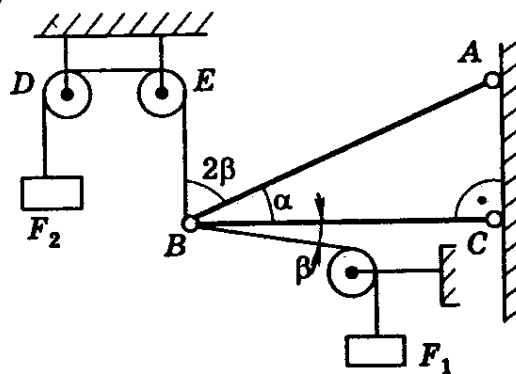




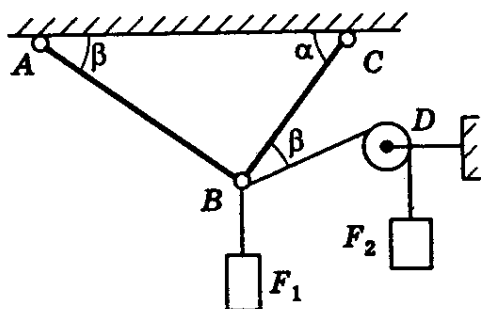
(25)



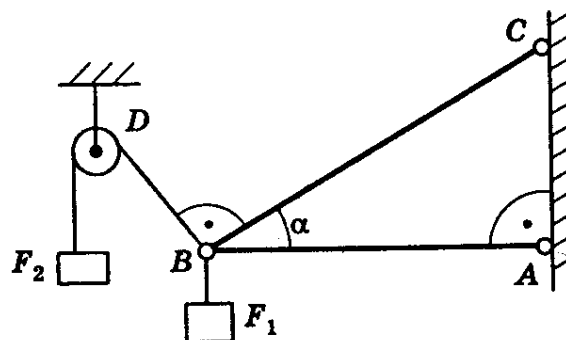
(26)



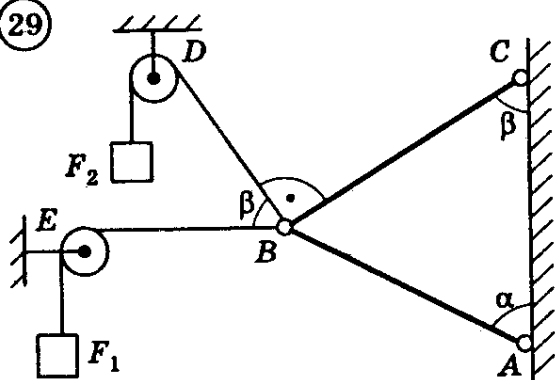
(27)



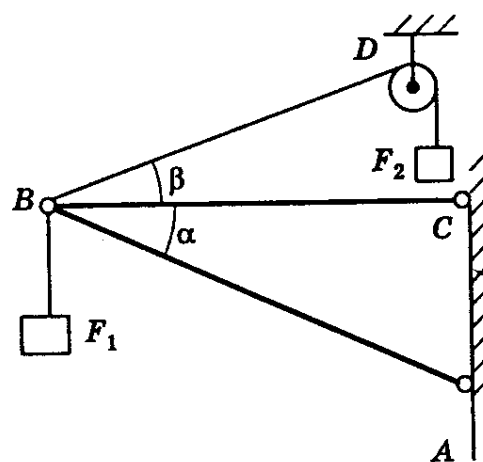
(28)



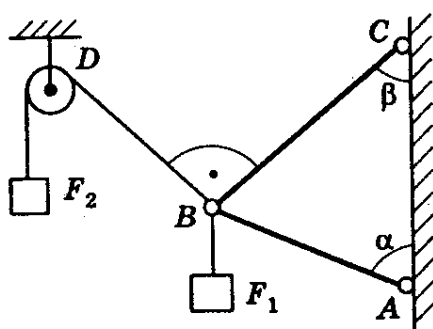
(29)



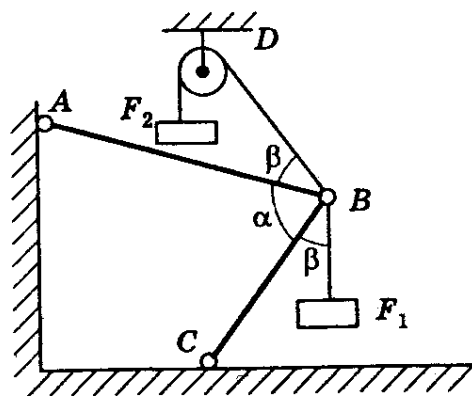
(30)



(31)



(32)



Каждой принципиальной схеме конструкции из таблицы 1 соответствует 15 возможных вариантов числовых значений в таблице 2. Студент должен перерисовать схему, соответствующую его номеру в списке группы, выдерживая значения углов  $\alpha$  и  $\beta$  наклона стержней и канатов, которые заданы всей студенческой группе по таблице 2.

Таблица 2 – Числовые данные для определения сил в стержнях (и проверки стержней на прочность – в одном из следующих занятий)

| Номер<br>варианта | Угол наклона,<br>град |         | Модуль силы,<br>кН |       | Площадь<br>поперечного<br>осечения<br>стержня,<br>см <sup>2</sup> |       |
|-------------------|-----------------------|---------|--------------------|-------|-------------------------------------------------------------------|-------|
|                   | $\alpha$              | $\beta$ | $F_1$              | $F_2$ | $A_1$                                                             | $A_2$ |
| 1                 | 50                    | 40      | 100                | 90    | 10                                                                | 16    |
| 2                 | 40                    | 30      | 140                | 100   | 12                                                                | 14    |
| 3                 | 50                    | 20      | 120                | 100   | 14                                                                | 12    |
| 4                 | 60                    | 10      | 100                | 90    | 16                                                                | 10    |
| 5                 | 70                    | 10      | 90                 | 80    | 18                                                                | 8     |
| 6                 | 80                    | 20      | 80                 | 120   | 8                                                                 | 10    |
| 7                 | 80                    | 30      | 100                | 70    | 10                                                                | 12    |
| 8                 | 70                    | 40      | 120                | 80    | 12                                                                | 14    |
| 9                 | 60                    | 50      | 110                | 90    | 14                                                                | 16    |
| 10                | 50                    | 30      | 140                | 100   | 16                                                                | 18    |
| 11                | 30                    | 40      | 100                | 140   | 18                                                                | 20    |
| 12                | 40                    | 20      | 90                 | 130   | 20                                                                | 18    |
| 13                | 30                    | 50      | 120                | 80    | 18                                                                | 16    |
| 14                | 50                    | 60      | 70                 | 100   | 16                                                                | 14    |
| 15                | 30                    | 60      | 100                | 130   | 10                                                                | 14    |

### **Вопросы для проверки знаний**

1. Закон параллелограмма сил.
2. Что называют системой сходящихся сил?
3. В чём выражается геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил?
4. Сжимаются или растягиваются стержни АВ, АС в первой задаче?
5. Бывает ли одинаковый масштаб изображения сил и чертежа конструкции?
6. Что называют линией действия силы?
7. Как определить направление силы в шарнирно закреплённом стержне графическим методом?
8. Какие неизвестные величины, характеризующие силу, можно определять из условия равновесия сходящейся системы сил?
9. Как должны быть направлены стержни кронштейна, чтобы в них возникали одинаковые по модулю силы?
10. Как изменить наклон стержней, чтобы уменьшить силы в них?

### **Задание повышенной сложности:**

Определить, при каких значениях углов  $\alpha$  и  $\beta$  силы в стержнях не превысят 140 кН в каждом. Значения сил натяжения канатов  $F_1$  и  $F_2$  оставить прежними (таблица 2).

### **Рекомендуемая литература по данной теме**

1 Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-

1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

2 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

3 Цыви́льский В. Л. Теоретическая механика. Учеб. для втузов / В. Л. Цыви́льский. – М. : Абрис, 2012. – 368 с.: ил. ISBN 978-5-4372-0079-7 <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=117515>

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4

### ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ И АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОДЫ СЛОЖЕНИЯ СИЛ ПЛОСКОЙ СХОДЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ

**Цель работы:** получение навыков вычисления проекций сил, выбора направлений осей, составления уравнений равновесия.

**Задача:** определение неизвестных сил из условия равновесия сходящейся плоской системы сил аналитическим методом.

#### Теоретическая часть

**Графоаналитический** метод использует изображения как иллюстрации.

Модули и направления находят, последовательно решая треугольники, которые получаются при сложении и вычитании двух векторов. Если  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , то по

теореме косинусов модуль суммы равен

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \alpha}, \quad (1)$$

а углы треугольника и модули сил связаны теоремой синусов

$$\frac{R}{\sin(180 - \alpha)} = \frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \gamma}, \quad (2)$$

где  $\alpha$  – угол между направлениями сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ ,  $\beta$  – угол между направлениями  $\vec{F}_2$  и  $\vec{R}$ ,  $\gamma$  – угол между направлениями  $\vec{F}_1$  и  $\vec{R}$ . Этот метод удобен для задач о равновесии

трёх сил.

**Аналитический** метод (метод проекций) заключается в проецировании векторного уравнения равновесия на оси координат и решении системы полученных уравнений.

Проекция вектора суммы на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

$$R_x = \sum F_{kx}; \quad R_y = \sum F_{ky}; \quad R_z = \sum F_{kz}. \quad (3)$$

Вектор равен нулю, когда его модуль равен нулю

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0. \quad (4)$$

Для этого одновременно должны выполняться 3 условия

$$R_x = \sum F_{kx} = 0; \quad R_y = \sum F_{ky} = 0; \quad R_z = \sum F_{kz} = 0, \quad (5)$$

которые выражают необходимое и достаточное условие равновесия системы сходящихся сил в *аналитической форме*: для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трёх координатных осей были равны нулю.

Если все действующие на тело сходящиеся силы лежат в одной плоскости, то они образуют плоскую систему сходящихся сил, и остаются два условия равновесия

$$R_x = \sum F_{kx} = 0; \quad R_y = \sum F_{ky} = 0. \quad (6)$$

Знак минус у найденной проекции свидетельствует о её направлении в сторону, противоположную первоначально выбранной. Аналитический метод является универсальным.

### Задача 1 и её решение

Фонарь весом 90 Н подвешен на кронштейне ВАС (рисунок 1). Определить реакции горизонтального стержня АВ и наклонной тяги АС, если угол ВАС равен  $\alpha=30^\circ$ , крепления в точках А, В и С шарнирные.

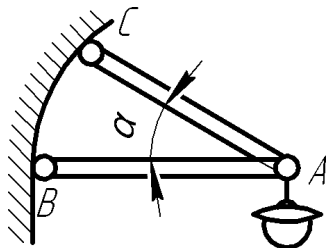


Рисунок 1

#### Решение графоаналитическим методом.

Изображаем силовой треугольник как в графическом методе, но только для наглядности, без определения масштаба. Т.к. стержень АВ расположен горизонтально, то он и сила  $\vec{N}$  перпендикулярны направлению силы тяжести фонаря  $\vec{G}$ . Силовой треугольник является прямоугольным. Тогда

$$N_B = \frac{G}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{90}{\operatorname{tg} 30^\circ}$$

=155,9 H,

$$N_C = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{90}{\sin 30^\circ} = 180 \text{ Н.}$$

### Решение аналитическим методом.

Выбираем направление осей координат: ось  $Ox$  – по горизонтали, ось  $Oy$  – по вертикали (рисунок 2). Составляем уравнения проекций сил на оси координат (6).

$$\sum F_{kx} = 0; \quad N_B - N_C \cos \alpha = 0.$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad N_C \sin \alpha - G = 0.$$

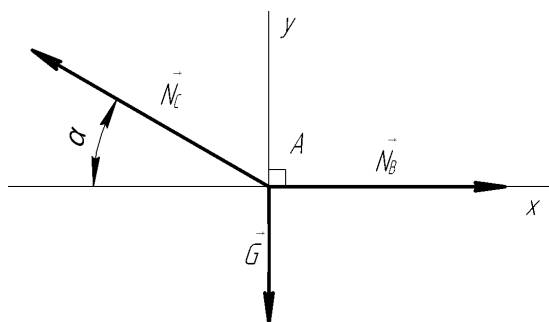


Рисунок 2

Из второго уравнения

$$N_C = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{90}{\sin 30^\circ} = 180 \text{ Н.}$$

Из первого уравнения  $N_B = N_C \cos \alpha = 180 \cos 30^\circ = 155,9 \text{ Н.}$

Получение положительного значения силы подтверждает правильность выбора направления вектора силы на её линии действия. (Получение отрицательного значения свидетельствует о противоположном направлении вектора.). Ответы сравниваем с теми, что получены графическим методом решения в предыдущей работе.

В рассмотренной задаче была задана одна сила – вес фонаря  $\vec{G}$ . Если будут заданы несколько сил, можно сложить их проекции на соответствующие оси и получить проекции равнодействующей заданных сил. Далее решаем аналогично рассмотренной задаче.

### Задача 2 и её решение

**Задача 2.** Шарнирно-стержневая конструкция  $ABC$  нагружена в шарнире  $B$  заданными силами натяжения канатов  $F_1$  и  $F_2$  (рисунок 3). Определить продольные

силы:  $N_C$  – в стержне  $BC$  (1) и  $N_A$  – в стержне  $BA$  (2).

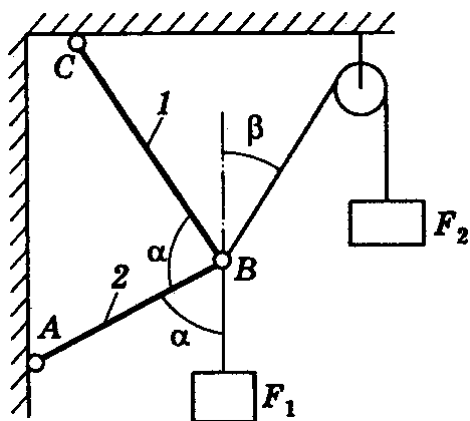


**Рисунок 3** – Исходная схема к задаче 2, вычерченная при произвольных значениях углов  $\alpha$  и  $\beta$

### Решение задачи 2 аналитическим методом

Заданы значения углов:  $\alpha=80^\circ$ ,  $\beta=60^\circ$ ,

и силы натяжения канатов:  $F_1=100$  кН,  $F_2=75$  кН.

Вычерчиваем схему в соответствии с заданными углами (рисунок 4).

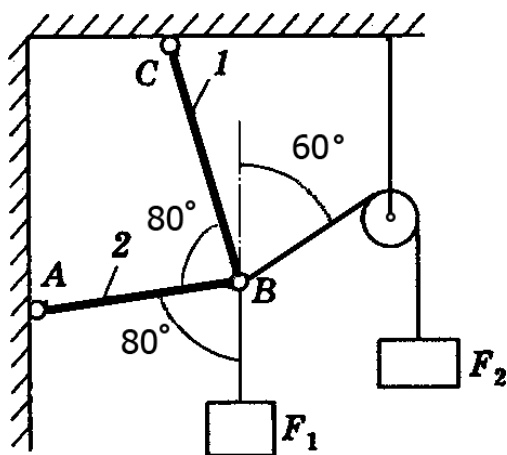


**Рисунок 4** – Уточнённая по заданным углам схема конструкции

Вырезаем узел  $B$  и изображаем его отдельно с действующими на него силами. Длины векторов сил – произвольные (рисунки 5, 6, 7). Точка  $B$  находится в равновесии под действием четырёх сходящихся сил, расположенных в одной плоскости. Канаты тянут точку  $B$  в указанных на схеме направлениях с заданными силами  $F_1$  и  $F_2$ . Линия действия силы  $N_C$  реакции стержня  $BC$  проходит через шарниры  $B$  и  $C$ . Линия действия силы  $N_A$  реакции стержня  $BA$  проходят через шарниры  $B$  и  $A$ . Векторы  $N_A$  и  $N_C$  можно предварительно направить от точки  $B$ , или к ней. Если решение уравнения даст положительное числовое значение силы – значит направление выбрано верно, если отрицательное – значит реакция направлена в противоположную сторону.

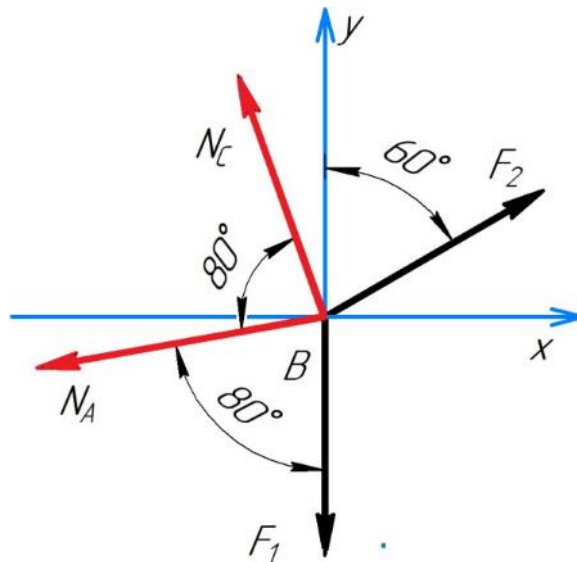


Рисунок 5 – Проецирование сил на оси  $x$  и  $y$

Размещаем в точке  $B$  начало координат. Для нахождения двух неизвестных величин в плоской системе сил нам понадобятся две оси. Можно привычно направить ось  $x$  слева направо и ось  $y$  снизу вверх (рис. 5). Потом спроецировать все силы на каждую ось и приравнять эти суммы к нулю (формулы 6). Но в этом случае на каждую ось проецируются две неизвестных  $N_A$  и  $N_C$ . Придётся решать систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} -N_A \cos 10^\circ - N_C \cos 70^\circ + F_2 \cos 30^\circ + F_1 \cos 90^\circ &= 0 \\ -N_A \cos 80^\circ + N_C \cos 20^\circ + F_2 \cos 60^\circ - F_1 \cos 0^\circ &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Разделить неизвестные в уравнениях равновесия можно не только методами математики, но и методом механики. Воспользуемся тем, что  $\cos 90^\circ = 0$ . Проведём ось  $U$  перпендикулярно к неизвестной силе  $N_A$ , (рис. 6) чтобы исключить эту силу из суммы проекций на ось  $U$ .

Проведём ось  $V$  перпендикулярно к неизвестной силе  $N_C$  (рис. 7), чтобы исключить эту силу из суммы проекций на ось  $V$ . В таком случае каждое из двух уравнений будет содержать только одну неизвестную величину.

По схеме конструкции вычисляем углы между силами и осями. Обозначаем эти углы на рисунках 6 и 7. Составляем два уравнения равновесия.

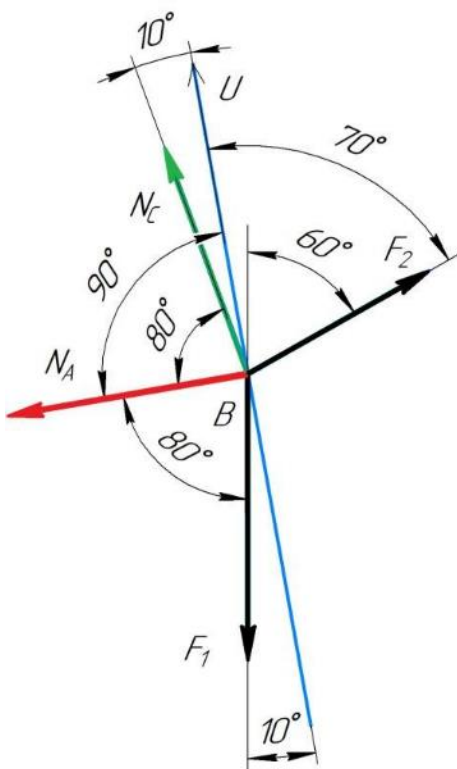


Рис. 6 – Проецирование сил на ось U

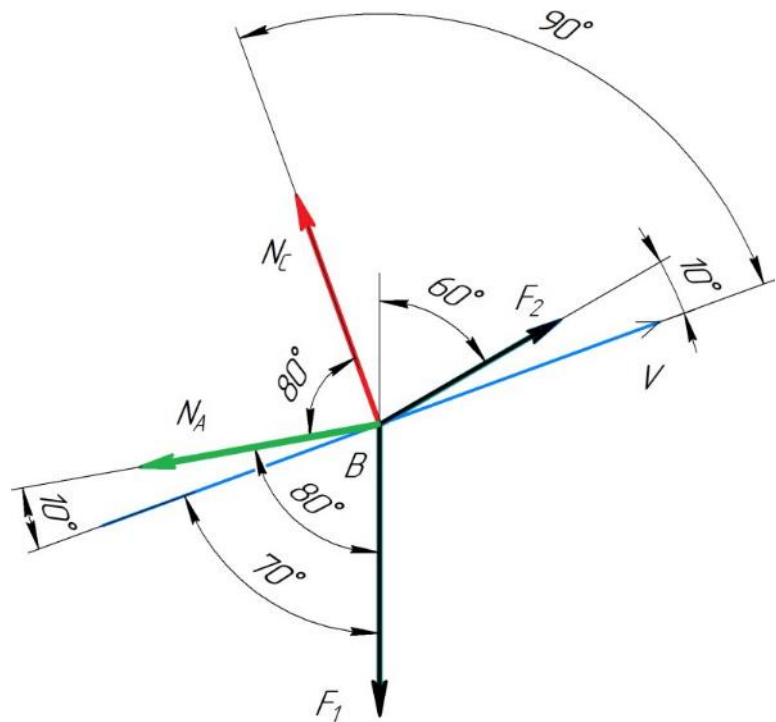


Рис. 7 – Проецирование сил на ось V

$$\sum F_{iU} = 0; \quad N_C \cos 10^\circ + F_2 \cos 70^\circ - F_1 \cos 10^\circ = 0;$$

$$\sum F_{iV} = 0; \quad -N_A \cos 10^\circ + F_2 \cos 10^\circ - F_1 \cos 70^\circ = 0;$$

Из которых находим

$$N_C = \frac{-F_2 \cos 70^\circ + F_1 \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{-75 \cdot 0,342}{0,9848} + 100 = 73,95 \text{ кН};$$

$$N_A = \frac{F_2 \cos 10^\circ - F_1 \cos 70^\circ}{\cos 10^\circ} = 75 - 100 \frac{0,342}{0,9848} = 40,27 \text{ кН}.$$

Получены положительные числовые значения сил, следовательно, они направлены от точки В, как и предполагалось.

Сравним этот результат с тем, который был получен графическим методом в предыдущей работе. Направления сил совпадают, числовые значения приблизительно совпадают.

### Задание

Шарнирно-стержневая конструкция  $ABC$  нагружена в шарнире  $B$  заданными силами натяжения канатов  $F_1$  и  $F_2$ . Определить продольные силы:  $N_C$  – в стержне  $BC$  и  $N_A$  – в стержне  $BA$ .

Варианты заданий следует взять из методических указаний к работе «Графический метод сложения сил плоской сходящейся системы». Схемы конструкций приведены в таблице 1. Как правило, номер схемы выбирается по номеру студента в списке группы. Числовые данные приведены в таблице 2. Номер варианта числовых данных, общий для всех студентов группы, назначает преподаватель.

### Вопросы для проверки знаний

1. Как производится проецирование вектора силы на ось, на плоскость?
2. Как вычислить модуль проекции?
3. Условия равновесия пространственной системы сходящихся сил в аналитической форме.
4. Условия равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме.

### Рекомендуемая литература по данной теме

1. Соколовская, В.П. Механика. Практикум по решению задач: учеб. пособие / В.П. Соколовская. – Мн.: Новое знание, 2006. – 316 с.
- 2 Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

3 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гуменова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. -

URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

4 Цивильский В. Л. Теоретическая механика. Учеб. для втузов / В. Л. Цивильский. – М. : Абрис, 2012. – 368 с.: ил. ISBN 978-5-4372-0079-7  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=117515>

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТЕЛА

**Цель работы:** Изучение условий равновесия плоской произвольной системы сил, получение навыков составления уравнений равновесия.

#### Теоретическая часть

Для количественного измерения вращательного эффекта силы  $\vec{F}$  используется понятие о моменте этой силы относительно некоторой точки  $O$  на плоскости:

*Моментом силы относительно некоторой точки  $O$  называется скалярная величина, равная произведению модуля силы на ее плечо относительно этой точки. Знак момента силы принимается условно в зависимости от направления вращения вокруг точки  $O$ , которое придаёт сила твёрдому телу.*

$$M_O(F) = \pm F \cdot h$$

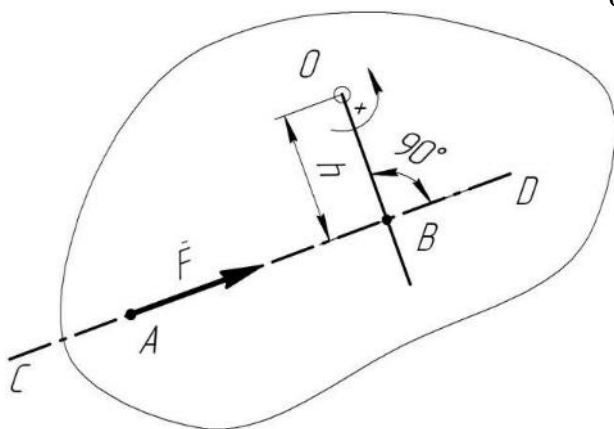


Рис. 1.8 – Определение момента силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$

Единица измерения момента силы – Ньютон умноженный на метр (Н·м).

Для определения момента силы относительно точки рекомендуется придерживаться следующего порядка:

1. Прежде всего, нужно научиться «видеть» силу, момент которой определяем, и центр моментов – точку, относительно которой определяем момент (рис. 1.8 – сила  $\vec{F}$  и центр моментов – точка  $O$ ).

2. Проводим линию действия силы  $CD$ , продлевая вектор силы в обе стороны «до бесконечности».
3. Из центра момента  $O$  опускаем перпендикуляр на линию действия силы  $CD$ . Длина перпендикуляра  $h=|OB|$  от центра момента до линии действия силы и есть плечо.
4. Находим знак момента. Если сила стремится повернуть плечо вокруг центра момента против хода часовой стрелки, то считаем момент положительным; если по ходу часовой стрелки, то отрицательным.
5. Находим числовое значение момента силы относительно точки, умножив модуль силы на плечо. Для примера, который представлен на рисунке,

$$M_O(\vec{F}) = +F \cdot |OB|.$$

#### **Свойства момента силы относительно точки:**

1. Момент силы относительно точки не изменится при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия, так как при этом не изменяется ни модуль силы, ни длина ее плеча.
2. Момент силы относительно точки равен нулю только тогда, когда модуль силы равен нулю или когда линия действия силы проходит через точку, так как в этом последнем случае длина плеча равна нулю

**Теорема Вариньона о моменте равнодействующей:** *момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно некоторой точки, лежащей в плоскости сил, равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же точки.*

#### **Направления реакций некоторых видов связей**

1. **Шарнирная неподвижная опора (цилиндрический шарнир, подшипник).** Одно тело может вращаться относительно другого вокруг общей оси, называемой *осью шарнира* (например, как две половины ножниц). Если тело  $AB$  прикреплено с помощью такого шарнира к неподвижной опоре  $D$  (рис. 3.1, а), то точка  $A$  тела не может при этом переместиться ни по какому

направлению, перпендикулярному оси шарнира. Следовательно, реакция  $\vec{R}$  цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, т.е. в плоскости  $Ax$ . Для силы  $\vec{R}$  в этом случае наперёд неизвестны ни её модуль  $R$ , ни направление (угол  $\alpha$ ). Часто реакцию  $\vec{R}$  заменяют её составляющими по осям  $x$  и  $y$ , как на рис.3.1, б, где шарнир  $A$  неподвижно закреплён при помощи двух стержней на шарнирах.

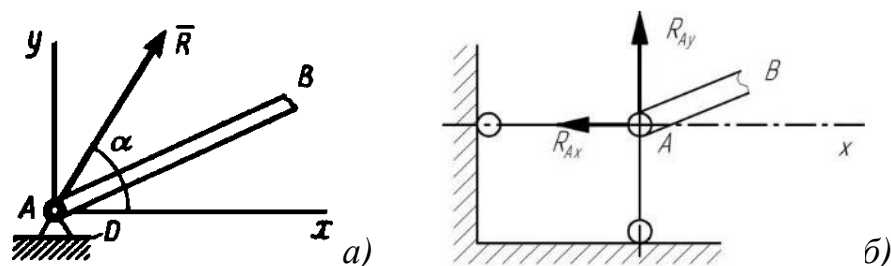


Рисунок 3.1 – Реакция неподвижного шарнира

**2. Подвижный шарнир.** Стержень, закреплённый на шарнире, может поворачиваться вокруг шарнира, а точка крепления может перемещаться вдоль направляющей. Реакция подвижного шарнира направлена перпендикулярно опорной поверхности, т.к. не допускается только перемещение поперёк опорной поверхности.

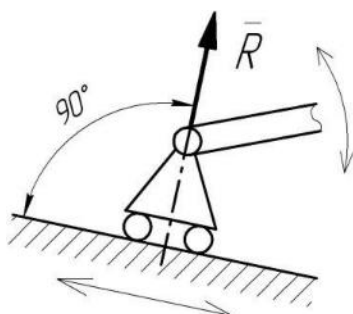


Рис. 3.2 – Реакция подвижного шарнира

**3. Невесомый стержень.** Невесомым называют такой стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой, можно пренебречь. Пусть для находящегося в равновесии тела такой стержень, прикрепленный в точках  $A$  и  $B$  шарнирами, является связью (примеры на рис. 3.3 а и б). Тогда на стержень будут действовать только две силы, приложенные в точках  $A$  и  $B$ . При равновесии эти силы должны быть направлены вдоль одной прямой, т.е. вдоль

$AB$ . Но тогда согласно закону о действии и противодействии стержень будет действовать на тело с силой, тоже направленной вдоль  $AB$ . Следовательно, реакция  $\vec{N}$  невесомого шарнирно прикреплённого стержня направлена вдоль прямой, соединяющей шарниры. При этом стержень может быть прямым или кривым, сжатым или растянутым.

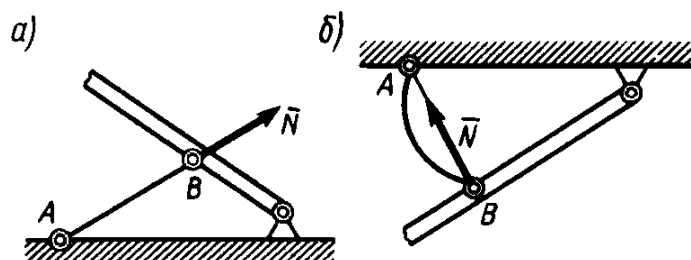


Рисунок 3.3 – Связи в виде невесомых стержней: прямого растянутого (а) и криволинейного сжатого (б)

**4. Направляющая** позволяет только прямолинейное движение вдоль своей оси. Создаёт силу реакции в направлении, перпендикулярном оси, и момент реакции (в плоской системе сил). (Рис. 3.4, а.) Если одна направляющая установлена на другой направляющей, то тело может перемещаться в плоскости как угодно, но не может поворачиваться. (Рис. 3.4, б.). В такой опоре имеется реакция в виде момента.

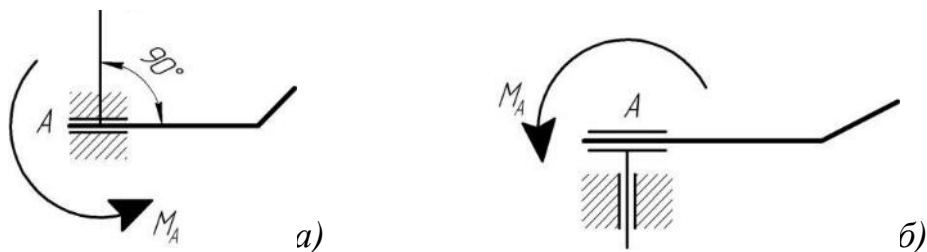


Рисунок 3.4 – Реакции направляющих: а) – одиночной и б) – сдвоенной

**5. Жёсткая заделка** (рисунок 3.5, а,б). Даже одна жёсткая заделка обеспечивает равновесие тела при любых видах нагрузок. Сила реакции заделки  $\vec{R}$  может иметь любое направление, поэтому обычно определяют составляющие  $R_x$ ,  $R_y$ ,  $R_z$ . (на рисунке 3.5, а они обозначены  $\vec{X}_3$ ,  $\vec{Y}_3$  и  $\vec{Z}_3$ )

Кроме того, жёсткая заделка препятствует повороту тела, поэтому на тело действует момент заделки  $\overline{M}_3$ . Его, как мы увидим далее, тоже можно представить как сумму моментов  $M_x, M_y, M_z$ . В случае действия плоской системы сил возникают две составляющие реакции (на рисунке 3.5, а они обозначены  $\overline{X}_3, \overline{Y}_3$ ) и момент заделки в плоскости действия сил (на рисунке 3.5, б он обозначен  $M_3$ ).

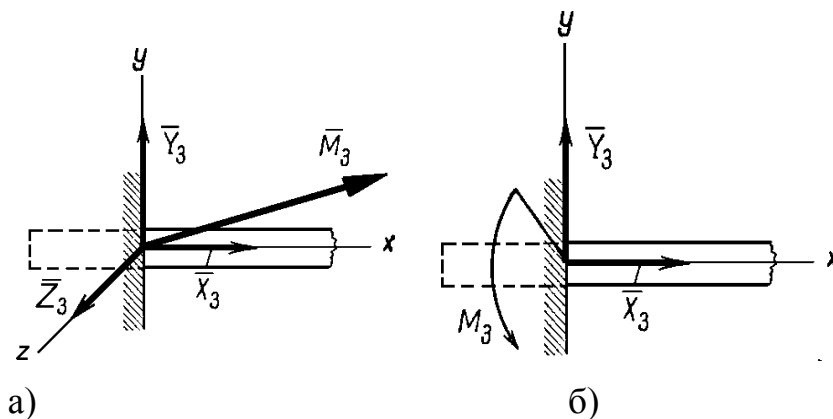


Рисунок 3.5 – Реакции заделки в пространственной (а) и плоской (б) системе сил

**Аксиома связей, или принцип освобождаемости от связей.** *Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив их действие соответствующими силами реакций связей.*

Аксиома связей дает возможность применить к несвободному телу условия равновесия, справедливые для свободного тела. Для этого следует мысленно отбросить связи, наложенные на тело, заменив их действие соответствующими силами реакций связей. Затем нужно рассмотреть равновесие этого несвободного тела как тела свободного под действием активных сил и сил реакций связей.

При замене связей (опор) силами реакций помнить:

- если связь препятствует перемещению тела только в одном каком-нибудь направлении, то направление ее реакции противоположно этому направлению;

- если же связь препятствует перемещению тела по многим направлениям, то силу реакции такой связи изображают ее составляющими, показывая их параллельно выбранным координатным осям X и Y.

### Условия равновесия.

Для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор  $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$  этой системы сил и ее главный момент  $\vec{M}_O = \sum (\vec{r}_{O,k} \times \vec{F}_k)$

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k \quad \vec{M}_O = \sum (\vec{r}_{O,k} \times \vec{F}_k)$$

относительно любого центра O были равны нулю, то есть чтобы выполнялись условия

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k = 0, \quad \vec{M}_O = \sum (\vec{r}_{O,k} \times \vec{F}_k) = 0 \quad (1.3)$$

Сумму сил можно спроецировать на любую ось, тогда одним из условий равновесия будет равенство нулю суммы проекций сил на ось.

Решение системы уравнений равновесия будет тем проще, чем меньшее число неизвестных будет входить в каждое уравнение. Поэтому, при составлении уравнений равновесия рекомендуется:

1) выбирать направление оси для проецирования на неё сил так, чтобы она была перпендикулярна к линии действия «лишней» неизвестной силы, в этом случае проекция «лишней» неизвестной силы исключается из соответствующего уравнения равновесия;

2) центром моментов выбирать точку, в которой пересекаются линии действия «лишних» неизвестных сил реакций, тогда моменты этих сил не войдут в уравнение моментов.

Если сила  $\vec{F}$  в плоскости XY имеет две составляющие ее силы  $\vec{F}_x$  и  $\vec{F}_y$ , то вместо вычисления момента силы  $\vec{F}$  относительно некоторой точки O, может оказаться проще применить теорему Вариньона, вычислив сумму моментов составляющих ее сил относительно этой точки.

Если к телу приложена пара сил, то ее действие учитывается только в уравнении моментов сил.

Количество неизвестных величин, которое можно определить из условий равновесия, соответствует числу независимых уравнений равновесия, а оно

равно числу степеней свободы (см. введение к лекциям, тема «Системы координат»). Прежде, чем составлять уравнения, нужно проверить количество выявленных неизвестных реакций твёрдого тела.

### ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

**Дано:** Три способа закрепления бруса, изогнутого в одной плоскости (рис. 8, а, б, в). Нагрузка, действующая в этой же плоскости  $P = 2$  кН;  $M = 8$  кН·м;  $q = 2$  кН/м и размеры (м) во всех трёх случаях одинаковы.

Определить реакции опор для того способа закрепления, при котором реакция  $\bar{Y}_B$  опоры  $B$  имеет наименьшее (по модулю) числовое значение.

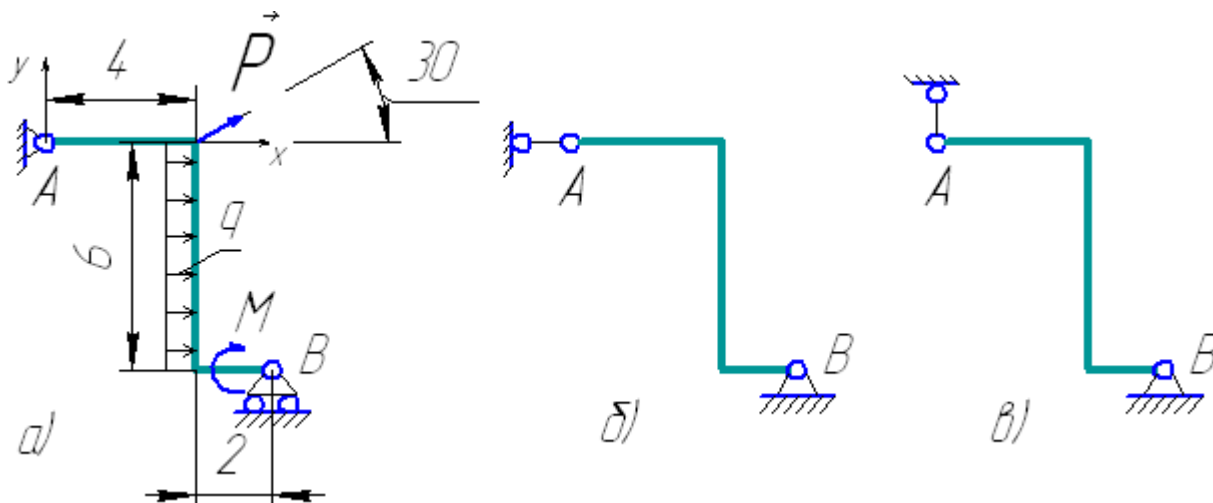


Рисунок 8 – Заданные способы закрепления бруса

### Решение:

На брус действуют: *активные силы*, заданные по условию задачи – сосредоточенная сила  $\bar{P}$  под углом  $30^\circ$  к горизонтальной оси; пара сил с моментом  $M$ ; равномерно распределённая нагрузка интенсивностью  $q$  и *реактивные силы* – реакции опор.

Равномерно распределённую на длине  $b=6$  м нагрузку интенсивностью  $q$  заменяем равнодействующей сосредоточенной силой  $\bar{Q}$ , равной  $qb$  и приложенной посередине нагруженного участка.

$$Q = q \cdot b = 2 \cdot 6 = 12 \text{ кН.}$$

Сосредоточенную силу  $\bar{P}$  по правилу параллелограмма сил разлагаем на две составляющие по осям  $X$  и  $Y$  –  $\bar{P}_X$  и  $\bar{P}_Y$ . При графическом построении  $\bar{P}_X$  и  $\bar{P}_Y$  (на рис. 10) точка приложения силы должна остаться на конструкции.

Числовые значения  $\bar{P}_X$  и  $\bar{P}_Y$  находим из прямоугольного треугольника:

$$P_x = P \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot (\sqrt{3} / 2) = \sqrt{3} \text{ кН};$$

$$P_y = P \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot (1 / 2) = 1 \text{ кН}.$$

### Рассмотрим вариант крепления а).

Заменим связи их реакциями. На рис. 10 реакцию неподвижной шарнирной опоры  $A$  изображаем двумя её составляющими  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ ; реакцию подвижной шарнирной опоры  $B$  изображаем  $\bar{Y}_B$  (линия действия шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости). Плоская система сил с тремя неизвестными силами, не пересекающимися в одной точке, является статически определимой.

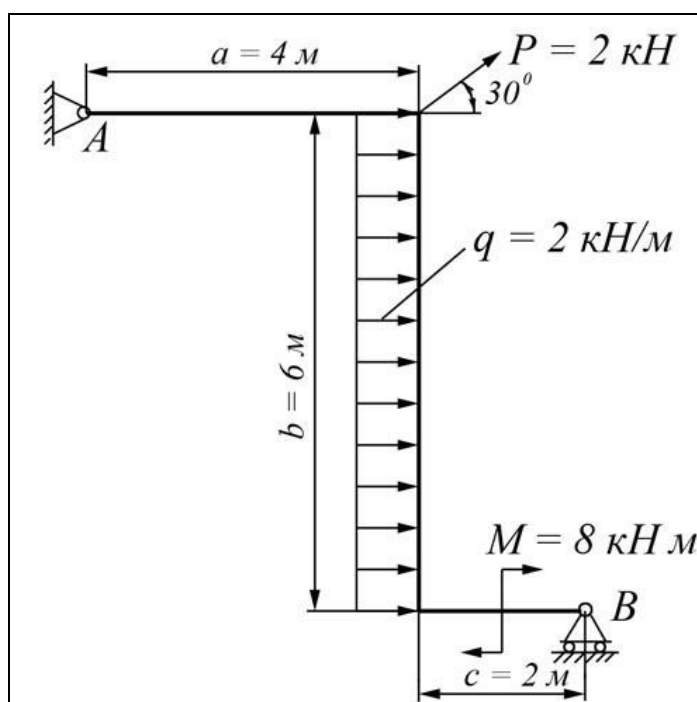


Рисунок 9 – Заданная схема (а)

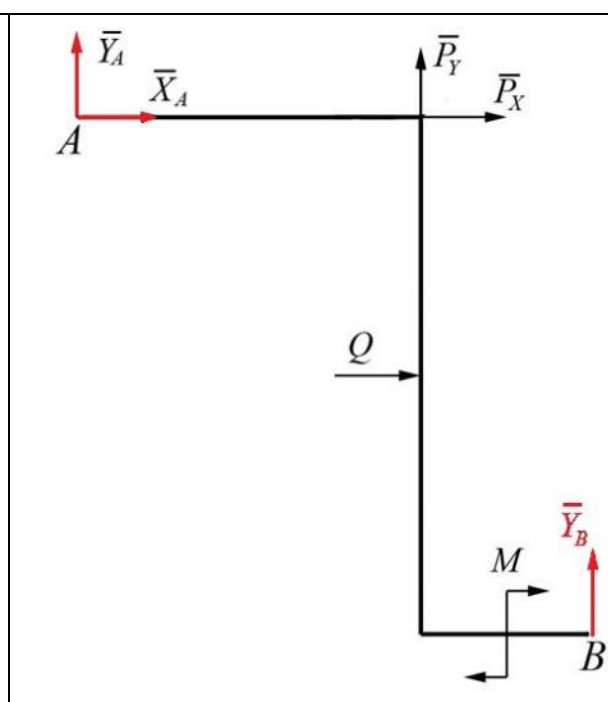


Рисунок 10 – Расчётная схема (а)

Реакцию опоры  $\bar{Y}_B$  определим из условий равновесия бруса. Предпочтительно составлять уравнения с одной неизвестной (в данном случае

$\bar{Y}_B$ ). Две лишних неизвестных  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$  направлены не параллельно друг другу, поэтому нет такой оси, на которую они обе спроецировались бы в точку (в ноль). В таком случае, для определения реакции  $\bar{Y}_B$  составим уравнение моментов относительно точки  $A$  – точки пересечения линий действия двух реакций опор  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ , тогда их моменты будут равны нулю, независимо от величин этих сил.

$$\Sigma M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad 4P_y + 3Q - M + 6Y_B = 0 \Rightarrow$$

$$Y_B = (M - 3Q - 4P_y) / 6 = (8 - 3 \cdot 12 - 4 \cdot 1) / 6 = -5,33 \text{ кН.}$$

Знак «минус» свидетельствует о том, что реакция направлена в обратную сторону.

### Рассмотрим вариант крепления б).

На рис. 12 реакцию  $\bar{X}_A$  опоры  $A$  (невесомого стержня, прикрепленного к брусу и к неподвижной опоре шарнирами) изображаем вдоль прямой, соединяющей шарниры; реакцию неподвижной шарнирной опоры  $B$  изображаем двумя её составляющими  $\bar{X}_B$  и  $\bar{Y}_B$ .

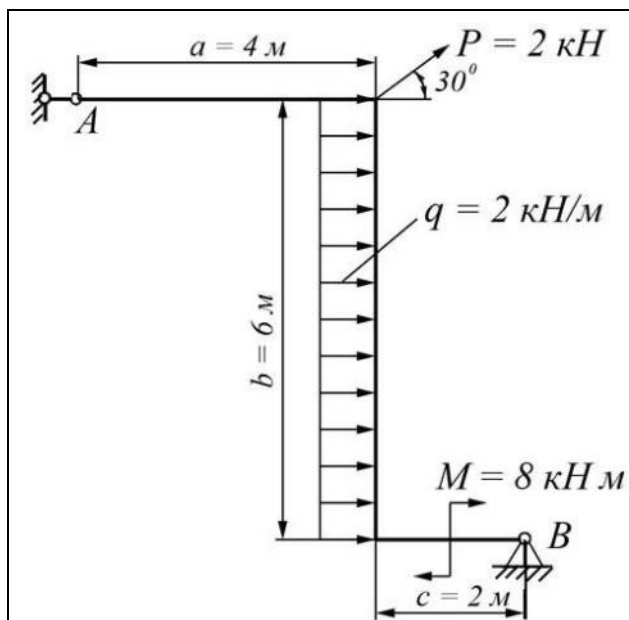


Рисунок 11 – Заданная схема (б)

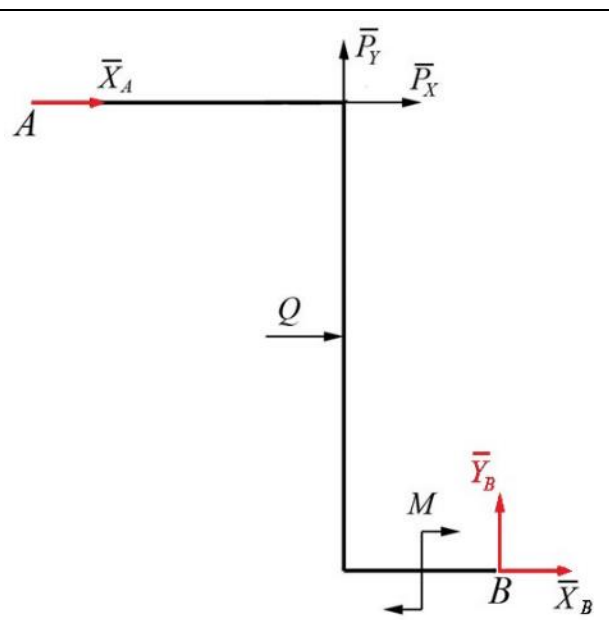


Рисунок 12 – Расчётная схема (б)

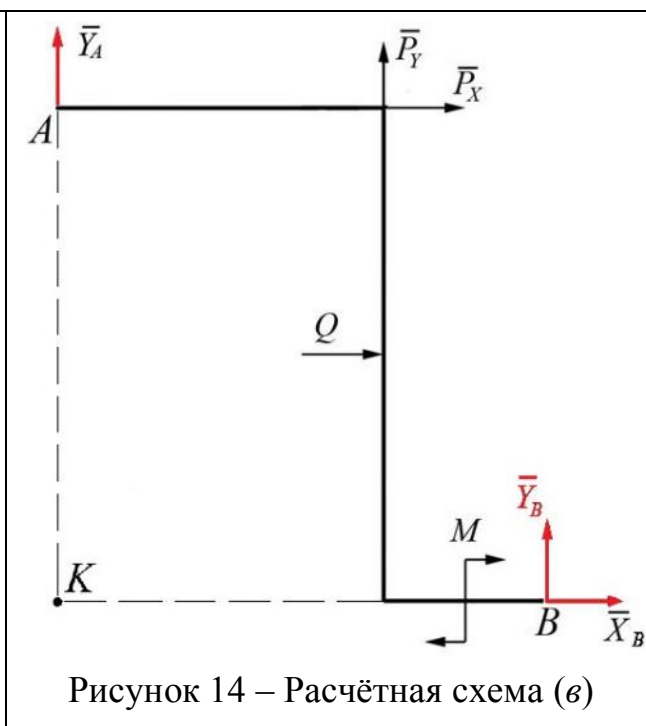
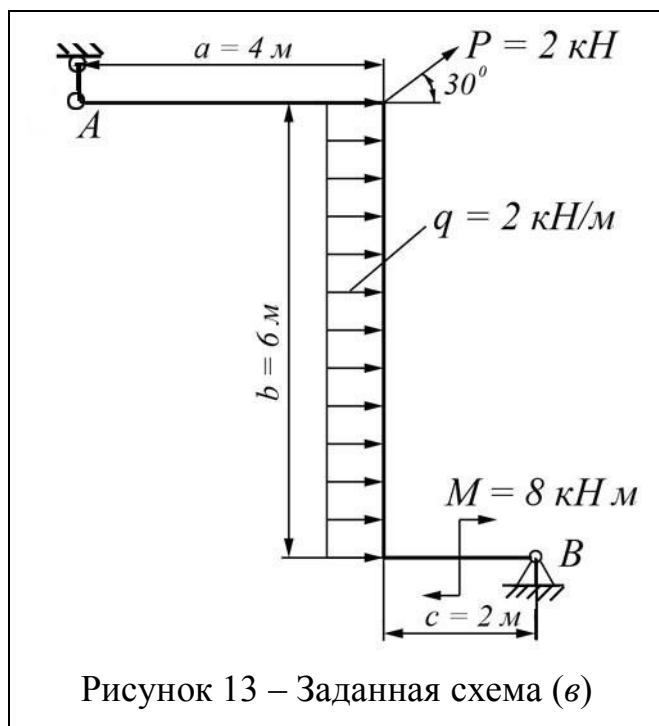
Обе лишние неизвестные  $\bar{X}_A$  и  $\bar{X}_B$  направлены горизонтально. Для определения исследуемой реакции  $\bar{Y}_B$  составим сумму проекций сил на вертикальную ось.

$$\sum F_{ky} = 0; \quad P_y + Y_B = 0; \quad \Rightarrow \quad Y_B = -P_y = -1 \text{ кН.}$$

Знак «-» в значении реакции  $\bar{Y}_B$  указывает на то, что истинное направление  $\bar{Y}_B$ , обеспечивающее равновесие полученной системы сил, противоположно показанному на рис. 12.

