

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания
по выполнению практических работ
по дисциплине «Дополнительный курс по
математике» для студентов направления
подготовки 18.03.01 Химическая технология
Профиль: Химический инжиниринг и цифровые
технологии

Ставрополь
2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Основные элементарные функции, их свойства и графики.
2. Предел функции. Основные теоремы о пределах
3. Замечательные пределы. Бесконечно малые, бесконечно большие и неограниченные функции
4. Непрерывные функции и их свойства. Точки разрыва и их классификация
5. Понятие производной. Правила дифференцирования. Дифференцирование сложной функции
6. Итоговое занятие по темам "Функции. Пределы. Непрерывность"
7. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Функции заданные неявно и параметрически и их дифференцирование
8. Дифференциал функции, применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков
9. Приложения производной: уравнение касательной и нормали к плоской кривой, правила Лопиталя, формула Тейлора
10. Применение производной к исследованию функций. Построение графиков функций
11. Итоговое занятие по теме "Производная и её приложения"

2. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

12. Действия над матрицами. Вычисление определителей
13. Ранг матрицы и методы его нахождения. Методы нахождения обратной матрицы
14. Системы линейных уравнений. Методы решения.
15. Итоговое занятие по теме "Системы линейных уравнений и их приложения".

3. ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

16. Множество натуральных чисел, аксиомы Пеано, метод математической индукции.
17. Комплексные числа, алгебраическая форма записи

18. Комплексные числа, тригонометрическая и показательная форма записи.

4. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

19. Прямая линия на плоскости
20. Канонические уравнения линий второго порядка
21. Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду
22. Плоскость и прямая в пространстве
23. Поверхности второго порядка

5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

24. Первообразная функция, неопределенный интеграл и его свойства. Методы интегрирования в неопределенном интеграле.
25. Интегрирование рациональных функций
26. Интегрирование иррациональных функций.
27. Интегрирование трансцендентных функций
28. Понятие определенного интеграла. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле
29. Приложения определенного интеграла
30. Приложения определенного интеграла
31. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования, интегралы от неограниченных функций

6. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

32. Числовые ряды. Признаки сходимости знакоположительных рядов.
33. Знакопередающие ряды .Признак Лейбница.
34. Степенные ряды и область их сходимости.
35. Приложения степенных рядов в приближенных вычислениях.
36. Ряды Фурье.
37. Ряды Фурье для четных и нечетных периодических функций

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

38. Дифференцирование функции нескольких переменных. Частные производные и дифференциалы первого и более высоких порядков.
39. Экстремум функции двух переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума.
40. Условный экстремум.

41. Итоговое занятие по темам "Ряды. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных"

8. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

42. Двойной интеграл: определение, свойства, вычисление.
43. Двойной интеграл: приложения.
44. Тройной интеграл: определения, свойства, вычисление.
45. Тройной интеграл: приложения.
46. Криволинейные интегралы по длине дуги и по координатам, их вычисление и приложения.
47. Поверхностные интегралы.

9. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

48. Скалярные и векторные поля.
49. Интегральные формулы анализа.
50. Итоговое занятие по темам "Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Элементы теории поля"

10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

51. Дифференциальные уравнения, основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
52. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка
53. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка
54. Дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков, случаи понижения порядка.

55. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка.

56. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка.

57. Итоговое занятие по теме "Дифференциальные уравнения."

11. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

58. Классическое, геометрическое и статистическое определения вероятности. Применение формул комбинаторики к вычислению вероятностей. Алгебра событий.
59. Формулы полной вероятности и Байеса. Схема Бернулли. Формула Бернулли.

12. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

60. Дискретные случайные величины. Числовые характеристики дискретной случайной величины.
61. Законы распределения дискретных величин.
62. Непрерывные случайные величины. Числовые характеристики.
63. Законы распределения непрерывных случайных величин

13. ОСНОВЫ ВЫБОРОЧНОГО МЕТОДА

64. Генеральная и выборочная совокупности, их характеристики.
65. Метод сумм и метод произведений вычисления выборочных средней и дисперсии.

- 66. Построение нормальной кривой по опытным данным.
- 67. Итоговое занятие по темам 11-13.

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения данной дисциплины является освоение студентами основ математического аппарата, необходимого для приобретения ими соответствующих компетенций (УК-1) в формировании способности использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности.