### Рассмотрим вариант крепления в).

На рис. 14 реакцию  $\bar{Y}_A$  опоры  $A$  (невесомого стержня на двух шарнирах) изображаем вдоль прямой, соединяющей шарниры; реакцию неподвижной шарнирной опоры  $B$  изображаем двумя составляющими  $\bar{X}_B$  и  $\bar{Y}_B$ .



Для определения исследуемой реакции  $\bar{Y}_B$  рациональным (в уравнении одна неизвестная) является уравнение алгебраической суммы моментов всех сил относительно точки  $K$  – точки пересечения линий действия реакций  $\bar{X}_B$  и  $\bar{Y}_A$ :

$$\sum M_K(\bar{F}_k) = 0; \quad 4P_y - 6P_x - 3Q - M + 6Y_B = 0; \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_B = (6P_x + 3Q + M - 4P_y) / 6 = (6 \cdot (\sqrt{3}) + 3 \cdot 12 + 8 - 4 \cdot 1) / 6 = 8,397 \text{ кН.}$$

Так как минимальное значение модуля реакции  $|\overline{Y_B}| = |-1|$  кН – имеет место при втором способе закрепления (б), следовательно, для этой схемы находим все остальные реакции опор –  $\overline{X_A}$  и  $\overline{X_B}$ , и делаем проверку:

$$\Sigma M_B (\overline{F_k}) = 0; \quad -M - 3Q - 6P_x - 2P_y - 6X_A = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_A = (-M - 3Q - 6P_x - 2P_y) / 6 = (-8 - 3 \cdot 12 - 6 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot 1) / 6 = -9,397 \text{ кН.}$$

$$\Sigma F_{\text{кх}} = 0; \quad X_A + P_x + Q + X_B = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_B = -X_A - P_x - Q = -(-9,397) - \sqrt{3} - 12 = -4,33 \text{ кН.}$$

Знак «-» в значениях реакции  $\overline{X_A}$  и  $\overline{X_B}$  указывает на то, что истинное направление этих реактивных сил, обеспечивающее равновесие полученной системы сил, противоположно показанному на рис. 12.

Уравновешенность конструкции бруса (правильность вычисления реакций опор  $A$  и  $B$ ) проверим, выполнив проверку:

$$\Sigma M_D (\overline{F_k}) = 0; \quad -4,5X_A - 4,5P_x - 1,5Q - M + Y_B + 1,5X_B = 0;$$

$$-4,5 \cdot (-9,397) - 4,5 \cdot (\sqrt{3}) - 1,5 \cdot 12 - 8 + 2 \cdot (-1) + 1,5 \cdot (-4,33) = 0;$$

$$42,28 - 7,78 - 18 - 8 - 2 - 6,495 = 0;$$

$$42,28 - 42,28 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

Для проверки было составлено уравнение суммы моментов относительно некоторой точки  $D$ . Определите самостоятельно, где находится эта точка.

Результаты расчётов сводим в таблицу 1.

Таблица 1

| №<br>рисунка | Исследуемая реакция $\overline{Y_B}$<br>(кН) | Реакции опор          |                       |
|--------------|----------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|
|              |                                              | $\overline{X_A}$ (кН) | $\overline{X_B}$ (кН) |
| Рис. 15а     | - 5,33                                       | —                     | —                     |
| Рис. 15б     | - 1                                          | - 9,397               | - 4,33                |
| Рис. 15в     | 8,397                                        | —                     | —                     |

### Задачи

На рисунках 1 – 7 показаны три способа (а, б, в) закрепления бруса, ось которого ломаная линия. Задаваемая нагрузка (табл. 2) и размеры бруса (геометрическая конфигурация) во всех случаях одинаковы.

Определить реакцию опор для того способа закрепления бруса, при котором исследуемая реакция, указанная в табл. 2, имеет наименьший модуль.

Таблица 2

| Номер<br>варианта<br>(рис. 1–12) | $P$ , кН | $M$ , кН · м | $q$ , кН / м | Исследуемая<br>реакция |
|----------------------------------|----------|--------------|--------------|------------------------|
| 1                                | 2        | 3            | 4            | 5                      |
| 1                                | 12       | 8            | 1,5          | $M_A$                  |
| 2                                | 4        | 6            | 2            | $Y_A$                  |
| 3                                | 3        | 2            | 2,5          | $X_A$                  |
| 4                                | 2        | 3            | 2            | $Y_B$                  |
| 5                                | 10       | 2            | 2            | $X_B$                  |
| 6                                | 4        | 6            | 1            | $M_A$                  |
| 7                                | 2        | 2            | 18           | $X_A$                  |
| 8                                | 3        | 4            | 2            | $R_B$                  |
| 9                                | 4        | 8            | 2            | $M_A$                  |
| 10                               | 2        | 4            | 0,5          | $X_A$                  |
| 11                               | 4        | 8            | 2            | $Y_A$                  |
| 12                               | 8        | 3            | 1            | $Y_B$                  |
| 13                               | 6        | 5            | 2            | $X_A$                  |
| 14                               | 4        | 3            | 1            | $Y_A$                  |
| 15                               | 3        | 4            | 2            | $M_A$                  |
| 16                               | 2        | 4            | 3            | $X_A$                  |
| 17                               | 4        | 4            | 2            | $X_C$                  |
| 18                               | 8        | 4            | 2            | $X_A$                  |
| 19                               | 2        | 3            | 1            | $Y_C$                  |
| 20                               | 3        | 8            | 2            | $Y_B$                  |
| 21                               | 4        | 4            | 2            | $Y_A$                  |
| 22                               | 6        | 4            | 2            | $Y_A$                  |
| 23                               | 4        | 3            | 2            | $X_A$                  |
| 24                               | 5        | 4            | 1            | $M_A$                  |

|    |    |   |     |       |
|----|----|---|-----|-------|
| 1  | 2  | 3 | 4   | 5     |
| 25 | 4  | 3 | 1,5 | $V_A$ |
| 26 | 3  | 4 | 1   | $X_A$ |
| 27 | 2  | 3 | 2   | $X_B$ |
| 28 | 4  | 3 | 2   | $V_A$ |
| 29 | 2  | 4 | 2   | $X_B$ |
| 30 | 4  | 5 | 1   | $V_B$ |
| 31 | 10 | 6 | 2   | $V_A$ |
| 32 | 20 | 5 | 4   | $M_A$ |
| 33 | 15 | 8 | 1   | $V_B$ |
| 34 | 5  | 2 | 1   | $V_B$ |
| 35 | 10 | 4 | -   | $X_B$ |

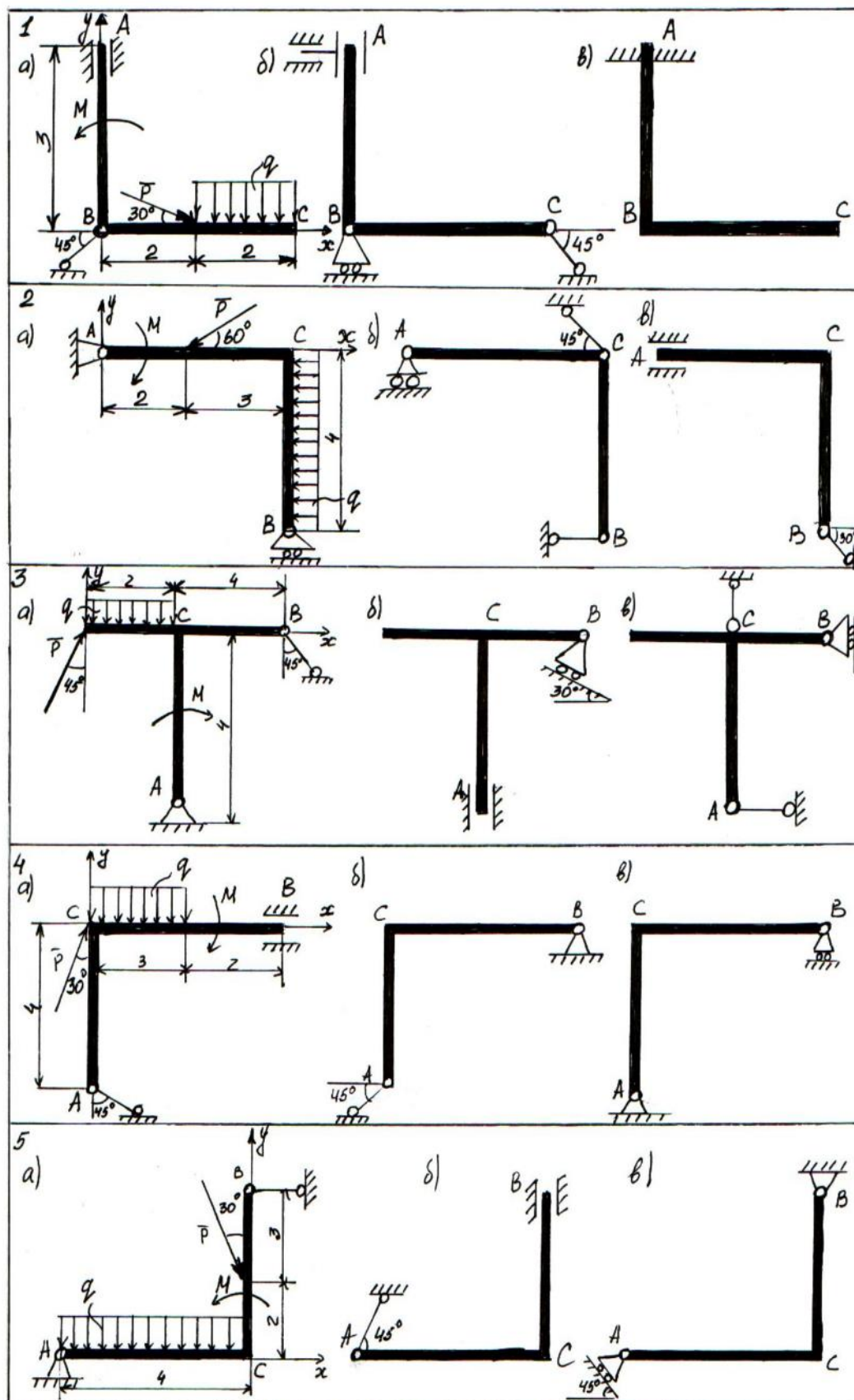


Рисунок 1

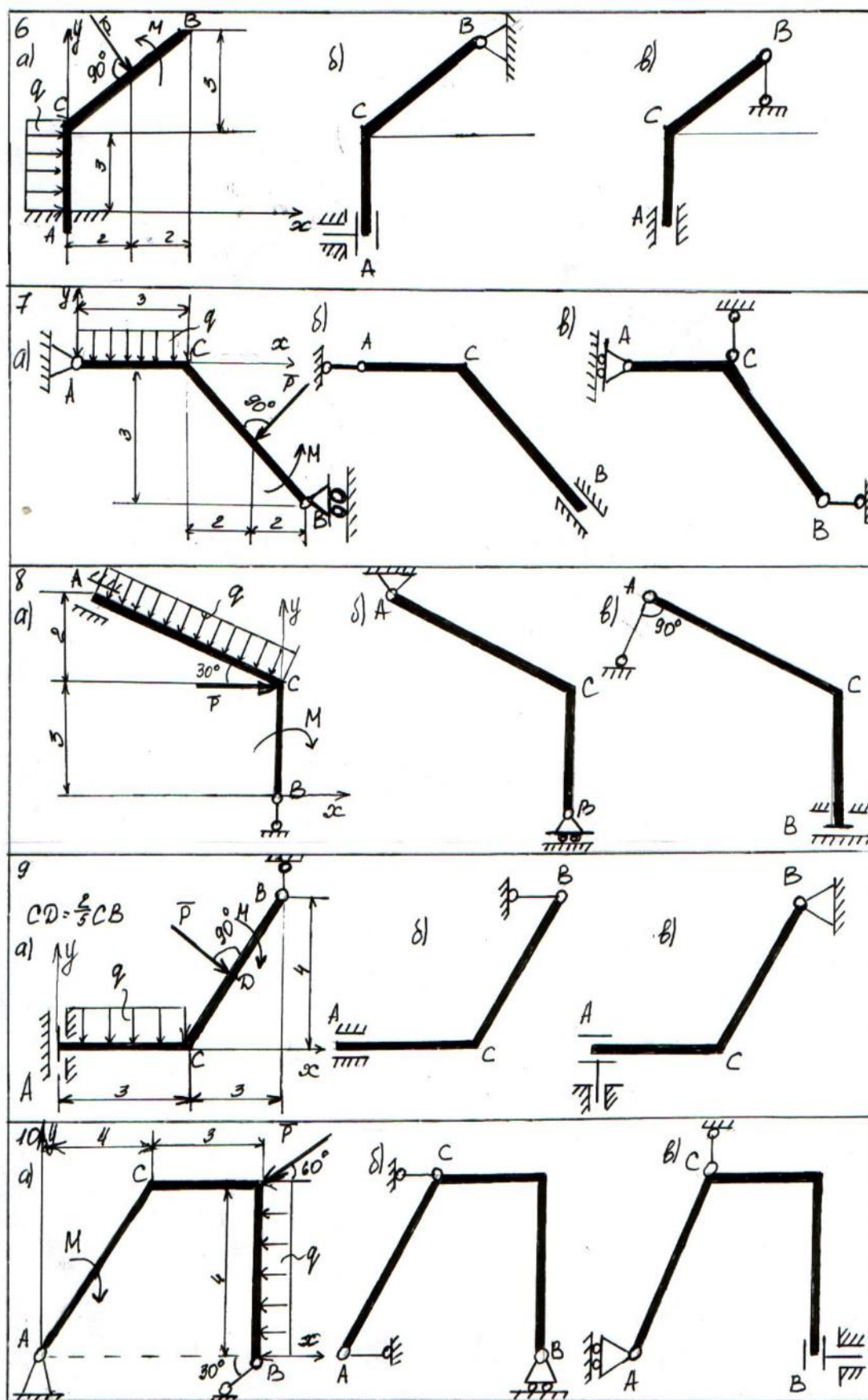


Рисунок 2

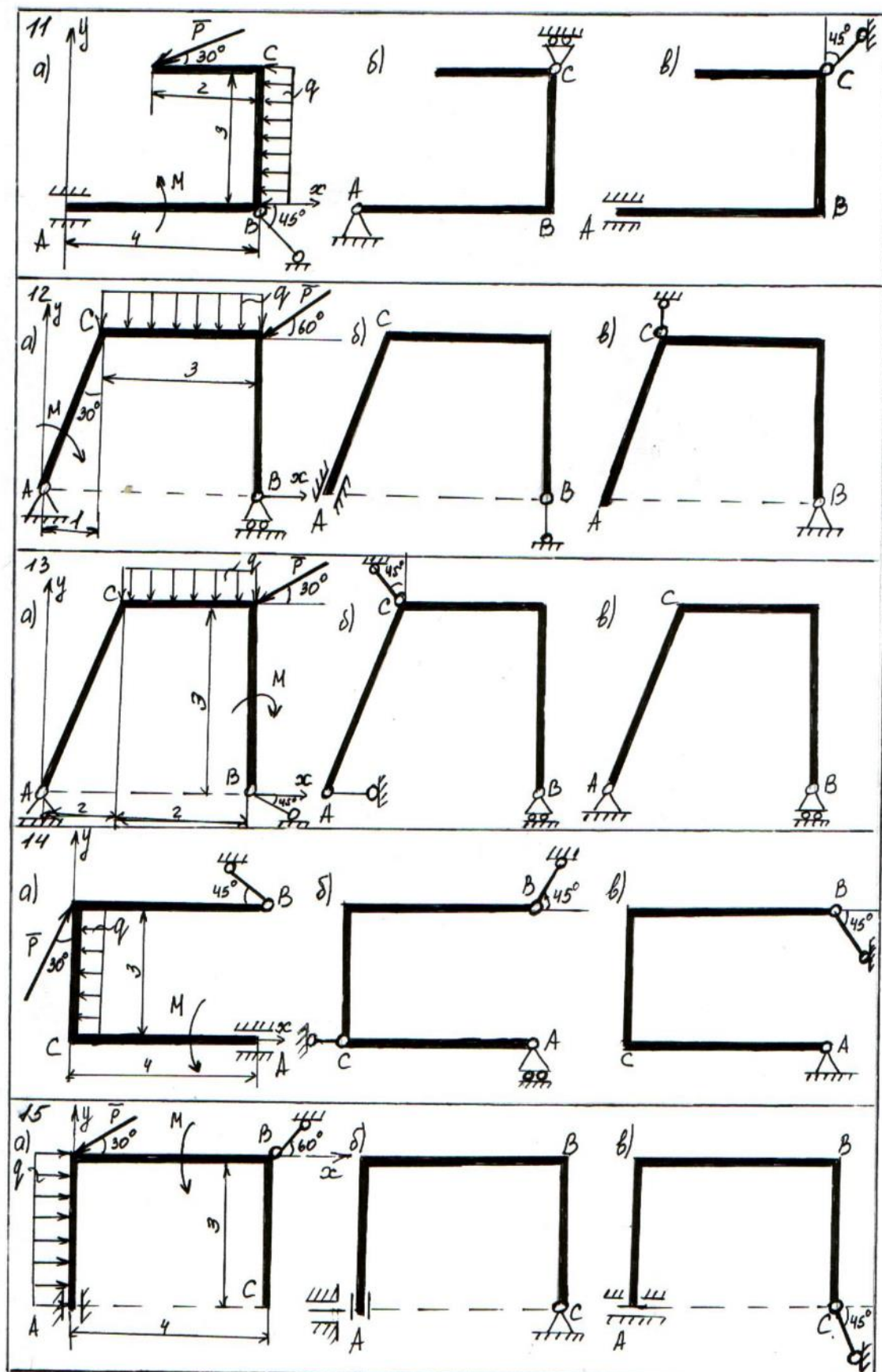


Рисунок 3

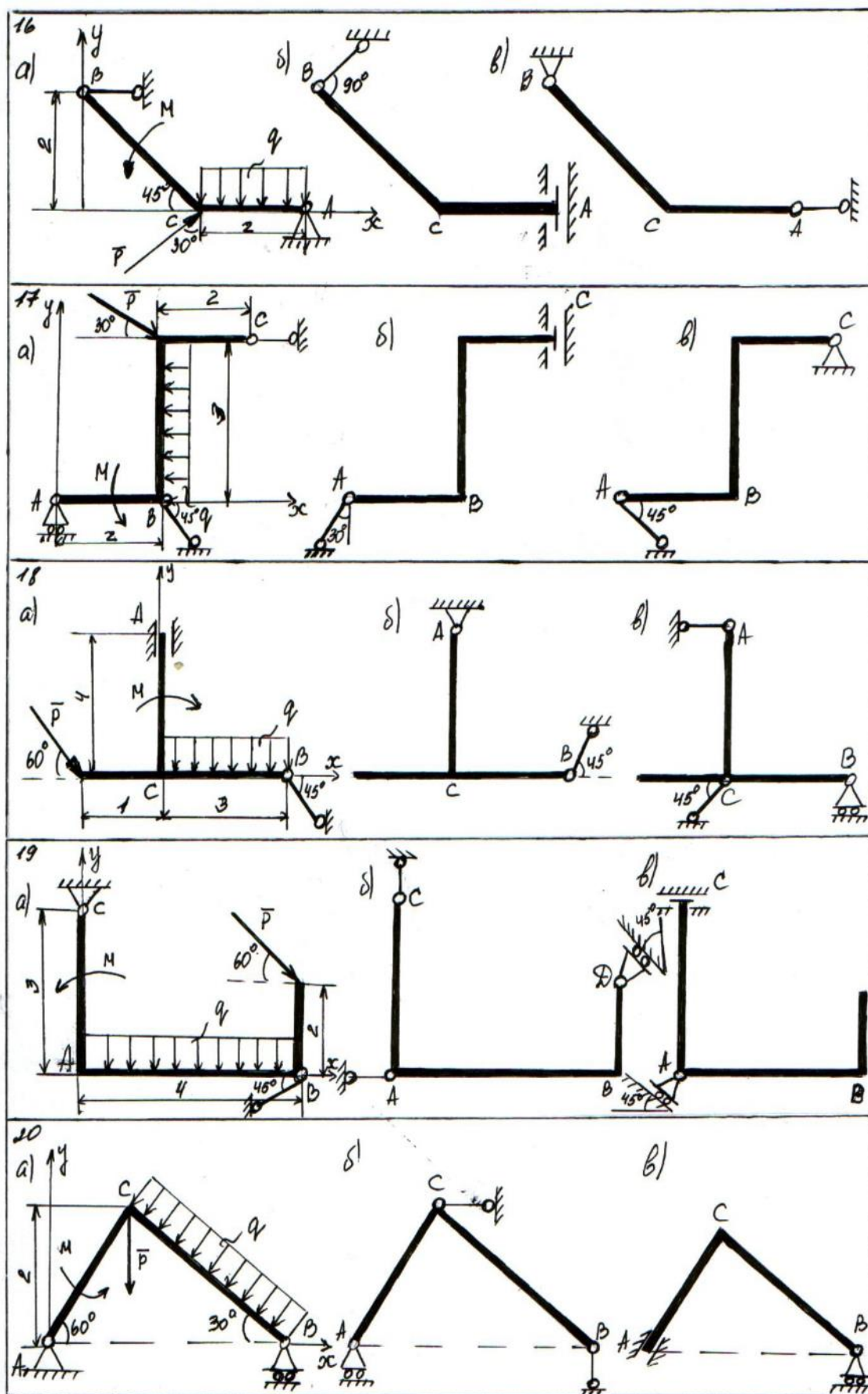


Рисунок 4

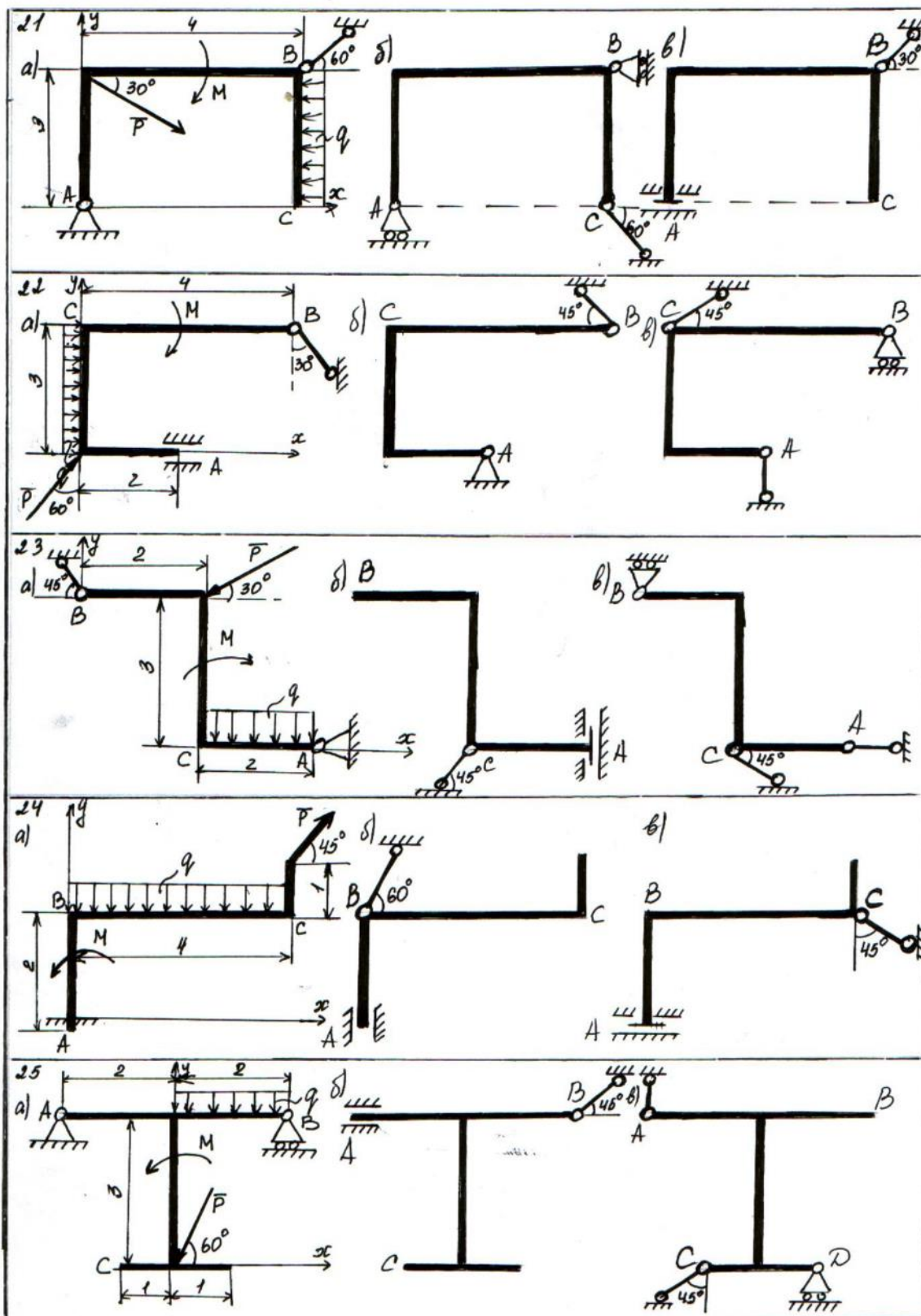


Рисунок 5

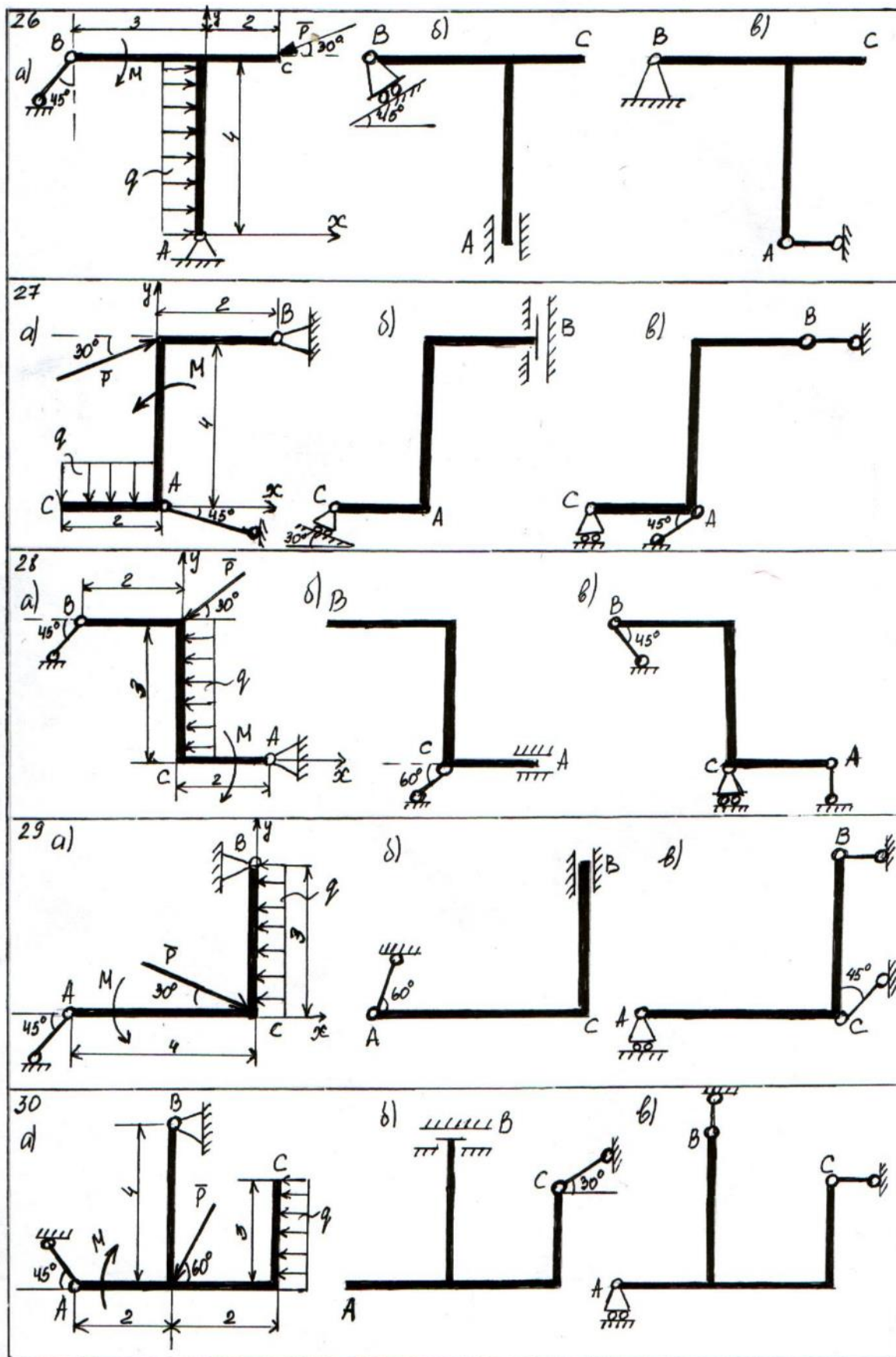


Рисунок 6

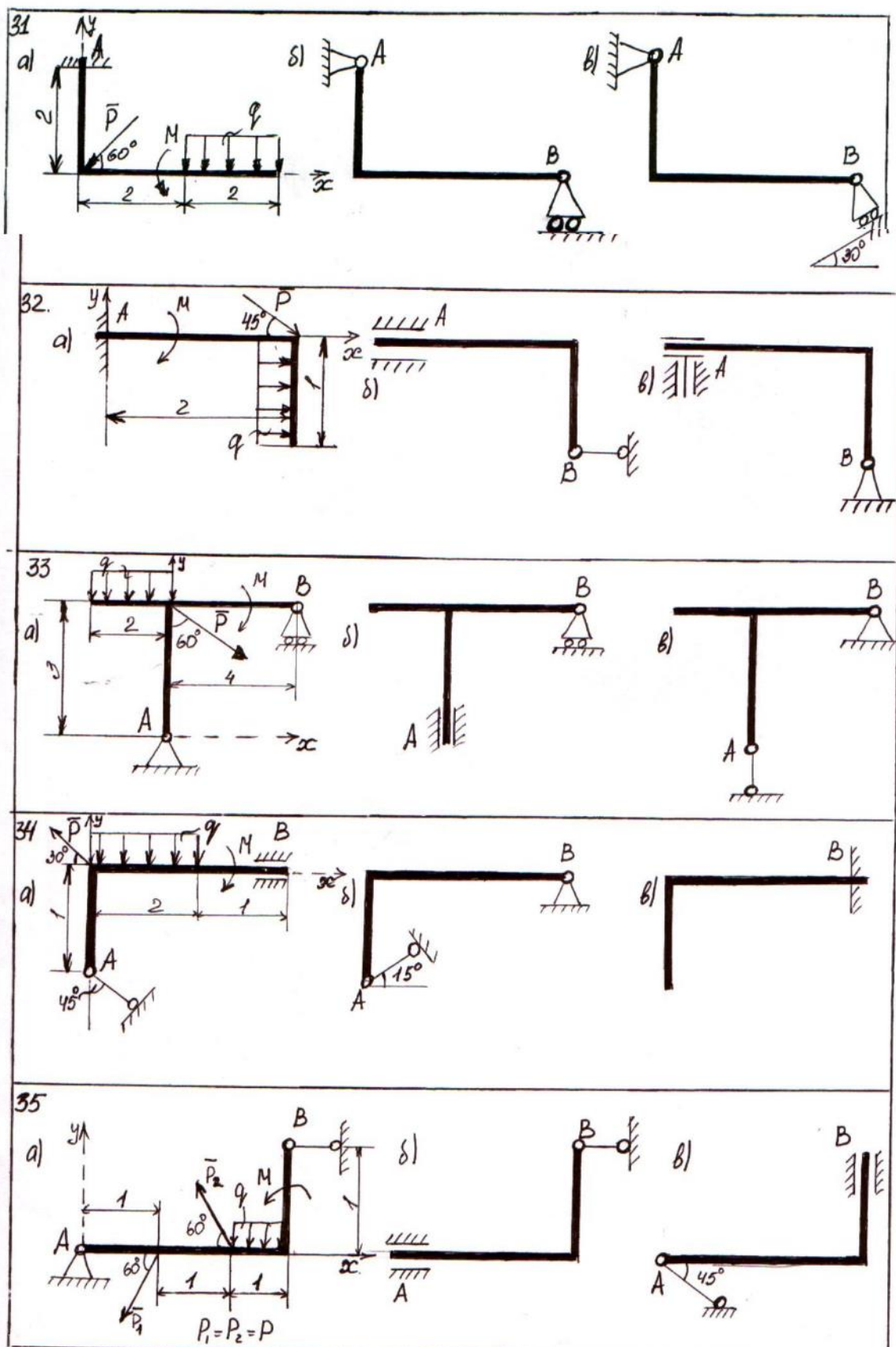


Рисунок 7

### **Вопросы к практическому занятию**

1. Что такое сосредоточенная сила?
2. Определение распределённой нагрузки.
3. Что такое равнодействующая? Правило параллелограмма сил.
4. Графическое и аналитическое определение проекции силы на ось.
5. Виды связей и их реакции.
6. Уравнения равновесия плоской системы: а) сходящихся сил;  
б) параллельных сил; в) произвольной системы сил.
7. Определение пары сил. Свойства пары сил.
8. Теорема о парах сил.
9. Определение алгебраического момента силы относительно неподвижной точки на плоскости и его свойства.
10. Вектор – момент силы относительно неподвижной точки на плоскости и его свойства.
11. Что такое сила? Основные характеристики силы.
12. Что такое: а) свободное тело? б) несвободное тело? Принцип освобождаемости от связей.
13. Определение системы сил. Что называется плоской системой:  
а) сходящихся сил? б) параллельных сил? в) произвольной системой сил?

### **Рекомендуемая литература по данной теме**

1. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика : учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87388.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/87388>
2. Бегун, П. И. Прикладная механика : учебник / П. И. Бегун, О. П. Кормилицын. — 2-е изд. — Санкт-Петербург : Политехника, 2020. — 464

- с. — ISBN 978-5-7325-1089-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/94831.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
3. Игнатьева, Т. В. Теоретическая механика. Статика : учебное пособие / Т. В. Игнатьева, Д. А. Игнатьев. — Саратов : Вузовское образование, 2018. — 101 с. — ISBN 978-5-4487-0131-3. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/72539.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/72539>
4. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. - <http://biblioclub.ru/>
5. Красюк, А. М. Теоретическая механика. Конспект лекций : учебное пособие / А. М. Красюк. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2009. — 138 с. — ISBN 978-5-7782-1245-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/45438.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

## Практическое занятие 6

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЁРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ

**Цель работы:** получение навыков расчёта скоростей точек твёрдого тела при поступательном и вращательном движениях.

#### Задание

Движение груза  $I$  должно описываться уравнением

$$X = C_2 t^2 + C_1 t + C_0,$$

где  $t$  – время;  $C_2, C_1, C_0$  – некоторые постоянные.

В начальный момент времени ( $t = 0$ ) координата груза должна быть  $x_0$ , а его скорость –  $V_0$ .

Кроме того, необходимо, чтобы координата груза в момент времени  $t = t_2$  была равна  $x_2$ .

Определить коэффициенты  $C_2, C_1, C_0$ , при которых осуществляется требуемое движение груза  $I$ . Определить также в момент времени  $t = t_1$  скорость и ускорение груза  $I$  и точки  $M$  одного из колёс механизма.

Схемы механизмов показаны на рис. 1 – 3, а необходимые данные приведены в таблице 1.

Таблица 1

| №<br>варианта<br>(рис. 1-3) | Радиусы, см |       |       |       | Координаты и скорости груза $I$ |                 |               | Расчётные моменты времени, с |       |
|-----------------------------|-------------|-------|-------|-------|---------------------------------|-----------------|---------------|------------------------------|-------|
|                             | $R_2$       | $r_2$ | $R_3$ | $r_3$ | $x_0$ ,<br>см                   | $V_0$ ,<br>см/с | $x_2$ ,<br>см | $t_2$                        | $t_1$ |
| 1                           | 60          | 45    | 36    | –     | 2                               | 12              | 173           | 3                            | 2     |
| 2                           | 80          | –     | 60    | 45    | 5                               | 10              | 41            | 2                            | 1     |
| 3                           | 100         | 60    | 75    | –     | 8                               | 6               | 40            | 4                            | 2     |
| 4                           | 58          | 45    | 60    | –     | 4                               | 4               | 172           | 4                            | 3     |
| 5                           | 80          | –     | 45    | 30    | 3                               | 15              | 102           | 3                            | 2     |
| 6                           | 100         | 60    | 30    | –     | 7                               | 16              | 215           | 4                            | 2     |
| 7                           | 45          | 35    | 105   | –     | 8                               | 5               | 124           | 4                            | 3     |
| 8                           | 35          | 10    | 10    | –     | 6                               | 2               | 111           | 3                            | 2     |

|    |    |    |    |    |    |    |     |   |   |
|----|----|----|----|----|----|----|-----|---|---|
| 9  | 40 | 30 | 15 | —  | 10 | 7  | 48  | 2 | 1 |
| 10 | 15 | —  | 40 | 35 | 5  | 3  | 129 | 4 | 3 |
| 11 | 40 | 25 | 20 | —  | 9  | 8  | 65  | 2 | 1 |
| 12 | 20 | 15 | 10 | —  | 5  | 10 | 179 | 3 | 2 |
| 13 | 30 | 20 | 40 | —  | 7  | 0  | 557 | 5 | 2 |
| 14 | 15 | 10 | 15 | —  | 6  | 3  | 80  | 2 | 1 |
| 15 | 15 | 10 | 15 | —  | 5  | 2  | 189 | 4 | 2 |
| 16 | 20 | 15 | 15 | —  | 4  | 6  | 220 | 4 | 3 |
| 17 | 15 | 10 | 20 | —  | 8  | 4  | 44  | 2 | 1 |
| 18 | 20 | 15 | 10 | —  | 3  | 12 | 211 | 4 | 1 |
| 19 | 15 | 10 | 20 | —  | 5  | 10 | 505 | 5 | 3 |
| 20 | 25 | 15 | 10 | —  | 10 | 8  | 277 | 3 | 1 |
| 21 | 20 | 10 | 30 | 10 | 6  | 5  | 356 | 5 | 2 |
| 22 | 40 | 20 | 35 | —  | 7  | 6  | 103 | 2 | 1 |
| 23 | 40 | 30 | 30 | 15 | 5  | 9  | 194 | 3 | 2 |
| 24 | 30 | 15 | 40 | 20 | 9  | 8  | 105 | 4 | 2 |
| 25 | 50 | 20 | 60 | —  | 8  | 4  | 119 | 3 | 2 |
| 26 | 32 | 16 | 32 | 16 | 6  | 14 | 862 | 4 | 2 |
| 27 | 40 | 18 | 40 | 18 | 5  | 10 | 193 | 2 | 1 |
| 28 | 40 | 20 | 40 | 15 | 8  | 5  | 347 | 3 | 2 |
| 29 | 25 | 20 | 50 | 25 | 4  | 6  | 32  | 2 | 1 |
| 30 | 30 | 15 | 20 | —  | 10 | 7  | 128 | 2 | 1 |

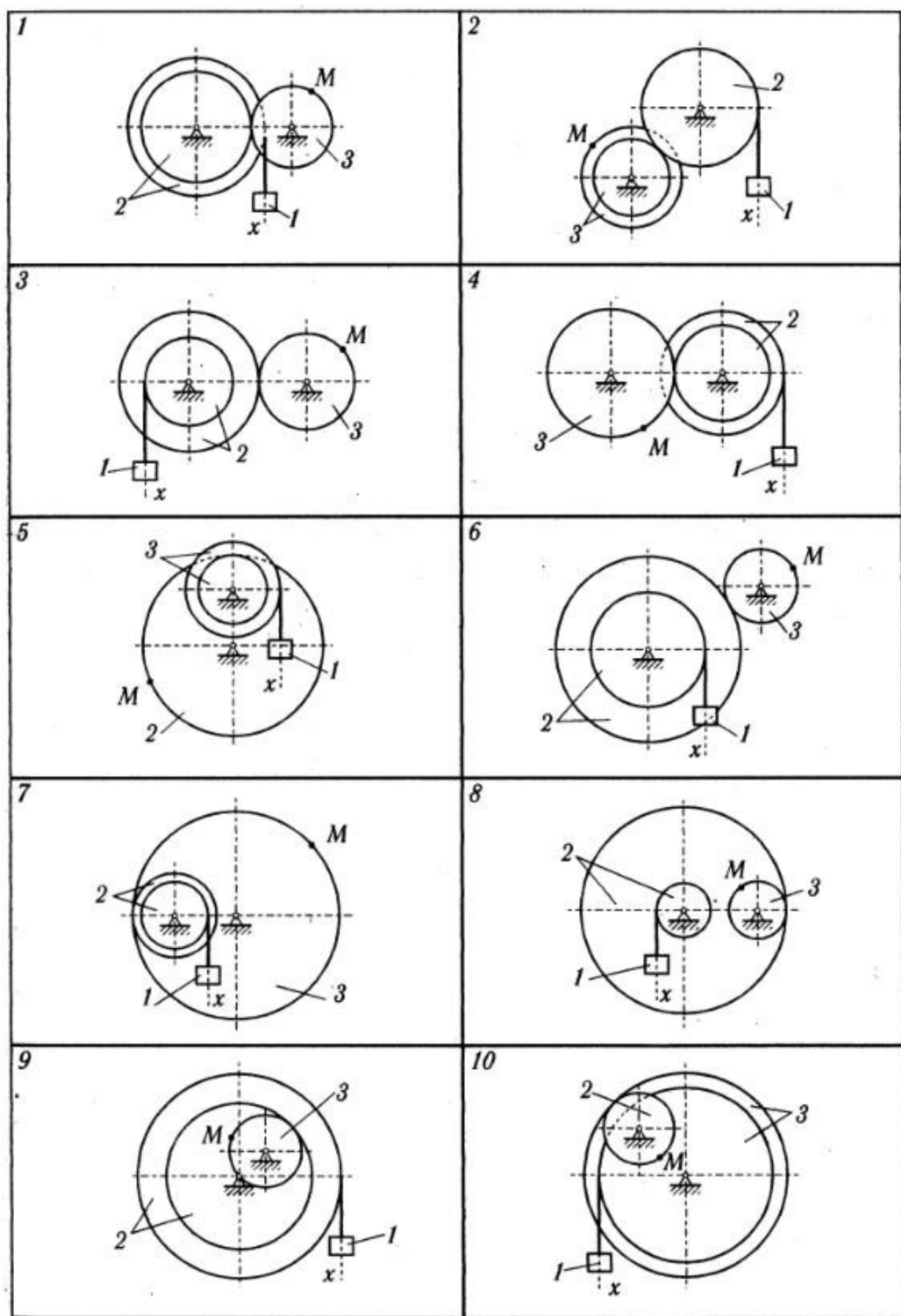


Рисунок 1

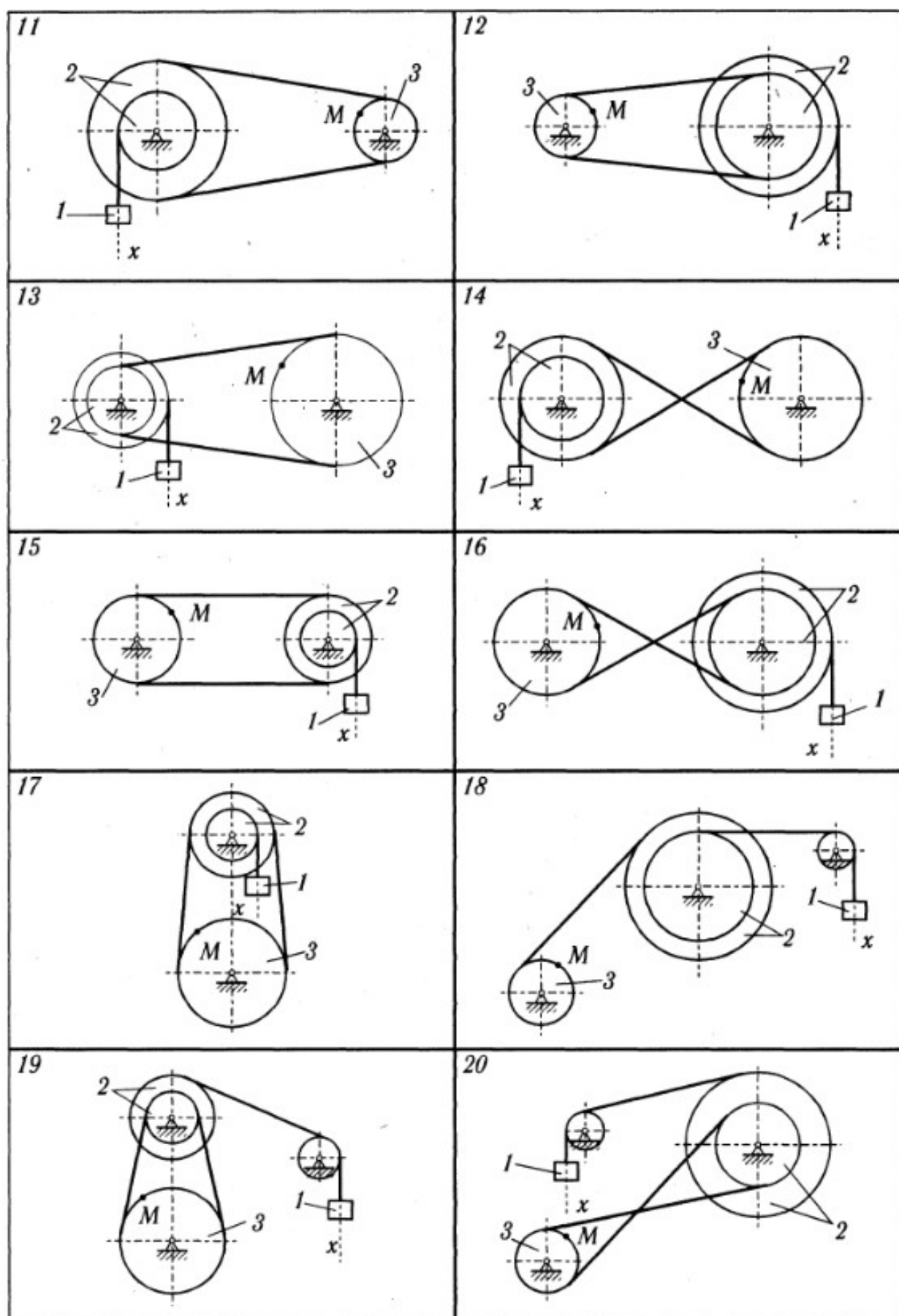


Рисунок 2

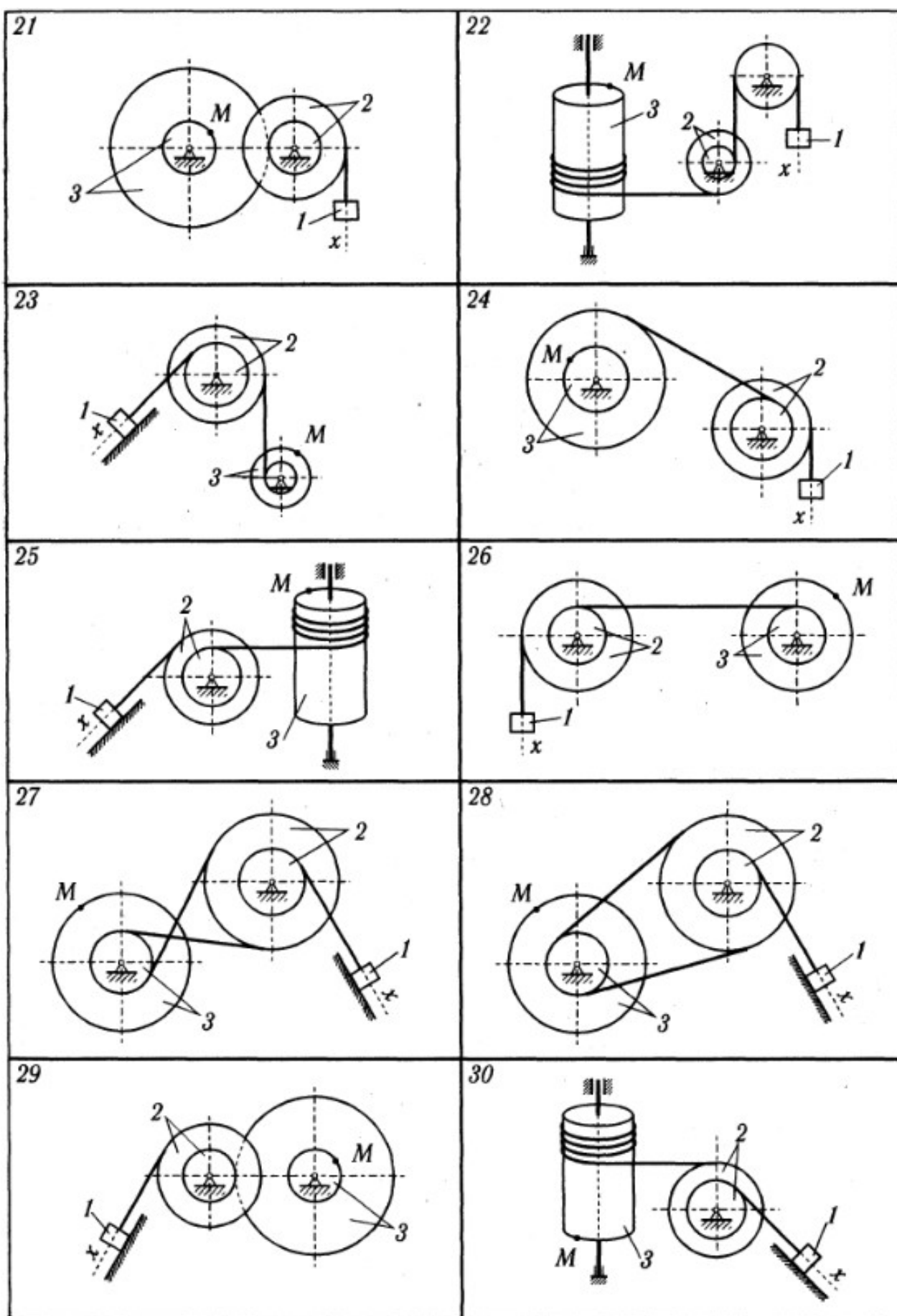


Рисунок 3

### Пример

Исходные данные:  $r_2 = 10\text{см}$ ,  $R_2 = 15\text{см}$ ,  $R_3 = 15\text{см}$ ,  $x_0 = 5\text{см}$ ,  $x_2 = 189\text{см}$ ,  $V_0 = 2\text{см/с}$ ,  $t_1 = 2\text{с}$ ,  $t_2 = 4\text{с}$ .

Найти уравнение движения груза 1, а также скорость и ускорение точки M в момент времени  $t = t_1$  (рисунок 4).

Решение:

1. Уравнение движения груза 1 имеет вид

$$x = C_2 \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_0 \quad (1)$$

Коэффициенты  $C_2$ ,  $C_1$ ,  $C_0$  могут быть определены из заданных граничных условий:

$$\text{при } t=0 \quad x = x_0 = C_0 = 5 \text{ см}; \quad (2)$$

$$V = x' = 2C_2 \cdot t + C_1; \quad \text{при } t_0=0 \quad V_0 = 2C_2 \cdot 0 + C_1; \quad C_1 = V_0 = 2 \text{ см/с}; \quad (3)$$

Подставляя (2), (3) и  $t_2 = 4\text{с}$  в (1), находим коэффициент  $C_2$ :

$$x_2 = C_2 \cdot t_2^2 + C_1 \cdot t_2 + C_0; \quad 189 = C_2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 5; \quad C_2 = 11.$$

Таким образом, уравнение движения груза 1 имеет вид:

$$x = 11 \cdot t^2 + 2 \cdot t + 5 \quad (4)$$

1. Скорость груза 1 находим по определению:

$$V = x' = (11 \cdot t^2 + 2 \cdot t + 5)' = 22 \cdot t + 2; \quad \text{при } t_1 = 2\text{с} \quad V_1 = 22 \cdot 2 + 2 = 46 \text{ см/с}; \quad (5)$$

Аналогично находим ускорение груза 1:

$$a = V' = (22 \cdot t + 2)' = 22 \text{ см/с}^2, \quad (6)$$

– величина постоянная, и при  $t = t_1$   $a_1 = 22 \text{ см/с}^2$ .

3. Для определения скорости и ускорения точки M выполним кинематический анализ преобразования поступательного движения груза 1 во вращательное движение ступенчатого колеса 2 и колеса 3, т. е. запишем уравнения, связывающие скорость груза 1 и угловые скорости  $\omega_2$  и  $\omega_3$  (рис. 4):

$$\begin{aligned} V &= \omega_2 \cdot r_2; \Rightarrow \omega_2 = V / r_2; \quad \omega_2 \cdot R_2 = \omega_3 \cdot R_3 \Rightarrow \omega_3 = (\omega_2 \cdot R_2) / R_3 = \\ &= ((V / r_2) \cdot R_2) / R_3 = ((22 \cdot t + 2) / r_2) \cdot R_2 / R_3; \end{aligned} \quad (7)$$

$\omega_3(t_1) = ((22 \cdot 2 + 2) / 10) \cdot 15 / 15 = 4,6 \text{ рад/с}$ ; – угловая скорость колеса 3.

Угловое ускорение колеса 3:  $\varepsilon_3 = (\omega_3)' = (((22 \cdot t + 2) / r_2) \cdot R_2 / R_3)' =$

$$= ((22 / r_2) \cdot R_2) / R_3; \quad \varepsilon_3(t_1) = (((22 / 10) \cdot 15) / 15) = 2,2 \text{ рад/с}^2.$$

Скорость точки  $M$ , её вращательное (касательное), центростремительное (нормальное) ускорения определяются по формулам:

$$V_M = \omega_3 \cdot R_3; \quad V_M(t_1) = \omega_3 \cdot R_3 = 4,6 \cdot 15 = 69 \text{ см/с}; \quad (8)$$

$$a_M^{\tau} = \varepsilon_3 \cdot R_3; \quad (9)$$

$$a_M^{\tau}(t_1) = 2,2 \cdot 15 = 33 \text{ см/с}^2. \quad (10)$$

$$a_M^n = \omega_3^2 \cdot R_3 = (4,6)^2 \cdot 15 = 317,4 \text{ см/с}^2. \quad (11)$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^{\tau})^2 + (a_M^n)^2} = R_3 \sqrt{\varepsilon_3^2 + \omega_3^4};$$

$$a_M(t_1) = \sqrt{(33)^2 + (317,4)^2} = 319,11 \text{ см/с}^2. \quad (12)$$

Результаты расчётов приведены в таблице 2.

Таблица 2

| $V_1$<br>см/с | $a_1$<br>см/с <sup>2</sup> | $\omega_3$<br>рад/с | $\varepsilon_3$<br>рад/с <sup>2</sup> | $V_M$<br>см/с | $a_M^{\tau}$<br>см/с <sup>2</sup> | $a_M^n$<br>см/с <sup>2</sup> | $a_M$<br>см/с <sup>2</sup> |
|---------------|----------------------------|---------------------|---------------------------------------|---------------|-----------------------------------|------------------------------|----------------------------|
| 46            | 22                         | 4,6                 | 2,2                                   | 69            | 33                                | 317,4                        | 319,11                     |

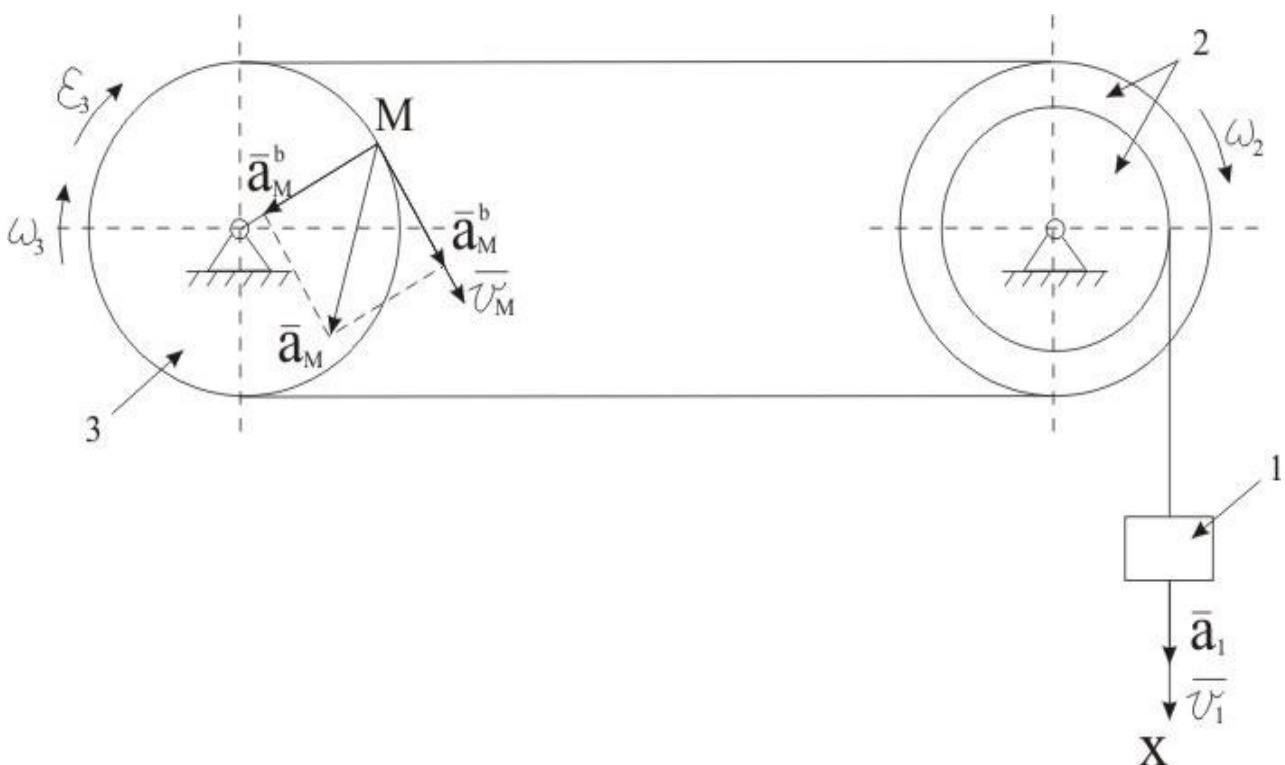


Рисунок 4

### **Вопросы для самопроверки:**

1. Определение поступательного движения тела. Примеры поступательного движения тела.
2. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек тела, совершающих поступательное движение.
3. Определение вращательного движения тела. Примеры.
4. Сколько степеней свободы имеет тело, вращающееся вокруг неподвижной оси? Закон или уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.
5. Определение угловой скорости и углового ускорения.
6. Как вычисляются угловая скорость и угловое ускорение?
7. Каким образом вводится понятие о векторах угловой скорости и углового ускорения? Можно ли сказать, что они являются скользящими векторами?
8. Классификация вращений по угловому ускорению тела.
9. Вывод формулы для вычисления линейной (окружной) скорости точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
10. Составляющие ускорения точек тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси. По каким формулам они вычисляются?
11. Формула для вычисления полного ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.
12. Как можно представить скорость, касательное и нормальное ускорение в виде векторных произведений? Соответствующие выражения.

### **Рекомендуемая литература по данной теме**

1. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика : учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87388.html> (дата обращения: 19.04.2021). —

Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI:

<https://doi.org/10.23682/87388>

2. Бегун, П. И. Прикладная механика : учебник / П. И. Бегун, О. П. Кормилицын. — 2-е изд. — Санкт-Петербург : Политехника, 2020. — 464 с. — ISBN 978-5-7325-1089-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/94831.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
3. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. - <http://biblioclub.ru/>
4. Красюк, А. М. Теоретическая механика. Конспект лекций : учебное пособие / А. М. Красюк. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2009. — 138 с. — ISBN 978-5-7782-1245-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/45438.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

## Практическое занятие 7

### ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

**Цель работы:** получение навыков применения теорем динамики к исследованию движения материальной точки.

#### Задания

Шарик, принимаемый за материальную точку, движется из положения *A* внутри трубки, ось которой расположена в вертикальной плоскости (рис. 23 – 25). Найти скорость шарика в положениях *B* и *C* и давление шарика на стенку трубки в положении *C*. Трением на криволинейных участках траектории пренебречь. В вариантах 3, 6, 7, 10, 13, 15, 17, 19, 25, 28, 29 шарик, пройдя путь  $h_0$ , отделяется от пружины.

Необходимые для решения данные приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Данные для расчёта

| № варианта | $m$ , кг | $V_a$ , м/с | $\tau$ , с | $R$ , м | $f$  | $\alpha$ , град | $\beta$ , град | $h_0$ , см | $c$ , Н/см | Величины, которые требуется определить дополнительно |
|------------|----------|-------------|------------|---------|------|-----------------|----------------|------------|------------|------------------------------------------------------|
| 1          | 0,5      | 20          | 2,0        | 2,0     | 0,20 | 30              | 45             | —          | —          | —                                                    |
| 2          | 0,6      | 16          | 0,2        | 4       | 0,10 | 45              | 20             | —          | —          | $H$                                                  |
| 3          | 0,4      | 0           | 2,0        | 0,2     | 0,15 | 30              | —              | 10         | 1          | $V_\delta$                                           |
| 4          | 0,2      | 5           | 0,5        | 1,0     | 0,10 | 45              | —              | —          | —          | $V_\delta$                                           |
| 5          | 0,1      | 8           | 1,5        | 2,0     | 0,20 | 30              | —              | —          | —          | —                                                    |
| 6          | 0,3      | 2           | 2,0        | 4,0     | 0,10 | 30              | 20             | 30         | 2          | $V_\delta$                                           |
| 7          | 0,4      | 5           | 1,0        | 1,0     | 0,10 | 30              | —              | 50         | 5          | $V_\delta$                                           |
| 8          | 0,2      | 1           | 0,5        | 1,5     | 0,15 | 30              | 60             | 0          | 4          | $h$                                                  |
| 9          | 0,5      | 2           | 1,5        | 4,0     | 0,25 | 20              | 60             | —          | —          | $V_\delta$                                           |
| 10         | 0,4      | 4           | 0,1        | 0,5     | 0,10 | 30              | 60             | 0,2        | 0,2        | $V_\delta$                                           |
| 11         | 0,2      | 6           | 1,0        | 1,0     | 0,30 | 45              | —              | —          | 3          | $V_\delta, h$                                        |
| 12         | 0,4      | 5           | 0,4        | 2,0     | 0,20 | 30              | 60             | —          | —          | $V_\delta$                                           |
| 13         | 0,3      | 0           | 0,1        | 1,0     | 0,10 | 30              | 60             | 50         | 10         | $V_\delta$                                           |
| 14         | 0,6      | 0           | 2,0        | 3,0     | 0,20 | 60              | 30             | —          | —          | $S$                                                  |
| 15         | 0,1      | 1           | 0,1        | 1,0     | 0,15 | 60              | 20             | 50         | 0,2        | $V_\delta$                                           |
| 16         | 0,4      | 2           | 0,2        | 2,0     | 0,40 | 30              | —              | —          | —          | $V_\delta$                                           |
| 17         | 0,2      | 0           | 0,1        | 1,0     | 0,20 | 30              | —              | 40         | 1,0        | $V_\delta$                                           |
| 18         | 0,3      | 3           | 0,4        | 1,5     | 0,10 | 45              | —              | —          | —          | —                                                    |
| 19         | 0,1      | 4           | 0,1        | 0,4     | 0,30 | 30              | 60             | 10         | 0,5        | $V_\delta$                                           |
| 20         | 0,2      | 10          | 1,0        | 0,5     | 0,10 | 60              | —              | 0          | 1,2        | $h$                                                  |

|    |     |   |     |     |      |    |    |    |     |                 |
|----|-----|---|-----|-----|------|----|----|----|-----|-----------------|
| 21 | 0,7 | 3 | 0,3 | 0,3 | 0,20 | 45 | —  | —  | —   | —               |
| 22 | 0,4 | 1 | 0,2 | 0,2 | 0,40 | 45 | —  | 0  | 1,1 | $V_{\delta}, h$ |
| 23 | 0,6 | 2 | 0,4 | 0,2 | 0,20 | 45 | —  | —  | —   | —               |
| 24 | 0,5 | 0 | 0,5 | 0,6 | 0,30 | 60 | 30 | —  | —   | $H$             |
| 25 | 0,1 | 0 | 0,2 | 0,5 | 0,25 | —  | 30 | 30 | 0,4 | $V_{\delta}$    |
| 26 | 0,2 | 2 | 0,1 | 0,2 | 0,20 | 30 | —  | —  | —   | $V_{\delta}$    |
| 27 | 0,8 | 3 | 0,2 | 0,4 | 0,15 | 45 | —  | —  | —   | $V_{\delta}$    |
| 28 | 0,3 | 4 | 0,1 | 0,6 | 0,35 | 30 | 15 | 60 | 0,1 | $V_{\delta}$    |
| 29 | 0,5 | 0 | 0,2 | 0,5 | 0,20 | 45 | 30 | 50 | 0,8 | $V_{\delta}$    |
| 30 | 0,8 | 5 | 0,3 | 0,6 | 0,15 | 30 | —  | —  | —   | $t_{DE}$        |

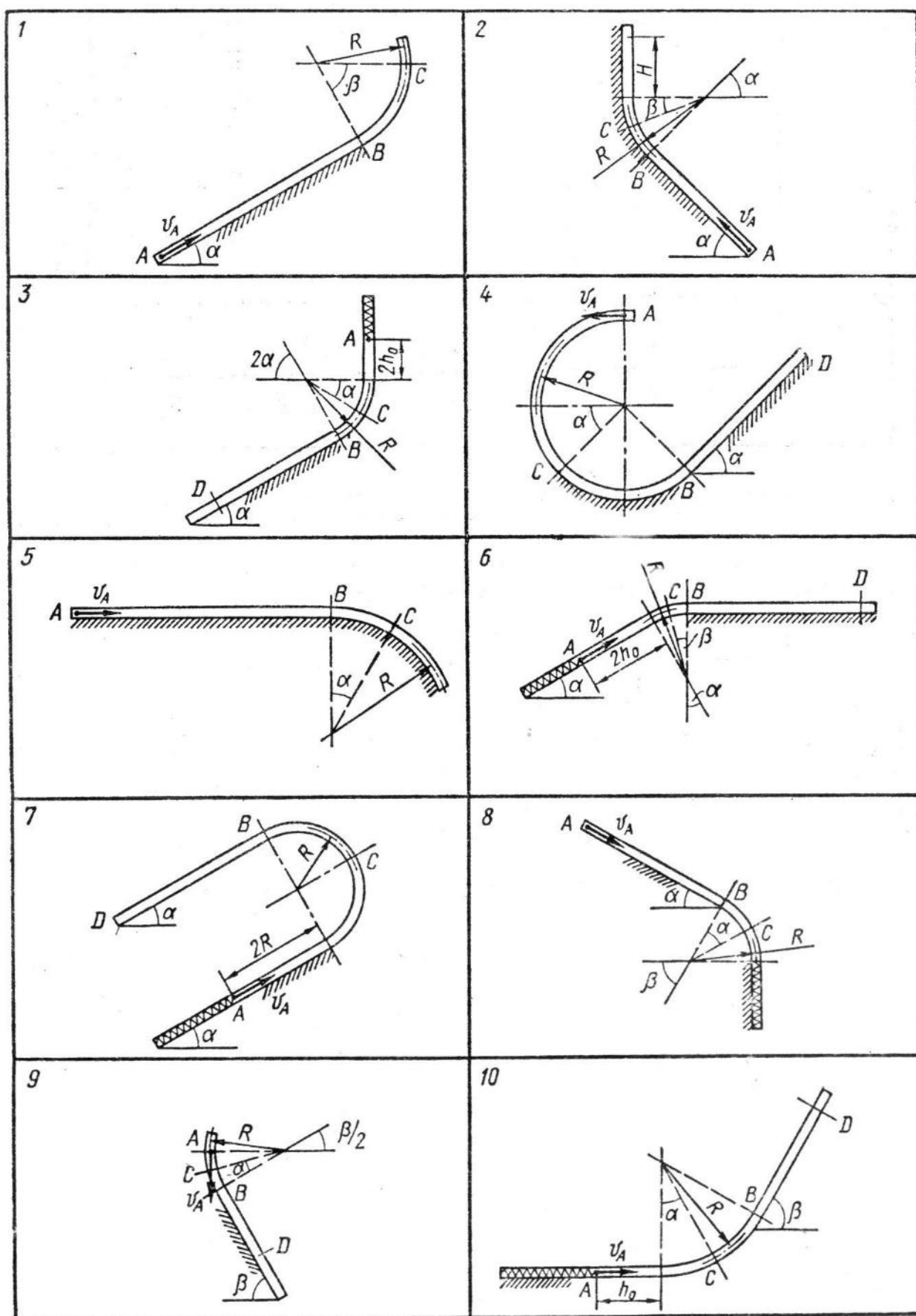


Рисунок 23

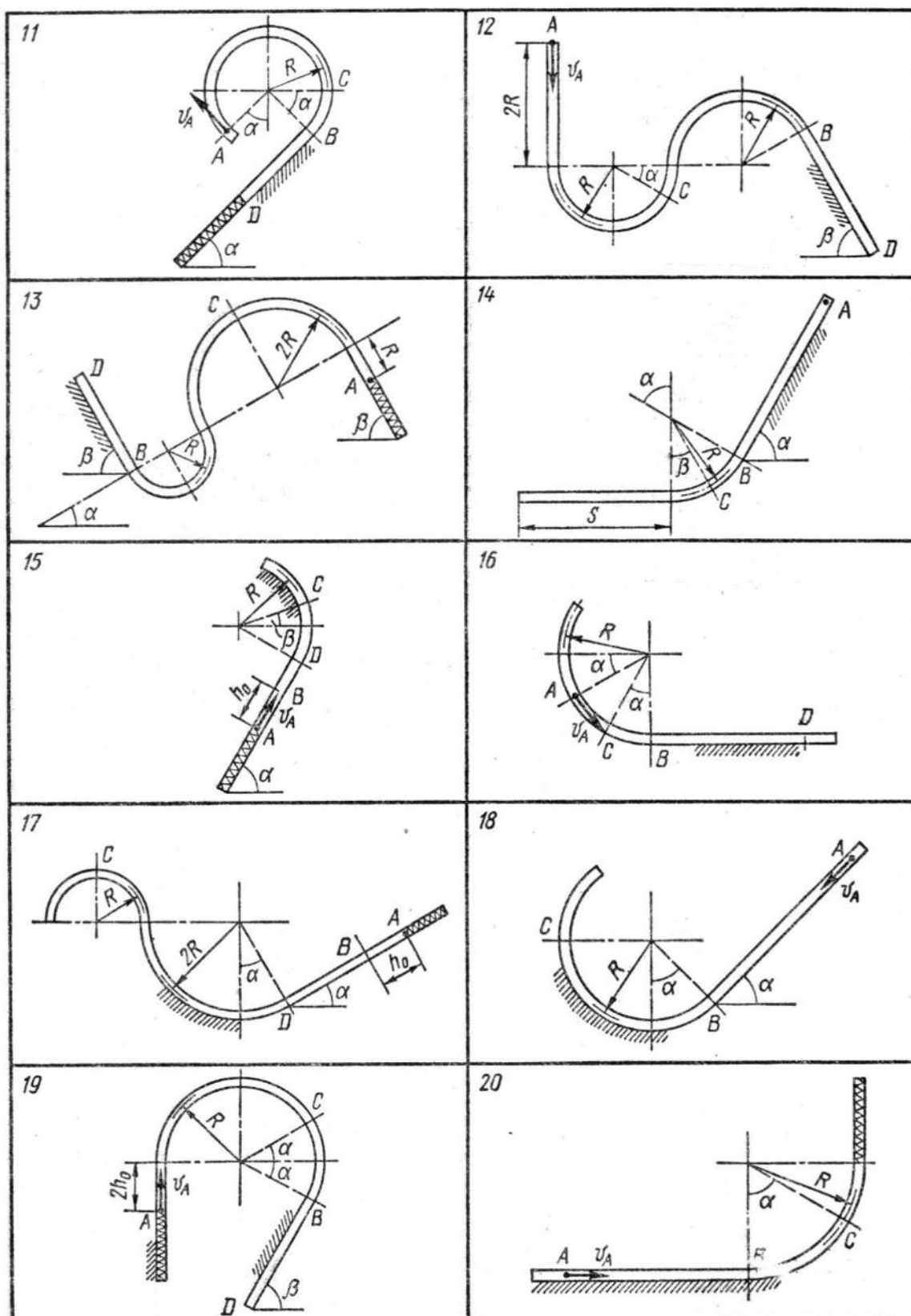


Рисунок 24

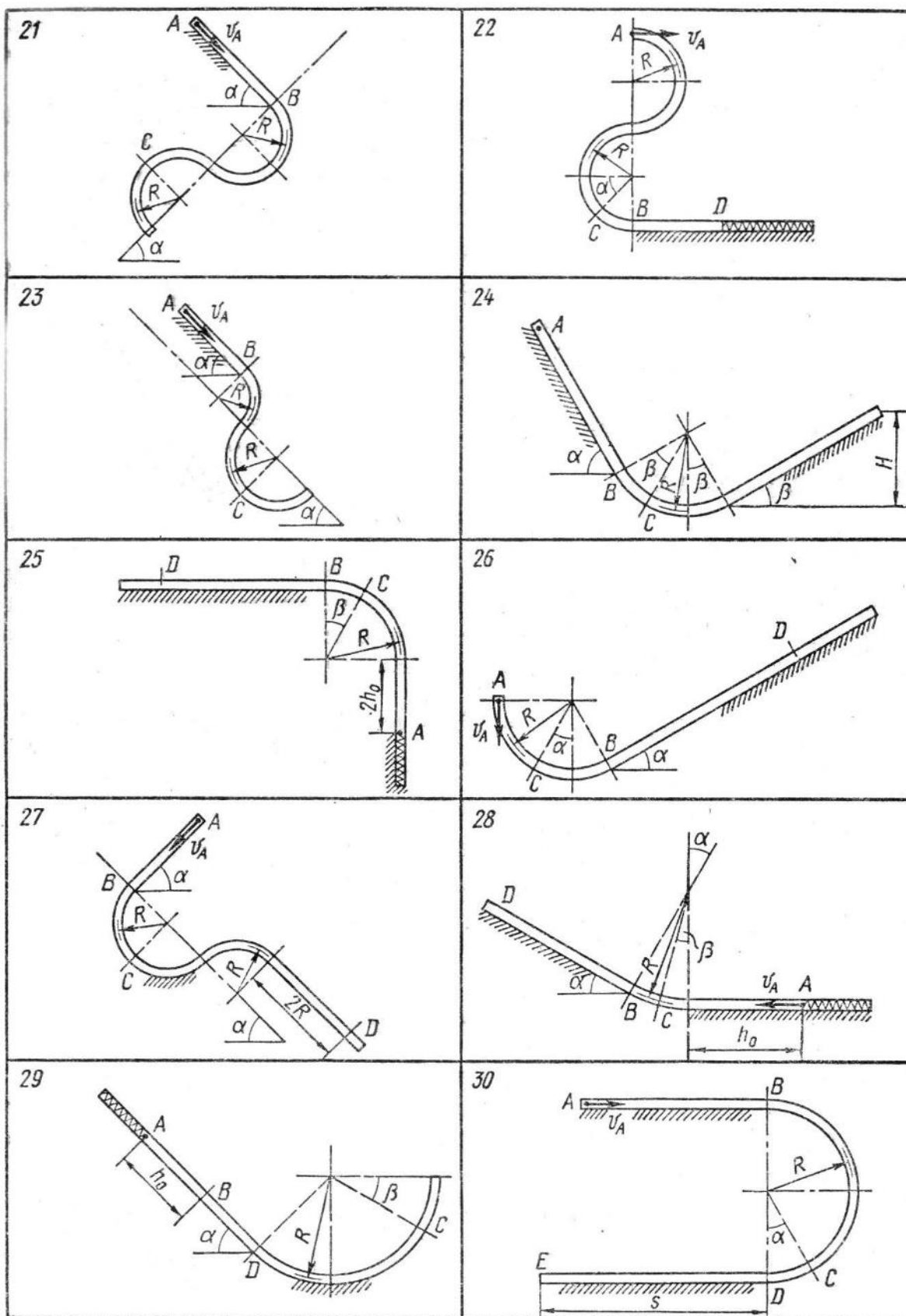


Рисунок 25

В задании приняты следующие обозначения:  $m$  – масса шарика;  $v_A$  – начальная скорость шарика;  $\tau$  – время движения шарика на участке  $AB$  (в вариантах 1, 2, 5, 8, 14, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 30) или на участке  $BD$  (в вариантах 3, 4, 6, 7, 9-13, 15-17, 19, 22, 25, 26, 28, 29);  $f$  – коэффициент трения скольжения шарика по стенке трубки;  $h_0$  – начальная деформация пружины;  $\Delta h$  – наибольшее сжатие пружины;  $c$  – коэффициент жесткости пружины;  $H$  – наибольшая высота подъема шарика;  $s$  – путь, пройденный шариком до остановки.

### Пример выполнения задания:

Дано:  $m = 0,5$  кг;  $v_A = 0,8$  м/с;  $\tau = 0,1$  с (время движения на участке  $BD$ );  $R = 0,2$  м;  $f = 0,1$ ;  $\alpha = 60^\circ$ ;  $\beta = 30^\circ$ ;  $h_0 = 0$ ;  $c = 10$  Н/см = 1000 Н/м.

Определить  $v_B, v_C, N_C, v_D, h$  (рис. 26).

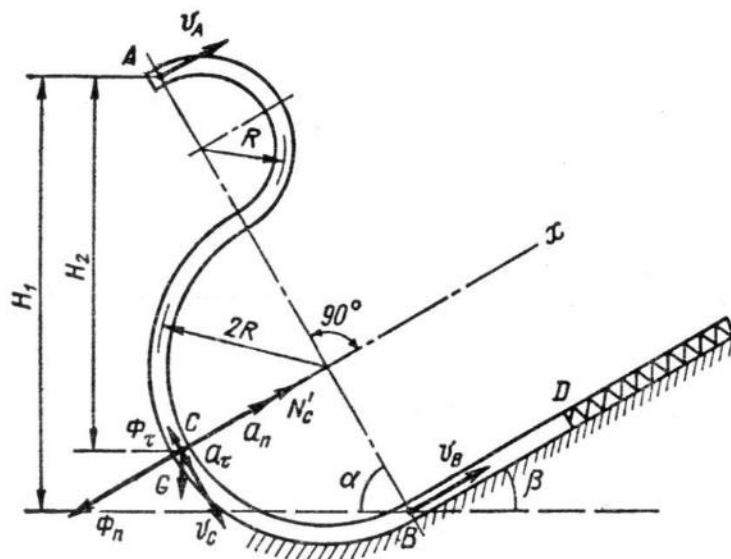


Рисунок 26

Решение:

Для определения  $v_B$  и  $v_C$  применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки. Движение шарика на участках  $AC$  и  $AB$  траектории происходит под действием силы тяжести  $G$  (силы трения на криволинейных участках не учитываем):

$$\frac{m v_B^2}{2} - \frac{m v_A^2}{2} = \sum A_i = G H_1 = m g A B \sin \alpha = m g 6 R \sin \alpha;$$

$$v_B^2 - v_A^2 = 2 g 6 R \sin \alpha;$$

$$v_B = 4,59 \text{ м/с};$$

$$mv_C^2/2 - mv_A^2/2 = \sum A_i = GH_2 = mg(4R \sin \alpha + 2R \cos \alpha);$$

$$v_C^2 - v_A^2 = 4gR(2 \sin \alpha + \cos \alpha);$$

$$v_C = \sqrt{v_A^2 + 4gR(2 \sin \alpha + \cos \alpha)},$$

$$v_C = 4,26 \text{ м/с}.$$

Определяем давление шарика на стенку канала в положении **C**

В соответствии с принципом Даламбера для материальной точки геометрическая сумма сил, приложенных к точке, и силы инерции этой точки равны нулю:

$$\vec{G} + \vec{N}'_C + \vec{\Phi} = 0.$$

Силу инерции материальной точки можно разложить на нормальную и касательную составляющие:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_\tau.$$

Сумма проекций сил  $\vec{G}$ ,  $N'_C$  и  $\vec{\Phi}$  на ось  $x$  должна быть равна нулю:

$$N'_C - G \cos 60^\circ - \Phi_n = 0.$$

Отсюда

$$N'_C - G \cos 60^\circ - \Phi_n = mg \cos 60^\circ + \frac{mv_C^2}{2R},$$

$$N'_C = 25,2 \text{ Н}.$$

Реакцию  $N'_C$  можно также определить с помощью естественного уравнения движения:

$$\frac{mv_C^2}{R} = \sum P_i \cos(\vec{P}_i, \vec{n}) = N'_C - G \cos 60^\circ.$$

Отсюда

$$N'_C = G \cos 60^\circ + \frac{mv_C^2}{R}.$$

Искомое давление шарика на стенку трубки по числовому значению равно найденной реакции  $N'_C$  и направлено в противоположную сторону.

Скорость шарика в положении  $D$  найдем, применив на участке  $BD$  теорему об изменении количества движения материальной точки (рис. 27):

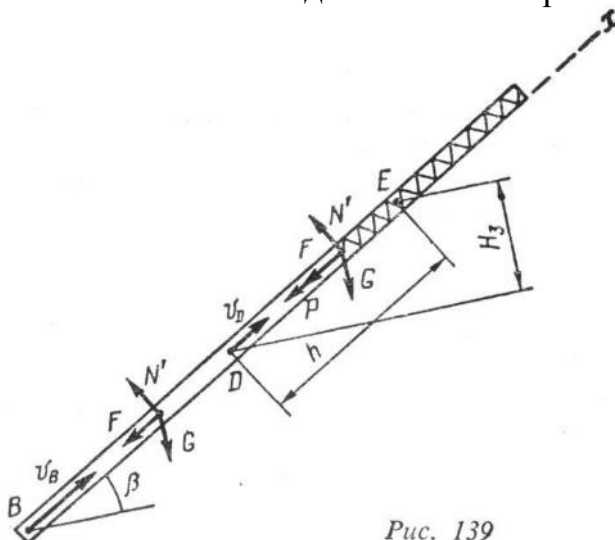


Рис. 139

Рисунок 27

$$mv_{Dx} - mv_{Bx} = \sum S_{ix}$$

К точке приложена сила тяжести  $\vec{G}$ , реакция стенки трубки  $\vec{N}'$  и сила трения  $\vec{F}$ :

$$F = fN' = fG \cos \beta.$$

Так как

$$v_{Dx} = v_D, v_{Bx} = v_B, \sum S_{ix} = -G \sin \beta \cdot t - Ft = -mg \sin \beta \cdot t - fmg \cos \beta \cdot t,$$

то  $mv_D - mv_B = -mg \sin \beta \cdot t - fmg \cos \beta \cdot t,$

Откуда  $v_D = 4,01 \text{ м/с}.$

Для определения максимального сжатия  $h$  пружины воспользуемся на участке  $DE$  теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$mv_E^2/2 - mv_D^2/2 = \sum A_i = -ch^2/2 - CH_3 - Fh.$$

Учитывая, что  $v_E = 0$  и  $H_3 = h \sin \beta$ , получаем

$$ch^2/2 + G(\sin \beta + f \cos \beta) h - mv_D^2/2 = 0,$$

или  $h^2 + 2Gh(\sin \beta + \cos \beta)/c - mv_D^2/c = 0.$

Решая полученное квадратное уравнение относительно  $h$ , получим

$$h = (-0,003 \pm 0,090) \text{ м}.$$

Принимаем в качестве искомой величины положительный корень квадратного уравнения:

$$h = -0,003 + 0,090 = 0,087 \text{ м.}$$

### **Вопросы к практическому занятию**

1. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.
2. Работа силы тяжести.
3. Принцип Даламбера для материальной точки.
4. Составляющие силы инерции материальной точки.
5. Теорема об изменении количества движения материальной точки.
6. Потенциальная энергия деформации пружины.

### **Рекомендуемая литература по данной теме**

1. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика : учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87388.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/87388>
2. Бегун, П. И. Прикладная механика : учебник / П. И. Бегун, О. П. Кормилицын. — 2-е изд. — Санкт-Петербург : Политехника, 2020. — 464 с. — ISBN 978-5-7325-1089-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/94831.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
3. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный

исследовательский технологический университет». - Казань :

Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. - <http://biblioclub.ru/>

4. Красюк, А. М. Теоретическая механика. Конспект лекций : учебное пособие / А. М. Красюк. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2009. — 138 с. — ISBN 978-5-7782-1245-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/45438.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8

### ИЗУЧЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЯ МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ НА РАСТЯЖЕНИЕ

**Цель работы:** изучение поведения малоуглеродистой стали в процессе испытания на растяжение.

**Задача:** определение механических характеристик материала образца по диаграмме испытания.

#### Теоретическое обоснование

Для решения практических задач необходимо знать числовые характеристики пластических и прочностных свойств материалов, которые обычно называются механическими характеристиками. Существует много методов испытаний материалов, но основным является испытание на растяжение. Опыты проводятся на специальных машинах, рабочее усилие в которых создаётся либо при помощи рычажного устройства (рычажные машины), или с помощью гидравлического давления, передаваемого на поршень (гидравлические машины). При испытаниях на растяжение применяются так называемые нормальные образцы круглого или прямоугольного сечения. Это вызвано тем, что результаты испытаний образцов разной формы, хотя и изготовленных из одного и того же материала, несколько отличаются. Как доказал русский учёный В. В. Кирпичёв, только при употреблении геометрически подобных образцов становится возможным сравнение результатов испытаний.

Полное геометрическое подобие обеспечивается при испытании образцов круглого поперечного сечения с одинаковым отношением длины к диаметру  $l_0/d_0 = \text{const}$ . Обычно принимается  $l_0 = 10d_0$  (иногда используются укороченные образцы с  $l_0 = 5d_0$ ), где  $l_0$  – расчетная длина, т. е. длина участка образца, на которой измеряется его удлинение. Образец (рисунок 1), кроме цилиндрической рабочей части, имеет плавные переходы к цилиндрическим утолщенным головкам, предназначенным для закрепления образцов в машине.

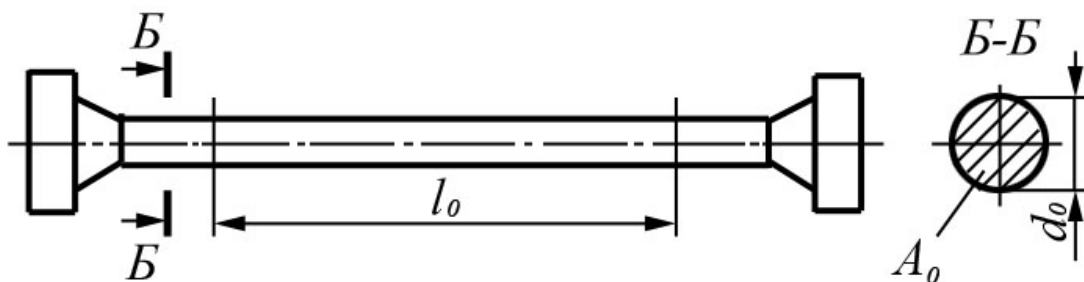


Рисунок 1 – Эскиз образца до испытаний

При испытаниях металлов на растяжение необходимо руководствоваться требованиями ГОСТ 1497-61. Большинство современных испытательных машин снабжены диаграммным аппаратом, который автоматически в процессе испытания вычерчивает график изменения удлинения образца  $\Delta l$  в зависимости от статического увеличения растягивающей силы  $F$  – диаграмму растяжения  $F=f(\Delta l)$ .

На рисунке 2 изображена машинная диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали (типа Ст.3). Приведенная диаграмма, хотя и характеризует поведение материала, но зависит от размеров образца, т. е. если взять образец с другим поперечным сечением, то получим иную диаграмму.

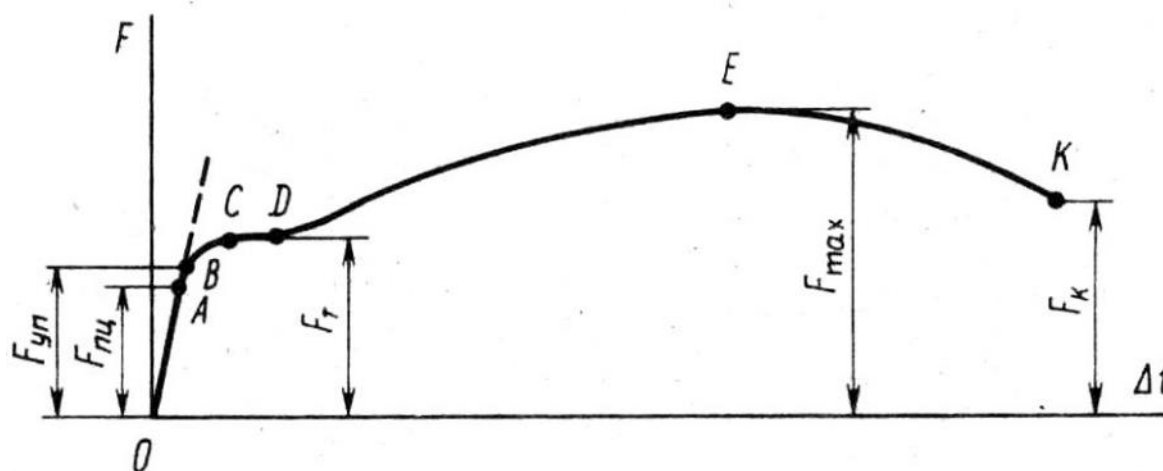


Рисунок 2 – Машинная диаграмма растяжения малоуглеродистой стали

Для исключения влияния поперечных размеров и длины рабочей части образца, удобно перестроить машинную диаграмму растяжения  $F=f(\Delta l)$ ,

разделив силы  $F$  на первоначальную площадь сечения образца  $A_0$ , а абсолютное удлинение  $\Delta l$  на расчётную длину  $l_0$  т. е.

$$\sigma = \frac{F}{A_0}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (1)$$

В результате получим условную диаграмму растяжения  $\sigma=f(\varepsilon)$  (рисунок 3). Вначале диаграмма имеет прямолинейный участок  $OA$ , на котором соблюдается прямая пропорциональная зависимость между напряжением и относительным удлинением, то есть закон Гука.

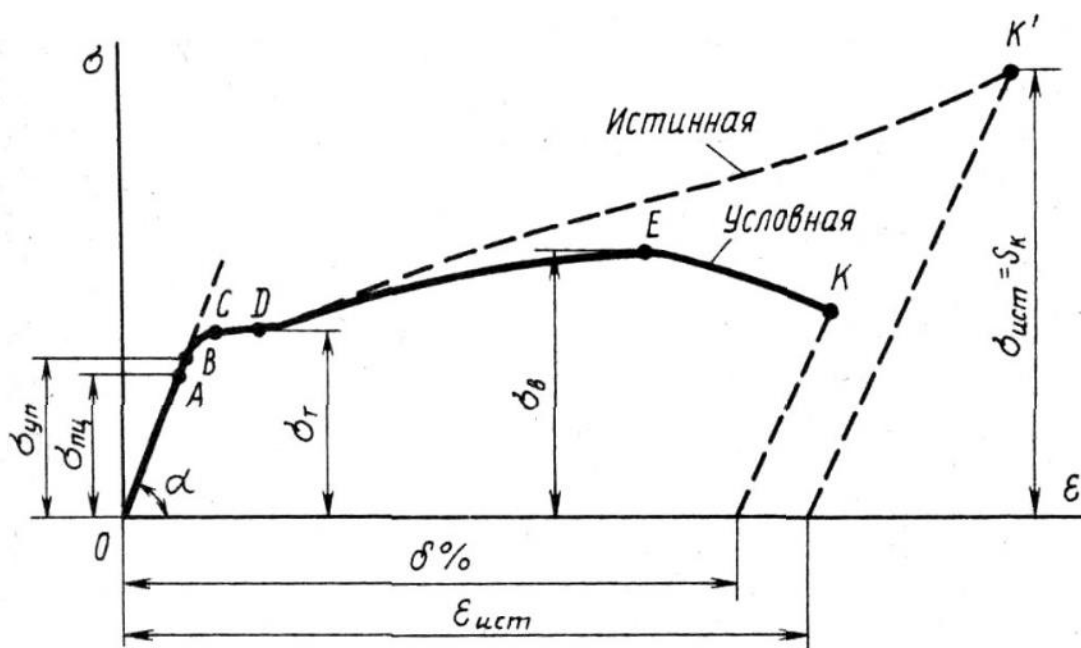


Рисунок 3 – Условная диаграмма растяжения малоуглеродистой стали

Наибольшее напряжение, до которого материал следует закону Гука, называется пределом пропорциональности и обозначается  $\sigma_{пц}$  (на диаграмме — точка  $A$ ):

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{A_0}, \quad (2)$$

где  $F_{пц}$  — нагрузка, соответствующая пределу пропорциональности. Для малоуглеродистой стали  $\sigma_{пц}=2 \cdot 10^8 \text{ Па} = 200 \text{ МПа} = 2000 \text{ кг/см}^2$ .

Тангенс угла  $\alpha$  наклона участка  $OA$  к оси абсцисс пропорционален модулю упругости:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\mu_{\varepsilon}}{\mu_{\sigma}} = E \frac{\mu_{\varepsilon}}{\mu_{\sigma}}, \quad (3)$$

где  $\mu_{\varepsilon}$ ,  $\mu_{\sigma}$  – масштабные коэффициенты относительного удлинения и напряжения на диаграмме.