Достижение этой цели предполагает

формирование математической культуры студентов: умения логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения практических задач;

понимание и восприятие основных понятий математики;

освоение основ современного математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач, связанных с применением математических методов в неорганической химии, органической и физической химии, оптике, атомной физике, микробиологии, вирусологии и других дисциплинах естественнонаучного содержания;

создание условий для развития профессионального творчества и опыта самостоятельной деятельности по усвоению содержания математического образования.

К числу задач освоения курса можно отнести

формирование минимума фундаментальных математических знаний в области линейной алгебры и аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления, обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, теории разложения функций в ряд;

применение основных понятий, идей и методов фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач;

применение численных методов решения базовых математических задач в практической деятельности;

умение находить, анализировать и контекстно обрабатывать научно-техническую информацию.

В результате изучения дисциплины «Математика» студент должен

Знать:

основные понятия и результаты по алгебре: теория матриц, системы линейных уравнений;

основные понятия аналитической геометрии, определения и свойства геометрических объектов, их уравнения, формулировки утверждений, возможные сферы их приложений;

основные понятия, определения и свойства объектов математического анализа: функция, предел, непрерывность функции, производная функции, первообразная функция и неопределенный интеграл, определенный интеграл, двойной, тройной и криволинейные интегралы, численное интегрирование, возможные сферы их приложения в других областях

математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

Уметь:

решать системы линейных уравнений, вычислять определители, выполнять действия над матрицами;

составлять уравнения прямой и плоскости, кривых и поверхностей второго порядка, приводить уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определять взаимное расположение перечисленных геометрических объектов, решать задачи вычислительного и теоретического характера на плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве;

решать задачи математического анализа: исследовать функции, опираясь на аппарат дифференциального исчисления, и строить их графики, вычислять пределы функций, находить производные и дифференциалы функций, применять их в приближенных вычислениях; вычислять неопределенные, определенные, кратные и криволинейные интегралы, применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания, решать дифференциальные уравнения;

Владеть:

аналитическими методами высшей алгебры для исследования геометрических объектов.

аппаратом математического анализа, методами доказательства утверждений, навыками применения этого в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Практическое занятие № 1

Тема занятия «Основные элементарные функции, их свойства и графики»

Цель занятия: Введение понятия функции, проведение классификации функций, повторение свойств и графиков основных элементарных функций, известных из школьного курса.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение функции.
2. Что называется областью определения функции?
3. Что называется областью значений функции?
4. Дайте определение графика функции $y=f(x)$.
5. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции.
6. Определите функцию обратную по отношению к функции $y=f(x)$.
7. Дайте определение возрастающей и убывающей функции.
8. Какая функция называется монотонной?
9. Дайте определение четной и нечетной функции.
10. Какая функция называется периодической?
11. Определите нули функции.
12. Что называется промежутком знакопостоянства функции?
13. Какая функция называется ограниченной?
14. Какие Вы знаете способы задания функций?
15. Определите целую рациональную функцию.
16. Какая функция называется линейной? Что является ее графиком?
17. Какая функция называется квадратичной? Что является ее графиком?
18. Определите дробно-рациональную функцию.
19. Какую функцию называют степенной? Графики каких степенных функций Вы можете построить?
20. Определите показательную функцию. Постройте в тетради графики функций $y = 2^x$, $y = (1/2)^x$.
21. Какую функцию называют логарифмической? Постройте в тетради графики функций $y = \log_2 x$, $y = \lg x$, $y = \log_{1/2} x$.
22. Какие тригонометрические функции Вы знаете? Постройте графики основных тригонометрических функций в тетради.
23. Назовите обратные тригонометрические функции. Постройте их графики в рабочей тетради.
24. Вспомните основные преобразования графиков функций (параллельный перенос на вектор, растяжение или сжатие от координатных осей), приведите примеры.

**Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями**

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите область определения функции:

а) $y = \ln \frac{1}{(x^2 - 4x + 3)(x - 2)^2}$; б) $y = \sqrt{e^{x-2} - 2}$.

2. Найдите область изменения функции

а) $y = \sin(2x + 1)$; б) $y = 5 \cos(3x - 2)$; в) $y = e^{x^2} - 1$.

3. Исследуйте функции на четность:

а) $y = \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 4}$; б) $y = x - \lg 3x$; в) $y = \frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5}$;

г) $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

4. Определите нули и промежутки знакопостоянства функции:

а) $y = \frac{2x^2 - 3}{x + 4}$; б) $y = e^{x^2 - 2x + 2}$; в) $y = \lg(x - 3) - \lg(x + 2)$.