Выше точки  $A$  диаграмма начинает несколько искривляться, и закон Гука нарушается. Можно отметить такое значение напряжения (точка  $B$  на рисунке 2), до которого в материале имеют место только упругие деформации, полностью исчезающие после снятия нагрузки. Это напряжение называется пределом упругости:

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_0}, \quad (4)$$

Чтобы найти предел упругости, необходимо после каждого малого приращения нагрузки за предел пропорциональности образец разгружать и следить, не образовалась ли пластическая деформация, не исчезающая при снятии нагрузки. Так как пластические деформации в отдельных кристаллах появляются уже в самой ранней стадии нагружения, то величина  $\sigma_y$ , как и  $\sigma_{пл}$ , будет зависеть от требований точности, которые накладываются на производимые замеры. Обычно остаточную деформацию, соответствующую пределу упругости, принимают в пределах 0,001 – 0,003 %. Соответственно этому допуску предел упругости обозначается через  $\sigma_{0,001}$  или  $\sigma_{0,003}$ . Точки  $A$  и  $B$  на диаграмме (рисунок 3) настолько близки друг к другу, что часто предел упругости и предел пропорциональности считают совпавшими, хотя это не совсем верно.

За точкой  $B$  деформации растут быстрее нагрузки, искривление увеличивается, и в некоторой точке  $C$  поведение материала резко меняется: деформации возрастают без заметного увеличения нагрузки (или даже при постоянной нагрузке) до точки  $D$  – материал, как говорят, «течёт» (явление текучести металлов). Горизонтальный (или почти горизонтальный) участок  $CD$  на диаграмме растяжения называется площадкой текучести, а напряжение, при котором происходит течение материала (увеличение деформаций при

приблизительно постоянной нагрузке), называется пределом текучести и обозначается  $\sigma_T$ , причём

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}, \quad (5)$$

где  $F_T$  – нагрузка, соответствующая площадке текучести на рисунке 2 (для Ст.3 предел текучести примерно равен  $\sigma_T = 2,4 \cdot 10^8 \text{ Па} = 240 \text{ МПа} = 2400 \text{ кг/см}^2$ ).

Многие пластичные металлы и сплавы (среднеуглеродистые стали, медь, алюминий, дюралюмин и др.) не имеют четко выраженной площадки текучести на диаграмме растяжения (рисунок 4). Для таких материалов определяется условный предел текучести: напряжение, при котором остаточное удлинение составляет 0,2% (иногда 0,5%). Условный предел текучести обозначается  $\sigma_{0,2}$  и определяется по формуле:

$$\sigma_{0,2} = \frac{F_{0,2}}{A_0}, \quad (6)$$

где  $F_{0,2}$  – нагрузка, соответствующая остаточному удлинению 0,2% от расчётной длины образца. Для ее определения на оси абсцисс диаграммы откладывают величину остаточного удлинения  $ON = 0,0002 l_0$  (рисунок 4) в масштабе удлинений и из точки  $N$  проводят прямую, параллельную первоначальному прямолинейному участку диаграммы  $OA$ . Ордината точки  $D$  пересечения ее с диаграммой растяжения и определяет нагрузку  $F_{0,2}$ , соответствующую условному пределу текучести  $\sigma_{0,2}$ .

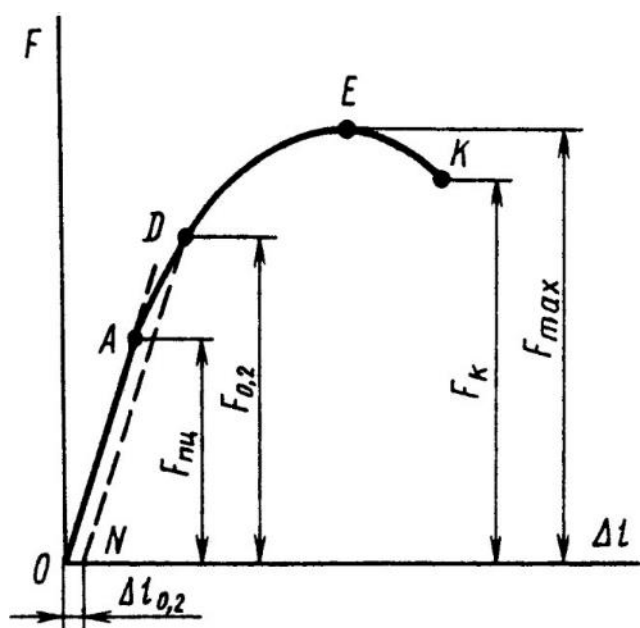


Рисунок 4 – Диаграмма растяжения низколегированной стали.  
Определение условного предела текучести

При дальнейшем деформировании образца за точкой  $D$  напряжения и растягивающее усилие вновь увеличиваются, то есть происходит упрочнение стали, причём этот процесс идёт до момента достижения силой  $F$  своего наибольшего значения.

На диаграмме этапу упрочнения отвечает наклоненная кривая  $DE$  (рисунок 2), называемая зоной упрочнения. Напряжения, соответствующие наибольшему значению  $F_{max}$ , называются временным сопротивлением или пределом прочности  $\sigma_B$ :

$$\sigma_B = \frac{F_{max}}{A_0}, \quad (7)$$

На диаграмме  $\sigma_B$  соответствует точке  $E$  (для Ст. 3  $\sigma_{вр} \approx 4000 \text{ кг/см}^2 = 400 \text{ МПа}$ ). Ввиду того, что временное сопротивление очень просто определяется из опыта (достаточно разорвать образец с известной площадью  $A_0$  сечения на машине и отметить при этом  $F_{max}$ ), эта характеристика является основной для суждения о прочности металла.

До достижения предела прочности продольные и поперечные деформации равномерно распределяются по расчетной длине образца. В момент достижения предела прочности поведение образца еще раз резко меняется: деформация образца локализуется в одном, наиболее слабом месте (или в месте наличия дефектов-надрезов, царапин и т. д.), вследствие чего наблюдается местное поперечное сужение образца, где и начинает образовываться так называемая шейка (рисунок 5), остальные же сечения остаются практически неизменными.

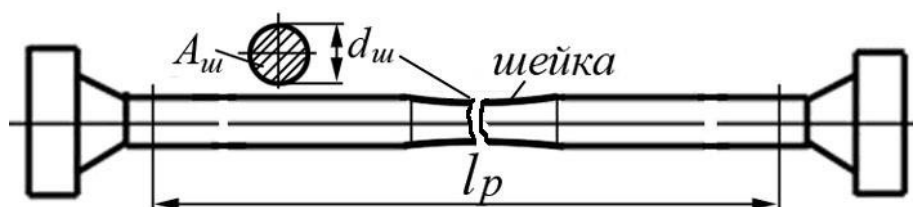


Рисунок 5 – Эскиз образца после испытаний

Вследствие резкого уменьшения поперечного сечения образца для дальнейшего его растяжения нужна все меньшая и меньшая сила и, наконец, в точке  $K$  (рисунок 3) происходит разрыв (разрушение) образца. Ниспадающая ветвь  $EK$  диаграммы растяжения называется зоной местной текучести.

Рассмотрев характерные ординаты диаграммы растяжения, устанавливают ряд механических характеристик материала:  $\sigma_{\text{пл}}$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_t$ ,  $\sigma_b$ , которые являются характеристиками прочности материала.

Рассмотрим теперь абсциссы диаграммы  $\sigma$ - $\varepsilon$  (рисунок 3). Полную деформацию образца при разрыве  $\varepsilon_{\text{разр}}$  можно разделить на упругую  $\varepsilon_{\text{разр}}^y$ , мгновенно исчезающую после разрыва, и пластическую, которая обычно обозначается через  $\delta$  и называется относительным остаточным удлинением при разрыве:

$$\delta = \frac{l_p - l_0}{l_0} \cdot 100\%, \quad (8)$$

В формуле (8)  $l_p$  – длина расчётной части образца после разрыва, измеренная после соединения частей разорванного образца. Величина  $\delta$  характеризует пластичность материала. Для Ст.3  $\delta = (21 \dots 23)\%$ , а для наиболее распространенных сортов стали  $\delta = (8 \dots 28)\%$ .

Для оценки пластичности материала определяется и другая характеристика – относительное остаточное сужение поперечного сечения в шейке после разрыва:

$$\psi = \frac{A_0 - A_{\text{ш}}}{A_0} \cdot 100\%, \quad (9)$$

где  $A_0$  – первоначальная площадь поперечного сечения образца;

$A_{\text{ш}}$  – площадь поперечного сечения шейки в месте разрыва (в наиболее тонком месте шейки); для Ст.3  $\psi = 55 \dots 70 \%$ .

Величина  $\psi$  более точно характеризует пластические свойства, т. е. пластическая деформация по длине образца распределяется неравномерно, и величина  $\delta$  является некоторым средним удлинением. Чем больше  $\delta$  и  $\psi$ , тем

пластичнее материал, поэтому  $\delta$  и  $\psi$  называются механическими характеристиками пластичности материала.

### **Задание**

Получив от преподавателя разорванный образец из низкоуглеродистой стали, машинную диаграмму его испытания и значение максимального усилия испытания  $F_{\max}$ , определить:

- Масштабный коэффициент сил диаграммы.
- Силы  $F_{\text{ПЦ}}$ ,  $F_{\text{Т}}$ ,  $F_{\text{К}}$ , напряжения  $\sigma_{\text{ПЦ}}$ ,  $\sigma_{\text{Т}}$ ,  $\sigma_{\text{В}}$ ,  $\sigma_{\text{РАЗ}}$ .
- Диаметр шейки образца.
- Относительное остаточное удлинение при разрыве.
- Относительное остаточное сужение поперечного сечения в шейке после разрыва.

### **Вопросы для защиты работы**

1. Какие образцы применяют для испытаний?
2. В каких координатах вычерчивается диаграмма растяжения диаграммным аппаратом испытательной машины?
3. Какой вид имеет машинная диаграмма растяжения малоуглеродистой стали?
4. Как строится условная диаграмма растяжения?
5. Какие изменения, происходящие с образцом в процессе растяжения, не учитываются условной диаграммой растяжения?
6. Что называется пределом пропорциональности, пределом упругости, пределом текучести, пределом прочности (или временным сопротивлением разрыву) и как они определяются?
7. Как определить предел пропорциональности по машинной диаграмме растяжения?

8. Какие зоны можно выделить на диаграмме растяжения?
9. Как определить, в какой точке заканчивается зона упругости при испытании на растяжение?
10. По каким участкам образца происходит его растяжение в зоне упрочнения и в зоне местной текучести?
11. Какие деформации называются упругими, а какие пластическими (остаточными)?
12. Почему после нагружения образца выше временного сопротивления нормальное напряжение  $\sigma$  начинает падать?
13. Какие механические характеристики служат для оценки пластичности металлов и как эти характеристики определить?
14. Как определяется предел условной текучести по диаграмме растяжения, не имеющей четко выраженной площадки текучести?

### **Рекомендуемая литература по данной теме**

1 Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

2 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-

1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. -  
URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9

### ИЗУЧЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА СЖАТИЕ

**Цель и содержание работы:** ознакомление с методикой испытаний и определения механических характеристик при сжатии; сравнительное изучение особенностей разрушения пластичных и хрупких, изотропных и анизотропных материалов при испытаниях на сжатие.

#### Теоретическое обоснование

Для изучения механических характеристик материалов существенное значение имеют испытания не только на растяжение, но и на сжатие, причём для хрупких материалов испытания на сжатие являются основными.

Многие пластичные материалы совсем не разрушаются при сжатии, или разрушаются только при значительной остаточной деформации.

При испытании пластичных материалов (например, стального образца) диаграмма сжатия вначале аналогична диаграмме растяжения: предел пропорциональности и предел текучести почти совпадают, но площадка текучести не получается столь же ярко выраженной, как при растяжении. Довести до разрушения образец из малоуглеродистой стали практически не удастся. Для таких материалов условно принимают предел прочности при сжатии равным пределу прочности при растяжении. Испытание обычно прекращается по достижении нагрузки, в 3 – 5 раз превышающей  $P_T$ .

Хрупкие материалы (чугун, камень, бетон и т.п.) разрушаются при сжатии, однако характерным является то, что разрушение происходит при напряжениях, значительно больших, чем при растяжении. При испытании чугунного образца диаграмма сжатия сохраняет качественные особенности диаграммы растяжения, однако сопротивление сжатию значительно выше (в 4 – 5 раз) сопротивления растяжению.

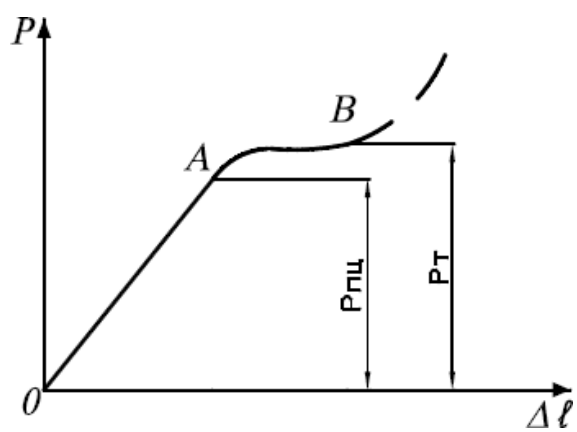


Рисунок 2.1

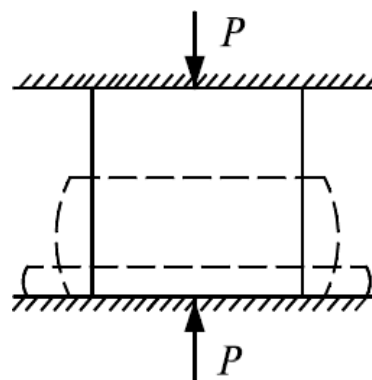


Рисунок 2.2

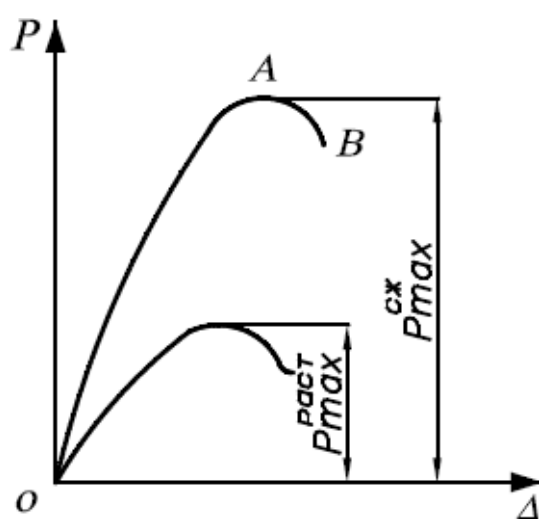
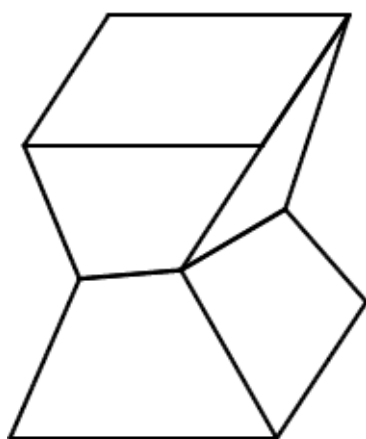


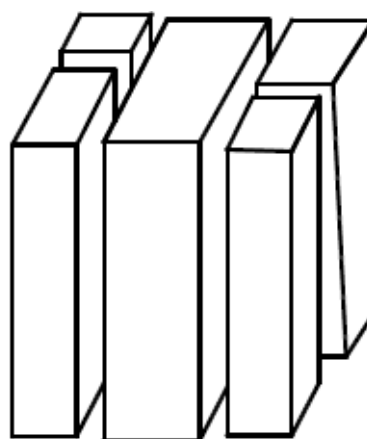
Рисунок 2.3



Рисунок 2.4



а



б

Рисунок 2.5

Все материалы можно условно разделить на два типа: изотропные (имеющие одинаковые механические свойства в разных направлениях) и анизотропные (имеющие различные свойства в разных направлениях).

Древесина является анизотропным материалом и поэтому результаты, полученные при сжатии вдоль и поперек волокон, резко отличны. Характерным для диаграммы сжатия древесины поперек волокон является значение нагрузки, после которой её рост существенно замедляется, а деформация продолжает возрастать. При дальнейшем нагружении древесина не разрушается, а лишь прессуется. За предел прочности в таком случае принимается ордината переломной точки.

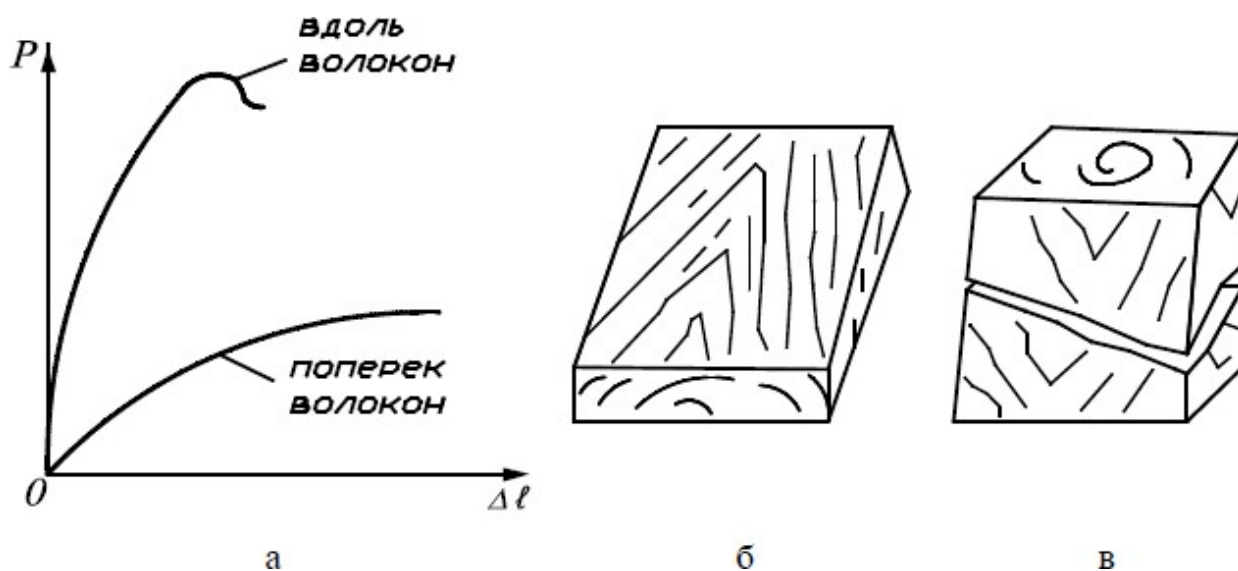


Рисунок 2.6

Для проведения испытаний на сжатие применяется гидравлический пресс П-125 или одна из разрывных машин Р-10, Р-20, Р-50. Разрывные машины снабжены диаграммным аппаратом, автоматически записывающим в процессе испытаний диаграмму сжатия. Для испытания металлов на сжатие используются образцы в виде коротких цилиндров-крешеров, у которых высота равна одному - двум диаметрам. Для других материалов применяются образцы в виде кубиков (стороны кубиков: для дерева 50 мм, для цемента и камня 70 мм, для бетона 200 – 300 мм).

## **Задание**

Ознакомиться с образцами, прошедшими испытание на сжатие и диаграммами испытаний.

Выполнить:

- краткий конспект основных теоретических положений;
- эскизы всех образцов до и после испытаний;
- диаграммы сжатия.

## **Вопросы для защиты работы**

1. Какие образцы используются при испытаниях на сжатие?
2. Чем обусловлено определенное соотношение высоты и поперечных размеров образцов при сжатии?
3. Какой вид имеет диаграмма сжатия малоуглеродистой стали?
4. Какие механические характеристики можно определить при испытании пластичной стали на сжатие?
5. Можно ли довести до разрушения образец из пластичной стали при сжатии?
6. Какой вид имеет диаграмма сжатия для чугунного образца? Её отличие от диаграммы растяжения.
7. Каков характер разрушения чугунного образца при сжатии?
8. Чем объясняется приобретение чугунным образцом бочкообразной формы?
9. Какие механические характеристики можно определить при испытании цементного кубика на сжатие?
10. Каков характер разрушения при сжатии цементного кубика при наличии и отсутствии сил трения?
11. Какой вид имеют диаграммы для деревянных образцов, испытанных на сжатие вдоль и поперек волокон? В чем различия этих диаграмм?
12. Можно ли довести до разрушения деревянный образец при сжатии поперек волокон?

13. Каков характер разрушения деревянного образца при испытании на сжатие вдоль волокон?

### **Рекомендуемая литература по данной теме**

1 Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

2 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 10

**ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ СТЕРЖНЕЙ**

**Цель работы:** получение навыков прочностного расчёта при растяжении и сжатии.

**Задача:** проверка стержней кронштейна на прочность.

**Теоретическая часть**

Условие прочности при действии продольной внутренней силы  $N$  приведём в российских и международных обозначениях.

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm}$$

где  $\sigma$  – наибольшее нормальное напряжение, возникающее в рассчитываемом элементе при рабочей нагрузке;

$[\sigma] = \sigma_{adm}$  – допускаемое нормальное напряжение (*admissible* – допустимый);

$N$  – внутренняя продольная сила;

$A$  – площадь поперечного сечения стержня.

Допускаемое нормальное напряжение определяют по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[s]} \quad \text{или} \quad \sigma_{adm} = \frac{\sigma_{dan}}{S_{adm}},$$

где  $\sigma_{пред} = \sigma_{dan}$  – предельное (опасное) напряжение, при котором в материале появляются признаки разрушения или заметные остаточные деформации (*dangerous* – опасный).

$[s] = S_{adm}$  – допускаемый коэффициент запаса прочности. При статическом приложении нагрузки принимают: для пластичных материалов, например, сталей  $1,4 \leq [s] \leq 2,5$ , для хрупких материалов  $2,5 \leq [s] \leq 3$ .

Опасным напряжением при статической нагрузке является: для пластичных материалов  $\sigma_T = \sigma_y$  – предел текучести материала (индекс  $y$  от английского *yield* – текучесть); для хрупких материалов  $\sigma_B = \sigma_u$  – предел

прочности материала (индекс *u* от английского *ultimate* – предел). Поскольку хрупкие материалы неодинаково сопротивляются растяжению и сжатию, для них определяют два допускаемых напряжения. При растяжении  $[\sigma_p] = \sigma_{t adm}$  (*t* – от английского *tension* – растяжение), при сжатии  $[\sigma_c] = \sigma_{c adm}$  (*c* – от английского *compression* – сжатие).

Имея запись условия прочности, можно решать задачи трёх типов:

1) Подставить известные значения  $N$ ,  $A$ ,  $\sigma$  в неравенство  $\frac{N}{A} \leq [\sigma]$  и проверить его выполнение, т.е. выполнить проверочный расчёт.

2) Найти минимально необходимую площадь поперечного сечения  $A \geq \frac{N}{[\sigma]}$  – проектный расчёт.

3) Определить допускаемую нагрузку  $N \leq [\sigma]A$ .

Как правило, при изготовлении стержней со стандартными или нормализованными профилями, полученную из проектного расчёта площадь нужно округлить до одного из стандартных значений. При этом действительный коэффициент запаса прочности  $s = \frac{[\sigma]}{\sigma} \geq [s]$  может быть меньше допускаемого только на величину погрешности расчётов (не более 3%). Значительное превышение значения  $s$  по сравнению с  $[s]$ , когда можно выбрать меньшее стандартное значение площади, ведёт к неоправданному удорожанию и утяжелению конструкции.

## ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Используя значения продольных сил в стержнях ВА и ВС, которые были найдены в работе «Графоаналитический и аналитический методы сложения сил плоской сходящейся системы»  $N_A = 40,3$  кН,  $N_C = 73,95$  кН:

1) Проверить прочность стержней, если они выполнены из стали Ст5, имеющей предел текучести  $\sigma_t = \sigma_y = 200$  Мпа. Допускаемый коэффициент запаса прочности принять  $[s] = s_{adm} = 2$ . Площади сечений  $A_{BC} = 800$  мм<sup>2</sup>,  $A_{BA} = 1000$  мм<sup>2</sup>.

2) Если расчётное напряжение больше допускаемого более чем на 3 процента, или если расчётное напряжение меньше допускаемого более чем на 15 процентов – выбрать для данного стержня другую площадь поперечного сечения при том же материале. Площадь округлять до целого числа сотен квадратных миллиметров.

### Решение

Для стали Ст5, имеющей предел текучести  $\sigma_T = \sigma_y = 200$  МПа, при коэффициенте запаса прочности  $[s] = s_{adm} = 2$ , допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[s]} = \frac{200}{2} = 100 \text{ МПа}.$$

Определяем нормальные напряжения в стержнях.

$$\sigma_{BC} = \frac{N_C}{A_{BC}} = \frac{73,95 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^2} = 92 \text{ МПа} < 100 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{BA} = \frac{N_A}{A_{BA}} = \frac{40,3 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^2} = 40,3 \text{ МПа} < 100 \text{ МПа}.$$

Для обоих стержней выполняются условия прочности

Недогрузка стержня ВС составляет  $\frac{100 - 92}{100} = \frac{8}{100}$ , т.е. меньше 15%.

Недогрузка стержня ВА составляет  $\frac{100 - 40,3}{100} = \frac{59,7}{100}$ , т.е. больше 15%.

Площадь его сечения можно уменьшить до

$$A_{BA} \geq \frac{N_A}{[\sigma]} = \frac{40,3 \cdot 10^3}{100} = 403 \text{ мм}^2.$$

Если округлить площадь до 400 мм<sup>2</sup>, то расчётное напряжение будет

$$\sigma_{BA} = \frac{N_A}{A_{BA}} = \frac{40,3 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^2} = 100,75 \text{ МПа}$$

и перегрузка составит  $\frac{100,75 - 100}{100} = \frac{0,75}{100}$ , т.е. меньше 3%, что допустимо.

### Задание

Используя значения продольных сил в стержнях ВА и ВС, которые были найдены в работе «Графоаналитический и аналитический методы сложения сил плоской сходящейся системы»:

1) Проверить прочность стержней, если они выполнены из стали Ст5,

имеющей предел текучести  $\sigma_t = \sigma_y = 200$  Мпа. Допускаемый коэффициент запаса

прочности принять  $[s]=s_{adm}=2$ . Площади сечений  $A_{BC}$  и  $A_{BA}$  указаны в таблице данных для расчёта (таблица 2) в работе «Графический метод сложения сил плоской сходящейся системы».

2) Если расчётное напряжение больше допускаемого более чем на 3 процента, или если расчётное напряжение меньше допускаемого более чем на 15 процентов – выбрать для данного стержня другую площадь поперечного сечения при том же материале. Площадь округлять до целого числа квадратных сантиметров.

### **Вопросы к практическому занятию**

1. Как направлены внутренние силы при растяжении или сжатии?
2. Как определяют механическое напряжение при растяжении или сжатии?
3. Какие значения напряжений выбирают в качестве предельных для пластичных материалов?
4. Какие значения напряжений выбирают в качестве предельных для хрупких материалов?
5. Коэффициент запаса прочности расчётный и допускаемый.
6. Три формы записи условия прочности.

### **Литература**

1. Прикладная механика / Х.С. Гумерова. - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. - ISBN 978-5-7882-1571-6; То же [Электронный ресурс]. - URL: [http://biblioclub.ru/index.php?page=book\\_red&id=428011&sr=1](http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=428011&sr=1)
2. [Бегун П. И.](#) , [Кормилицын О. П.](#) Прикладная механика. Учебник/ П.И. Бегун, О.П. Кормилицын. – [2-е изд., перераб. и доп.](#) – СПб: Политехника, 2012. – 467 с. ISBN 5-7325-0859-7  
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=124008>

## ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛ И НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

### Теоретическая часть

Растяжением или сжатием называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях нагруженного элемента возникают внутренние усилия, приводимые к равнодействующей, направленной вдоль продольной оси  $z$ . Эта равнодействующая называется продольной силой и обозначается  $N_z$ . Брус, работающий преимущественно на растяжение или сжатие, принято называть стержнем.

Из условия равновесия отсеченной части бруса следует, что продольная сила  $N_z$  в произвольном поперечном сечении численно равна алгебраической сумме проекций на ось бруса  $z$  внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Продольную силу, вызывающую растяжение, считают положительной (рисунок 2.1); продольную силу, вызывающую сжатие – отрицательной (рисунок 2.2).

Для определения значений внутренних усилий в поперечных сечениях бруса строят эпюры продольных сил. Эпюра продольных сил  $N_z$  представляет собой график, выражающий изменение величины продольной силы  $N_z$  по длине стержня.

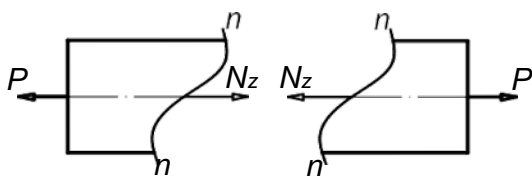


Рисунок 2.1

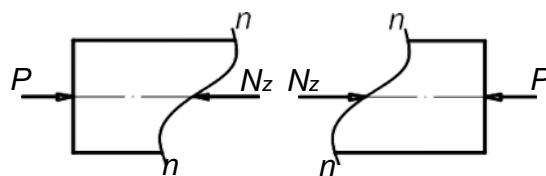


Рисунок 2.2

Для построения эпюр внутренних усилий при растяжении – сжатии используют метод сечений:

1) определяют опорные реакции (для консольной схемы нагружения опорные реакции можно не определять);

2) разбивают стержень на участки нагружения, в пределах которых закон распределения внутренних усилий в поперечном сечении стержня не меняется; границами участков нагружения являются начало и конец стержня, а также сечения, в которых:

- приложены сосредоточенные силы,
- начинается и заканчивается действие распределенной нагрузки,
- изменяется площадь поперечного сечения стержня;

3) рассекают стержень произвольным сечением в пределах первого участка нагружения;

4) отбрасывают часть стержня, содержащую большее количество внешних нагрузок (для консольной схемы нагружения следует отбросить часть стержня, содержащую жесткую заделку, если опорная реакция предварительно не определялась);

5) заменяют действие отброшенной части стержня внутренним усилием – продольной силой  $N_{zi}$  (в тех случаях, когда направление силы  $N_{zi}$  неизвестно, следует принимать ее положительной, то есть растягивающей, и направлять на схеме вектор  $N_{zi}$  от сечения);

6) составляют уравнение равновесия, из которого определяют величину и направление продольной силы  $N_{zi}$  (если после решения уравнения сила  $N_{zi}$  получилась со знаком плюс, то стержень в данном сечении растянут, со знаком минус – сжат);

7) выполняют пункты 3 – 6 для каждого участка нагружения;

8) по расчетным значениям строят эпюру продольных сил  $N_z$ ; для построения эпюры продольных сил проводят прямую, параллельную оси бруса (нулевую или базовую линию), перпендикулярно к которой откладываются ординаты, изображающие в некотором масштабе величины продольных сил в соответствующих сечениях стержня; положительные значения продольной силы откладывают выше, а отрицательные – ниже нулевой линии; заштриховывают эпюру тонкими линиями, перпендикулярными к оси, а внутри поля эпюры в кружке указывают знак (плюс или минус);

9) определяют значения нормальных напряжений для каждого участка нагружения стержня по формуле

$$\sigma_i = \frac{N_{zi}}{F_i} \quad (2.1)$$

где  $\sigma_i$  – нормальное напряжение на  $i$ -м участке стержня;

$N_{zi}$  – значение продольной силы на  $i$ -м участке; в формулу (2.1) значения продольной силы следует подставлять с учетом знака;

$F_i$  – площадь поперечного сечения стержня на рассматриваемом участке стержня;

10) по данным расчетов пункта 9 строят эпюру нормальных напряжений;

11) построенные эпюры продольных сил и нормальных напряжений следует проверить на соответствие следующим правилам:

- в сечениях, где приложены сосредоточенные силы, на эпюре продольных сил возникают «скачки» (мгновенные изменения значения продольной силы), численно равные приложенной силе и направленные вверх, если сила вызывает растяжение и вниз, если приложенная сила вызывает сжатие;

- «скачки» на эпюрах нормальных напряжений возникают в тех же сечениях, что и на эпюрах продольных сил, а также дополнительно в сечениях, где изменяется площадь поперечного сечения стержня;

- если на участке нагружения отсутствует распределенная нагрузка, эпюры продольных сил и нормальных напряжений для данного участка ограничены прямыми, параллельными оси стержня;

- знак нормальных напряжений на каждом участке нагружения соответствует знаку продольной силы для этого участка;

12) из анализа эпюры нормальных напряжений определяют опасное сечение; при растяжении (сжатии) опасным считается сечение или участок стержня, в котором нормальные напряжения максимальны по абсолютной величине (по модулю).

### Пример 2.1

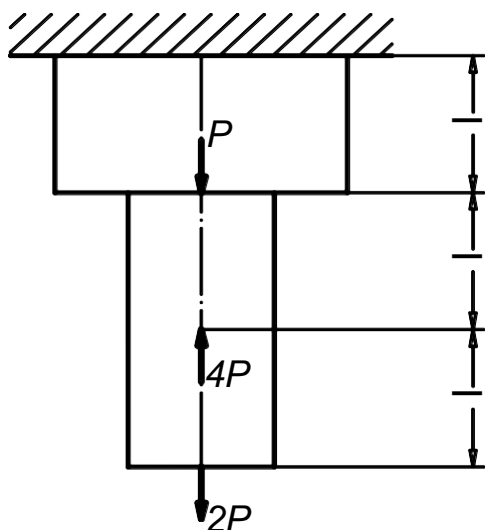


Рисунок 2.3

Для ступенчатого стержня, неподвижно заделанного в одном сечении и нагруженного сосредоточенными силами, как показано на расчетной схеме (рисунок 2.3), требуется построить эпюры продольных сил  $N_z$  и нормальных напряжений  $\sigma$ ; определить опасное сечение.

#### Решение

Величину продольной силы  $N_z$  определим методом сечений. Для этого разобьем стержень на участки

нагружения, начиная от сечения, максимально удаленного от закрепления. Границами участков нагружения будем считать сечения, в которых приложены внешние силы, а также сечения, в которых изменяются размеры поперечного сечения стержня (на рисунке 2.4 а эти участки отмечены римскими цифрами). Проведем произвольное сечение  $I-I$  на участке  $I$  и, отбросив верхнюю часть стержня, рассмотрим условие равновесия оставшейся (нижней) части, изображенной отдельно на рисунке 2.4 б). На оставшуюся часть действует сила  $P_I$  и искомое усилие  $N_{zI}$ . Направление вектора  $N_{zI}$  на схеме выбрано произвольно. Для оставшейся части стержня сумма проекций всех сил на ось  $z$  запишется в виде

$$N_{z_1} = 2P.$$

Продольная сила  $N_{zI}$  получилась со знаком «плюс», значит она действительно направлена от сечения, как и было предварительно принято (рисунок 2.4 б); таким образом, первый участок стержня испытывает растяжение.

Проведем произвольное сечение  $II-II$  на участке  $II$ , отбросим верхнюю часть стержня и рассмотрим равновесие оставшейся нижней части, изображенной отдельно на рисунке 2.4 в. На оставшуюся часть действуют силы  $2P$  и  $4P$  и искомое усилие  $N_{z2}$ . Проецируя эти силы на ось  $z$ , получаем

$$N_{z_2} = 2P - 4P = -2P.$$

Знак «минус» указывает, что в действительности сила  $N_{z2}$  направлена к сечению, а не от сечения, как было предположено ранее (рисунок 2.4 в). Следовательно, участок II испытывает сжатие.

Проведем произвольное сечение III–III на участке III, отбросим верхнюю часть стержня и рассмотрим равновесие оставшейся нижней его части, изображенной отдельно на рисунке 2.4 д. На оставшуюся часть действуют силы  $2P$ ,  $4P$  и  $P$  и искомое усилие  $N_{z3}$ . Проецируя эти силы на ось  $z$ , получаем

$$N_{z3} = -4P + 2P + P = -P.$$

Знак «минус» указывает, что первоначальное предположение о том, что сила  $N_{z3}$  направлена от сечения, неверно.

Построим график (эпюру), показывающий, как меняется продольная сила по длине стержня. Проведя ось абсцисс графика параллельно оси стержня, откладываем в произвольно выбранном масштабе найденные значения продольных сил по оси ординат. Положительные значения продольных сил откладывают вправо от оси эпюры, а отрицательные – влево (рисунок 2.4 д).

Эпюру нормальных напряжений получим, разделив значения  $N_z$  для каждого участка на величины соответствующих площадей поперечных сечений стержня (рисунок 2.4 е).

$$\text{Для первого участка } \sigma_I = \frac{N_z}{F_I} = \frac{2P}{F}.$$

$$\text{Для второго участка } \sigma_{II} = \frac{N_{z2}}{F_{II}} = -\frac{2P}{F}.$$

$$\text{Для третьего участка } \sigma_{III} = \frac{N_{z3}}{F_{III}} = -\frac{P}{2F} = -\frac{0,5P}{F}.$$

Построим график (эпюру), показывающий, как меняется нормальное напряжение по длине стержня. Проведя ось абсцисс графика параллельно оси стержня, откладываем в произвольно выбранном масштабе найденные значения нормальных напряжений по оси ординат. Положительные значения нормальных напряжений откладывают вправо от оси эпюры, а отрицательные –

влево (рисунок 2.4 е). Построенные таким образом эпюры заштриховываются тонкими линиями, перпендикулярными оси стержня.

В сечениях, где приложены внешние силы, значения продольной силы на эпюре (рисунок 2.4 д) меняются скачкообразно. На эпюре нормальных напряжений скачкообразное изменение значений наблюдается еще и в сечениях, где изменяется площадь поперечного сечения стержня (рисунок 2.4 е).

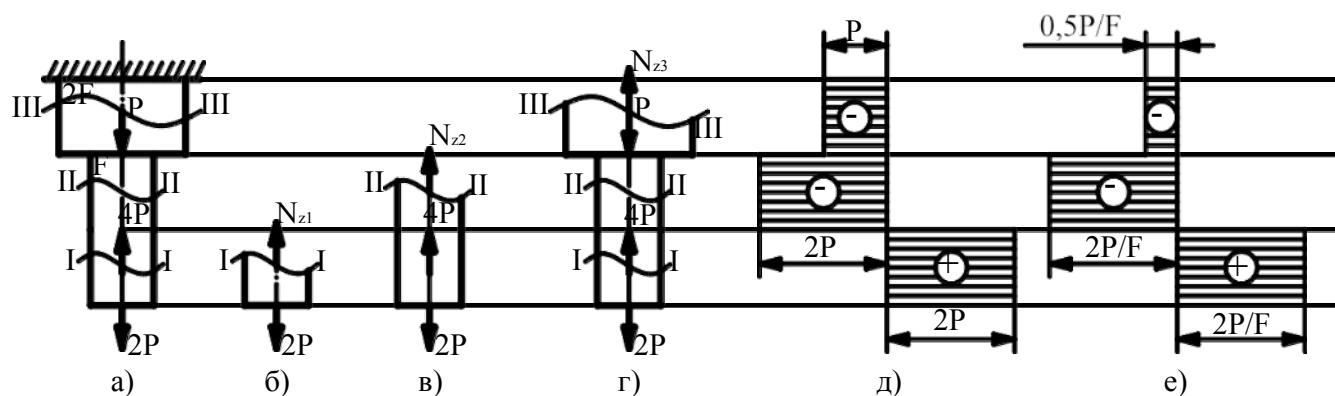


Рисунок 2.4

## Задания

### Задание 2.1

Для ступенчатого стержня, изображенного на схеме 1 (таблица 2.1), построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений, определить опасное сечение. Каждый студент выбирает задание для самостоятельного выполнения по цифрам индивидуального шифра, выданного преподавателем в начале семестра.

### Задание 2.2

Для ступенчатого стержня, изображенного на расчетной схеме 2 (таблица 2.1), построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений, определить опасное сечение.

### Задание 2.3

Для ступенчатого стержня, изображенного на расчетной схеме 3 (таблица 2.1), построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений,

определить опасное сечение. Проверить прочность стержня в опасном сечении, если площадь поперечного сечения  $F = 20 \text{ см}^2$ , усилие  $P = 50 \text{ кН}$ , допускаемые напряжения для материала стержня  $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$ .

### **Вопросы к практическому занятию**

1. Какой вид деформации называется растяжением (сжатием)?
2. Что называется эпюрой продольных сил? Что называется эпюрой нормальных напряжений?
3. Как определяется знак продольной силы? Как определяется знак нормальных напряжений?
4. Как определить опасное сечение стержня при растяжении (сжатии)?
5. Каким методом пользуются при построении эпюр произвольно нагруженных стержней?
6. Сформулируйте правила проверки правильности построения эпюр продольных сил и нормальных напряжений при растяжении (сжатии).
7. Постройте эпюры продольных сил и нормальных напряжений для стержня, схема нагружения которого задана преподавателем.

Таблица 2.1

| Номер<br>схемы | Схема к заданию 2.1 | Схема к заданию 2.2 | Схема к заданию 2.3 |
|----------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 10             |                     |                     |                     |
| 1              |                     |                     |                     |
| 2              |                     |                     |                     |
| 3              |                     |                     |                     |

Продолжение таблицы 2.1

|   |  |  |  |
|---|--|--|--|
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |
| 6 |  |  |  |
| 7 |  |  |  |
| 8 |  |  |  |
| 9 |  |  |  |

Таблица 2.2

| Номер<br>варианта | Схема<br>к заданию 2.1<br>(таблица 2.1) | Схема<br>к заданию 2.2<br>(таблица 2.1) | Схема<br>к заданию 2.3<br>(таблица 2.1) |
|-------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1                 | 1                                       | 3                                       | 10                                      |
| 2                 | 2                                       | 4                                       | 9                                       |
| 3                 | 3                                       | 5                                       | 8                                       |
| 4                 | 4                                       | 6                                       | 7                                       |
| 5                 | 5                                       | 7                                       | 6                                       |
| 6                 | 6                                       | 8                                       | 5                                       |
| 7                 | 7                                       | 9                                       | 4                                       |
| 8                 | 8                                       | 10                                      | 3                                       |
| 9                 | 9                                       | 1                                       | 2                                       |
| 10                | 10                                      | 2                                       | 1                                       |
| 11                | 1                                       | 4                                       | 9                                       |
| 12                | 2                                       | 5                                       | 8                                       |
| 13                | 3                                       | 6                                       | 7                                       |
| 14                | 4                                       | 7                                       | 6                                       |
| 15                | 5                                       | 8                                       | 5                                       |
| 16                | 6                                       | 9                                       | 4                                       |
| 17                | 7                                       | 10                                      | 3                                       |
| 18                | 8                                       | 3                                       | 2                                       |
| 19                | 9                                       | 2                                       | 1                                       |
| 20                | 10                                      | 1                                       | 10                                      |
| 21                | 1                                       | 2                                       | 8                                       |
| 22                | 2                                       | 3                                       | 7                                       |
| 23                | 3                                       | 4                                       | 6                                       |
| 24                | 4                                       | 5                                       | 5                                       |
| 25                | 5                                       | 6                                       | 4                                       |
| 26                | 6                                       | 7                                       | 3                                       |
| 27                | 7                                       | 8                                       | 2                                       |
| 28                | 8                                       | 9                                       | 1                                       |
| 29                | 9                                       | 10                                      | 8                                       |
| 30                | 10                                      | 5                                       | 6                                       |
| 31                | 1                                       | 6                                       | 5                                       |
| 32                | 2                                       | 7                                       | 4                                       |
| 33                | 3                                       | 8                                       | 3                                       |
| 34                | 4                                       | 9                                       | 2                                       |
| 35                | 5                                       | 10                                      | 1                                       |
| 36                | 6                                       | 1                                       | 10                                      |
| 37                | 7                                       | 1                                       | 8                                       |
| 38                | 8                                       | 2                                       | 9                                       |
| 39                | 9                                       | 3                                       | 10                                      |
| 40                | 10                                      | 4                                       | 1                                       |
| 41                | 1                                       | 9                                       | 5                                       |
| 42                | 2                                       | 10                                      | 6                                       |
| 43                | 3                                       | 1                                       | 7                                       |
| 44                | 4                                       | 2                                       | 8                                       |
| 45                | 5                                       | 3                                       | 9                                       |

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 46 | 6  | 4  | 10 |
| 47 | 7  | 5  | 1  |
| 48 | 8  | 6  | 2  |
| 49 | 9  | 7  | 3  |
| 50 | 10 | 8  | 4  |
| 51 | 1  | 6  | 9  |
| 52 | 2  | 7  | 10 |
| 53 | 3  | 8  | 1  |
| 54 | 4  | 9  | 2  |
| 55 | 5  | 10 | 3  |
| 56 | 6  | 1  | 4  |
| 57 | 7  | 2  | 5  |
| 58 | 8  | 3  | 6  |
| 59 | 9  | 4  | 7  |
| 60 | 10 | 5  | 8  |
| 61 | 1  | 8  | 6  |
| 62 | 2  | 9  | 7  |
| 63 | 3  | 10 | 8  |

## **Приложение:**

**Примеры построения эпюр продольных внутренних сил, напряжений и перемещений**

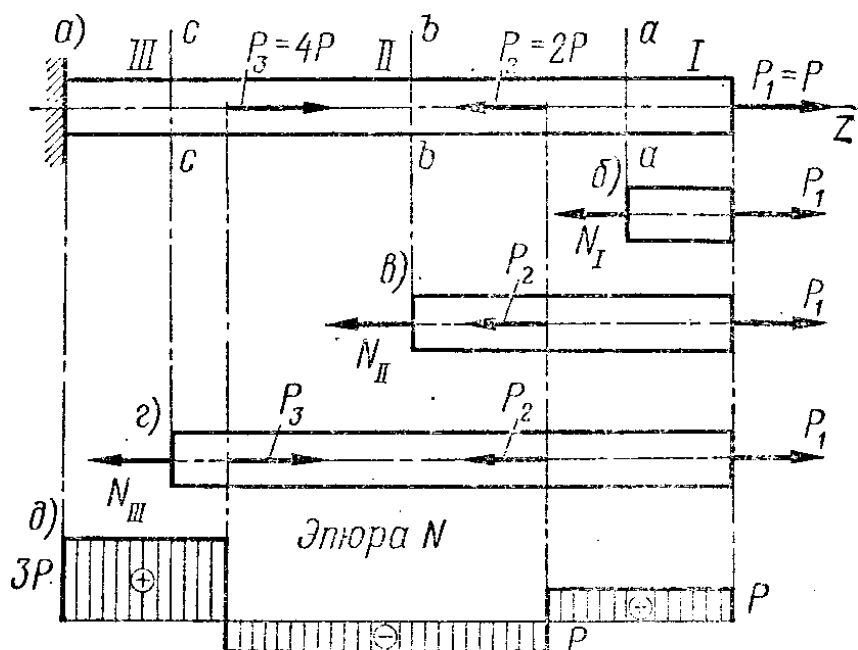


Рис. 2.5

**Пример 2.1.** Построить эпюру продольных сил для бруса, изображенного на рис. 2.5, а.

**Решение.** Разбиваем брус на участки, начиная от свободного конца. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы.

Применяя метод сечений, оставляем правую и отбрасываем левую часть бруса: это позволяет не определять реакцию заделки. Проводя произвольное сечение  $a-a$  на участке I и составляя для части бруса, показанной отдельно на рис. 2.5, б, уравнение равновесия

$$\sum_{\text{ост. части}} Z = 0,$$

получаем

$$P - N_1 = 0,$$

откуда

$$N_1 = P.$$

Легко видеть, что во всех поперечных сечениях данного участка продольная сила одинакова. То же относится и ко всем остальным участкам, поэтому совершенно безразлично, где проводить сечение в пределах того или иного рассматриваемого участка.

Проводя сечение  $b-b$  на участке II и рассматривая правую оставленную часть бруса (рис. 2.5, в), получаем

$$\sum_{\text{ост. части}} Z = P_1 - P_2 - N_{II} = P - 2P - N_{II} = 0,$$

откуда

$$N_{II} = -P.$$

Знак минус указывает, что фактическое направление силы  $N_{II}$  противоположно показанному на рис. 2.5, в, т. е. сила  $N_{II}$  направлена к сечению и, следовательно, участок  $II$  испытывает сжатие.

Аналогично определяем продольную силу в произвольном сечении  $c-c$  участка  $III$  (рис. 2.5, г):

$$N_{III} = 3P.$$

Конечно, для определения продольных сил нет необходимости изображать каждый раз отдельно отсеченную часть бруса, можно просто найти алгебраическую сумму проекций на ось бруса внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Применяя метод сечений, можно было бы каждый раз оставлять левую и отбрасывать правую часть бруса, но тогда решение следовало бы начинать с определения реакции заделки (см. рис. 2.5, а), так как эта реакция относится к числу внешних сил, приложенных к оставленной (левой) части бруса.