5. Выделите промежутки, на которых существуют обратные функции для функции и найдите их

а) $f(x) = 2x + 6$; б) $f(x) = x^4 - 2x^2$.

6. С помощью геометрических преобразований постройте график функции $y = -\left|2\sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)\right| + 3$ исходя из графика функции $y = \sin x$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите области определения функций:

а) $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$; б) $y = \cos(3x - 1) + e^{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$;

в) $y = \sqrt{\ln(x^2 - 12x + 11)}$.

2. Найдите области значения функций:

а) $y = x^2 - 6x + 5$; б) $y = \lg(x^2 - 5x + 6)$.

3. Исследуйте данные функции на четность:

а) $y = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x}$; б) $y = x^4 - 40x + 5$; в) $y = x^2 + 1 + \cos 2x$.

4. Определите промежутки знакопостоянства функций:

а) $y = x^2 - 5x + 4$; б) $y = \sqrt{x^2 - x - 2}$.

5. Найдите функции обратные функциям:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 5, x \geq 2$; б) $f(x) = x^2 - 4x + 5, x \leq 2$.

6. С помощью геометрических преобразований постройте график функции $y = 2|\log_2(x + 3)| - 4$ исходя из графика функции $y = \log_2 x$.

Практическое занятие № 2

Тема занятия «Предел функции. Основные теоремы о пределах»

Цель занятия: Введение понятия предел функции, формирование навыков вычисления пределов.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Что называется пределом функции в точке?
2. Определите предел функции на бесконечности.
3. Дайте определение предела функции слева (справа).
4. Может ли функция $f(x)$ иметь два различных предела при $x \rightarrow a$?
5. Чему равен предел постоянной величины?
6. Чему равен предел: а) суммы; б) разности; в) произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$?
7. Чему равен предел частного функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ($x \rightarrow a$)?
8. Как можно избавиться от неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, если числитель и знаменатель дроби содержат многочлены?
9. Как разложить квадратный трехчлен на линейные множители?
10. Сформулируйте теорему Виета.
11. Как можно избавиться от неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$, если числитель и (или) знаменатель содержат иррациональные выражения?
12. Запишите формулы сокращенного умножения, помогающие определить сопряженные выражения для данных.
13. Сформулируйте правила вычисления пределов дроби при $x \rightarrow \infty$, если числитель и знаменатель содержат многочлены.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите пределы

а) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 3)$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 8x + 20}{x^3 + 3x^2 + 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^3 + 2x^2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$; д) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$; е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$; з) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt[3]{2+x} + x}$; и) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2)^3}{(x-5)^3}$;

к) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2}}{x^2 - 3x + 2}$.

2. Найдите пределы функций при $x \rightarrow \infty$:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+7}{x+2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-10^7}{3x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{3x^2 + x - 4}}$;

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 1}{x^3 + 5x}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}; \text{ е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}.$$

3. Вычислите пределы функции при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$, если

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3}, & (x > 1) \\ \frac{2x}{4x-15}, & (x \leq 1) \end{cases}.$$

4. Найдите односторонние пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{3}{4-2x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3}{4-2x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{4-2x}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -0} 2^{\frac{1}{x}}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow +0} 2^{\frac{1}{x}}.$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^3 + 1}{x^2 + 5x + 3}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)(x-3)}; \text{ е) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 + x}{(x-2)(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{x-2} \right); \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x};$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}; \text{ к) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x^2} - 1}{x^2 + x^3}; \text{ л) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x-4};$$

$$\text{м) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}; \text{ н) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}}.$$

2. Найдите пределы функций при $x \rightarrow \infty$:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2}{2x+1}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 - 1}{3x^4 + 3}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + x - 4}.$$

5. Найдите односторонние пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x-3}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x-3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{3^{1+x}}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{3^{1+x}}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{3^{x+1}}.$$

Практическое занятие № 3

Тема занятия «Замечательные пределы. Бесконечно малые, бесконечно большие и неограниченные функции»