Для построения эпюры  $N$  проводим ось абсцисс графика (ось или базу эпюры) параллельно оси бруса (рис. 2.5, д). В пределах каждого из участков продольная сила постоянна, т. е. эпюра параллельна оси абсцисс. Величины продольных сил откладываем в выбранном масштабе от оси эпюры; при этом положительные значения  $N$  (растяжение) откладываем вверх, а отрицательные — вниз от оси. Условимся ось эпюры проводить тонкой, а саму эпюру толстыми линиями.

В местах приложения сосредоточенных сил на эпюре получаются скачкообразные изменения ординат — «скачки». Величина «скачка» равна приложенной в соответствующем месте бруса внешней сосредоточенной силе. При нагружении бруса сосредото-

ченными силами эпюра  $N$  всегда имеет такой характер, как в рассмотренном примере.

Скачкообразные изменения ординат эпюры  $N$  носят условный характер, так как условно и само понятие «сосредоточенная сила». Фактически внешняя сила распределена по некоторой небольшой части длины бруса; в пределах этой части значение  $N$  изменяется (например, в зоне приложения силы  $P_2$  от значения  $+P$  до  $-P$ ) по некоторому закону, установить который не представляется возможным. Незвестный криволинейный переходный участок эпюры заменяют условным «скачком».

Эпюру принято штриховать; при этом штриховка перпендикулярна оси эпюры — каждая линия штриховки (орди-

ната графика) дает в принятом масштабе величину продольной силы в противоположащем поперечном сечении бруса.

**Пример 2.3.** Для бруса со ступенчато-переменным поперечным сечением (рис. 2.10, а) построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений.

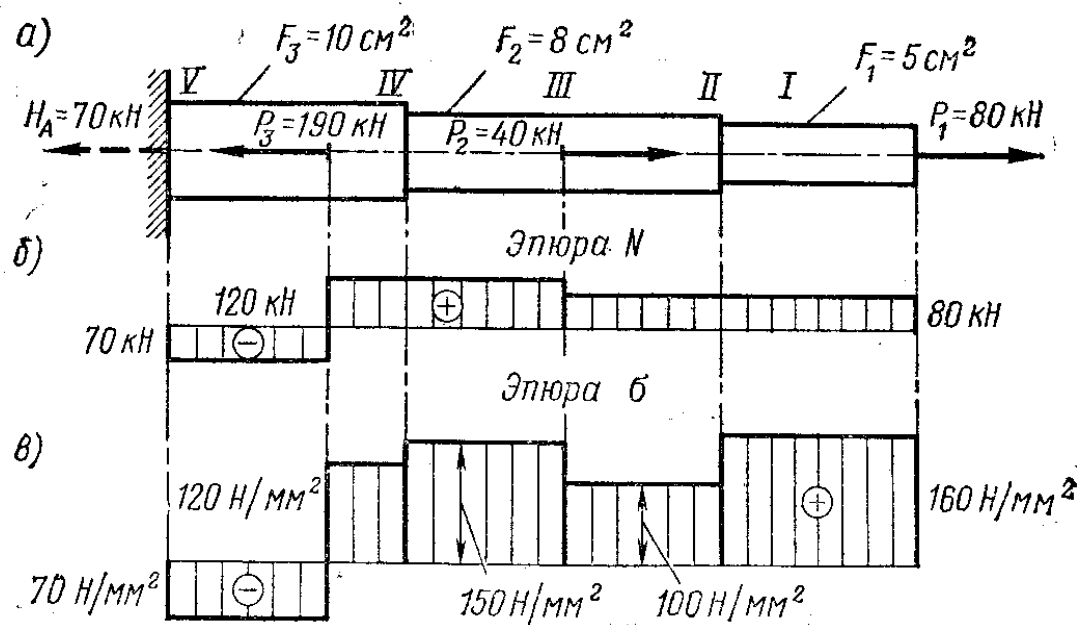


Рис. 2.10

**Решение.** Разбиваем брус на участки, начиная от свободного конца. Границами участков являются места приложения внешних сил и изменения размеров поперечного сечения, т. е. брус имеет пять участков. При построении только эпюры  $N$  следовало бы разбить брус лишь на три участка.

Применяя метод сечений, определяем продольные силы в поперечных сечениях бруса и строим соответствующую эпюру (рис. 2.10, б). Построение эпюры  $N$  принципиально ничем не отличается от рассмотренного в примере 2.1, поэтому подробности этого построения опускаем.

Значения нормальных напряжений вычисляем по формуле (2.1), подставляя величины сил в ньютонах, а площадей в квадратных миллиметрах.

Для участка  $I$

$$\sigma_I = \frac{N_I}{F_I} = \frac{80 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^2} = 160 \text{ Н/мм}^2;$$

для участка  $II$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{F_2} = \frac{80 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^2} = 100 \text{ Н/мм}^2;$$

для участка  $III$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{F_2} = \frac{120 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^2} = 150 \text{ Н/мм}^2.$$

Аналогично вычисляем

$$\sigma_{IV} = 120 \text{ Н/мм}^2 \text{ и } \sigma_V = 70 \text{ Н/мм}^2.$$

В пределах каждого из участков напряжения постоянны, т. е. эпюра на данном участке — прямая, параллельная оси абсцисс (рис. 2.10, в)

Для расчетов на прочность интерес представляют в первую очередь те сечения, в которых возникают наибольшие напряжения. Существенно, что в рассмотренном случае они не совпадают с теми сечениями, где продольные силы максимальны.

В тех случаях, когда сечение бруса по всей длине постоянно, эпюра  $\sigma$  подобна эпюре  $N$ , отличаясь от нее только масштабом, и, естественно, имеет смысл построение лишь одной из указанных эпюр.

**Пример 2.5.** Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений по длине бруса, изображенного на рис. 2.19, а.

*Решение.* Разбиваем брус на участки, начиная от свободного конца. Границы участков проходят через точки приложения внешних сил и места изменения размеров поперечного сечения. Строим эпюры продольных сил (рис. 2.19, б) и нормальных напряжений (рис. 2.19, в), как изложено выше в примерах 2.1 и 2.3.

Для построения эпюры перемещений достаточно определить перемещения сечений, совпадающих с границами участков, так как между указанными сечениями эпюра линейна (см. стр. 46).

Сечение  $A$  неподвижно, т. е.  $\lambda_A = 0$  (построение эпюры перемещений следует всегда начинать от неподвижного или условно принятого неподвижным сечения).

Перемещение сечения  $B$  равно изменению длины (в данном случае удлинению) участка  $AB$  (участка  $V$ ) бруса:

$$\lambda_B = \Delta l_V = \frac{N_V l}{E \cdot 2,5F} = \frac{3Pl}{E \cdot 2,5F} = 1,2 \frac{Pl}{EF}.$$

Сечение  $B$  перемещается вправо; соответствующую ординату условно будем считать положительной и отложим (в выбранном масштабе) вверх от оси эпюры (рис. 2.19, г).

Перемещение сечения  $C$  равно алгебраической сумме изменений длин участков  $V$  и  $IV$  бруса:

$$\begin{aligned} \lambda_C = \Delta l_V + \Delta l_{IV} &= \frac{N_V l}{E \cdot 2,5F} + \frac{N_{IV} l}{E \cdot 2,5F} = \frac{3Pl}{E \cdot 2,5F} - \frac{Pl}{E \cdot 2,5F} = \\ &= 0,8 \frac{Pl}{EF}. \end{aligned}$$

То же самое можно записать несколько компактнее:

$$\lambda_C = \lambda_B + \Delta l_{IV} = 1,2 \frac{Pl}{EF} - \frac{Pl}{E \cdot 2,5F} = 0,8 \frac{Pl}{EF}.$$

Сечение C также перемещается вправо.

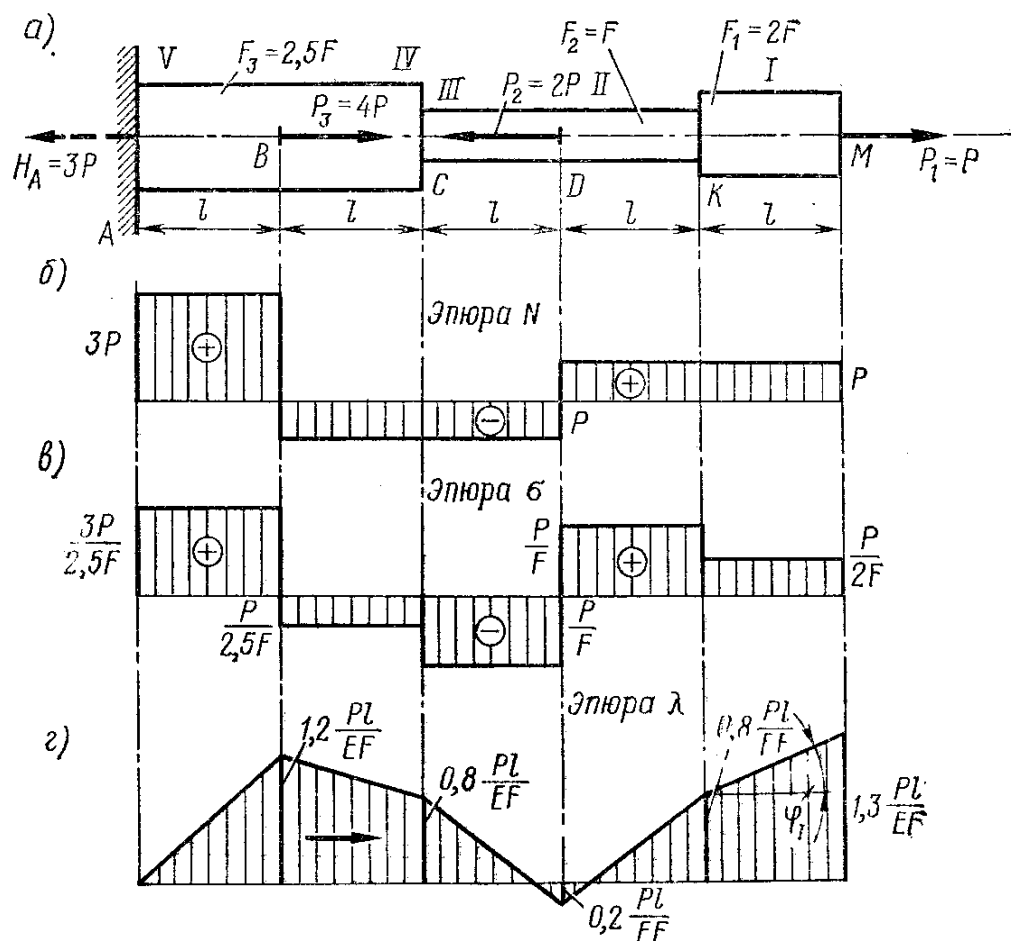


Рис. 2.19

Аналогично

$$\lambda_D = \lambda_C + \Delta l_{III} = \lambda_C + \frac{N_{III}l}{EF} = 0,8 \frac{Pl}{EF} - \frac{Pl}{EF} = -0,2 \frac{Pl}{EF}.$$

Знак минус указывает, что сечение D перемещается влево (так как ранее было принято считать перемещения вправо положительными).

Значения  $\lambda_K$  и  $\lambda_M$  указаны на эюре (рис. 2.19, з); читателю рекомендуется самостоятельно проверить определение соответствующих ординат.

Тангенс угла наклона эюры к оси абсцисс пропорционален нормальным напряжениям, возникающим в поперечных сечениях данного участка бруса. Например (рис. 2.19, з):

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\lambda_M - \lambda_K}{l} = \frac{\Delta l_I}{l} = \varepsilon_I = \frac{\sigma_I}{E} = \frac{P}{E \cdot 2F}.$$

## ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ ИЗГИБЕ КОНСОЛЬНЫХ БАЛОК

**Цель работы:** Изучение методики построения эпюр внутренних усилий при изгибе консольных балок.

**Задача:** построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил для консольно закреплённой балки.

### Теоретическое обоснование

Изгиб – это такой вид нагружения, при котором к брусу приложены в плоскостях, проходящих через его ось, пары сил или силы, перпендикулярные к оси. Продольная ось стержня искривляется, а в произвольном сечении возникает изгибающий момент  $M$  и, возможно, поперечная сила  $Q$ . Брус, работающий на изгиб называют балкой.

В сопротивлении материалов термин «балка» значительно шире, чем в обычном употреблении этого слова: с точки зрения расчета на прочность, жесткость и устойчивость балкой является не только строительная балка, но также и вал, болт, оси железнодорожного вагона, зуб шестерни и т.д.

Ограничимся построением эпюр для простейшего случая изгиба балок, при котором все заданные нагрузки лежат в одной плоскости, причем эта плоскость совпадает с одной из главных плоскостей балки. Такой случай называют прямым изгибом.

На расчетной схеме балку принято заменять ее осью. При этом все нагрузки должны быть приведены к оси балки и силовая плоскость будет совпадать с плоскостью чертежа.

Балки имеют те или иные опорные устройства – опоры. Конструкционные формы опор весьма разнообразны. Для расчета же их схематизируют в виде трех основных типов опор:

а) *шарнирно-подвижная опора* (рисунок 1), в которой может возникнуть только одна составляющая реакций -  $R_A$ , направленная вдоль опорного стержня;

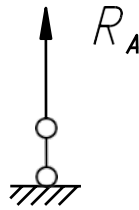


Рисунок 1 – Шарнирно-подвижная опора

б) *шарнирно-неподвижная опора* (рисунок 2), в которой могут возникнуть две составляющие – вертикальная реакция  $R_A$  и горизонтальная реакция  $H_A$ ;

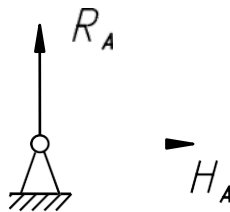


Рисунок 2 – Шарнирно-неподвижная опора

в) *Жёсткая заделка*, где под действием плоской системы сил могут быть три составляющие - вертикальная реакция  $R_A$  и горизонтальная  $H_A$  реакции и опорный момент  $M_A$  (рисунок 3).

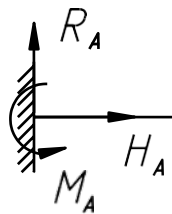


Рисунок 3 – Жёсткая заделка

Все реакции и моменты считаются приложенными в точке А – в центре тяжести опорного сечения.

Статически определимая балка при действии плоской системы сил должна иметь три независимых реакции. Поэтому статически определимые балки могут быть установлены: 1) на одной жёсткой заделке, 2) на одной шарнирно-неподвижной и другой шарнирно-подвижной опорах. Здесь рассмотрим первый случай, который называют консольным закреплением балки.

Внутренняя сила  $Q$  в произвольном сечении равна алгебраической сумме всех внешних поперечных сил, взятых по одну сторону от сечения с учетом правила знаков. Поперечные силы считаются положительными, если они стремятся повернуть элемент балки по часовой стрелке (рисунок 4, а).

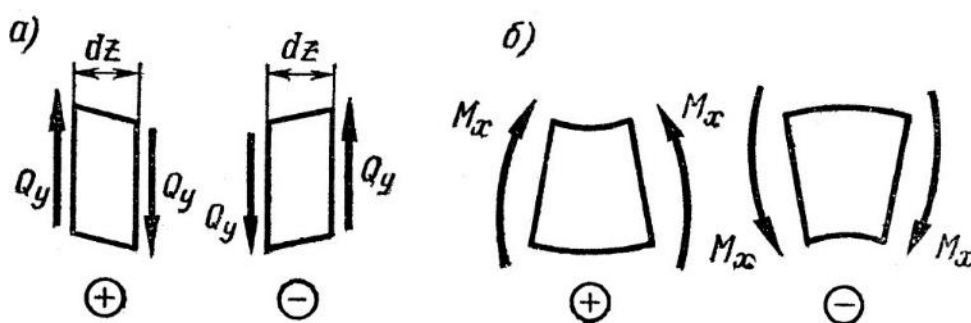


Рисунок 4 – Правила знаков для внутренней поперечной силы – а), и внутреннего изгибающего момента – б)

Внутренний момент  $M$  в произвольном сечении равен алгебраической сумме моментов от всех внешних сил, взятых по одну сторону от сечения относительно центра тяжести сечения с учетом правила знаков. Изгибающий момент считается положительным, если элемент бруса изгибается выпуклостью вниз (рисунок 4, б), т.е. таким образом, что его сжатые волокна находятся в верхней части.

Строить эпюры поперечных сил  $Q(z)$  и изгибающих моментов  $M(z)$  можно различными способами, например, аналитическим. При этом способе построения эпюр составляют аналитические уравнения  $Q(z)$  и  $M(z)$  для каждого

участка нагружения балки; решая полученные уравнения для граничных точек участков нагружения, строят графики зависимостей  $Q(z)$  и  $M(z)$  по участкам.

Эпюры изгибающих моментов инженеры-строители по традиции строят на растянутой стороне, то есть положительные значения откладываются ниже, отрицательные – выше базовой (нулевой) линии. А инженеры-механики строят эпюры изгибающих моментов на сжатой стороне бруса, то есть положительные значения откладываются выше, отрицательные – ниже базовой (нулевой) линии горизонтальной балки. Эпюры заштриховываются прямыми линиями, перпендикулярными оси балки, в кружках внутри поля эпюр указываются знаки внутренних усилий.

Построенные эпюры проверяются на соответствие правилам, основанным на дифференциальных зависимостях между поперечной силой, изгибающим моментом и интенсивностью распределенной нагрузки

$$q = \frac{dQ(z)}{dz}; \quad Q = \frac{dM(z)}{dz}; \quad (4.1)$$

1) на участках балки, где отсутствует распределенная нагрузка  $q$ , эпюра поперечных сил  $Q(z)$  ограничена прямой, параллельной оси балки (поперечная сила  $Q(z)$  имеет постоянное значение), а эпюра изгибающих моментов  $M(z)$  ограничена наклонной прямой (изгибающий момент  $M(z)$  меняется по линейному закону);

2) на участках балки, где приложена равномерно распределенная нагрузка  $q$ , эпюра поперечных сил  $Q(z)$  ограничена наклонной прямой (поперечная сила  $Q(z)$  меняется по линейному закону), а эпюра изгибающих моментов  $M(z)$  – квадратной параболой, обращенной выпуклостью в сторону действия нагрузки (изгибающий момент  $M(z)$  меняется по закону квадратной параболы);

3) в точке приложения сосредоточенной силы  $P$  на эпюре поперечных сил  $Q(z)$  имеется скачок (уступ), равный по величине приложенной в этой точке силе  $P$ , а на эпюре изгибающих моментов  $M(z)$  – точка перегиба (излом) в сторону действия силы;

4) в точке приложения сосредоточенного момента  $M$  на эпюре изгибающих моментов  $M(z)$  имеется скачок (уступ), равный по величине приложенному в этой точке моменту  $M$ . Сосредоточенный момент  $M(z)$ , приложенный в любом сечении балки, на эпюре поперечных сил  $Q(z)$  не отражается;

5) если в пределах одного участка нагружения знак поперечной силы  $Q(z)$  меняется в направлении слева направо с (+) на (–), то в сечении, где  $Q(z)=0$ , на эпюре изгибающих моментов  $M(z)$  для этого участка будет экстремальное значение (точка максимума);

6) если в пределах одного участка нагружения знак поперечной силы  $Q(z)$  меняется в направлении слева направо с (–) на (+), то в сечении, где  $Q(z)=0$ , на эпюре изгибающих моментов  $M(z)$  для этого участка будет экстремальное значение (точка минимума);

7) тангенс угла наклона к оси абсцисс (оси балки) касательной к кривой изгибающего момента в любом сечении балки численно равен ординате поперечной силы в рассматриваемом сечении, поэтому:

- если на протяжении какого-либо участка балки поперечная сила положительна  $Q(z)>0$ , то изгибающий момент на этом участке (в направлении слева направо) будет алгебраически возрастать;

- если на протяжении какого-либо участка балки поперечная сила отрицательна  $Q(z)<0$ , то изгибающий момент на этом участке (в направлении слева направо) будет алгебраически убывать;

- если на протяжении какого-либо участка балки поперечная сила равна нулю  $Q(z)=0$ , то изгибающий момент на этом участке не будет меняться (имеет постоянное значение);

8) для линейных участков эпюры изгибающих моментов рекомендуется выполнить дифференциальную, а для нелинейных участков – интегральную проверку. При выполнении дифференциальной и интегральной проверок начало и конец участка выбираются в направлении слева направо. Дифференциальная проверка выполняется по формуле

$$Q = \frac{dM(z)}{dz} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (4.2)$$

где  $\operatorname{tg} \alpha$  – тангенс угла наклона эпюры изгибающих моментов к продольной оси балки  $z$ . Положительный знак  $Q(z)$  определяется совмещением оси балки с эпюрой  $M(z)$  поворотом по часовой стрелке, отрицательный знак  $Q(z)$  определяется совмещением оси балки с эпюрой  $M(z)$  поворотом против часовой стрелки. Интегральная проверка выполняется по формуле

$$M_K - M_H = \int_H^K Q(z) dz = \Omega_Q^{HK}, \quad (4.3)$$

где  $\Omega_Q^{HK}$  – площадь эпюры поперечных сил на рассматриваемом участке;

$M_K$  – значение изгибающего момента в конечной точке участка;

$M_H$  – значение изгибающего момента в начальной точке участка.

В общем случае задача по построению эпюр внутренних усилий при изгибе решается в следующей последовательности.

1) Определяются опорные реакции.

2) Балка разбивается на участки нагружения, границами которых являются сечения:

- начала и конца балки;
- в которых приложены сосредоточенные (активные и реактивные) внешние силы;
- в которых приложены внешние моменты (активные и реактивные);
- в которых начинается и заканчивается действие распределенной нагрузки.

3) Строятся эпюры поперечных сил  $Q(z)$  и изгибающих моментов  $M(z)$ .

4) Проверяется построение эпюр  $Q(z)$  и  $M(z)$  по правилам 1 – 8.

5) Определяется опасное сечение.

### Пример

Построить эпюры внутренних усилий для балки, схема которой приведена на рисунке 5.

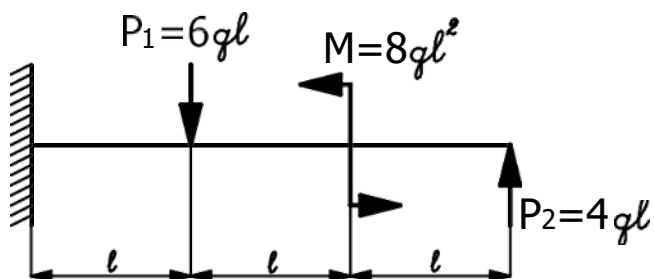


Рисунок 5

## Решение

Используя правила, разобьем балку на три участка нагружения, пронумеровав их в соответствии с планом решения задачи. Из каждого сечения, обозначенного как граница участка нагружения, проводим тонкую вертикальную прямую.

1

– й участок

$$0 \leq z_1 \leq l_1 = l$$

$$v(\cdot)A \quad v(\cdot)B$$

$$M(z_1) = P_2 \cdot z_1 = 4ql \cdot z_1:$$

в точке A:

$$z_1=0; \quad M(z_1=0) = P_2 \cdot z_1 = 4ql \cdot 0 = 0;$$

в точке B:

$$z_1=l; \quad M(z_1=l) = 4ql \cdot l = 4ql^2.$$

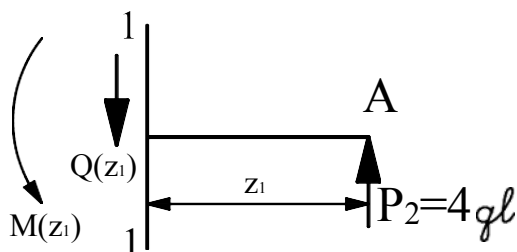


Рисунок 6

$$Q(z_1) = -P_2 = -4ql = const. \quad \text{По}$$

полученным данным строим эпюры  $Q(z_1)$  и  $M(z_1)$ . Эпюру изгибающего момента строим на растянутых волокнах. Проводим две линии, параллельные оси балки – нулевые (базовые) линии эпюр изгибающих моментов и поперечных сил, рядом с которыми записываем величины  $ql^2$  на эпюре  $M(z)$  и  $ql$  на эпюре  $Q(z)$ . Откладываем значения изгибающего момента, записав лишь цифры «0» и «4» на растянутых волокнах в начале и в конце первого участка. Знак на эпюре  $M(z)$  опускаем; соединяем точки «0» и «4» прямой, так как выражение момента есть функция первой степени от текущей координаты  $z_1$ . Эпюра моментов заштриховывается перпендикулярно оси балки, и каждая ордината покажет величину изгибающего момента в любой интересующей нас точке рассматриваемого участка.

На эпюре  $Q(z)$  величина поперечной силы постоянна, то есть эпюра представляет собой прямоугольник; отложив «4» ниже оси балки так как

$Q(z) < 0$ , заканчиваем эпюру штриховкой перпендикулярно оси балки. Внутри поля эпюры в кружке необходимо проставить знак поперечной силы.

Ввиду линейности эпюры  $M(z)$  выполним дифференциальную проверку по формуле (4.2):

$$Q(z_1) = -\frac{dM(z_1)}{dz_1} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{0 - 4ql^2}{l} = -4ql.$$

2

– й участок

$$0 \leq z_2 \leq l_2 = l$$

$$\psi(\cdot)B \quad \psi(\cdot)C$$

$$M(z_2) = P_2(l + z_2) + M = 4ql(l + z_2) + 8ql^2:$$

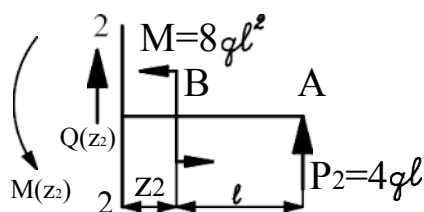


Рисунок 7

при  $z_2 = 0$

$$M(z_2) = P_2(l + 0) + M = 4ql(l + 0) + 8ql^2 = 12ql^2;$$

при  $z_2 = l$

$$M(z_2) = P_2(l + l) + M = 4ql \cdot 2l + 8ql^2 = 16ql^2.$$

$$Q(z_2) = -P_2 = -4ql = \text{const.} \quad \text{В выражение}$$

поперечной силы на втором участке внешний момент  $M$  не вошел, так как проекция пары сил всегда равна нулю.

По полученным данным строим эпюры  $Q(z_2)$  и  $M(z_2)$  и выполняем дифференциальную

проверку:

$$Q(z_2) = -\frac{dM(z_2)}{dz_2} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{12ql^2 - 16ql^2}{l} = -4ql.$$

3

– й участок

$$0 \leq z_3 \leq l_3 = 2l$$

$$\psi(\cdot)C \quad \psi(\cdot)D$$

$$M(z_3) = P_2(2l + z_3) + M - P_1 \cdot z_3 = 4ql(2l + z_3) + 8ql^2 - 6ql \cdot z_3;$$

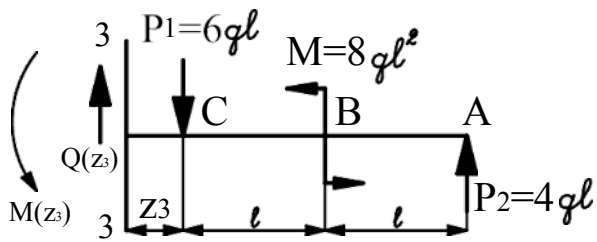


Рисунок 8

при  $z_3=0$ ;  
 $M(z_3) = 4ql(2l+0) + 8ql - \frac{1}{2} 6ql \cdot 0 =$

$= 16ql^2$ ;

при  $z_3=2l$ ;

$M(z_3) = 4ql(2l+l) + 8ql^2 - 6ql \cdot l =$   
 $= 14ql^2$ ;

$Q(z_3) = -P_2 + P_1 = -4ql + 6ql = 2ql = \text{const}.$

По полученным данным строим эпюры  $Q(z_3)$  и  $M(z_3)$  (рисунок 4.13) и выполняем дифференциальную проверку:

$$Q(z_3) = \frac{dM(z)}{dz_3} = \frac{16ql^2 - 18ql^2}{l} = -2ql.$$

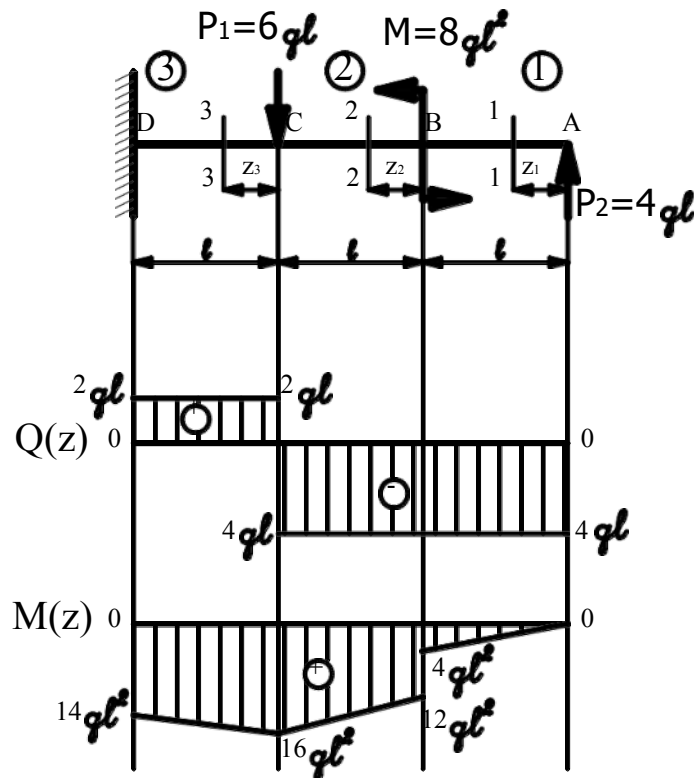


Рисунок 9

### Задание

Для консольной балки, схема нагружения которой представлена на рисунке 10, исходные значения по таблице 1, построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Таблица 1 – Числовые значения

| подгруппа | $P_1$ , кН | $P_2$ , кН | $M_1$ ,<br>кН·м | $M_2$ ,<br>кН·м | $M_3$ ,<br>кН·м | $a$ , м | $b$ , м | $c$ , м |
|-----------|------------|------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------|---------|---------|
| А         | 10         | 22         | 8               | 4               | 3               | 0,2     | 0,2     | 0,2     |
| Б         | 16         | 8          | 6               | 3               | 4               | 0,3     | 0,2     | 0,4     |
| В         | 24         | 5          | 4               | 7               | 5               | 0,4     | 0,3     | 0,2     |

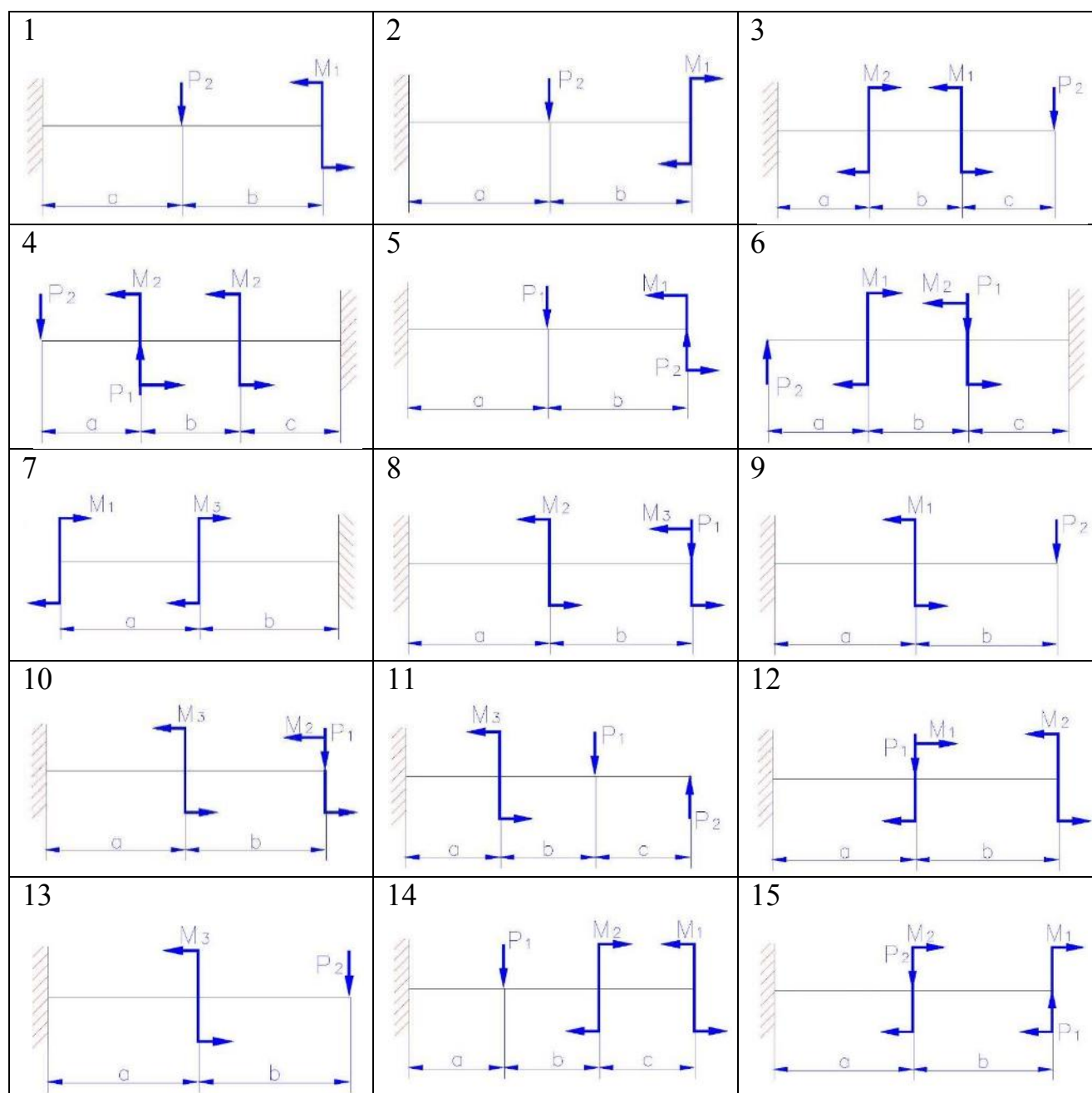


Рисунок 10 – Схемы нагружения консольных балок

### **Вопросы для защиты работы**

1. Обязательно ли определять опорные реакции для построения эпюр внутренних усилий в консольных балках?
2. Какие сечения являются границами участков нагружения балок?
3. Постройте эпюры внутренних усилий для консольных балок, схемы которых предложены преподавателем.

### **Рекомендуемая литература по данной теме**

1 Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

2 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 13

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНЫХ СЕЧЕНИЙ

**Цель и содержание работы:** изучение геометрических характеристик сложных симметричных сечений, составленных из нескольких простейших геометрических фигур.

#### Теоретическая часть

Основными геометрическими характеристиками поперечных сечений, определяющими сопротивление различным вида деформаций, являются: площади поперечных сечений, статические моменты, моменты инерции и моменты сопротивления.

**Площадь** сложной фигуры равна сумме площадей её частей. В сечении выделим элементарную площадь  $dF$  (рисунок 9.1). В общем случае площадь сложной фигуры вычисляется путём интегрирования по области сечения

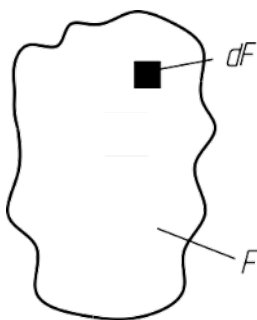


Рисунок 9.1 – Определение площади

$$F = \int_F dF \quad (1)$$

Данный интеграл инвариантен (независим) от выбора системы осей координат. Размерность площади – длина в квадрате  $\dim F = L^2$ , единицы измерения  $m^2, mm^2 \dots$

**Статическим моментом** сечения относительно некоторой оси называется взятая по всей площади  $F$  сумма произведений площадей элементарных площадок  $dF$  на их расстояния до этой оси

$$S_x = \int_F y dF \quad (2)$$

$$S_y = \int_F x dF \quad (3)$$

В зависимости от положения оси, относительно которой вычисляется статический момент, он может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Размерность статического момента – длина в третьей степени  $\dim S_x = L^3$ , единицы измерения  $\text{м}^3, \text{мм}^3 \dots$

Рассмотрим сечение произвольной формы площадью  $F$ . Выделим элементарную площадку  $dF$  с координатами  $x$  и  $y$  в данной системе координат  $XY$ . Параллельно осям  $XY$  введем новую систему координат  $X_1Y_1$  на расстоянии  $a$  и  $b$  между осями.

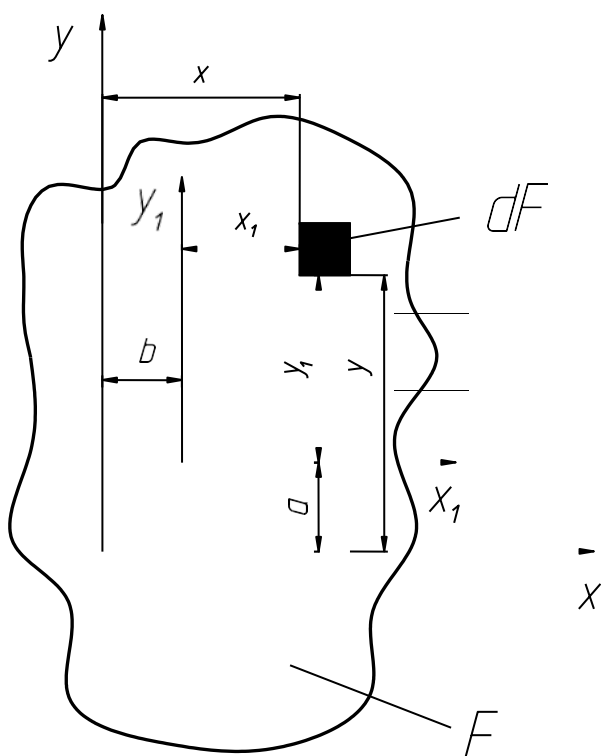


Рисунок 9.2 – Определение координат центра тяжести сечения

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x - b \\ y_1 &= y - a \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

По аналогии с формулами (2) и (3) можно записать:

$$S_x^1 = \int y_1^1 dF = \int (y - a) dF = \int y dF - a \int dF = S^x - aF \quad (5)$$

$$S_y^1 = \int x_1^1 dF = \int x dF - b \int dF = S^y - bF \quad (6)$$

Центральными называются оси, относительно которых статические моменты равны 0. Точку пересечения центральных осей называют центром тяжести сечения.

Пусть оси  $X_I Y_I$  – центральные, следовательно, уравнения (5) и (6) имеют вид:

$$0 = S_x - aF;$$

$$0 = S_y - bF;$$

Выполним подстановку:  $a = y_c$ ,  $b = x_c$ , следовательно:

$$\left. \begin{aligned} y_c &= \frac{S_x}{F} \\ x_c &= \frac{S_y}{F} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $x_c$  и  $y_c$  – координаты центра тяжести относительно произвольной системы координат  $XY$ . Из (7) следует, что статический момент можно определить, как произведение площади фигуры на расстояние её центра тяжести до оси координат.

$$S_x = Fy_c, \quad S_y = Fx_c \quad (7 \text{ а})$$

Для теоретического определения положения центра тяжести сложного сечения его разбивают на простые фигуры (прямоугольник, треугольник, круг, полукруг). Координаты центра тяжести определяются по известным из теоретической механики зависимостям

|                                                                                                                                                                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| $x_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{yi}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$ $y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{xi}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$ | (8) |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

где  $x_c, y_c$  – координаты центра тяжести сложного сечения;  $x_i, y_i$  – координаты центров тяжести простейших фигур, на которые разбито сечение, подставляются в выражения (8) с учетом знаков. В формулах (8) координаты  $x_i, y_i$  и площади  $F_i$  могут иметь положительный и отрицательный знак. При наличии отверстий или вырезов в сечениях значения площадей подставляются с отрицательным знаком.

Для экспериментального определения положения центра тяжести сечения нужно подвесить плоский образец сечения в произвольной точке, с помощью отвеса отбить вертикальную линию; изменить точку подвеса, вновь отбить отвесом вертикальную прямую; на пересечении отбитых линий отметить центр тяжести сечения.

**Осевым моментом инерции** плоского сечения относительно некоторой оси называют взятую по всей площади  $F$  сумму произведений площадей элементарных площадок  $dF$  на квадраты их расстояний до этой оси.

$$I_x = \int_F y^2 dF \quad (9)$$

$$I_y = \int_F x^2 dF \quad (10)$$

Осевой (его иногда называют экваториальным) момент инерции является величиной существенно положительной, т.к. координата возведена в квадрат.

**Полярным моментом инерции  $I_\rho$**  относительно некоторого полюса называется взятая по всей площади сечения  $F$  сумма произведений площадей элементарных площадок  $dF$  на квадраты их расстояний до этого полюса:

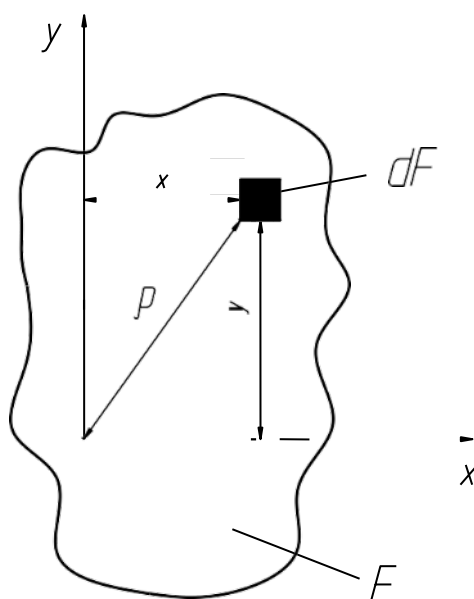


Рисунок 9.4 - Определение осевых и полярного моментов

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF \quad (11)$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad (12)$$

$$I_\rho = \int (x^2 + y^2) dF = \int x^2 dF + \int y^2 dF = I_y + I_x \quad (13)$$

Сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно точки пересечения этих осей (начала координат).

Значения  $I_x$  и  $I_y$  для простых фигур приведены в справочной литературе.

Для наиболее распространенных сечений эти значения приведены в таблице 9.1

**Центробежным моментом инерции  $I_{xy}$**  относительно двух взаимно перпендикулярных осей называется взятая по всей площади сечения сумма произведений площадей элементарных площадок  $dF$  на произведение их расстояний до этих осей

$$I_{xy} = \int_F xy dF \quad (14)$$

Размерность осевого, полярного и центробежного моментов инерции – длина в четвёртой степени  $\dim I_x = \dim I_\rho = \dim I_{xy} = L^4$ , единицы измерения  $m^4$ ,  $mm^4 \dots$

В зависимости от расположения осей он может быть как положительным, так и отрицательным и в частных случаях равным нулю. Если сечение имеет ось симметрии, то его центробежный момент инерции относительно этой оси и перпендикулярной к ней оси равен нулю.

Две взаимно перпендикулярных оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями инерции, а осевые моменты инерции относительно этих осей – главными моментами инерции.

**Осевым моментом сопротивления** сечения называется частное от деления осевого момента инерции, взятого относительно этой же оси, на расстояние  $y_{max}$  или  $x_{max}$  от рассматриваемой оси до наиболее удаленной точки сечения:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}, \quad W_y = \frac{I_y}{x_{max}} \quad (15)$$

$y_{max}$  – это расстояние от оси  $X$  до наиболее удаленной точки сечения.

$x_{max}$  – расстояние от оси  $Y$  до наиболее удаленной точки сечения.

**Геометрические характеристики сечений** изменяются по величине с изменением положения системы координат. При параллельном переносе осей координат осевые и центробежный моменты инерции преобразуются в соответствии с формулой Гюйгенса и определяются из выражений (16):

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= I_x + a^2 F \\ I_{y_1} &= I_y + b^2 F \\ I_{x_1 y_1} &= I_{xy} + abF \end{aligned} \quad (16)$$

где  $a$  – расстояние между осями  $X$  и  $X_I$ ;  $b$  – расстояние между осями  $Y$  и  $Y_I$ . При этом оси координат  $X$  и  $Y$  должны быть обязательно центральными, т. е. проходить через центр тяжести фигуры.

Моменты инерции сложного сечения  $I$  определяются как алгебраическая сумма моментов инерции составных частей

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n . \quad (17)$$

Через любую точку сечения всегда можно провести две взаимно перпендикулярные главные оси. Как правило, практическое значение имеют главные оси, проходящие через центр тяжести; они называются главными центральными осями инерции. Эти оси принято обозначать  $u$  и  $v$ . Моменты инерции относительно главных центральных осей ( $I_u$  и  $I_v$ ) называются главными центральными моментами инерции.

Главные оси  $u$  и  $v$  характерны тем, что относительно одной из них осевой момент инерции максимален, а относительно другой – минимален по сравнению с моментами инерции относительно любых других осей, проходящих через ту же точку.

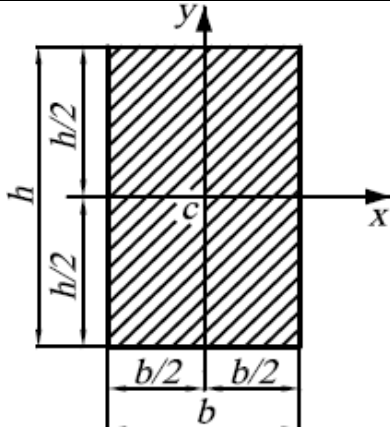
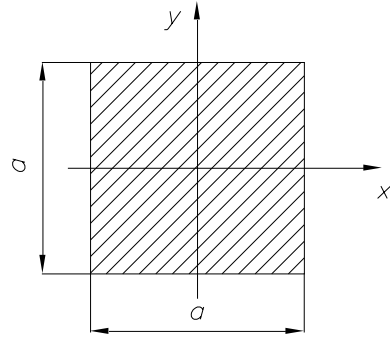
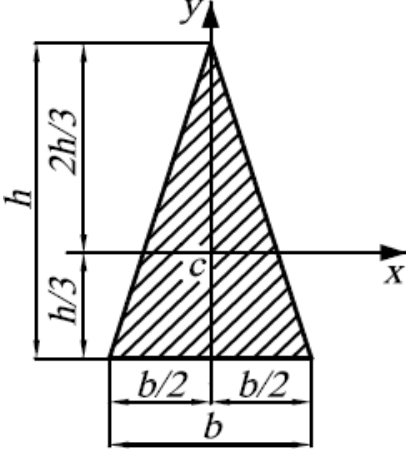
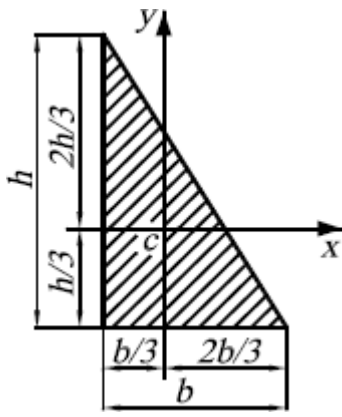
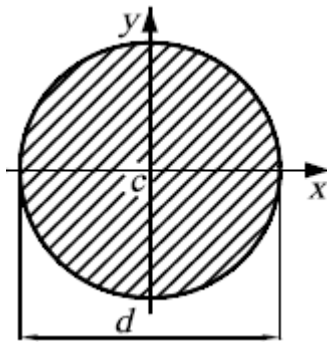
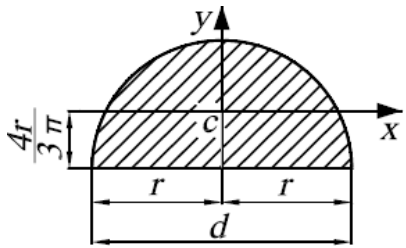
Для сечений, имеющих одну или несколько осей симметрии, положение главных осей определяется на следующих основаниях:

- о если сечение имеет ось симметрии, то эта ось и любая другая ось, ей перпендикулярная, образуют систему главных осей;

- о если сечение имеет две оси симметрии, то эти оси симметрии являются главными центральными осями инерции сечения;

- о если сечение имеет три и более осей симметрии, то любая центральная ось сечения является главной и все главные центральные моменты инерции сечения равны между собой.

Таблица 9.1 – Моменты инерции сечений

| № | Сечение                                                                             | $I_x$                | $I_y$                | № | Сечение                                                                              | $I_x$             | $I_y$                 |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------|---|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-----------------------|
| 1 |    | $\frac{bh^3}{12}$    | $\frac{hb^3}{12}$    | 2 |    | $\frac{a^4}{12}$  | $\frac{a^4}{12}$      |
| 3 |   | $\frac{bh^3}{36}$    | $\frac{hb^3}{48}$    | 4 |   | $\frac{bh^3}{36}$ | $\frac{hb^3}{36}$     |
| 5 |  | $\frac{\pi d^4}{64}$ | $\frac{\pi d^4}{64}$ | 6 |  | $0,11r^4$         | $\frac{\pi d^4}{128}$ |

Примечание к таблице:

1. Оси X и Y – центральные оси
2. Для второй и пятой фигур значения  $I_x$  и  $I_y$  не изменяются при любом повороте оси.
3. Для первой, третьей, четвертой фигур в кубе берется та сторона, которую пересекает данная ось.

### Задание

В таблице 9.2 заданы варианты сложных симметричных сечений, для которых требуется:

- экспериментально определить положение центра тяжести сечения;
- вычертить заданное сечение в масштабе, нанести на него систему координат  $XOY$  так, чтобы ось  $Y$  являлась одновременно осью симметрии сечения;
- разбить заданное сечение на простейшие (прямоугольник, треугольники, полукруг), определить площадь каждой простой фигуры  $F_i$  и площадь всей фигуры  $F$ ;
- нанести на схему центры тяжести каждой простой фигуры  $C_i$  и провести через них координатные оси  $X_i$  и  $Y_i$ , параллельные ранее выбранным осям  $X$  и  $Y$ ;
- определить координаты центра тяжести каждой из фигур в предварительно выбранной случайной системе координат  $XOY$ ;
- по схеме найти расстояния  $y_i$  между осями  $X$  и  $X_i$ ; и расстояния  $x_i$  между осями  $Y$  и  $Y_i$ ;
- по формулам (5, 6) вычислить статические моменты каждой простой фигуры относительно ранее выбранных случайных осей  $X$  и  $Y$ ;
- по формулам (8) вычислить координаты центра тяжести сечения  $X_C$  и  $Y_C$ ; сравнить расчетные значения с экспериментальными, полученными в п.1, определить погрешность измерений;
- отметить на схеме положение центра тяжести фигуры – точки  $C$  и провести через нее координатные оси  $X_C$  и  $Y_C$ , параллельные осям  $X$  и  $Y$ ;
- найти расстояния между осями  $X_C$  и  $X_i$ :  $a_i = y_i - y_C$  и показать их на чертеже;
- найти расстояния между осями  $Y_C$  и  $Y_i$ :  $b_i = x_i - x_C$  и показать их на чертеже;

- пользуясь таблицей 9.1, вычислить осевые  $I_{xi}$ ,  $I_{yi}$  моменты инерции каждой простой фигуры относительно её собственных центральных осей инерции  $X_i C_i Y_i$ ;
- по формулам (16) вычислить моменты инерции всей фигуры относительно главных центральных осей инерции  $X_C$  и  $Y_C$ ;
- найти моменты сопротивления сечения в главных осях инерции по формулам (15).

### Пример определения геометрических характеристик сложного сечения

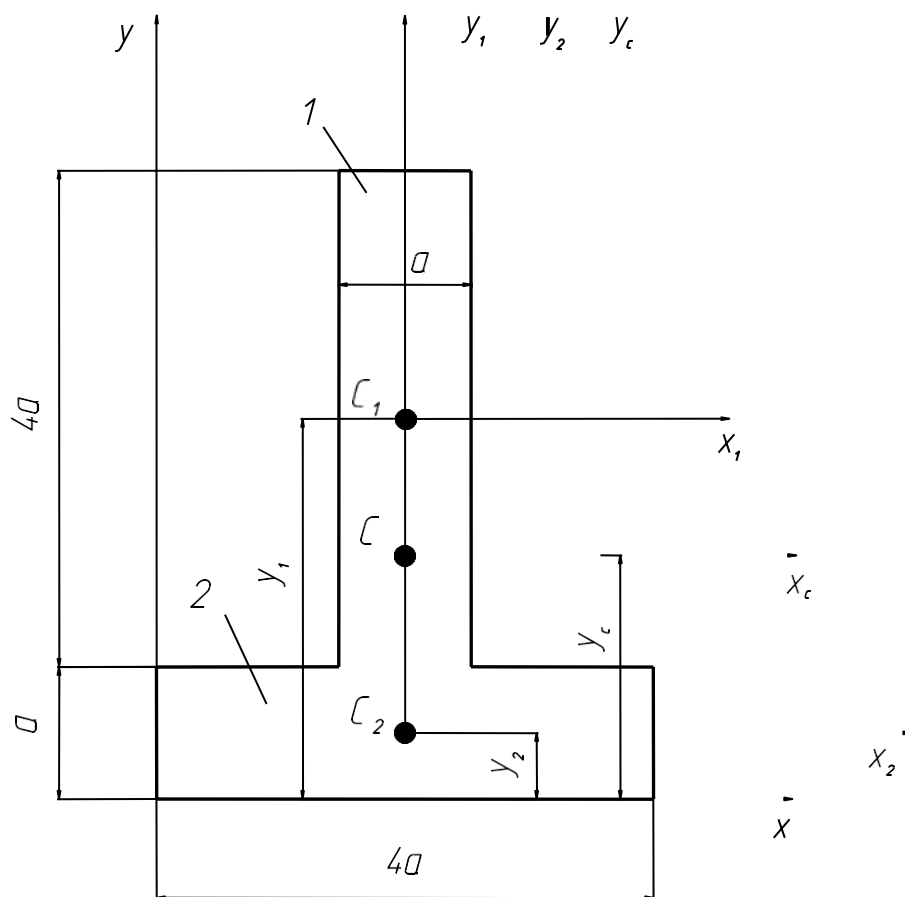


Рисунок 9.3 - Пример

$$F_1 = F_2 = 4a^2$$

$$x_1 = 2a; \quad x_2 = 2a$$

$$X_c = \frac{\sum S^{(1)} + \frac{F_1 x_1}{F_1 + F_2}}{\frac{F_1}{F_1 + F_2} + \frac{F_2}{F_1 + F_2}} = \frac{4a^2 \times 2a + 4a^2 \times 2a}{4a^2 + 4a^2} = 2a$$

$F_1$

$$+F_2^{2\ 2} =$$

$$8a^2 = \frac{2}{a}$$

Если сечение имеет ось симметрии, то эта ось – центральная.

$$y_c = \frac{\sum S F y + F_2 y_2}{\sum F} = \frac{4a^2 \times 3a + 4a^2 \times 0,5a}{8a^2} = 1,75a$$

$$y_1 = 3a, \quad y_2 = \frac{a}{2} = 0,5a$$

$$I_{yc}^{(1)} = \frac{hb^3}{12} \approx 0,3a^4$$

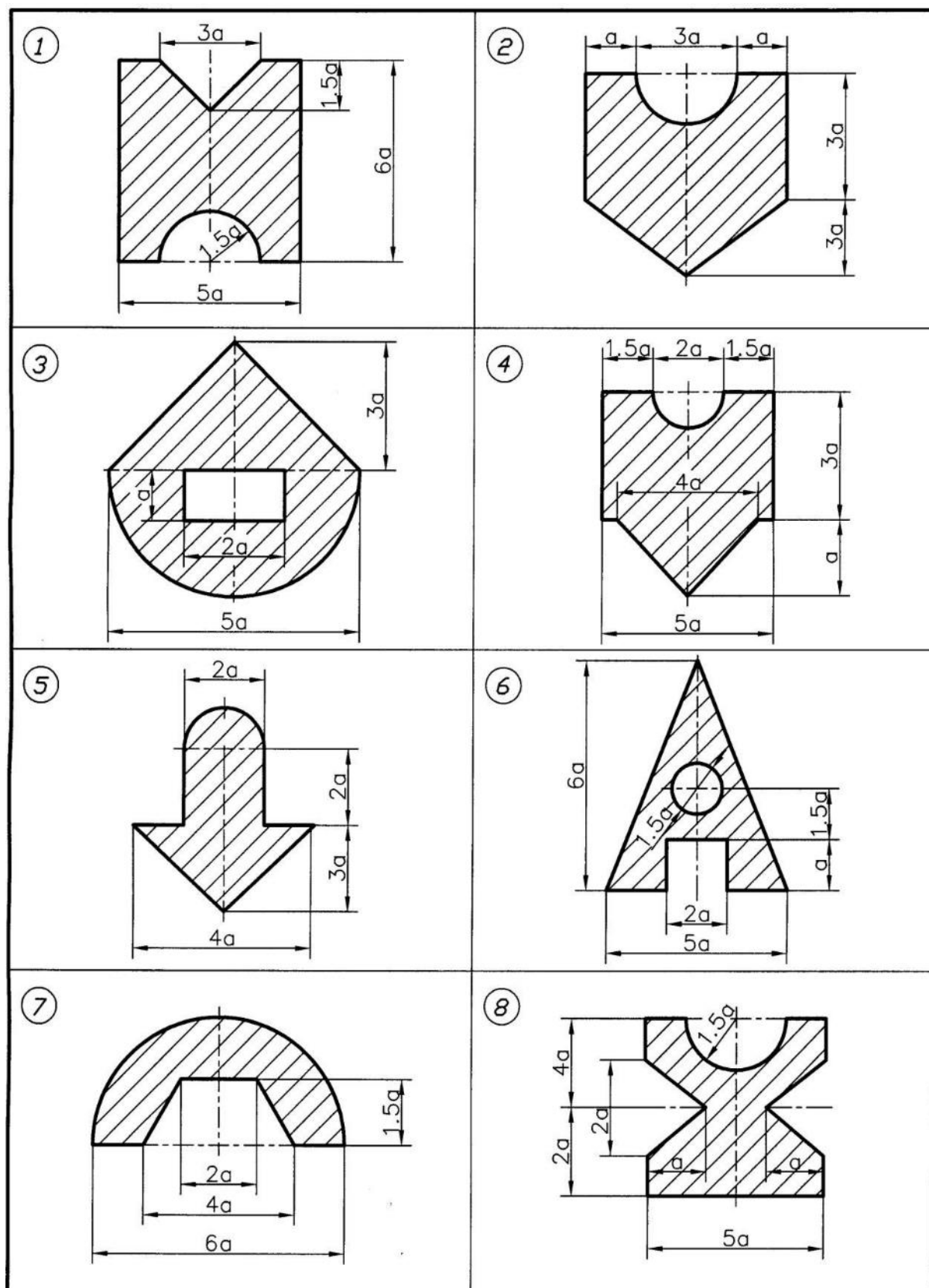
$$I_{yc}^{(2)} = \frac{a(4a)^3}{12} \approx 5a^4$$

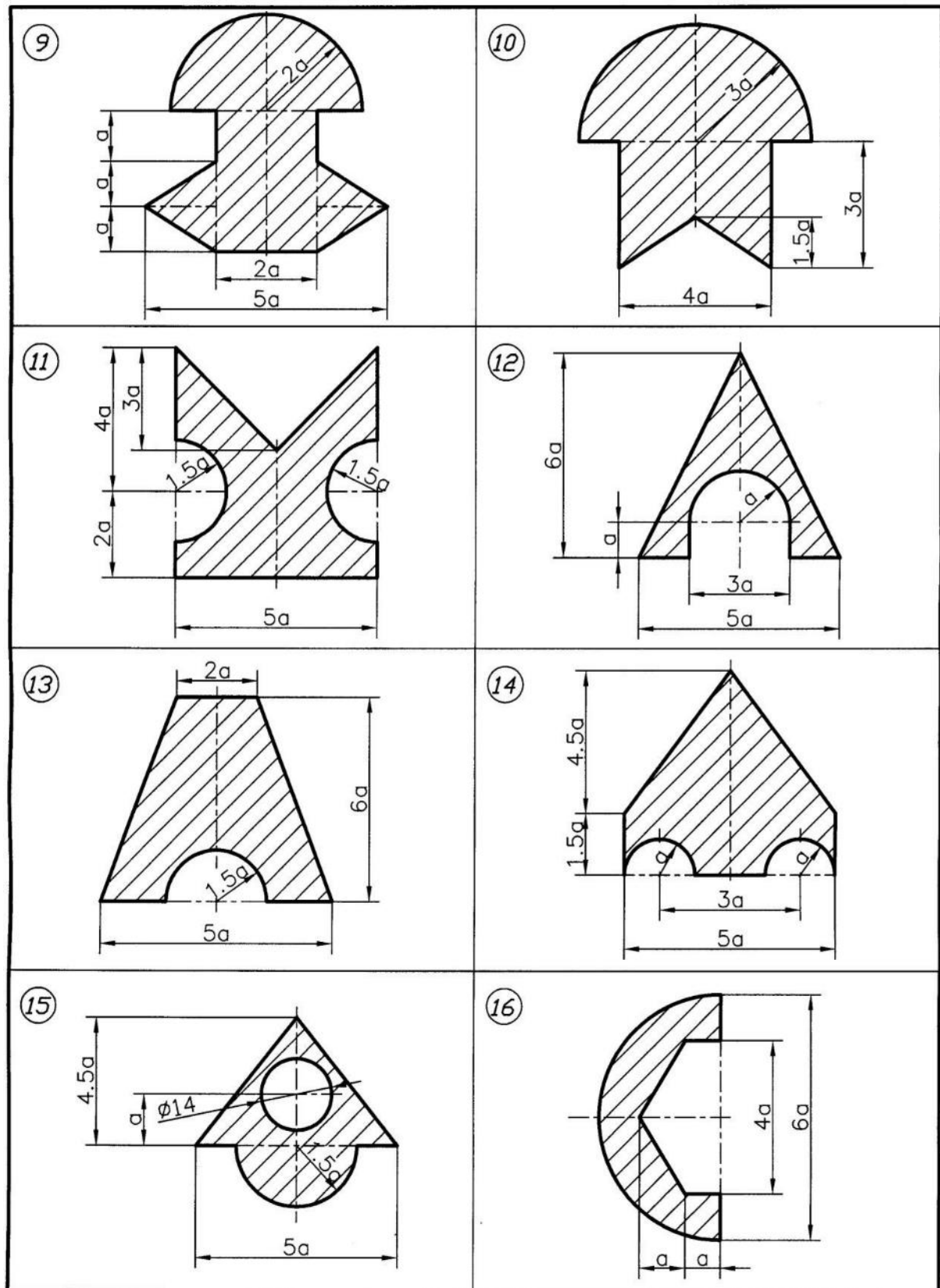
$$I_{yc} = I_{yc}^{(1)} + I_{yc}^{(2)} \approx 5,3a^4$$

$$W_{yc} = \frac{I_{yc}}{x_{ma}} \approx 2,7a^3$$

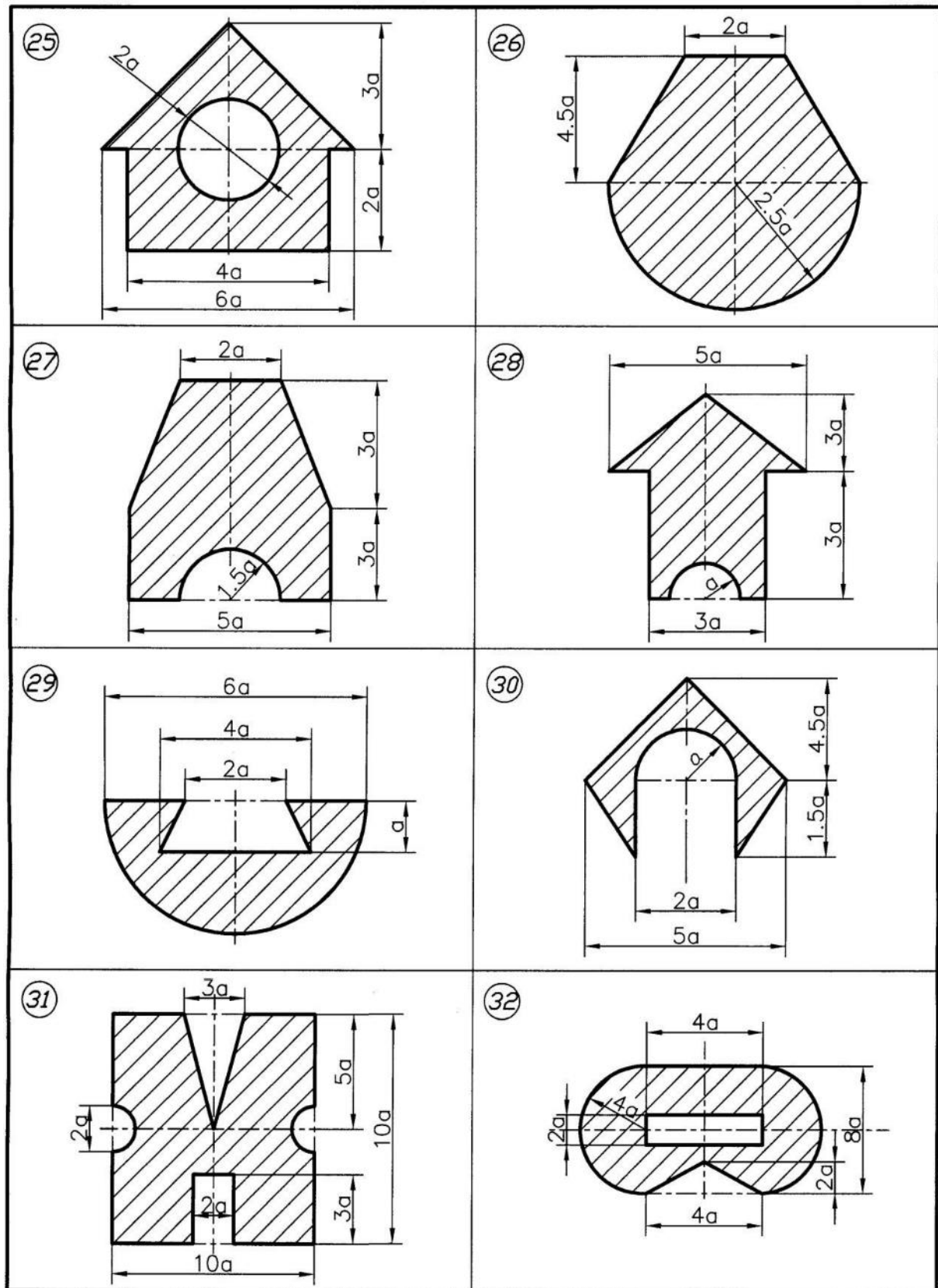
x

Таблица 9.2 – Расчетные схемы сложных сечений





|           |           |
|-----------|-----------|
| <p>17</p> | <p>18</p> |
| <p>19</p> | <p>20</p> |
| <p>21</p> | <p>22</p> |
| <p>23</p> | <p>24</p> |



### **Вопросы для защиты работы:**

1. Относительно каких осей следует определять моменты сопротивления и моменты инерции сечения при изгибе?
2. Какие оси называются главными и центральными?
3. Как определить положение центра тяжести сложного сечения?
4. Какой знак имеют осевые моменты инерции сечения?
5. Как определить моменты инерции сечения относительно параллельных осей, одни из которых центральные?
6. Какие моменты инерции называются главными?
7. Чему равны осевые моменты инерции прямоугольника, круга, квадрата, треугольника, полукруга относительно их главных осей инерции?
8. Что называется осевым моментом сопротивления сечения?
9. По заданию преподавателя определить геометрические характеристики (моменты инерции и моменты сопротивления) сечения, составленного из простых геометрических фигур.

### **Рекомендуемая литература по данной теме**

1 Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

2 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

## РАСЧЁТ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

**Цель работы:** изучение методики расчёта стержня на устойчивость при центральном сжатии. Определение критической силы и критического напряжения.

### Теоретическое обоснование

При центральном сжатии прямого стержня его прямолинейная форма устойчива до определённого критического значения сжимающей силы. Даже незначительное превышение сжимающей силой критического значения связано с появлением существенных прогибов, а значит, с возникновением больших изгибающих моментов и напряжений. Практически потеря устойчивости равносильна выходу конструкции из строя, даже если это явление не сопровождается разрушением (изломом) стержня.

Расчёт на устойчивость обеспечивает такие соотношения величин сжимающей нагрузки, размеров стержня и характеристик его материала, при которых исключена опасность продольного изгиба. Критической силой  $P_{кр}$  называется наименьшая сжимающая нагрузка, при которой сжатый стержень теряет способность сохранять прямолинейную форму равновесия.

Чтобы гарантировать отсутствие продольного изгиба, допускаемое значение силы, сжимающей стержень,  $[P_y]$  должно быть в некоторое число раз меньше критической

$$[P_y] = \frac{P_{кр}}{[n_y]}, \quad (1)$$

где  $[n_y]$  – требуемый (заданный, допускаемый) коэффициент запаса устойчивости. Его значение зависит от материала и назначения стержня, а для элементов строительных конструкций – также от их гибкости. Для стальных конструкций типа кронштейнов, ферм принимают  $[n_y]=1,8 \dots 3,0$ ; для ходовых и

грузовых винтов  $[n_y]=4\dots5$ ; для конструкций из чугуна  $[n_y]=5,0\dots6,5$ ; для конструкций из алюминиевого сплава  $[n_y]=2,5\dots3,5$ ; для деревянных стоек  $[n_y]=3\dots5$ .

Допускаемые напряжения

$$[\sigma]_y = \frac{\sigma_{кр}}{[n_y]}, \quad (2)$$

где  $\sigma_{кр}$  – критическое напряжение.

В пределах применимости закона Гука критическая сила определяется по формуле Эйлера

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (3)$$

где  $E$  – модуль упругости материала стержня;  $I_{\min}$  – минимальный главный центральный момент инерции поперечного сечения стержня;  $\mu$  – коэффициент приведения длины, зависящий от способа закрепления концов;  $l$  – длина стержня;  $\mu l$  – приведённая длина.

Критическое напряжение определяют по формуле

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (4)$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения;  $i_{\min}$  – минимальный радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}}; \quad (5)$$

$\lambda$  – гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}. \quad (6)$$

Закон Гука, и, следовательно, формула Эйлера применимы при условии, что критическое напряжение  $\sigma_{кр}$  не превышает предела пропорциональности материала стержня  $\sigma_{пц}$

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}. \quad (7)$$

Подставляя значение  $\sigma_{кр}$  по (4), получаем

$$\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{\text{пц}}, \quad (8)$$

отсюда

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}}, \text{ то есть } \lambda_{\text{пред}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}}, \quad (9)$$

где  $\lambda_{\text{пред}}$  – предельная гибкость, зависящая только от механических свойств материала. То есть формула Эйлера применима при  $\lambda \geq \lambda_{\text{пред}}$ .

Критические напряжения при гибкостях меньше предельных определяются по эмпирической формуле Ясинского

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda, \quad (10)$$

где  $a, b$  – опытные коэффициенты, зависящие от материала стержня и имеющие размерность напряжения.

Условие прочности при продольном изгибе

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma_y], \quad (11)$$

где  $[\sigma_y]$  – допускаемое напряжение на устойчивость, которое можно выразить через основное допускаемое напряжение на сжатие  $[\sigma_c]$

$$[\sigma_y] = \varphi [\sigma_c] \quad (12)$$

с помощью коэффициента  $\varphi$  – коэффициента понижения допускаемого напряжения при продольном изгибе. Расчёт по формуле

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq \varphi [\sigma_c] \quad (13)$$

универсален в том смысле, что он не связан с пределами применимости формулы Эйлера и может быть использован при всех значениях гибкости, для которых имеются табличные значения коэффициента  $\varphi$ . Коэффициент запаса устойчивости в этом расчёте в явном виде не фигурирует, он включён в величину  $\varphi$ .

Из (13) получаем допускаемое значение сжимающей силы

$$[P] = F \varphi [\sigma_c]. \quad (14)$$

Для стержней малой гибкости ( $\lambda < \lambda_0$ ) расчёт на устойчивость не требуется.

Значения  $\lambda_0$  приведены в таблице 2.

Расчёт на устойчивость может выполняться в двух вариантах: 1) при заданном в условии допускаемом коэффициенте запаса на устойчивость  $[n_y]$ ; 2) с помощью таблиц коэффициентов уменьшения  $\varphi$ .

### Пример выполнения задания

Задача.

Для заданной стойки (рисунок 1) определить значения критической силы, критического напряжения и допускаемой сжимающей нагрузки, приняв  $[\sigma_c]=160$  МПа для стали,  $[\sigma_c]=140$  МПа для чугуна.

Решение.

Для кольцевого сечения любая центральная ось является главной и все центральные моменты инерции равны между собой. Соотношение диаметров  $c=d_0/d=56/94=0,6$ .

Момент инерции сечения

$$I_{\min} = I = \frac{\pi d^4}{64} \left( 1 - c^4 \right) = \frac{3,14 \cdot 94^4}{64} \left( 1 - 0,6^4 \right) = 333,4 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Площадь поперечного сечения стойки

$$F = \frac{\pi d^2}{4} \left( 1 - c^2 \right) = \frac{3,14 \cdot 94^2}{4} \left( 1 - 0,6^2 \right) = 44,4 \cdot 10^2 \text{ мм}^2$$

Радиус инерции

$$i = \sqrt{\frac{I}{F}} = \sqrt{\frac{333,4 \cdot 10^4}{44,4 \cdot 10^2}} = 27,4 \text{ мм}.$$

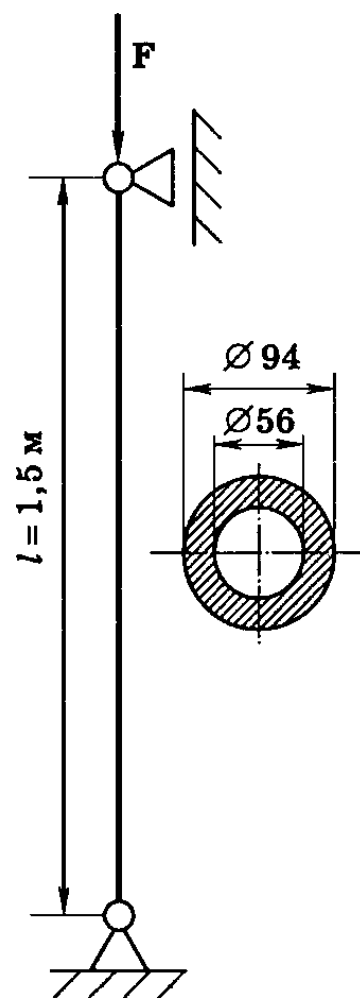


Рисунок 1.

При данном способе закрепления концов коэффициент приведения длины  $\mu=1$  (согласно таблице 1). Гибкость стойки

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1,5 \cdot 10^3}{27,4} = 55.$$

Для чугуна по таблице 2 находим:  $\varphi=0,57$  при  $\lambda=50$ ;  $\varphi=0,44$  при  $\lambda=60$ .

Интерполируя, для  $\lambda=55$  имеем:

$$\varphi = 0,44 \cdot \frac{0,57 - 0,44}{10} \cdot 5 = 0,505.$$

Допускаемое значение сжимающей силы

$$[P] = F\varphi[\sigma_c] = 4440 \cdot 0,505 \cdot 140 = 314 \cdot 10^3 \text{ Н} = 314 \text{ кН}.$$

Критическое напряжение для стержней средней гибкости при

$\lambda=55 < \lambda_{\text{пред}}=80$  (для чугуна) определяется по формуле из таблицы 2

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2 = 761 - 11,77 \cdot 55 + 0,052 \cdot 55^2 = 271 \text{ МПа},$$

где  $a, b, c$  – коэффициенты, определяемые по таблице 2.

Критическая сила

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} F = 271 \cdot 4440 = 1203 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1203 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{P_{\text{кр}}}{[P]} = \frac{1203}{314} = 3,8.$$

### Задания

Для заданной стойки определить значения критической силы, критического напряжения и допускаемой сжимающей нагрузки, приняв  $[\sigma_c]=160$  МПа для стали,  $[\sigma_c]=140$  МПа для чугуна. (Выбрать номер схемы из таблицы 4 по последней цифре номера студента в списке группы. Длину стойки первые 10 студентов принимают по номеру варианта 1, вторые (с 11 по 20) – по номеру варианта 2, третьи (с 21 по 30) – по номеру варианта 3).

Справочные таблицы

Таблица 1. – Влияние условий закрепления концов стержня на критическую силу

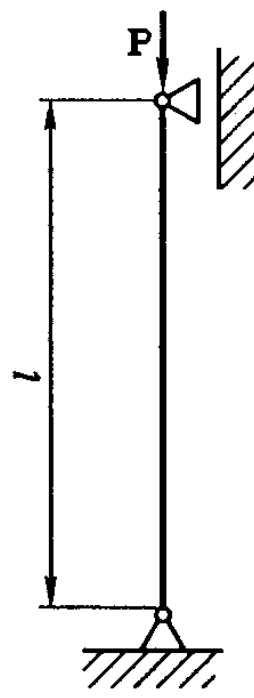
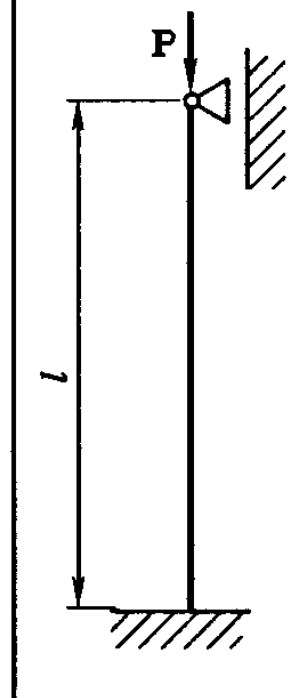
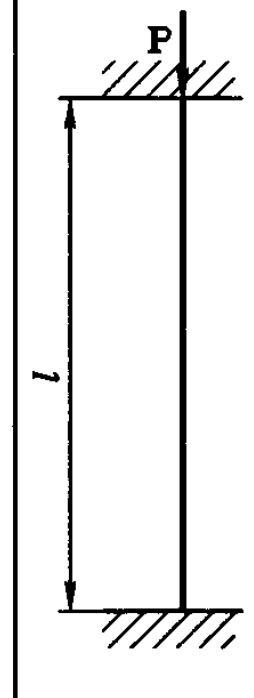
| Схема стойки |  |  |  |  |
|--------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mu$        | 2                                                                                  | 1                                                                                  | 0,7                                                                                 | 0,5                                                                                  |

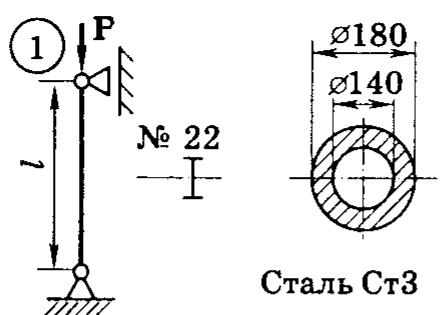
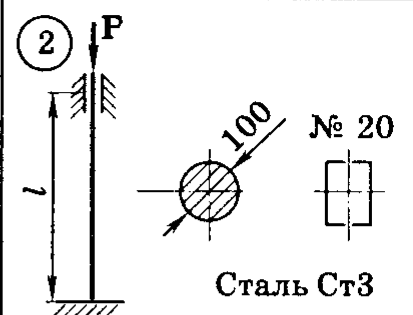
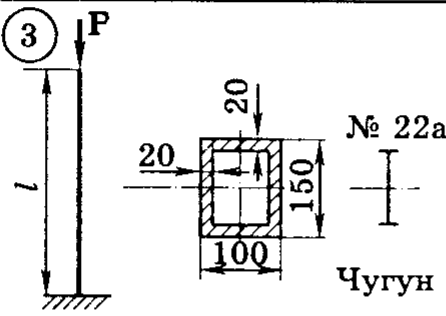
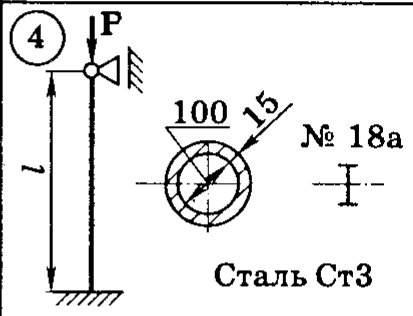
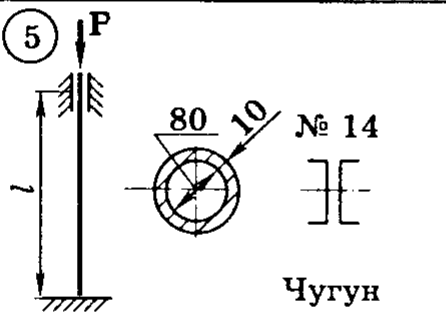
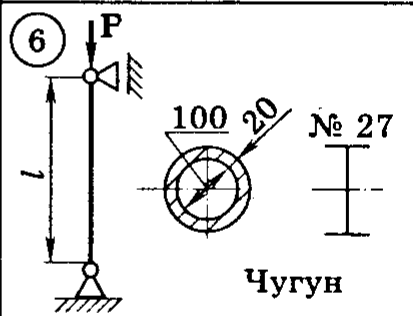
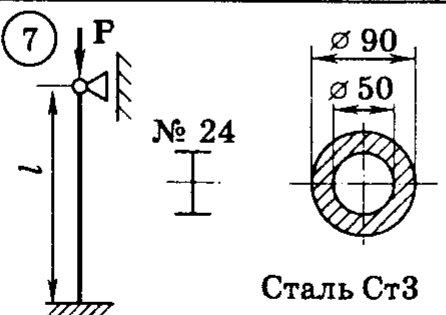
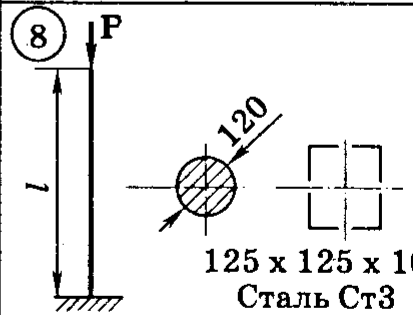
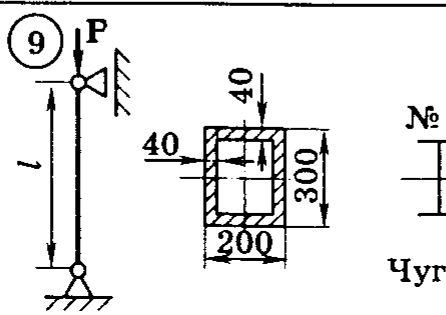
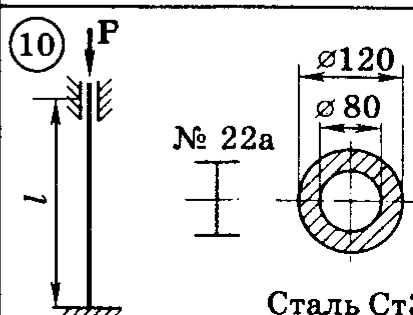
Таблица 2. – Параметры для определения критических напряжений

| Материал     | $\sigma_y (\sigma_{0,2}),$<br>МПа                     | $\sigma_{пц},$ МПа | $a,$ МПа | $b,$ МПа | Граничное значение<br>гибкости |    |
|--------------|-------------------------------------------------------|--------------------|----------|----------|--------------------------------|----|
| Сталь:       |                                                       |                    |          |          |                                |    |
| Ст2          | 215                                                   | 185                | 258      | 0,68     | 105                            | 62 |
| Ст3          | 235                                                   | 195                | 304      | 1,11     | 100                            | 61 |
| 20, Ст4      | 255                                                   | 215                | 328      | 1,07     | 96                             | 60 |
| 25, Ст5, 35л | 275                                                   | 235                | 343      | 1,13     | 92                             | 57 |
| 35, 45л      | 314                                                   | 265                | 390      | 1,40     | 90                             | 55 |
| 45           | 353                                                   | 300                | 440      | 1,64     | 85                             | 52 |
| 50, 55л      | 373                                                   | 314                | 464      | 1,83     | 82                             | 50 |
| Сосна, ель   | —                                                     | —                  | 28,7     | 0,19     | 70                             | —  |
| Чугун        | $\sigma_{cr} = 761 - 11,77 \lambda + 0,052 \lambda^2$ |                    |          |          |                                |    |

Таблица 3. – Значения коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения ( $\varphi$ )

| Гибкость<br>$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ | Материал                       |           |                                                          |       |        |
|------------------------------------------------|--------------------------------|-----------|----------------------------------------------------------|-------|--------|
|                                                | Сталь Ст1,<br>Ст2, Ст3,<br>Ст4 | Сталь Ст5 | Сталь повышенного<br>качества<br>( $\sigma_y = 320$ МПа) | Чугун | Дерево |
| 0                                              | 1,00                           | 1,00      | 1,00                                                     | 1,00  | 1,00   |
| 10                                             | 0,99                           | 0,98      | 0,97                                                     | 0,97  | 0,99   |
| 20                                             | 0,96                           | 0,95      | 0,95                                                     | 0,91  | 0,97   |
| 30                                             | 0,94                           | 0,92      | 0,91                                                     | 0,81  | 0,93   |
| 40                                             | 0,92                           | 0,89      | 0,87                                                     | 0,69  | 0,87   |
| 50                                             | 0,89                           | 0,86      | 0,83                                                     | 0,57  | 0,80   |
| 60                                             | 0,86                           | 0,82      | 0,79                                                     | 0,44  | 0,71   |
| 70                                             | 0,81                           | 0,76      | 0,72                                                     | 0,34  | 0,60   |
| 80                                             | 0,75                           | 0,70      | 0,65                                                     | 0,26  | 0,48   |
| 90                                             | 0,69                           | 0,62      | 0,55                                                     | 0,20  | 0,38   |
| 100                                            | 0,60                           | 0,51      | 0,43                                                     | 0,16  | 0,31   |
| 110                                            | 0,52                           | 0,43      | 0,35                                                     | —     | 0,25   |
| 120                                            | 0,45                           | 0,37      | 0,30                                                     | —     | 0,22   |
| 130                                            | 0,40                           | 0,33      | 0,26                                                     | —     | 0,18   |
| 140                                            | 0,36                           | 0,29      | 0,23                                                     | —     | 0,16   |
| 150                                            | 0,32                           | 0,26      | 0,21                                                     | —     | 0,14   |
| 160                                            | 0,29                           | 0,24      | 0,19                                                     | —     | 0,12   |
| 170                                            | 0,26                           | 0,21      | 0,17                                                     | —     | 0,11   |
| 180                                            | 0,23                           | 0,19      | 0,15                                                     | —     | 0,10   |
| 190                                            | 0,21                           | 0,17      | 0,14                                                     | —     | 0,09   |
| 200                                            | 0,19                           | 0,16      | 0,13                                                     | —     | 0,08   |

Таблица 4. – Схемы и исходные данные к задаче

| Номер<br>вариан-<br>та | $l, \text{ м}$ | Схемы стоек и сечений                                                                                            |                                                                                                                             |
|------------------------|----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1                      | 1,2            |  <p>№ 22</p> <p>Сталь Ст3</p>   |  <p>№ 20</p> <p>Сталь Ст3</p>             |
| 2                      | 1,7            |                                                                                                                  |                                                                                                                             |
| 3                      | 1,6            |                                                                                                                  |                                                                                                                             |
| 4                      | 1,5            |                                                                                                                  |                                                                                                                             |
| 5                      | 1,6            |  <p>№ 22a</p> <p>Чугун</p>     |  <p>№ 18a</p> <p>Сталь Ст3</p>           |
| 6                      | 1,9            |                                                                                                                  |                                                                                                                             |
| 7                      | 1,8            |                                                                                                                  |                                                                                                                             |
| 8                      | 1,7            |                                                                                                                  |                                                                                                                             |
| 9                      | 1,5            |  <p>№ 14</p> <p>Чугун</p>     |  <p>№ 27</p> <p>Чугун</p>               |
| 10                     | 2,0            |                                                                                                                  |                                                                                                                             |
| 11                     | 1,8            |                                                                                                                  |                                                                                                                             |
| 12                     | 1,9            |                                                                                                                  |                                                                                                                             |
| 13                     | 1,7            |  <p>№ 24</p> <p>Сталь Ст3</p> |  <p>125 x 125 x 10</p> <p>Сталь Ст3</p> |
| 14                     | 1,6            |                                                                                                                  |                                                                                                                             |
| 15                     | 1,7            |                                                                                                                  |                                                                                                                             |
| 16                     | 1,8            |                                                                                                                  |                                                                                                                             |
| 17                     | 2,2            |  <p>№ 24</p> <p>Чугун</p>     |  <p>№ 22a</p> <p>Сталь Ст3</p>          |
| 18                     | 2,0            |                                                                                                                  |                                                                                                                             |
| 19                     | 2,1            |                                                                                                                  |                                                                                                                             |
| 20                     | 1,8            |                                                                                                                  |                                                                                                                             |

### **Контрольные вопросы**

1. Какая сила называется критической?
2. Как изменится критическая сила, если увеличить диаметр стального сечения стойки в 2, в 3 и в 5 раз? (Формула Эйлера применима во всех случаях.)
3. Как изменится критическая сила, если уменьшить длину стойки в 3, в 4, в 5 раз? (Формула Эйлера применима во всех случаях.)
4. Шатуны двигателя внутреннего сгорания имеют, как правило, двутавровое сечение. Чем это объяснить?
5. Что называется гибкостью стержня?
6. В каких пределах справедлива формула Эйлера?
7. Назовите способы расчёта стержней на устойчивость.

### **Список литературы**

1. 620 К 82 Кривошапко, С. Н. Сопротивление материалов : лекции, семинары, расчетно-графические работы : учебник для бакалавров / С. Н. Кривошапко. – Москва : Юрайт, 2013. – 413 с. : ил., табл. ; 21 см. – (Бакалавр. Базовый курс) (Учебник). – Гриф: Доп. МО. – Библиогр.: с. 412-413. – ISBN 978-5-9916-2122-9
2. 44 Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – Изд. 15-е, перераб. – М. : Наука, 1976. – 608 с. – Прил.: с. 592-597. – Предм. указ.: с. 600-607
3. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов : учебник для вузов / В. И. Феодосьев. – Изд. 9-е, перераб. – М. : Наука, 1986. – 512 с. : ил. – Прил.: с. 493-508. – Предм. указ.: с. 509-512
4. Александров, А. В. Сопротивление материалов : учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; под ред. А. В. Александрова . - 2-е изд., испр. - М. : Высшая школа, 2000. - 560 с. - Прил.: с. 550-556. - ISBN 5-06-003732-0
5. Завистовский, В. Э. Техническая механика : учебное пособие : [16+] / В. Э. Завистовский, Л. С. Турищев. – Минск : РИПО, 2019. – 368 с. : ил.,

табл., схем., граф. – Режим доступа: по подписке. – URL:  
<https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=600078> (дата обращения:  
09.05.2022). – Библиогр.: с. 354-355. – ISBN 978-985-503-895-6. – Текст :  
электронный.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 15

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ РЕЗЬБЫ

#### Цель и содержание работы.

1. Изучение основных видов резьбы и резьбовых соединений.
2. Изучение методов определения геометрических параметров стандартной резьбы.

#### Теоретическая часть

##### Геометрия резьбы

Термин «резьба» произошёл от исторически первого технологического процесса её изготовления – нарезания. Резьба может выполняться на цилиндрических или конических поверхностях. Геометрической основой резьбы является винтовая линия (рис.1). Кинематически она получается сочетанием вращательного движения цилиндрической заготовки вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью  $\omega$  и поступательного движения резца с постоянной скоростью  $v$ .

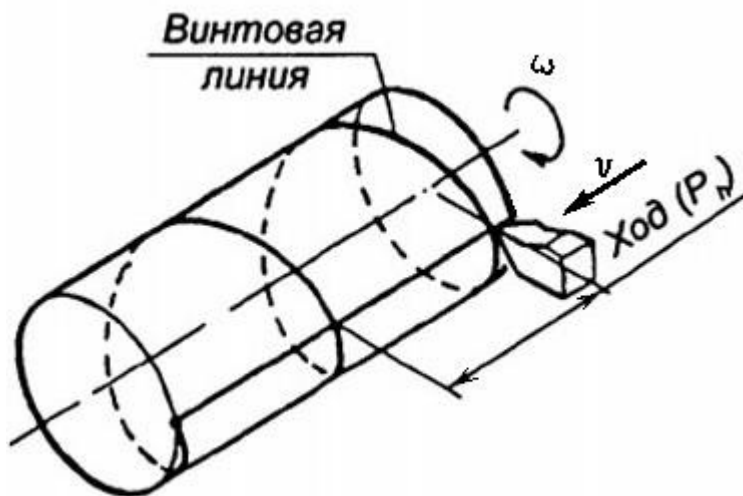


Рисунок 1 – Нарезание цилиндрической наружной резьбы

Чтобы нарезать многозаходную резьбу, нужно несколько винтовых линий (канавок) расположить на равном удалении друг от друга (рис. 2).

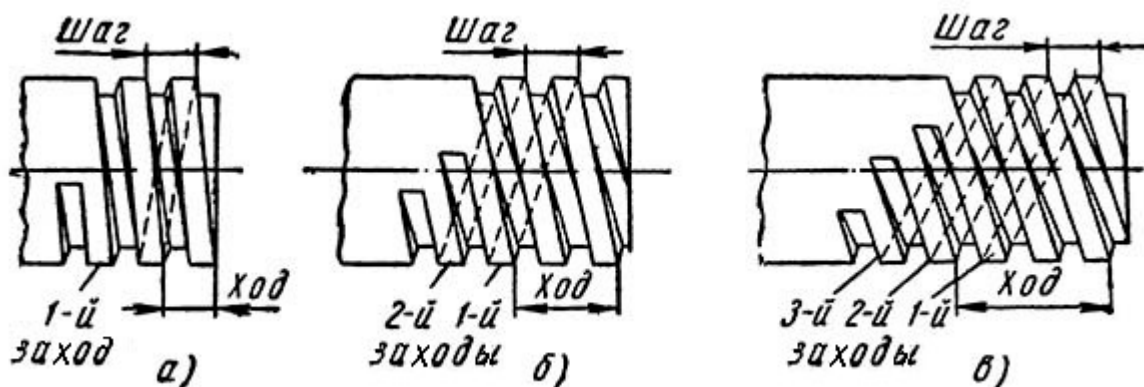


Рисунок 2 – Одно- и многозаходная резьба:  
а) однозаходная, б) двухзаходная, в) трёхзаходная

Угол подъёма винтовой линии  $\beta$  удобно измерять или вычислять по развёртке цилиндра.

Винтовая линия на цилиндре – это место расположения точек гипотенузы прямоугольного треугольника ОАВ накрученного на цилиндр (рисунок 3).

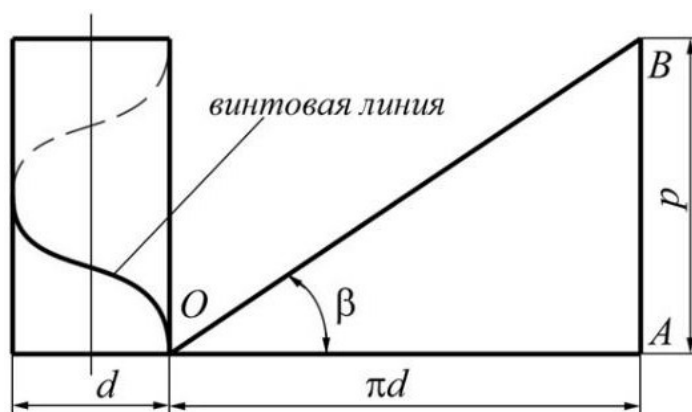


Рисунок 3 – Схема винтовой линии

Угол подъема винтовой линии  $\beta_2$  по среднему диаметру резьбы  $d_2$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = p_h / (\pi d_2) \quad (2.1)$$

где  $p_h$  – ход резьбы, одинаковый на всех диаметрах данной резьбы;  $d_2$  – средний диаметр резьбы.

$$p_h = p \cdot n,$$

где  $p$  – шаг резьбы,  $n$  – число заходов резьбы (1, 2, 3...).

У однозаходной резьбы значения хода и шага совпадают, т.к.  $n=1$ .

Профиль метрической резьбы в осевом разрезе болта и гайки изображён на рис. 4. Диаметры и шаги метрической резьбы приведены в таблице 6.1.