Цель занятия: Формирование умений вычислять пределы функций с помощью замечательных пределов.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Запишите первый замечательный предел и следствия из него.
2. Запишите второй замечательный предел и следствия из него.
3. Определите число e . Укажите его приближенное значение с точностью до одного десятичного знака.
4. Какая показательная функция называется экспоненциальной? Постройте ее график.
5. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
6. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
7. Какова простейшая связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?
8. Какова простейшая связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой величиной?
9. Что значит сравнить две бесконечно малые величины?
10. Какие две бесконечно малые величины называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных величин.
11. Как эквивалентные бесконечно малые величины могут быть использованы при вычислении пределов функции?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Вычислите пределы с помощью первого замечательного предела:
а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{3x}$; г) $\lim_{v \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos v}{\sin(v - \frac{\pi}{3})}$.
2. Вычислите пределы с помощью второго замечательного предела:
а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x+5}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{5x+1}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x/2)^{\frac{3}{x}}$.
3. Определите порядок малости нижеследующих б.м функций относительно б.м функции $\beta(x) = x - 1$, если $x \rightarrow 1$:

- а) $\alpha(x) = x^3 + 2x - 3$; б) $\alpha(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$; в) $\alpha(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2x - 1}$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Вычислите пределы с помощью первого замечательного предела:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$; в) $\lim_{z \rightarrow 1} (1-z) \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2}$.

2. Вычислите пределы с помощью второго замечательного предела:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{7x}\right)^{5x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{1+x}\right)^{3x-1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{2x}}$.

3. Выполните ИДЗ по теме «Пределы функций»

Вычислить пределы функций путем алгебраических образований и применения замечательных пределов;

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + px + q}{bx^2 - a}$; 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + px + q}{bx^3 - ax^2}$;

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - b}{ax^2 + px + q}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + px + q}{x^2 - a}$;

5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + px + q}{x^3 + b}$; 6. $\lim_{x \rightarrow k} \frac{ax^2 + px + q}{x^2 - a}$;

7. $\lim_{x \rightarrow m} \frac{x^3 + b}{x^2 + px + q}$; 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\operatorname{tg} bx}$;

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} px}{\operatorname{ctg} qx}$; 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} px \cdot \sin 2ax$;

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{bx}\right)^{mx}$; 12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{p+ax}{q+ax}\right)^{bx+k}$.

Для выполнения заданий коэффициенты a, b, k, m, p, q выбираются из таблицы в соответствии с номером варианта.

ВАРИАНТ	a	b	k	m	p	q
1	4	-1	2	1	-3	2
2	9	-1	3	1	-4	3
3	16	-1	4	1	-5	4
4	25	-1	5	1	-6	5
5	4	1	2	-1	-1	-2
6	9	1	3	-1	-2	-3
7	16	1	4	-1	-3	-4
8	25	1	5	-1	-4	-5
9	4	-27	2	3	-5	6

10	64	-8	8	2	-10	16
11	16	-8	4	2	-6	8
12	25	-8	5	2	-7	10
13	9	8	3	-2	-1	-6
14	16	8	4	-2	-2	-8
15	25	8	5	-2	-3	-10
16	4	27	2	-3	1	-6
17	16	-27	4	3	-7	12
18	16	27	4	-3	-1	-12
19	25	-27	5	3	-8	15
20	25	27	5	-3	-2	-15
21	25	-64	5	4	-9	20
22	25	64	5	-4	-1	-20
23	4	1	-2	-1	3	2
24	9	8	-3	-2	5	6
25	16	27	-4	-3	7	12
26	25	64	-5	-4	9	20
27	9	64	-3	-4	7	12
28	9	125	-3	-5	8	15
29	4	64	-2	-4	6	8
30	4	125	-2	-5	7	10

Практическое занятие № 4

Тема занятия «Непрерывные функции и их свойства. Точки разрыва и их классификация»