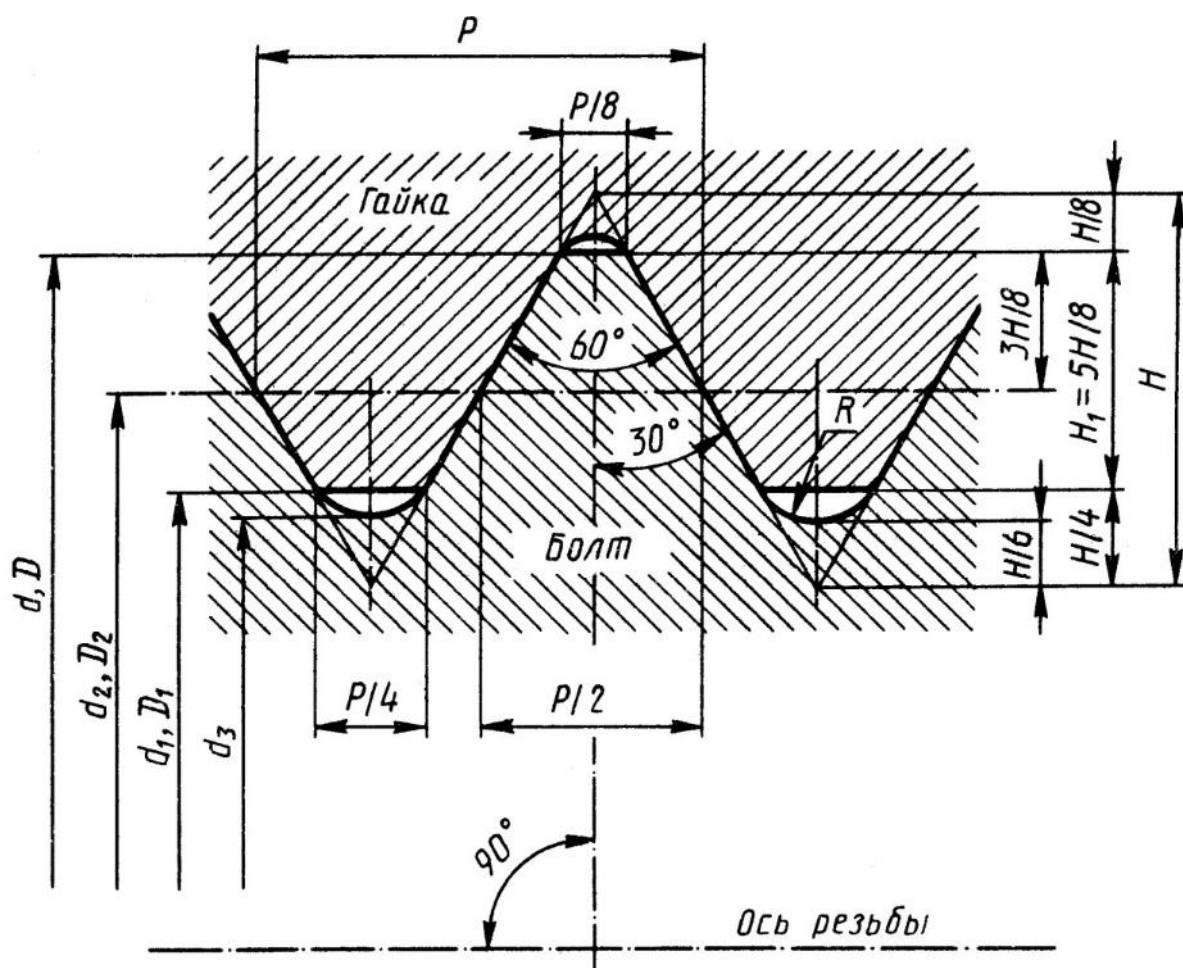


Рисунок 4 – Геометрия метрической резьбы.

Основные геометрические параметры резьбы стандартизованы и имеют следующие обозначения:  $d$  – наружный (номинальный) диаметр наружной резьбы (болта);  $D$  – наружный диаметр внутренней резьбы (гайки);  $d_1$  – внутренний диаметр резьбы болта;  $D_1$  – внутренний диаметр резьбы гайки;  $d_2$  – средний диаметр резьбы болта;  $D_2$  – средний диаметр резьбы гайки;  $p$  – шаг резьбы;  $\alpha$  – угол профиля резьбы;  $\beta$  – угол подъема винтовой линии.

Высота рабочего профиля резьбы  $h=5H/8$  это расстояние между выступом и впадиной профиля в направлении, перпендикулярном оси резьбы.

$$H = \frac{\sqrt{3}}{2}P \approx 0,866P; \quad R = H/6;$$

$$D_2 = d_2 = D - 2\frac{3}{8}H = D - 0,649519053P;$$

$$D_1 = d_1 = D - 2\frac{5}{8}H = D - 1,082531755P;$$

$$d_3 = d - 2\frac{17}{24}H = d - 1,226869322P.$$

Таблица 6.1. Диаметры и шаги метрической цилиндрической резьбы общего назначения для диаметров от 2 до 250 мм по [6.7] (рис. 6.1), мм

| Диаметр $d$ |       |       | Шаг $P$ |                         |
|-------------|-------|-------|---------|-------------------------|
| ряд 1       | ряд 2 | ряд 3 | крупный | мелкий                  |
| 2           | —     | —     | 0,40    | 0,25                    |
| —           | 2,2   | —     | 0,45    | 0,25                    |
| 2,5         | —     | —     | 0,45    | 0,35                    |
| 3           | —     | —     | 0,50    | 0,35                    |
| —           | 3,5   | —     | (0,60)  | 0,35                    |
| 4           | —     | —     | 0,70    | 0,5                     |
| —           | 4,5   | —     | (0,75)  | 0,5                     |
| 5           | —     | —     | 0,80    | 0,5                     |
| —           | —     | (5,5) | —       | 0,5                     |
| 6           | —     | —     | 1       | 0,75; 0,5               |
| —           | —     | 7     | 1       | 0,75; 0,5               |
| 8           | —     | —     | 1,25    | 1; 0,75; 0,5            |
| —           | —     | 9     | (1,25)  | 1; 0,75; 0,5            |
| 10          | —     | —     | 1,5     | 1,25; 1; 0,75; 0,5      |
| —           | —     | 11    | (1,5)   | 1; 0,75; 0,5            |
| 12          | —     | —     | 1,75    | 1,5; 1,25; 1; 0,75; 0,5 |
| —           | 14    | —     | 2       | 1,5; 1,25; 1; 0,75; 0,5 |
| —           | —     | 15    | —       | 1,5 (1)                 |
| 16          | —     | —     | 2       | 1,5; 1; 0,75; 0,5       |
| —           | —     | 17    | —       | 1,5 (1)                 |
| —           | 18    | —     | 2,5     | 2; 1,5; 1; 0,75; 0,5    |
| 20          | —     | —     | 2,5     | 2; 1,5; 1; 0,75; 0,5    |
| —           | 22    | —     | 2,5     | 2; 1,5; 1; 0,75; 0,5    |
| 24          | —     | —     | 3       | 2; 1,5; (1)             |
| —           | —     | 25    | —       | 2; 1,5; (1)             |
| —           | —     | (26)  | —       | 1,5                     |
| —           | 27    | —     | 3       | 2; 1,5; 1; 0,75         |
| —           | —     | (28)  | —       | 2; 1,5; 1               |
| 30          | —     | —     | 3,5     | (3); 2; 1,5; 1; 0,75    |
| —           | —     | (32)  | —       | 2; 1,5                  |
| —           | 33    | —     | 3,5     | (3); 2; 1,5; 1; 0,75    |
| —           | —     | 35    | —       | 1,5                     |
| 36          | —     | —     | 4       | 3; 2; 1,5; 1            |
| —           | —     | (38)  | —       | 1,5                     |
| —           | 39    | —     | 4       | 3; 2; 1,5; 1            |
| —           | —     | 40    | —       | (3); (2); 1,5           |
| 42          | —     | —     | 4,5     | (4); 3; 2; 1,5; 1       |
| —           | 45    | —     | 4,5     | (4); 3; 2; 1,5; 1       |
| 48          | —     | —     | 5       | (4); 3; 2; 1,5; 1       |
| —           | —     | 50    | —       | (3); (2); 1,5           |
| —           | 52    | —     | 5       | (4); 3; 2; 1,5; 1       |
| —           | —     | 55    | —       | (4); (3); 2; 1,5        |
| 56          | —     | —     | 5,5     | 4; 3; 2; 1,5; 1         |
| —           | —     | 58    | —       | (4); (3); 2; 1,5        |
| —           | 60    | —     | (5,5)   | 4; 3; 2; 1,5; 1         |
| —           | —     | 62    | —       | (4); (3); 2; 1,5        |
| 64          | —     | —     | 6       | 4; 3; 2; 1,5; 1         |

| Диаметр $d$ |       |       | Шаг $P$ |                       |
|-------------|-------|-------|---------|-----------------------|
| ряд 1       | ряд 2 | ряд 3 | крупный | мелкий                |
| —           | —     | 65    | —       | (4); (3); 2; 1,5      |
| —           | 68    | —     | 6       | 4; 3; 2; 1,5; 1       |
| —           | —     | 70    | —       | (6); (4); (3); 2; 1,5 |
| 72          | —     | —     | —       | 6; 4; 3; 2; 1,5; 1    |
| —           | —     | 75    | —       | (4); (3); 2; 1,5      |
| —           | 76    | —     | —       | 6; 4; 3; 2; 1,5; 1    |
| —           | —     | (78)  | —       | 2                     |
| 80          | —     | —     | —       | 6; 4; 3; 2; 1,5; 1    |
| —           | —     | (82)  | —       | 2                     |
| —           | 85    | —     | —       | 6; 4; 3; 2; 1,5       |
| 90          | —     | —     | —       | 6; 4; 3; 2; 1,5       |
| —           | 95    | —     | —       | 6; 4; 3; 2; 1,5       |
| 100         | —     | —     | —       | 6; 4; 3; 2; 1,5       |
| —           | 105   | —     | —       | 6; 4; 3; 2; 1,5       |
| 110         | —     | —     | —       | 6; 4; 3; 2; 1,5       |
| —           | 115   | —     | —       | 6; 4; 3; 2; 1,5       |
| —           | 120   | —     | —       | 6; 4; 3; 2; 1,5       |
| 125         | —     | —     | —       | 6; 4; 3; 2; 1,5       |
| —           | 130   | —     | —       | 6; 4; 3; 2; 1,5       |
| —           | —     | 135   | —       | 6; 4; 3; 2; 1,5       |
| 140         | —     | —     | —       | 6; 4; 3; 2; 1,5       |
| —           | —     | 145   | —       | 6; 4; 3; 2; 1,5       |
| —           | 150   | —     | —       | 6; 4; 3; 2; 1,5       |
| —           | —     | 155   | —       | 6; 4; 3; 2            |
| 160         | —     | —     | —       | 6; 4; 3; 2            |
| —           | —     | 165   | —       | 6; 4; 3; 2            |
| —           | 170   | —     | —       | 6; 4; 3; 2            |
| —           | —     | 175   | —       | 6; 4; 3; 2            |
| 180         | —     | —     | —       | 6; 4; 3; 2            |
| —           | —     | 185   | —       | 6; 4; 3; 2            |
| —           | 190   | —     | —       | 6; 4; 3; 2            |
| —           | —     | 195   | —       | 6; 4; 3; 2            |
| 200         | —     | —     | —       | 6; 4; 3; 2            |
| —           | —     | 205   | —       | 6; 4; 3               |
| —           | 210   | —     | —       | 6; 4; 3               |
| —           | —     | 215   | —       | 6; 4; 3               |
| 220         | —     | —     | —       | 6; 4; 3               |
| —           | —     | 225   | —       | 6; 4; 3               |
| —           | —     | 230   | —       | 6; 4; 3               |
| —           | —     | 235   | —       | 6; 4; 3               |
| —           | 240   | —     | —       | 6; 4; 3               |
| —           | —     | 245   | —       | 6; 4; 3               |
| 250         | —     | —     | —       | 6; 4; 3               |

Примечания: 1. Резьбу M14×1,25 применяют только для свечей зажигания.

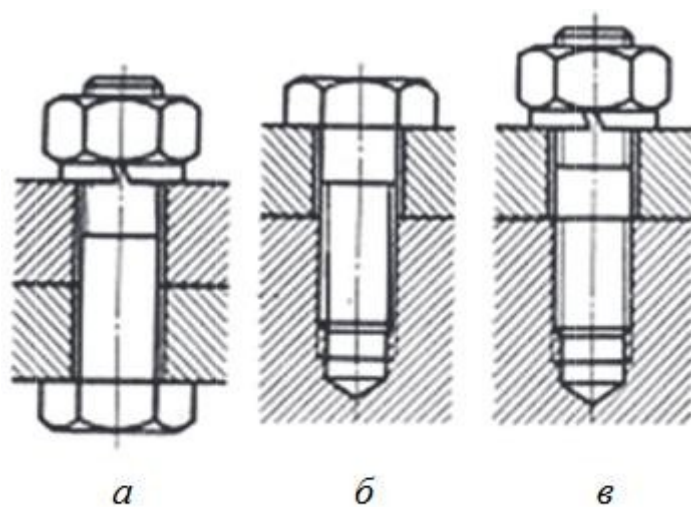
2. Резьбу M35×1,5 применяют для стопорных гаек шарикоподшипников.

3. При выборе диаметров резьб следует предпочитать первый ряд второму, а второй — третьему.

4. Диаметры и шаги резьб, заключенные в скобки, по возможности не применяют.

Метрическую резьбу с крупным шагом обозначают буквой М и числом, выражающим диаметр резьбы в миллиметрах, например, М20. Для резьбы с мелким шагом дополнительно указывают шаг в миллиметрах, например М20х1,5.

Резьба может быть элементом самых разнообразных деталей (валов, корпусов, рукояток...). Но имеются крепёжные резьбовые детали, предназначенные для соединения других деталей. Это болт, винт, шпилька и гайка (рис. 5).



Виды резьбовых соединений:  
а – болтовое; б – винтовое; в – шпильчатое

Рисунок 5

Болтовое соединение показано на рисунке 6.

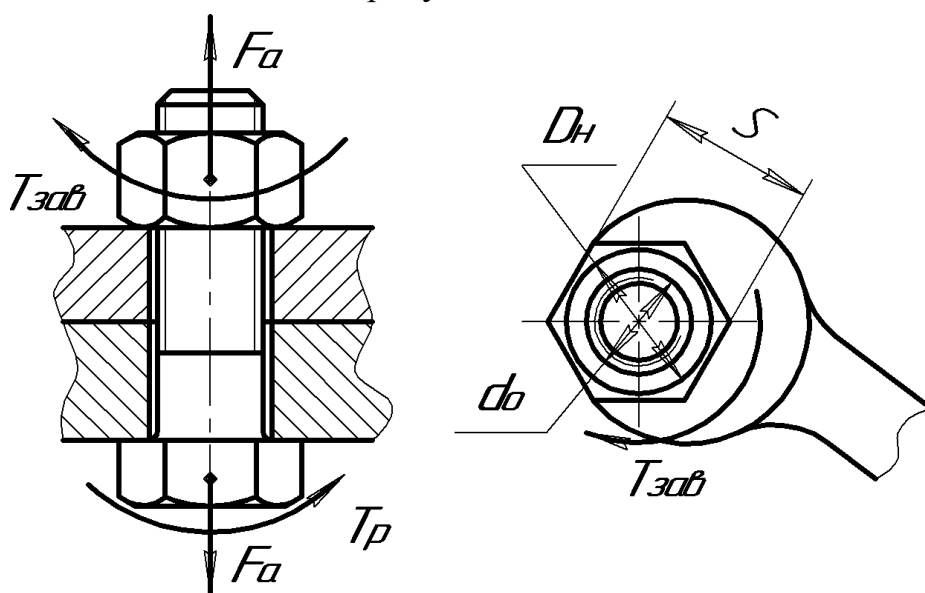


Рисунок 6 – Болтовое соединение: разрез и вид сверху

Для облегчения нарезания резьбы и свинчивания на резьбовых деталях выполняют фаски. Поверхность в виде кольца, которой гайка опирается на деталь, называют опорной поверхностью гайки.

Средний диаметр опорной поверхности гайки  $D_{cp}$  равен

$$D_{cp} = \frac{D_H + d_0}{2}, \quad (2.11)$$

где  $D_H$  – наружный диаметр опорного торца гайки, не превышающий размера  $S$  «под ключ»  $D_H \leq S$ ;

$d_0$  – диаметр отверстия под винт, равный

$$d_0 = d + 1 \text{ мм}$$

### Задание

1. Изучить основные типы резьбы и резьбовых соединений.
2. Сделать эскиз профиля метрической резьбы с буквенным обозначением размеров.
3. Измерить наружный диаметр резьбы с помощью штангенциркуля.
4. Шаг резьбы определить путем отпечатка на бумаге, включающего не менее десяти шагов.
5. Проверить значения наружного диаметра и шага резьбы по стандарту.
6. По стандарту определить значения остальных диаметров резьбы и угла подъёма винтовой линии на среднем диаметре.
7. Записать полную характеристику данной резьбы. Записать обозначение резьбы по стандарту.
8. Сделать эскиз болтового соединения. Обозначить на нём диаметры опорной поверхности гайки и размер гайки под ключ.
9. Измерить и записать значения диаметров опорной поверхности гайки и размера гайки под ключ.
10. Измерить высоту гайки и определить число витков резьбы в гайке. Оно может быть не целым числом.
11. Записать обозначения деталей резьбового соединения в соответствии со стандартами на эти детали.

### 2.6. Вопросы к защите работы

1. Что вы понимаете под одно и двухзаходными резьбами?
2. Какие размеры резьбы обозначают символами:  $d$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $p$  и  $h$ .

3. Как влияет на значение угла подъёма резьбы величина хода резьбы, шага резьбы, число заходов резьбы?
4. Как зависит угол подъёма винтовой линии от диаметра цилиндра?
6. Угол профиля метрической резьбы.
7. Что такое фаска, что такое сбег резьбы?
8. Обозначение метрической резьбы.

## **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. ГОСТ 8724-2002. Основные нормы взаимозаменяемости. Резьба метрическая. Диаметры и шаги.
2. ИСО 261-98 "Резьбы ИСО общего назначения. Диаметры и шаги в диапазоне диаметров от 1 до 300 мм".
3. **ГОСТ 9150-2002** (ИСО 68-1-98) "Основные нормы взаимозаменяемости. Резьба метрическая. Профиль".
4. ГОСТ 24705-81. Основные нормы взаимозаменяемости. Резьба метрическая. Основные размеры.
5. [http://stanki-katalog.ru/st\\_109.htm](http://stanki-katalog.ru/st_109.htm) Многозаходная резьба. Нарезание многозаходной резьбы.
6. Федорова, М. А. Краткий курс по прикладной механике : учебное пособие : / М. А. Федорова, Е. П. Степанова, С. П. Андросов ; Омский государственный технический университет. – Омск : Омский государственный технический университет (ОмГТУ), 2018. – 152 с. : ил., табл., схем., граф. – Режим доступа: \_\_\_\_\_ по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=682101> (дата обращения: 09.05.2022). – Библиогр.: с. 136. – ISBN 978-5-8149-2610-4. – Текст : электронный.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 16

### ИЗУЧЕНИЕ МЕТОДИКИ РАСЧЁТА РЕЗЬБОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

#### Теоретическая часть

#### Расчет винтовых соединений, нагруженных осевой силой

На практике могут встретиться *незатянутые* и *затянутые* резьбовые соединения:

##### а) расчет незатянутого винтового соединения.

Этот случай характерен для крюковых подвесок кранов, рым-болтов, (рисунок 1).

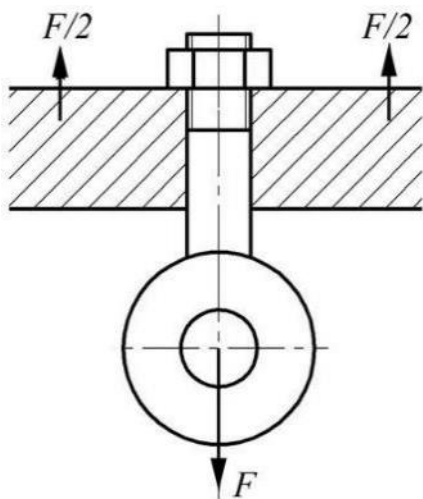


Рисунок 1 – Незатянутое винтовое соединение:

В этом случае тело винта работает только на растяжение от силы  $F$ . Условие прочности определяется для наименьшего сечения винта, т. е. для внутреннего диаметра резьбы  $d_1$

$$\sigma = \frac{4F}{\pi d_1^2} \leq [\sigma_p] \quad (1)$$

Проектный расчет заключается в определении диаметра  $d_1$

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi[\sigma_p]}} \quad (2)$$

**б) расчет затянутого винтового соединения (болт затянут, внешняя нагрузка отсутствует).**

Этот случай характерен для крепления ненагруженных герметичных крышек и люков корпусов машин (рисунок 2). Эта ситуация возникает всегда в процессе сборки винтового соединения при затяжке, а также при работе передачи «винт-гайка».

В этом случае кроме растяжения или сжатия тела винта усилием затяжки  $F_3$ , происходит его закручивание в результате действия момента сопротивления в резьбе  $T_p$ . Момент трения на торце гайки не учитывается, т. к. этот момент не передается на тело винта. Если действует момент трения на торце винта, то он учитывается в соответствующем поперечном сечении винта, т.к. нагружает винт (например, в установочных винтах).

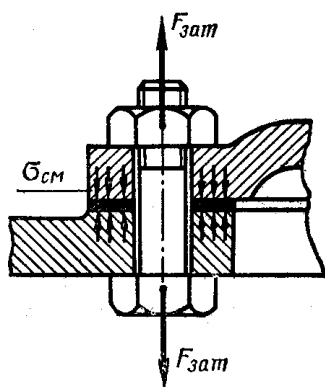


Рисунок 2 – Затягивание болта при отсутствии внешней нагрузки

В результате в теле винта возникают напряжения растяжения (сжатия) и кручения:

$$\sigma = \frac{4F_3}{\pi d_1^2} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{T_p}{W} = \frac{F_3 \frac{d_2}{2} \operatorname{tg}(\beta + \rho')}{0,2d_1^3}, \quad (3)$$

и развивается сложное напряженное состояние. Эквивалентное номинальное напряжение в этом случае определяется по выражению

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{4F_3}{\pi d_1^2}\right)^2 + 3\left(\frac{F_3 d_2 \operatorname{tg}(\beta + \rho')}{0,2d_1^3 \cdot 2}\right)^2} \approx 1,3\sigma \quad (4)$$

Условие прочности винта для этого случая запишется в следующем виде:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1,3 \cdot 4F_3}{\pi d_1^2} \leq [\sigma_p] \quad (5)$$

где коэффициент 1,3 учитывает влияние момента кручения на тело винта.

Расчёт по формуле (7.25) показывает, что болты с резьбой меньше М10...М12 можно разрушить в процессе затяжки. Например, болт с резьбой М6 разрушается при силе на ключе, равной 45 Н; болт с резьбой М12 – при силе 180 Н. Поэтому в среднем и тяжёлом машиностроении не рекомендуют применять болты малых диаметров (меньше М8). На некоторых заводах для затяжки болтов используют специальные ключи предельного момента.

### **Расчет резьбового соединения нагруженного силами, сдвигающими детали в плоскости стыка**

Условием надежности этого соединения является отсутствие сдвига деталей в стыке. Конструктивно соединение может быть выполнено в 2-х вариантах:

**а) винт поставлен с зазором (рисунок 3).**

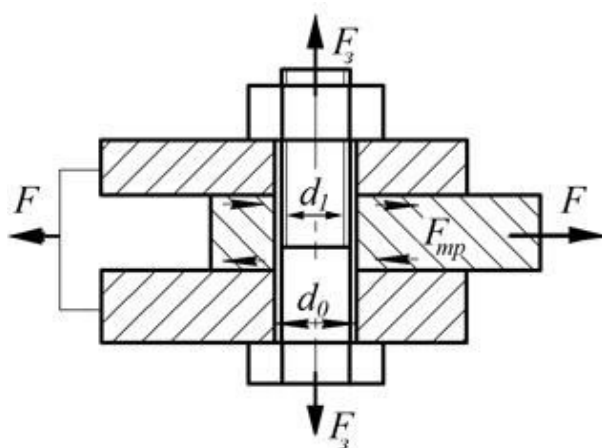


Рисунок 3 – Болтовое соединение, работающее на сдвиг (болт поставлен с зазором)

В этом случае внешняя нагрузка  $F$  уравнивается силами трения  $F_{тр}$  в стыке, которые создаются затяжкой винта  $F_3$

$$F_{тр} = F_3 f z i, \quad (6)$$

где  $f$  – коэффициент трения в стыке;  $z$  – число болтов;  $i$  – число стыков.

Условие работоспособности этого соединения

$$F_{тр} \geq F K_з, \quad (7)$$

где  $K_{зат} = 1,2 \div 1,5$  – коэффициент запаса затяжки.

Из уравнений (6) и (7) следует, что в предельном состоянии

$$FK_3 = F_3 fzi, \quad (8)$$

Откуда необходимое усилие затяжки

$$F_3 = \frac{K_3 F}{fzi}, \quad (9)$$

В результате действия этого усилия тело винта растягивается. Для создания этого усилия необходим крутящий момент, часть которого  $T_p$  скручивает стержень болта. Условие прочности будет иметь вид (5) с учётом (9)

$$\sigma = \frac{1,3 \cdot 4F_3}{\pi d_1^2} = \frac{5,2K_3 F}{\pi d_1^2 fzi} \leq [\sigma] \quad (10)$$

При выполнении проектного расчета обычно находят внутренний диаметр резьбы

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{5,2K_3 F}{\pi fzi[\sigma]}} \quad (11)$$

#### **б) винт поставлен без зазора.**

В этом случае затяжка необязательна, винт поставлен в отверстие детали без зазора (легкой запрессовкой). Для обеспечения точности размеров и формы, а также качества сопрягаемых поверхностей отверстие обрабатывают развёрткой и применяют болты повышенной точности для отверстий из-под развёртки (рисунок 4, а). В общем случае болт можно заменить штифтом. Аналогичные напряжения возникают в заклёпках (рисунок 4, б).

Тело винта будет работать на срез и смятие. Условие прочности на срез

$$\tau_{cp} = \frac{4F}{\pi d^2 zi} \leq [\tau_{cp}] \quad (12)$$

где  $d$ —наружный диаметр болта;  $i$  — число стыков;  $z$  — число болтов.

При выполнении проектного расчета определяют диаметр стержня болта

$$d_0 \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi zi[\tau_{cp}]}} \quad (13)$$

Условие прочности на смятие

$$\sigma_{cm} = \frac{F}{d_0 \cdot h_i} \leq [\sigma]_{cm} \quad (14)$$

где  $h_i$  – наименьшая толщина соединяемых деталей;  $[\sigma]_{cm}$  – меньшее из допускаемых напряжений смятия для материалов болта и деталей.

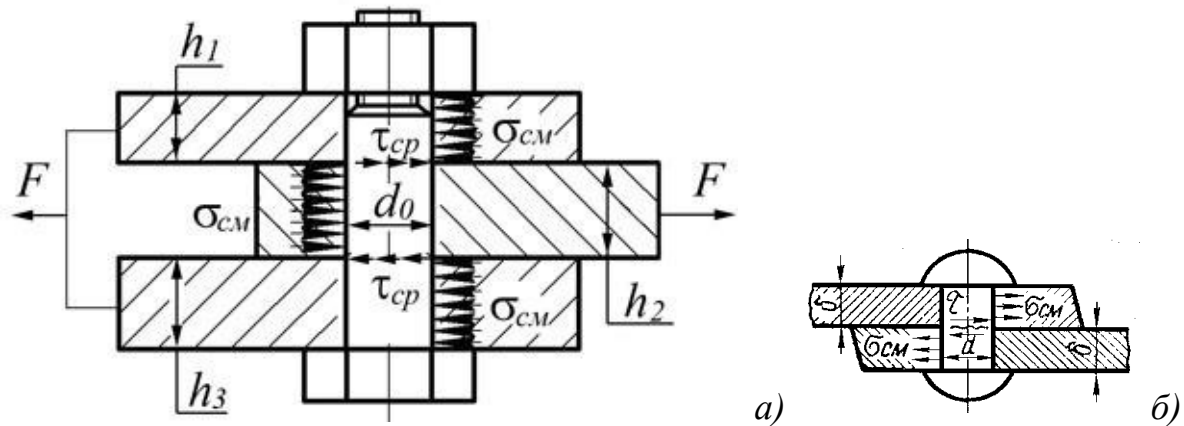


Рисунок 4 – Напряжения в болтовом соединении, работающем на сдвиг (болт поставлен без зазора) (а); и в соединении заклёпкой (б)

Сравнивая два варианта установки болта, следует отметить, что для первого варианта диаметр винта будет в несколько раз больше, т. к. усилие затяжки болта будет значительно превосходить сдвигающую силу. Например, при  $f = 0,2$ ;  $K_3 = 1,5$ ;  $i = 1$ ,  $z = 1$ :

$$F_3 = \frac{K_3 F}{fzi} \approx 7,5F \quad (15)$$

Однако соединение по второму варианту будет приблизительно в 10 раз дороже из-за дополнительной механической обработки отверстия и стыков соединяемых деталей. На практике чаще болты устанавливают с зазором. Соединение без зазора используют там, где необходимо уменьшить диаметр болта.

**Допускаемое напряжение** на растяжение при действии на резьбовое соединение постоянной нагрузки

$$[\sigma]_p = \frac{\sigma_T}{[S]}, \quad (16)$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести материала винта (таблица 1);

$[S]$  – коэффициент запаса прочности. При расчёте винтов с неконтролируемой затяжкой  $[S]$  принимают по таблице 2 в зависимости от материала и диаметра резьбы  $d$ .

В зависимости от механических характеристик материала стальные винты, болты и шпильки изготавливают 11 классов прочности, которые обозначают двумя числами, разделёнными точкой: 3.6, 4.6, 4.8, 5.8, 6.6, 6.8, 8.8, 9.8, 10.9, 12.9. Первое число, умноженное на 100, указывает минимальное значение временного сопротивления  $\sigma_b$ , Н/мм<sup>2</sup> материала резьбовой детали; произведение чисел, умноженное на 10, определяет предел текучести  $\sigma_t$  в Н/мм<sup>2</sup> (для класса прочности 3.6 значения приблизительные). (Таблица 1)

Размеры резьбы для примера и решения задач приведены в таблицах 3, 4. См. также предыдущее практическое занятие «Определение геометрических параметров резьбы» и справочную литературу к нему.

Таблица 1 – Классы прочности и марки сталей для винтов и гаек (выборка)

| Класс прочности |       | Временное сопротивление $\sigma_b$ , Н/мм <sup>2</sup> | Предел текучести $\sigma_t$ , Н/мм <sup>2</sup> | Марка стали |        |
|-----------------|-------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------|--------|
| Винт            | Гайка |                                                        |                                                 | винта       | гайки  |
| 4.6             | ≤4    | 400...550                                              | 240                                             | 20          | Ст3    |
| 5.6             | ≤5    | 500...700                                              | 300                                             | 30, 35      | 10     |
| 6.8             | ≤6    | 600...800                                              | 480                                             | 45, 40Г     | 20, 35 |
| 10.9            | ≤10   | 1000...1200                                            | 900                                             | 40X, 30XГСА | 16XCH  |

Таблица 2 – Значения коэффициента  $[S]$  запаса прочности при расчёте винтов с неконтролируемой затяжкой

| Сталь        | Значения коэффициента $[S]$ при $d$ , мм |         |           |
|--------------|------------------------------------------|---------|-----------|
|              | 8...16                                   | 16...30 | 30...60   |
| Углеродистая | 4...5                                    | 2,5...4 | 1,6...2,5 |
| Легированная | 5...6                                    | 3,3...5 | 3,0...3,3 |

Таблица 3 – Резьба метрическая (выборка) (размеры в мм)

| Номинальный диаметр резьбы $d$ | Резьба с крупным шагом |                       |                                                  |
|--------------------------------|------------------------|-----------------------|--------------------------------------------------|
|                                | Шаг $p$                | Средний диаметр $d_2$ | Внутренний диаметр $d_3$<br>винта по дну впадины |
| 10                             | 1,50                   | 9,026                 | 8,160                                            |
| 12                             | 1,75                   | 10,863                | 9,853                                            |
| 16                             | 2,00                   | 14,701                | 13,546                                           |
| 20                             | 2,50                   | 18,376                | 16,933                                           |
| 24                             | 3,00                   | 22,051                | 20,319                                           |

Таблица 4 – Резьба трапецеидальная (выборка) (размеры в мм)

| Номинальный<br>(наружный) диаметр<br>резьбы, $d$ | Шаг резьбы, $p$ | Средний диаметр, $d_2$ | Внутренний диаметр<br>резьбы винта, $d_3$ |
|--------------------------------------------------|-----------------|------------------------|-------------------------------------------|
| 40                                               | 3               | 38,5                   | 36,5                                      |
|                                                  | 6*              | 37,0                   | 33,0                                      |
|                                                  | 7**             | 36,5                   | 32,0                                      |
|                                                  | 10              | 35,0                   | 29,0                                      |
| 52                                               | 3               | 50,5                   | 48,5                                      |
|                                                  | 8**             | 48,0                   | 43,0                                      |
|                                                  | 12              | 46,0                   | 39,0                                      |

\* Шаги не следует применять при разработке новых конструкций.

\*\* Шаги, предпочтительные при разработке новых конструкций.

### Пример решения задачи

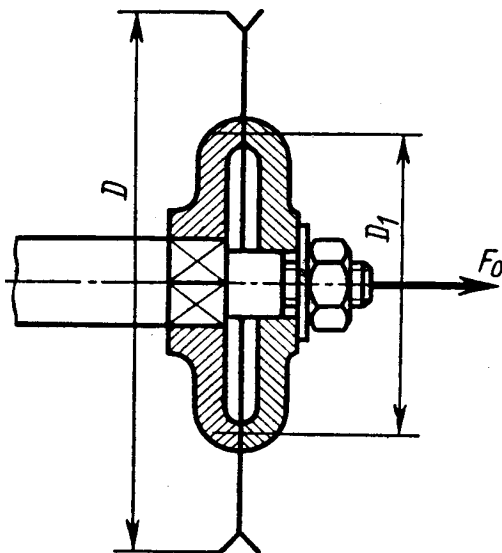


Рис. 2.1 Расчетная схема

Дисковая пила диаметром  $D = 600$  мм закреплена на валу между двумя шайбами со средним диаметром  $D_1 = 150$  мм, и удерживается от проворачивания силами трения, создаваемыми затяжкой гайки. Определить диаметр нарезной части вала. Материал вала сталь 35 ( $\sigma_T = 300$  МПа). Коэффициент трения между пилой и шайбами  $f = 0,12$ . Пила преодолевает сопротивление резанию  $F = 450$  Н.

Для надежной работы пилы необходимо, чтобы момент сил трения был больше момента сил резания не менее чем на 25%, т.е.

$$M_{\text{тр}} \geq 1,25 M_{\text{рез}} \quad \text{или} \quad F_{\text{тр}} \cdot D_1 \geq 1,25 F \cdot D.$$

Откуда сила трения между пилой и шайбами

$$F_{\text{тр}} \geq 1,25 F D / D_1 = 1,25 \cdot 450 \cdot 600 / 150 = 2250 \text{ Н.}$$

Тогда сила, с которой должна быть зажата пила

$$F_n = F_{\text{тр}} / f = 2250 / 0,12 = 18,7 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Допускаемое напряжение растяжения для материала вала

$$[\sigma_p] = \sigma_T / [s] = 300 / 3 = 100 \text{ МПа},$$

где  $[s] = 3$  – коэффициент запаса прочности.

Внутренний диаметр нарезной части вала

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{1,3 \cdot 4 \cdot F_n}{\pi \cdot [\sigma_p]}} = \sqrt{\frac{1,3 \cdot 4 \cdot 18,7 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 100}} = 17,7 \text{ мм}.$$

По ГОСТ 9150 - 81 принимаем метрическую резьбу М20 с внутренним диаметром  $d_1 = 17,65$  мм.

### Задания

**Задача 1** Дано: грузоподъёмность  $P$ , кН (в верхней строке табл. 5), материал крюка (в левом столбце табл. 5). Номер варианта находим внутри таблицы, а исходные данные – в соответствующем столбце и строке.

Определить расчётный диаметр резьбового соединения грузового крюка. Подобрать тип резьбы. Подобрать по ГОСТ стандартные размеры резьбы.

Принять коэффициент запаса прочности для углеродистых сталей  $[S]=1,7...2,2$ ; для легированных  $[S]= 2...3$ .

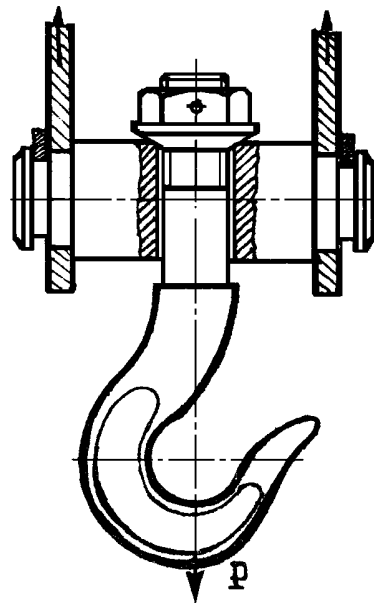


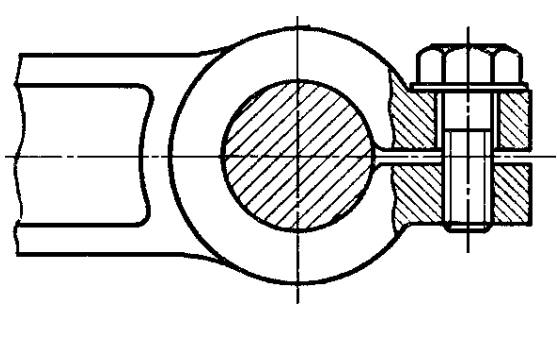
Таблица 5 – Варианты исходных данных к задаче 1

| Материал крюка                | $P$ , кН |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------------------------------|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|                               | 15       | 20 | 17 | 25 | 8  | 30 | 35 | 45 | 50 | 40 | 10 | 55 |
| Сталь 20, $\sigma_T=245$ МПа  | 1        | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| Сталь 20Г, $\sigma_T=274$ МПа | 13       | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |

**Задача 2** Дано: Требуемое усилие затяжки винта  $F_0$  в клеммовом соединении, класс прочности винта (таблица 6). Определить расчётный диаметр винта, подобрать стандартные размеры метрической резьбы.

*Номер своего варианта находим внутри таблицы, а исходные данные – в соответствующем столбце и строке.*

Таблица 6 – Варианты исходных данных к задаче 2

|  | Требуемое усилие затяжки винта<br>$F_0$ , кН |     |    |    |    |    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|-----|----|----|----|----|----|
|                                                                                    | Класс<br>прочности                           | 2,5 | 5  | 10 | 15 | 20 | 30 |
| 4.6                                                                                |                                              | 1   | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| 5.6                                                                                |                                              | 7   | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 |
| 6.8                                                                                |                                              | 13  | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 10.9                                                                               |                                              | 19  | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |

### Вопросы к практическому занятию

1. Назовите основную причину возникновения напряжений кручения в теле болта.
2. От каких факторов зависит момент трения в резьбе и на торце гайки?
3. Перечислите основные геометрические характеристики резьбы.
4. Как учитывается напряжение кручения при расчете затянутого резьбового соединения?

### **Рекомендуемая литература по данной теме**

1. Дроздова, Н. А. Детали машин. Типовые соединения деталей и узлов машин : учебное пособие / Н. А. Дроздова, Т. Г. Калиновская, О. Н. Рябов. — Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2019. — 148 с. — ISBN 978-5-7638-3824-4. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/100009.html> (дата обращения: 09.05.2022). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
2. Федорова, М. А. Краткий курс по прикладной механике : учебное пособие : / М. А. Федорова, Е. П. Степанова, С. П. Андросов ; Омский государственный технический университет. — Омск : Омский государственный технический университет (ОмГТУ), 2018. — 152 с. : ил., табл., схем., граф. — Режим доступа: по подписке. — URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=682101> (дата обращения: 09.05.2022). — Библиогр.: с. 136. — ISBN 978-5-8149-2610-4. — Текст : электронный.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 17

## ВЫБОР ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ И СИЛОВОЙ РАСЧЁТ ПРИВОДНЫХ СТАНЦИЙ.

**Цель работы:** Изучение механического привода и его параметров.

### ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Двигатель вместе с передачами составляет *привод* (приводную станцию) машинного агрегата. Привод должен обеспечивать заданное движение исполнительного механизма (рабочей машины). При проектировании привода на этапе технического предложения составляется кинематическая схема привода.

Кинематическая схема – это конструкторский документ, на котором составные части изделия и связи между ними показаны в виде условных графических обозначений. Условные графические обозначения в схемах см. [1, 2] и рисунки 1, 2.

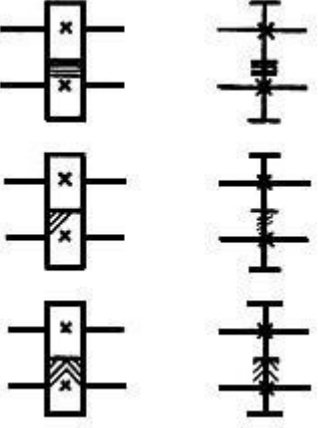
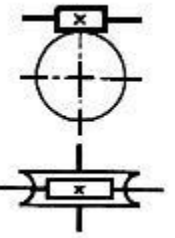
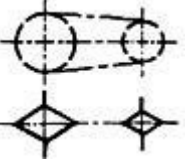
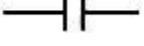
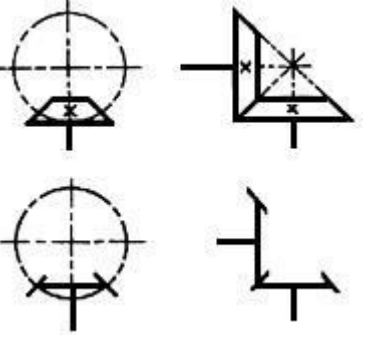
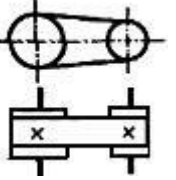
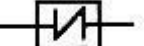
|                                                                                                              |                                                                                     |                                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <br>Вал, ось.               |   | <br>Передача червячная с цилиндрическим червяком |
| <br>Подшипник радиальный  | Передачи цилиндрические с прямыми, косыми и шевронными зубьями                      | <br>Передача цепная                             |
|  Муфта без уточнения типа |  | <br>Передача ременная                          |
| <br>Муфта упругая         | Передачи конические зубчатые                                                        |                                                                                                                                     |

Рисунок 1 – Некоторые условные обозначения на кинематических схемах:

Угловая скорость  $\omega$ , измеряемая в  $\text{рад/с} = \text{с}^{-1}$  и частота вращения  $n$ , измеряемая в оборотах в минуту ( $\text{мин}^{-1}$ ) характеризуют одно и то же – скорость вращения. Они связаны между собой формулой

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} \quad (1)$$

*Передаточное отношение* механической передачи - это отношение угловой скорости  $\omega$  (или частоты вращения  $n$ ) входного звена к угловой скорости (частоте вращения) выходного звена. Передаточное отношение, определяемое в направлении потока мощности от ведущего звена 1 к ведомому 2, имеет вид

$$u_{12} = \omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2. \quad (2)$$

При значении  $u_{12} > 1$  такие передачи называют *понижающими*, процесс преобразования частоты вращения – *редуцированием*. Агрегат (механизм, заключённый в корпус), содержащий передачи зацеплением с постоянным передаточным отношением, и предназначенный для уменьшения скорости вращения, называют *редуктором*. Такой же агрегат, но соединённый тихоходным валом с двигателем, называют *мультипликатором*. Передаточное отношение понижающей передачи равно *передаточному числу*, выражаемому через диаметры или числа зубьев колёс, тогда формула будет иметь вид

$$u = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (3)$$

Передаточное число в отличие от передаточного отношения всегда положительное и не может быть меньше единицы. Здесь рассматриваем только понижающие передачи, в которых передаточное отношение и передаточное число совпадают, поэтому обе эти характеристики механических передач будем обозначать символом  $u$ .

Привод может включать несколько передаточных механизмов (ступеней). При этом значение общего передаточного отношения  $u_{\text{общ}}$  определяется произведением передаточных отношений отдельных кинематических ступеней привода  $u_1, u_2, \dots, u_n$

$$u_{\text{общ}} = u_1 u_2 \dots u_n \quad (4)$$

Чтобы использовать готовые унифицированные корпуса редукторов, рекомендуется назначать передаточные числа *закрытых* передач из ряда стандартных значений (таблица 1). Передаточные числа *открытых* передач должны только находиться в рекомендуемых пределах. Для ременных и цепных передач рекомендуется принимать передаточные числа в пределах 1,5...4. При больших передаточных числах уменьшается угол обхвата гибким тяговым

органом ведущего шкива или звёздочки, уменьшается тяговая способность передачи.

Таблица 1 – Стандартные значения передаточных чисел (ГОСТ 2185-66)

| Тип передачи                   | Передаточные числа                                      |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Цилиндрическая<br>и коническая | 1,25; 1,6; 2,0; 2,5; 3,15; 4,0; 5,0; 6,3; 8,0 (1-й ряд) |
|                                | 1,4; 1,8; 2,24; 2,8; 3,55; 4,5; 5,6; 7,1 (2-й ряд)      |
| Червячная                      | 8; 10; 12,5; 16; 20; 25; 31,5; 40; 50 (1-й ряд)         |
|                                | 11,2; 14; 18; 22,4; 28; 35,5; 45; 56 (2-й ряд)          |

*Примечания.* 1-й ряд следует предпочитать 2-му.

Для конической передачи рекомендуются передаточные числа не более 4.

Для цилиндрического двухступенчатого редуктора с развёрнутой схемой или с раздвоенной схемой передаточное число быстроходной ступени

$u_B \approx 0,9^3 \sqrt{u_{ред}^2} \leq u_{max}$ , где  $u_{ред}$  – передаточное отношение редуктора;  $u_{max}=6,3$

– наибольшее допустимое передаточное число одной ступени. Передаточное

число тихоходной ступени

$$u_T = \frac{u_{ред}}{u_B} \leq u_{max}.$$

Если к ведущему валу передачи подвести мощность  $P_1$ , то с ведомого можно будет отобрать мощность  $P_2$ , которая несколько меньше затраченной  $P_1$  (следствие потерь на трение и др. сопротивления). Эти потери выражаются коэффициентом полезного действия (КПД)  $\eta$  (греческая буква «эта»)

$$\eta = P_2 / P_1. \quad (1.5)$$

Общий КПД многоступенчатого привода  $\eta_{общ}$  при последовательном соединении передач равен произведению коэффициентов полезного действия составляющих привод передач

$$\eta_{общ} = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n, \quad (1.6)$$

где  $n$  – общее число ступеней передачи.

Если потери энергии в подшипниках не учтены при определении коэффициентов полезного действия составляющих привод передач, то нужно умножить на КПД пары подшипников  $\eta_{пп}$  столько раз, сколько пар подшипников имеется в приводе. При наличии муфты в приводе, следует умножить на КПД муфты  $\eta_m$ .

Значения КПД отдельных передач приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Значения КПД механических передач (без учета потерь в подшипниках)

| Механические передачи и элементы привода | КПД         |             |
|------------------------------------------|-------------|-------------|
|                                          | Закрытая    | Открытая    |
| Зубчатая:                                |             |             |
| цилиндрическая                           | 0,96...0,97 | 0,93...0,95 |
| коническая                               | 0,95...0,97 | 0,92...0,94 |
| Червячная при передаточном числе:        |             |             |
| свыше 30                                 | 0,7...0,75  | -           |
| от 14 до 30                              | 0,8...0,85  | -           |
| от 8 до 14                               | 0,85...0,95 | -           |
| Ременная                                 | -           | 0,95...0,97 |
| Цепная                                   | 0,95...0,97 | 0,9...0,93  |
| К.п.д. пары подшипников                  | 0,99        |             |
| К.п.д. муфты                             | 0,98        |             |

При наличии электрической сети и стационарном положении машинного агрегата рационально использовать электрический двигатель. При длительном режиме работы и не очень больших перегрузках во время начала движения используют асинхронные двигатели переменного тока. Их преимущество – жёсткая характеристика (частота вращения мало зависит от нагрузки). Частота изменения переменного тока в статоре двигателя  $f=50$  Гц. Обозначим число пар полюсов ротора  $p=1, 2, 3 \dots$ . Тогда синхронная частота вращения вала двигателя (об/мин)

$$n_c = \frac{60f}{p} = \frac{3000}{p} \quad (1.9)$$

Электротехническая промышленность для общемашиностроительного применения выпускает асинхронные электродвигатели переменного тока типа АИР с синхронной частотой вращения  $n_c = 3000 \text{ мин}^{-1}$ ,  $n_c = 1500 \text{ мин}^{-1}$ ,  $n_c = 1000 \text{ мин}^{-1}$  и  $n_c = 750 \text{ мин}^{-1}$ . Мощность, марка и номинальная частота вращения  $n_{\text{ном}}$  (соответствующая номинальной нагрузке) некоторых из этих двигателей приведены в таблице 3.

Требуемую мощность электродвигателя  $P_{\text{тр}}$  можно определить по требуемой мощности на валу рабочей машины  $P_{\text{рм}}$

$$P_{\text{тр}} = \frac{P_{\text{рм}}}{\eta_{\text{общ}}} \quad (1.9)$$

При длительном режиме работы нужно выбирать двигатель с номинальной мощностью  $P_{\text{ном}}$ , большей, чем требуемая мощность электродвигателя  $P_{\text{тр}}$

$$P_{\text{ном}} \geq P_{\text{тр}} \quad (1.9)$$

С выбранной номинальной мощностью имеется несколько двигателей, отличающихся синхронной частотой вращения. Чем меньше синхронная частота вращения вала двигателя, тем он дороже и массивнее, т.к. имеет большее число пар полюсов.

Таблица 3 – Технические характеристики электродвигателей типа АИР...

| Мощность двигателя кВт | Тип двигателя | Частота вращения, мин <sup>-1</sup> | Тип двигателя | Частота вращения, мин <sup>-1</sup> | Тип двигателя | Частота вращения, мин <sup>-1</sup> |
|------------------------|---------------|-------------------------------------|---------------|-------------------------------------|---------------|-------------------------------------|
| 1,1                    | 71B2          | 2805                                | 80A4          | 1395                                | 80B6          | 920                                 |
| 1,5                    | 80A2          | 2850                                | 80B4          | 1395                                | 90L6          | 925                                 |
| 2,2                    | 80B2          | 2850                                | 90L4          | 1395                                | 100L6         | 945                                 |
| 3,0                    | 90L2          | 2850                                | 100S4         | 1410                                | 112MA6        | 950                                 |
| 4,0                    | 100S2         | 2850                                | 100L4         | 1410                                | 112MB6        | 950                                 |
| 5,5                    | 100L2         | 2850                                | 112M4         | 1432                                | 132S6         | 960                                 |

Вращающий момент на ведущем валу, Нм,

$$T_1 = P_1 / \omega_1 = 30P_1 / \pi n_1. \quad (1.7)$$

Вращающий момент на ведомом валу, Нм,

$$T_2 = T_1 \cdot u \cdot \eta. \quad (1.8)$$

Передаточное число привода реализуют применением в силовой цепи многоступенчатых однотипных передач, а также передач разных видов (рисунок 2).

Нагруженность деталей зависит от места установки передачи в силовой цепи и распределения общего передаточного числа между отдельными передачами. По мере удаления по силовому потоку от двигателя в понижающих передачах нагруженность деталей растет. Следовательно, в области высоких частот вращения (и соответственно малых вращающих моментов) целесообразно применять передачи с относительно низкой нагрузочной способностью (например, ременные), а в областях низких частот вращения (и соответственно больших вращающих моментов) целесообразно применять передачи с высокой нагрузочной способностью (например, зубчатые или цепные).

Так, в приводе на рисунке 2, состоящем из ремённой, зубчатой и цепной передач, вариант размещения «двигатель – ременная передача – зубчатая передача – цепная передача – исполнительный орган» предпочтительнее других вариантов.

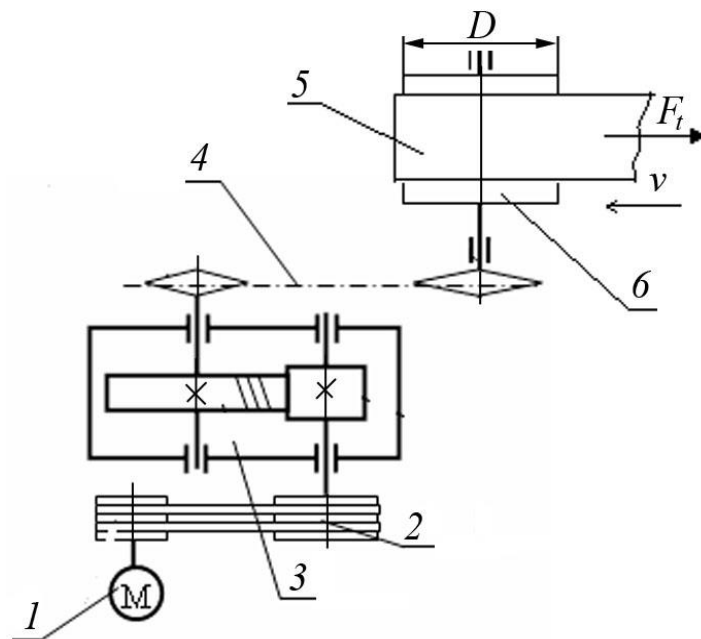


Рисунок 2 – Схема привода ленточного конвейера: 1 – электродвигатель; 2 – ременная передача; 3 – редуктор цилиндрический одноступенчатый; 4 – цепная передача; 5 – лента конвейера; 6 – барабан конвейера

### ПРИМЕР КИНЕМАТИЧЕСКОГО И СИЛОВОГО РАСЧЁТА ПРИВОДА

Выбрать электродвигатель, выполнить кинематический и силовой расчет приводной станции, показанной на рисунке 3

Исходные данные:

мощность на валу рабочей машины:  $P_{рм} = 1,8 \text{ кВт}$ ;

частота вращения вала рабочей машины:  $n_{рм} = 125 \text{ мин}^{-1}$ .

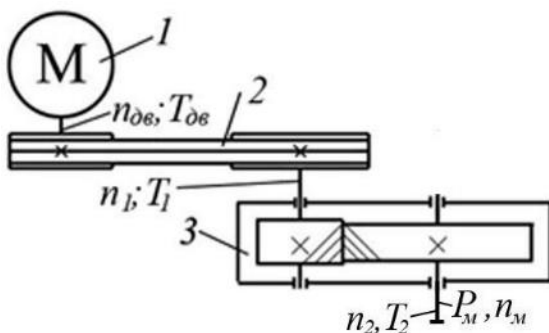


Рисунок 3 – Приводная станция:

1 – электродвигатель;

2 – клиноременная передача;

3 – редуктор

Общий КПД приводной станции:

$$\eta_0 = \eta_1 \eta_2 \eta_3^2 = 0,95 \cdot 0,97 \cdot 0,99^2 = 0,903,$$

где  $\eta_1 = 0,95$  – КПД ременной передачи;  $\eta_2 = 0,97$  – КПД цилиндрической передачи;  $\eta_3 = 0,99$  – КПД пары подшипников (таблица 2).

Требуемая мощность электродвигателя

$$P_{\text{ТР}} = \frac{P_{\text{РМ}}}{\eta_0} = \frac{1,8}{0,903} = 1,993 \text{ кВт}$$

По каталогу подбираем электродвигатель ближайшей большей мощности. По таблице 3 выбираем асинхронный короткозамкнутый электродвигатель номинальной мощностью 2,2 кВт.

Согласно этой таблице подобной мощностью обладают сразу три электродвигателя: АИР80В2, АИР90Л4 и АИР100Л6. Эти двигатели отличаются частотой вращения вала ротора ( $2850 \text{ мин}^{-1}$ ,  $1395 \text{ мин}^{-1}$ ,  $945 \text{ мин}^{-1}$  соответственно) и габаритными размерами. Предварительный выбор частоты вращения двигателя можно сделать, например, если предварительно принять конкретные желаемые значения передаточных чисел закрытой ( $u_2=5$ ) и открытой ( $u_1=2,5$ ) передач (из рекомендуемых), а затем умножить частоту вращения вала машины на эти передаточные числа ( $125 \cdot 5 \cdot 2,5 = 1562,5 \text{ мин}^{-1}$ ). Исходя из этого принимаем электродвигатель типа АИР90Л4 мощностью 2,2 кВт и частотой вращения ротора  $n_{\text{ДВ}} = 1395 \text{ мин}^{-1}$  (при необходимости тип двигателя может быть изменен).

Общее передаточное число приводной станции

$$u_0 = \frac{n_{\text{ДВ}}}{n_{\text{РМ}}} = \frac{1395}{125} = 11,16.$$

Произведем разбивку общего передаточного числа по ступеням приводной станции.

Это число может быть определено как произведение двух передаточных чисел:

$$u_0 = u_1 \cdot u_2,$$

где  $u_1$  – передаточное число ременной передачи;  $u_2$  – передаточное число зубчатой передачи.

В это уравнение входит две неизвестные величины, поэтому одним значением надо задаться. Поскольку для закрытых передач значения передаточных чисел стандартизованы, то по таблице 1 принимаем передаточное число закрытой цилиндрической передачи  $u_2 = 5$  (рекомендуется принимать в пределах 2...8). Тогда передаточное число ременной передачи

$$u_1 = u_0 / u_2 = 11,16 / 5 = 2,232,$$

что входит в рекомендуемый диапазон значений для ременных передач ( $u_{\text{рем}} = 1,5 \dots 4$ ).

Выполним кинематический расчет приводной станции. Для этого определим частоты вращения валов приводной станции:

вала электродвигателя:  $n_{\text{дв}} = 1395 \text{ мин}^{-1}$ ;

ведущего вала редуктора:  $n_1 = n_{\text{дв}} / u_1 = 1395 / 2,232 = 625 \text{ мин}^{-1}$ ;

ведомого вала редуктора:  $n_2 = n_1 / u_2 = 625 / 5 = 125 \text{ мин}^{-1}$ , что соответствует исходным данным  $n_{\text{PM}} = 125 \text{ мин}^{-1}$ .

Вращающие моменты на валах приводной станции:

на валу электродвигателя:

$$T_{\text{дв}} = \frac{30P}{\pi n_{\text{дв}}} = \frac{30 \cdot 1,993 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 1395} = 13,65 \text{ Нм};$$

на ведущем валу редуктора:

$$T_1 = T_{\text{дв}} \cdot u_1 \cdot \eta_1 = 13,65 \cdot 2,232 \cdot 0,95 = 28,95 \text{ Нм}; \text{ на}$$

ведомом валу редуктора:

$$T_2 = T_1 u_2 \eta_2 \eta^2 = 28,95 \cdot 5 \cdot 0,97 \cdot 0,99^2 = 137,6 \text{ Нм}.$$

Проверка:

$$T_2 = \frac{30P_{\text{PM}}}{\pi n_{\text{PM}}} = \frac{30 \cdot 1,8 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 125} = 137,6 \text{ Нм}$$

что соответствует полученному ранее значению.

## ЗАДАНИЯ

Выполнить кинематический и силовой расчет двухступенчатой приводной станции (схема изображена в таблице 5), по исходным данным, представленным в таблице 4, где:  $P_{рм}$  – мощность на валу рабочей машины;  $n_{рм}$  – частота вращения вала рабочей машины;

Для этого необходимо:

1. Определить общий КПД приводной станции.
2. Найти требуемую мощность на валу электродвигателя.
3. Подобрать стандартный электродвигатель.
4. Определить общее передаточное отношение приводной станции.
5. Произвести разбивку общего передаточного отношения по ступеням приводной станции.
6. Определить частоты вращения валов приводной станции.
7. Найти вращающие моменты на валах приводной станции с учетом КПД.
8. Выполнить проверочный расчет.

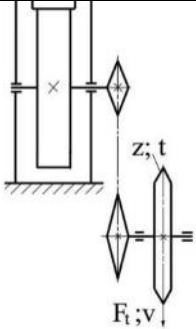
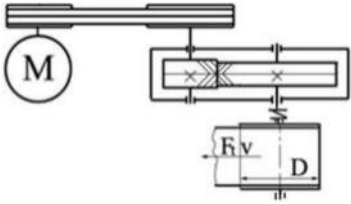
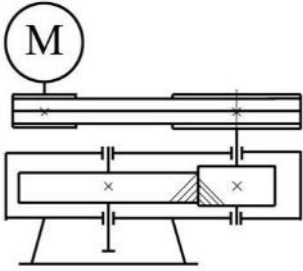
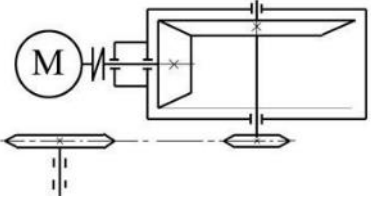
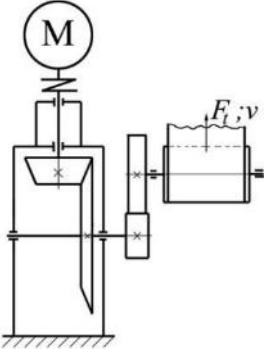
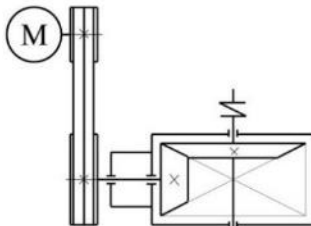
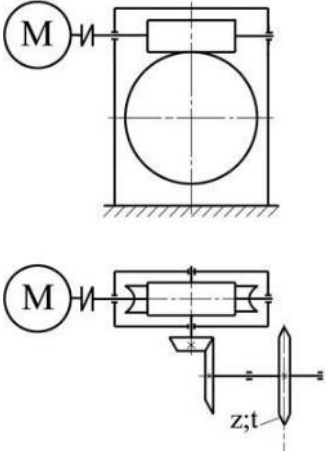
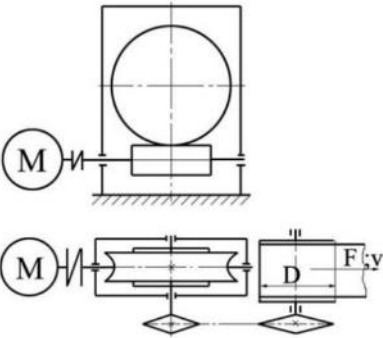
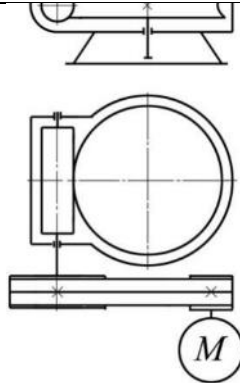
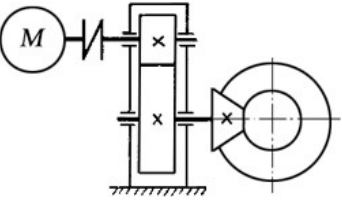
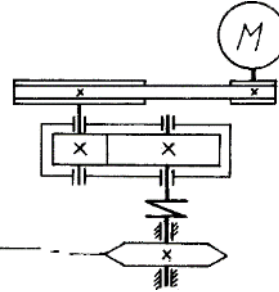
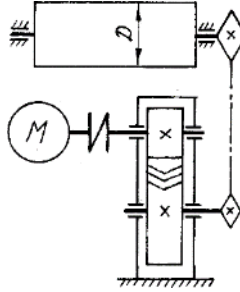
Таблица 4 – Исходные данные к расчету

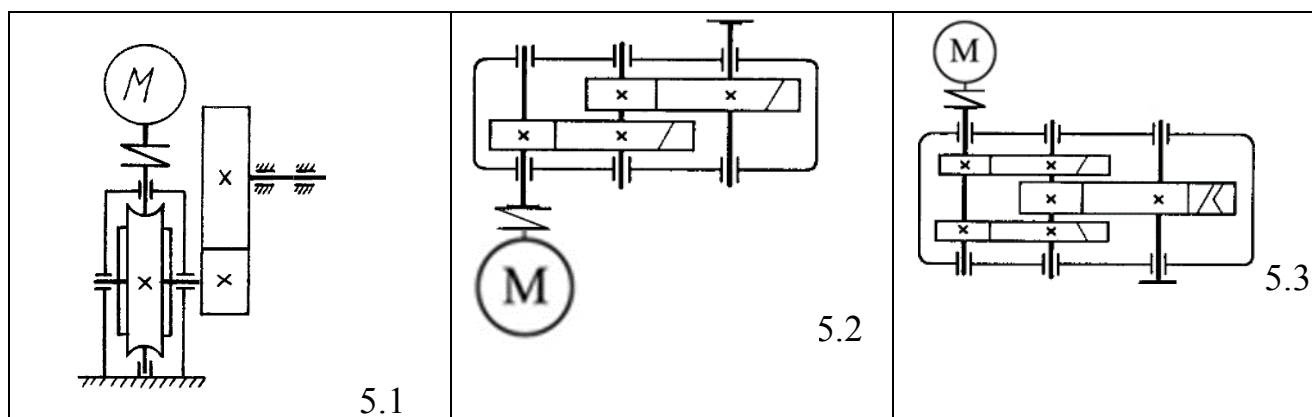
| Вариант* | № схемы | $P_{рм}$ , кВт | $n_{рм}$ , мин <sup>-1</sup> |
|----------|---------|----------------|------------------------------|
| 1        | 1.1     | 2,9            | 120                          |
| 2        | 2.1     | 3,4            | 118                          |
| 3        | 3.1     | 1,8            | 52,5                         |
| 4        | 1.2     | 3,2            | 106                          |
| 5        | 2.2     | 3,8            | 133,9                        |
| 6        | 3.2     | 2,35           | 36                           |
| 7        | 1.3     | 3,6            | 127                          |
| 8        | 2.3     | 3,4            | 108,6                        |
| 9        | 3.3     | 3,33           | 31                           |
| 10       | 1.1     | 3,4            | 107,6                        |
| 11       | 2.1     | 2,6            | 130                          |
| 12       | 3.1     | 1,65           | 30                           |
| 13       | 1.2     | 2,86           | 98                           |
| 14       | 2.2     | 2,95           | 112                          |
| 15       | 3.2     | 2,38           | 37                           |
| 16       | 1.3     | 2,65           | 125                          |
| 17       | 2.3     | 3,6            | 116                          |
| 18       | 3.3     | 2,4            | 86                           |
| 19       | 4.1     | 5              | 80                           |
| 20       | 4.2     | 3              | 90                           |
| 21       | 4.3     | 6              | 100                          |
| 22       | 5.1     | 3              | 30                           |
| 23       | 5.2     | 15             | 150                          |
| 24       | 5.3     | 20             | 100                          |
| 25       | 4.1     | 7              | 110                          |
| 26       | 4.2     | 2              | 96                           |
| 27       | 3.3     | 1,3            | 28                           |

|    |     |      |     |
|----|-----|------|-----|
| 28 | 1.1 | 2,91 | 128 |
| 29 | 2.1 | 2,68 | 115 |
| 30 | 3.1 | 3,25 | 38  |
| 31 | 1.2 | 4    | 135 |
| 32 | 2.2 | 3,3  | 180 |
| 33 | 3.2 | 0,8  | 40  |
| 34 | 1.3 | 4,6  | 170 |
| 35 | 2.3 | 2,7  | 192 |
| 36 | 3.3 | 1,1  | 50  |
| 37 | 1.1 | 5,2  | 122 |
| 38 | 2.1 | 3    | 200 |
| 39 | 3.1 | 1,4  | 42  |
| 40 | 1.2 | 4,2  | 140 |

\*Вариант подбирается по номеру студента в списке группы.

Таблица 5 – Схемы приводных станций

|                                                                                                |                                                                                                |                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <p>1.1</p>   |  <p>1.2</p>   |  <p>1.3</p>   |
|  <p>2.1</p>   |  <p>2.2</p>  |  <p>2.3</p>   |
|  <p>3.1</p> |  <p>3.2</p> |  <p>3.3</p> |
|  <p>4.1</p> |  <p>4.2</p> |  <p>4.3</p> |



## Литература

1. ГОСТ 2.770-68 Единая система конструкторской документации (ЕСКД). Обозначения условные графические в схемах. Элементы кинематики (с Изменением N 1)  
<http://docs.cntd.ru/document/1200007023>
2. Шейнблит А.Е. Курсовое проектирование деталей машин. – М.: Высшая школа, 1991. – 432с.
3. Проектирование механических передач / С.А. Чернавский, Г.А. Снесарев, Б.А. Козинцев и др. – М.: Машиностроение, 1984. – 560с.
4. Выбор электродвигателя. Кинематический и силовой расчёт привода. Методические указания к выполнению курсовых проектов по ДМ. Составитель Терещенко В.Г. Ставрополь 2002.
5. Федорова, М. А. Краткий курс по прикладной механике : учебное пособие : / М. А. Федорова, Е. П. Степанова, С. П. Андросов ; Омский государственный технический университет. – Омск : Омский государственный технический университет (ОмГТУ), 2018. – 152 с. : ил., табл., схем., граф. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=682101> (дата обращения: 09.05.2022). – Библиогр.: с. 136. – ISBN 978-5-8149-2610-4. – Текст : электронный.

## ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 18

### РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ ВАЛОВ РЕДУКТОРНЫХ МЕХАНИЗМОВ

**Цель работы:** Изучение предварительного расчёта вала и его конструктивных элементов.

#### Теоретическая часть

Проектный расчет валов выполняется по напряжениям кручения (как при чистом кручении), т.е. при этом не учитывают напряжения изгиба, концентрации напряжений и переменность напряжений во времени (циклы напряжений). Поэтому для компенсации приближенности этого метода расчета допускаемые напряжения на кручение применяют заниженными:  $[\tau]_к = 10 \dots 20 \text{ Н/мм}^2$ . При этом меньшие значения  $[\tau]_к$  – для быстроходных и промежуточных валов, большие  $[\tau]_к$  – для тихоходных.

Редукторный вал представляет собой ступенчатое цилиндрическое тело, количество и размеры ступеней которого зависят от количества и размеров установленных на вал деталей (см. рисунки 1-4). Проектный расчет ставит целью определить ориентировочно диаметр каждой ступени вала.

Диаметры выходных концов валов определяют по формуле:

$$d_1 \geq \sqrt[3]{16T \cdot 10^3 / \pi[\tau]}, \text{ мм} \quad (1)$$

где  $T$  – крутящий момент, равный вращающему моменту на данном валу,  $\text{Н}\cdot\text{м}$

По этой же формуле находят диаметры промежуточных валов редукторов в опасном сечении (в месте посадки зубчатого колеса).

Полученное значение округляют до ближайшего из ряда стандартных диаметров: 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 24; 25; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 52; 55; 60; 63; 65; 70; 75; 80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 120; 125; 130; 140; 150; 160, мм.

Диаметр  $d_1$  выходного конца быстроходного вала, соединенного с двигателем через муфту, должен удовлетворять соотношению

$$d_1 = (0,8 \dots 1,2) d_{1(дв)}, \quad (2)$$

где  $d_{1(дв)}$  – диаметр выходного конца вала ротора двигателя.

Рекомендуется на этом этапе произвести выбор соединительной муфты.

Диаметр вала на следующем участке (под уплотнением, подшипником),  $d_2$  отличается от предыдущего на величину удвоенной высоты буртика  $2t$  (таблица 1)

$$d_2 = d_1 + 2t \quad (3)$$

В случае установки на этом участке подшипника, значение  $d_2=d_4$  принять кратным 5.

Для тихоходного (выходного или промежуточного) вала (рисунок 4)

рекомендуется принять диаметр вала под зубчатым или червячным колесом  $d_3 \geq d_2$

$$d_3 \approx d_2 + (2 \dots 4), \text{ мм} \quad (4)$$

Диаметр свободного участка вала (буртика, заплечика)

$$d_5 = d_2 + 3,2r, \quad (5)$$

Таблица 1 – Значения высоты буртика  $t$ , ориентировочные величины фаски ступицы  $f$  и координаты фаски подшипника  $r$  в зависимости от диаметра ступени  $d$

В миллиметрах

| $d$ | 17...24 | 25...30 | 32...40 | 42...50 | 52...60 | 62...70 | 71...85 |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $t$ | 2       | 2,2     | 2,5     | 2,8     | 3       | 3,3     | 3,5     |
| $r$ | 1,6     | 2       | 2,5     | 3       | 3       | 3,5     | 3,5     |
| $f$ | 1       | 1       | 1,2     | 1,6     | 2       | 2       | 2,5     |

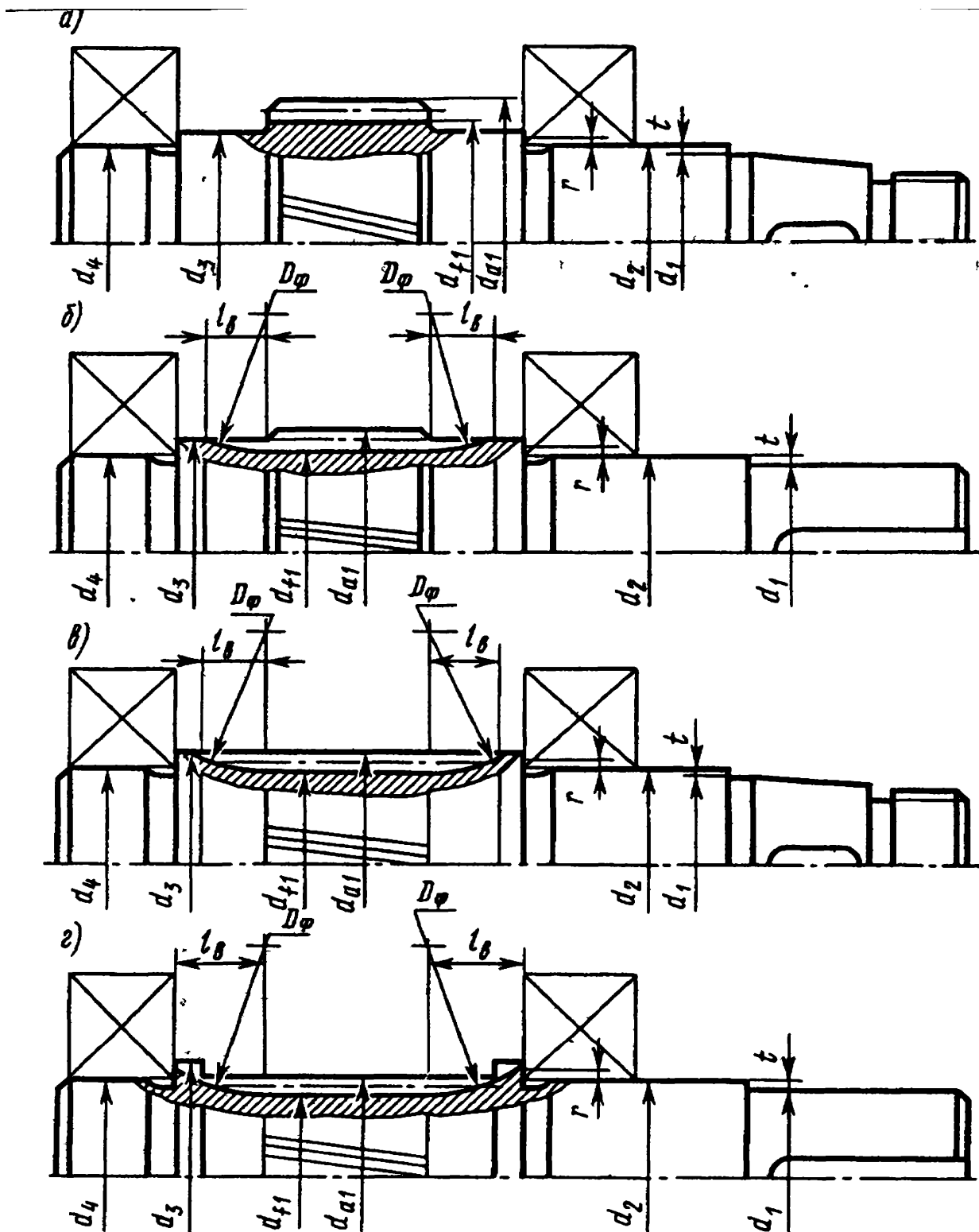


Рисунок 1 – Конструкции вала-шестерни цилиндрической:

а)  $d_{\phi 1} > d_3$ ; б)  $d_{\phi 1} < d_3$ ; в)  $d_{\phi 1} < d_3$ ;  $d_{a1} = d_3$ ; г)  $d_{a1} < d_3$



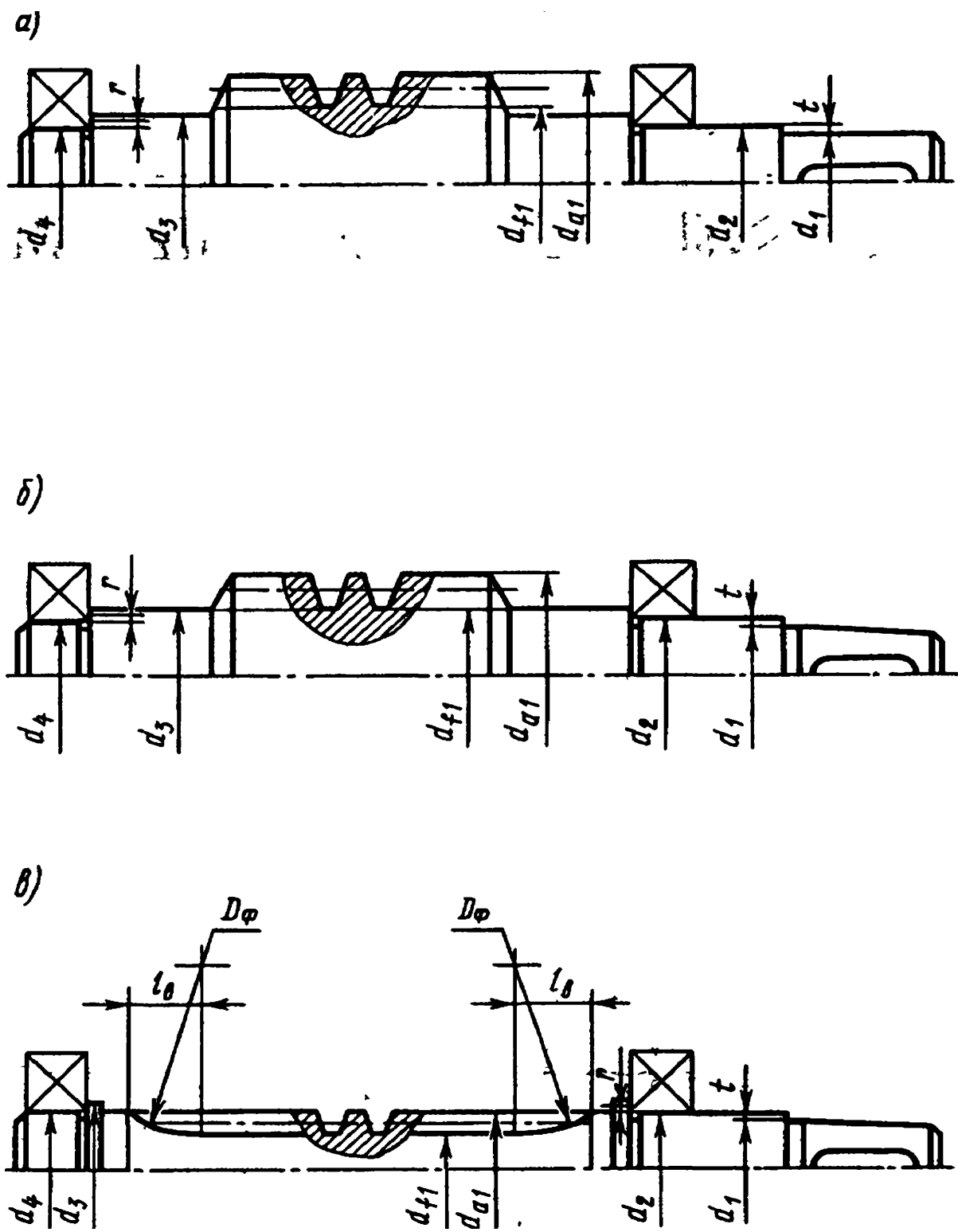


Рисунок 3 – Конструкции червячного вала:

а)  $d_{f1} > d_3$ ; б)  $d_{f1} = d_3$ ; в)  $d_{a1} < d_3$ ;  $d_{f1} < d_3$

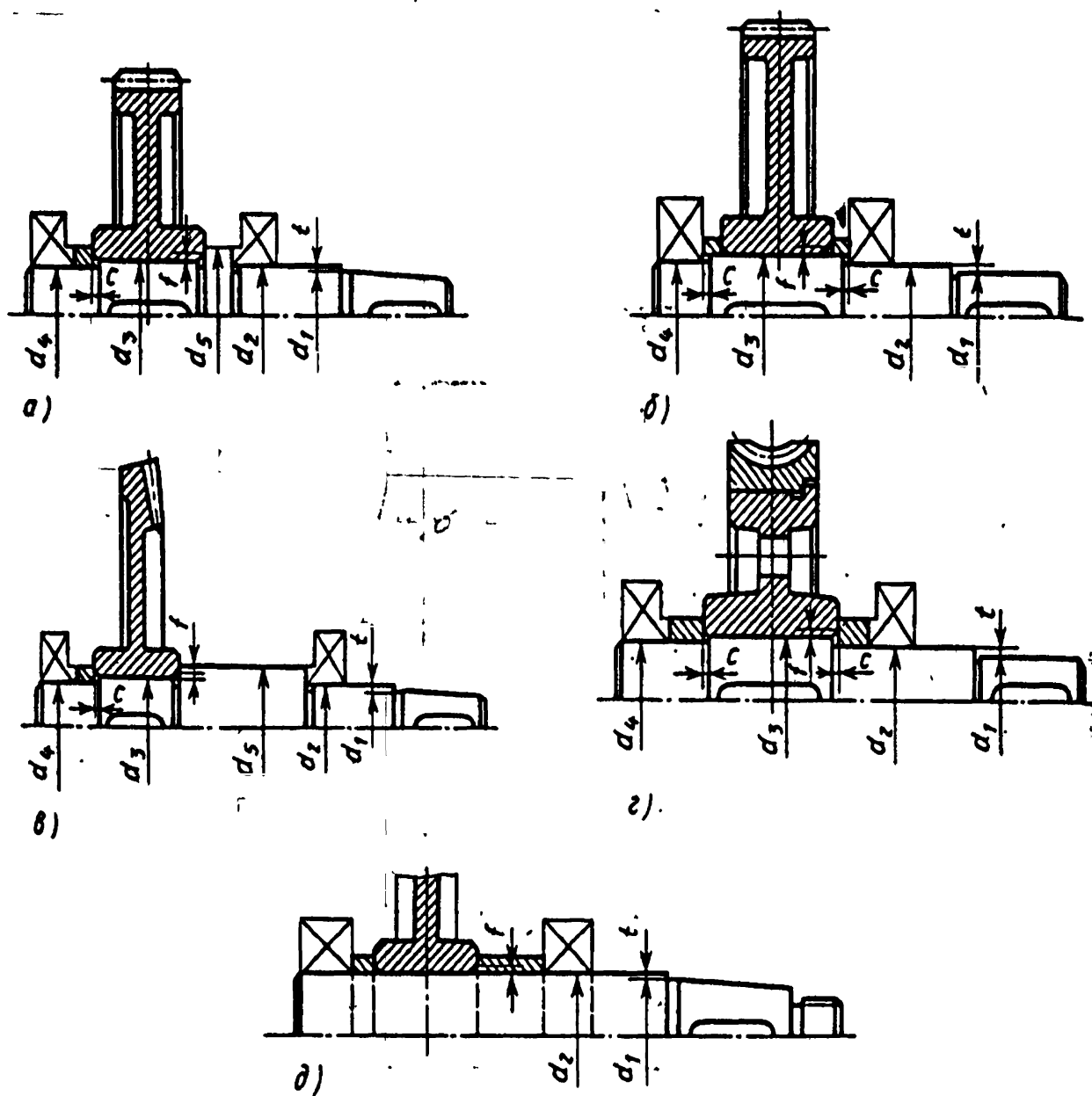


Рисунок 4 – Конструкции тихоходного вала:

а), в) – с 5-й ступенью (распорная втулка – на 4-й ступени); б) – без 5-й ступени (распорные втулки – на 3-й ступени); г) – без 5-й ступени (распорные втулки – на 2-й и 4-й ступенях); д) – бесступенчатый (гладкий) вал

### Задача и её решение

Произвести проектный расчёт быстроходного вала-шестерни цилиндрической по заданному вращающему моменту.

## Решение

Приняв допускаемое напряжение кручения в предварительном расчёте  $[\tau]_к = 10Н/мм^2$ , воспользуемся формулой (1) для определения требуемого диаметра вала. Полученное значение округляем до стандартной величины, уточняем по посадочному размеру муфты в случае установки её на вал. Диаметры остальных участков вала рассчитываем последовательно по формулам (3-5). Длины отдельных участков вала и его общую длину получим при выполнении компоновочного чертежа, в зависимости от длин расположенных на валу деталей и конструкции корпуса.

## Задачи

1. Выполнить проектный расчёт быстроходного вала при  $T=125 Н\cdot м$ .
2. Выполнить проектный расчёт тихоходного вала при  $T=625 Н\cdot м$ .

## Вопросы к практическому занятию

1. По какой формуле выполняют проектный расчёт выходного конца вала?
2. Каким образом определяют длину вала и его отдельных участков?

## Рекомендуемая литература по данной теме

1. Федорова, М. А. Краткий курс по прикладной механике : учебное пособие : / М. А. Федорова, Е. П. Степанова, С. П. Андросов ; Омский государственный технический университет. – Омск : Омский государственный технический университет (ОмГТУ), 2018. – 152 с. : ил., табл., схем., граф. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=682101> (дата обращения: 09.05.2022). – Библиогр.: с. 136. – ISBN 978-5-8149-2610-4. – Текст : электронный.

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ  
ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования**

**«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

**к самостоятельной работе по дисциплине**

**«Теоретическая и прикладная механика»**

**для студентов направления подготовки 18.03.01 Химическая технология  
профиль Основной органический и нефтехимический синтез**

Ставрополь

2026

Данные методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «Прикладная механика» предназначены для бакалавров направления 18.03.01 «Химическая технология» всех форм обучения.

В методических указаниях определена цель самостоятельной работы и приведен теоретический материал, необходимый студентам для выполнения поставленных перед ними задач. Приведен список необходимой литературы.

## Содержание

|                                                                | Стр. |
|----------------------------------------------------------------|------|
| 1. Цель и задачи самостоятельной работы по освоения дисциплины | 4    |
| 2. Подготовка к практическим занятиям                          | 5    |
| 3. Самостоятельное изучение теоретических вопросов             | 7    |
| 4. Научно-исследовательская работа студентов                   | 8    |
| Рекомендуемая литература                                       | 9    |

## **1. Цель и задачи самостоятельной работы по освоению дисциплины.**

Самостоятельная работа – очень важная, неотъемлемая часть обучения. Целью самостоятельной работы по «Прикладной механике» в комплексе с аудиторными занятиями является формирование компетенции будущего бакалавра по направлению 18.03.01 Химическая технология.

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов:

Опираясь на знания основных понятий и аксиом статики, условий равновесия твёрдого тела, основных видов деформации твёрдого тела, механических характеристик материалов, основ механики упругой среды, критериев выбора механических передач и соединений, способен применять основные положения теоретической механики, сопротивления материалов, структуры механизмов и машин, деталей машин, метода анализа размерностей в процессе проектирования и эксплуатации элементов оборудования

химической промышленности, умение научно представлять результаты решения, в том числе с применением цифровых технологий

Задачами освоения дисциплины являются: привитие обучаемому навыков использования законов и методов теоретической механики и сопротивления материалов. Привитие способностей выполнять работы в области научно-технической деятельности по основам конструирования.

## **2. Подготовка к практическим занятиям**

На практических занятиях по прикладной механике студенты изучают примеры выполнения заданий и выполняют задания самостоятельно, изучают образцы, выполняют расчёты, графические построения, эскизы образцов и деталей. Все задания предполагают выполнение графических изображений и вычислений.

Поэтому на каждом практическом занятии студент должен иметь тетрадь, ручку, карандаш, ластик, два треугольника (с углами 30, 60, и 90 градусов, и с углами 45, 45 и 90 градусов) или треугольник и линейку, циркуль, транспортир, инженерный калькулятор.

Перед практическим занятием (накануне) студент должен внимательно прочесть записи последних текущих лекций по прикладной механике. С теоретическим материалом по данному практическому занятию можно также предварительно ознакомиться (в сжатом виде) по методическим указаниям к практическим занятиям по дисциплине «Прикладная механика» для бакалавров направления 18.03.01 «Химическая технология».

Свою готовность к выполнению практического занятия студент проверяет самостоятельно, мысленно отвечая на вопросы для защиты работы (вопросы к практическому занятию).

Тем студентам, кому трудно даются решение задач и понимание различных разделов дисциплины «Прикладная механика», рекомендуется вернуться к ранее пройденному и вновь прочитать соответствующие места в

своём школьном учебнике физики, геометрии или алгебры, или университетские лекции по физике и высшей математике.

Для понимания раздела статики необходимо знать следующие сведения. Из математики – теорему синусов, теорему косинусов, площадь треугольника, сложение векторов, векторное произведение двух векторов. Из физики – законы Ньютона. Рекомендуется повторить эти темы.

Т.к. время, отведённое на самостоятельную работу сопоставимо со временем аудиторных занятий, значительную часть расчётов, графических построений, оформления практического занятия студент выполняет самостоятельно. Как правило, выполненную полностью и оформленную работу студент должен предоставить для проверки преподавателем на следующем занятии. Для защиты проделанной работы студент должен уметь объяснить смысл и логику своих записей, выполнить небольшое задание, аналогичное части проделанной работы, ответить на вопросы к занятию.

### **3. Самостоятельное изучение теоретических вопросов**

История развития механики

С историческими этапами развития механики рекомендуется ознакомиться по литературе [1] с.7-8, [8] с. 9-13; [9] с.4-6.

Теоремы об эквивалентности и о сложении пар

[9] с.38-40.

Равновесие плоской системы параллельных сил

[9] с.61-62.

Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальной точки. Принцип Даламбера для материальной точки. Количество движения и кинетическая энергия точки. Импульс силы. Работа силы, мощность

[1] с.186-210, [8] с. 184-204.

Центр тяжести сечения. Статические моменты. Вывод формул моментов инерции, моментов сопротивления и радиусов инерции простейших фигур (прямоугольник, квадрат, треугольник, круг, кольцо, полукруг).

[12] с. 108-115.

Расчёт бруса круглого поперечного сечения в общем случае его нагружения.

Устойчивость сжатых стержней. Формула Эйлера, формула Ясинского.

[12] с. 411-420.

Классификация изделий. Требования, предъявляемые к новым машинам.  
Стадии разработки конструкторской документации.  
см. курс лекций с. 153-156.

Контактное взаимодействие двух произвольных выступов. Циклы напряжений. Основные понятия об усталости металлов. Основные факторы, влияющие на величину предела выносливости (концентрация напряжений, влияние абсолютных размеров детали, влияние качества поверхности детали).  
[16] с. 23-28.

Подшипники скольжения. Конструкции, материалы, преимущества и недостатки. Режимы работы подшипников скольжения. Способы организации режима жидкостного трения.  
[16] с. 283-289.

Назначение и классификация упругих элементов, материалы, характеристики. Муфты: назначение, классификация и порядок выбора.  
[16] с. 326-333..

#### **4. Научно-исследовательская работа студентов**

На кафедре ТЭА имеется научная школа, выполняются теоретические и экспериментальные исследования, направленные на повышение надёжности и долговечности машин, аппаратов и другого оборудования. Разрабатываются методы испытания материалов, приборы. Исследуется метод анализа размерностей и пути его усовершенствования. В этой работе традиционно участвуют и студенты. См. <http://www.ncstu.ru/faculties/femt/kpmiok>. Тем, кто будет изучать представленный материал, рекомендуется принять участие в научно-исследовательской работе кафедры, выступить с докладами на студенческих и других научных конференциях. Такие научные исследования

могут иметь продолжение в дальнейшей учёбе и профессиональной деятельности.

Получать информацию и общаться по поводу научно-исследовательской работы студентов можно в группе в социальной сети ВКонтакте.

<https://vk.com/club129565092> – Студенческое научное общество «Механика».

### **Рекомендуемая литература.**

#### ***Основная литература:***

1. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики./ С.М. Тарг – М.: Высшая школа, 2010. – 416 с.
2. Старовойтов, Э. И. Сопротивление материалов : учебник для вузов / Э. И. Старовойтов. - Москва : Физматлит, 2008. - 382 с. : ил., табл. - (Механика). - Библиогр.: с. 371. - Указатели: с. 372-378. - ISBN 978-5-9221-0883-6
3. Иванов, М. Н. Детали машин : учебник для студ. высших техн. учеб. зав. / М. Н. Иванов, В. А. Финогенов . - 11-е изд., перераб. - Москва : Высшая школа, 2007. - 407, [1] с. : ил., табл. - (Для высших учебных заведений. Техника и технологии). - Библ

#### ***Дополнительная литература:***

4. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: статика, кинематика, динамика. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.
5. Мещерский И.В., Пальмов В.А., Меркин Д.Р. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 448 с.
6. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике/ Под ред. А.А.Яблонского. – М.: КноРус, 2010. – 392 с.
7. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 2-х т. Т. 1. Статика и кинематика : учеб. пособие. – СПб.: Лань, 2010. – 672 с.: ил.
8. Гернет М.М. Курс теоретической механики: Учебник для вузов. – 4-е изд., перераб. и сокр. – М.: Высш. школа, 1981. – 304 с.
9. Яблонский, А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч. 1. Статика. Кинематика: Учебник для техн. вузов. – 6-е изд. испр. – М.: Высш. шк., 1984. – 343 с.
10. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики. Ч. II. Динамика: Учебник для техн. вузов. – 6-е изд. испр. – М.: Высш. шк., 1984. – 423 с.
11. Сопротивление материалов : учебник / Г. Д. Межецкий, Г. Г. Загребин, Н. Н. Решетник, А. А. Слепов . - М. : Дашков и К`, 2008. - 416 с. : ил. - Прил.: с. 397-408. - Библиогр.: с. 409. - ISBN 978-5-91131-545-0

12. Александров, А. В. Сопротивление материалов : учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин ; под ред. А. В. Александрова . - 2-е изд., испр. - М. : Высшая школа, 2000. - 560 с. - Прил.: с. 550-556. - ISBN 5-06-003732-0
13. Саргсян, Акоп Егишович. Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности : Основы теории с примерами расчетов : учебник для студентов вузов, обучающихся по техн. спец. / А.Е. Саргсян . - 2-е изд., испр. и доп. - М. : Высшая школа, 2000.
14. Детали машин и основы конструирования : учебник / [Г. И. Рощин, Е. А. Самойлов, Н. А. Алексеева и др.] ; под ред. Г. И. Рощина, Е. А. Самойлова . - М. : Дрофа, 2006. - 416 с. : ил. - (Высшее образование). - Библиогр.: с. 401-402
15. Детали машин / [Л. А. Андриенко, Б. А. Байков, И. К. Ганулич и др. ] : учеб. пособие для вузов ; под ред. О. А. Ряховского . - М. : МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002. - 544 с. - (Механика в техническом университете). - Библиогр.: с. 538-539. - ISBN 5-70
16. Иосилевич, Г.Б. Детали машин: Учебник для студентов машиностроит. спец. вузов/ Г.Б. Иосилевич. – М.: Машиностроение, 1988. -368 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. «Прикладная механика» - электронный учебный курс для студентов очной и заочной форм обучения. – Режим доступа: <http://www.prikladmeh.ru/>
2. «Прикладная механика» - контрольные задания. Учебное пособие для заочников. Теоретическая механика и сопротивление материалов. Изложены теоретические вопросы, приведены контрольные задания с примерами решения задач. – Режим доступа: <http://www.kstu.ru/servlet/contentblob?id=76413>
3. <https://docs.google.com/spreadsheets/> - создать электронную таблицу на Googl.
4. <https://support.google.com/meet/answer/10071448?hl=ru> Как пользоваться доской в Google Meet
5. <http://mexcaf.narod.ru/index.html> Кафедра теоретической и прикладной механики МГТУ <http://mexcaf.narod.ru/archieve.html> примеры расчётов в Excel и анимаций механизмов
6. [https://istina.msu.ru/download/23170188/1fHZno:VS8wYE\\_QWTntMwyH8Pmr2oyTtE4/](https://istina.msu.ru/download/23170188/1fHZno:VS8wYE_QWTntMwyH8Pmr2oyTtE4/) Майер Р. В. Решение физических задач в электронных таблицах Excel