Цель занятия: Введение понятия непрерывность функции, исследование функций на непрерывность.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Что называется приращением аргумента?
2. Что называется приращением функции?
3. Какая функция называется непрерывной в точке x_0 ?
4. Предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке. Что можно сказать о непрерывности этой функции в точке x_0 ?
5. Какая функция называется непрерывной на интервале?
6. Что называется точкой разрыва функции?
7. Какая точка называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$?
8. Какая точка называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$?
9. Сформулируйте теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями.
10. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции, составленной из непрерывных функций.
11. Сформулируйте теорему о непрерывности основных элементарных функций.
12. Сформулируйте свойства функции, непрерывной на замкнутом интервале.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Дана функция $y = \frac{-1}{x^2}$, найдите:
 - а) x и Δy , если $x_0 = 4$ и $\Delta x = 0,2$;
 - б) Δx и Δy , если $x = 2$ и $x_0 = 2,3$;
 - в) Δy , если $x = 1$ и $\Delta x = 0,5$.
2. Определите точки разрыва функций и исследуйте ее характер:
 - а) $y = \frac{x+2}{x^2+2x-3}$;
 - б) $f(x) = \begin{cases} 2/x & (x \leq -2) \\ x-1 & (-2 < x < 1) \\ \frac{1}{x+1} & (x \geq 1) \end{cases}$.
3. Будет ли непрерывной функция $f(x)$ в точках 1; 2; -1; 0, если
 - а) $f(x) = 2x^2 - 2$;
 - б) $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

4. Испытайте функцию $y = 5 + \frac{1}{3^x}$ на непрерывность в точке $x = 0$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Определите точки разрыва функций и исследуйте ее характер:

а) $y = \frac{x-3}{x^2+3x+5}$; б) $y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$.

2. Будет ли непрерывной функция $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ в точках 1; 2; -1; 0 ?

3. Приведите примеры функций непрерывных:

а) в любой точке числовой прямой;

б) при всех значениях x , кроме $x = 5$;

в) при всех значениях x , кроме $x = -3$; 3 и 8.

4. Какого рода разрыв в точке $x = 0$ имеет функция $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$?

Докажите это.

Практическое занятие № 5

Тема занятия «Понятие производной. Правила дифференцирования»

Цель занятия: Введение понятия производной функции с помощью операции предельного перехода, отработка навыков в вычислении производных.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие задачи, приводящие к понятию производной, Вам известны?
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Как найти производную функции $y=f(x)$ по определению?
4. В чем состоит механический смысл производной?
5. Дайте определение непрерывной функции в точке и на отрезке. Сформулируйте свойства непрерывных функций.
6. Как связаны между собой дифференцируемость функции в некоторой точке с непрерывностью функции в этой точке?
7. Приведите пример непрерывной функции, не имеющей производной в некоторой точке.
8. Чему равна производная:
а) постоянной; б) алгебраической суммы дифференцируемых функций;
в) произведения двух дифференцируемых функций; г) дроби; д) сложной функции; е) обратной функции?
10. Запишите формулы для нахождения производных основных элементарных функций.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Пользуясь определением производной, найдите производные от следующих функций:
а) $y = 3x^2 - 4x$; б) $y = \frac{1}{x^2}$; в) $y = \sqrt{4x+1}$; г) $y = \sin(3x+1)$.
2. Дана функция: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$. Найдите производную этой функции в точке $x = 0$.
3. Найдите производные следующих функций:
а) $y = x^4 + 3x^2 - 6$; б) $y = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 5$; в) $y = (x^2 + 2x + 1)(4x^2 + 1)$;
г) $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$; д) $y = \sqrt[3]{(1+2x)^2}$; е) $y = 3\sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$; ж) $y = x^2 - \frac{3}{x^4}$;
з) $y = 2x \sin 3x - \cos 4x$.
4. Найдите производные следующих функций:
а) $y = e^{-x^2}$; б) $y = \frac{1}{4} \ln(1+x^2)$; в) $y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$;

г) $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$; д) $y = \arccos(e^{x^2})$; е) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}$;
 ж) $y = 2 \sin^2 2x \cdot \operatorname{ctg}^3 2x$; з) $y = \arcsin \sqrt{\sin x}$;
 и) $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$; к) $y = \sqrt{\frac{1 + e^{2x}}{1 - e^{2x}}} \cdot (\arccos e^{2x})$.
 5. Вычислите $y'(-\frac{1}{2})$, если $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Пользуясь определением производной, найдите производные от следующих функций:

$y = -2x$; $y = (2x-1)^2$; $y = \sqrt{x}$.

2. Найдите производные следующих функций:

а) $y = 6x^3 - x^2$; б) $y = x - 2\sqrt{x}$; в) $y = (\sqrt{x} - 2)^2$; г) $y = x^3(1 - 3x)$;
 д) $y = (x^3 - 3x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^5}$; е) $y = \frac{2x}{1-x^2}$; ж) $y = \frac{1+2x}{1-3x}$;
 з) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; и) $y = x^2 \sin 5x$; к) $y = 3x + \operatorname{tg} 2x$.

4. Найдите производные следующих функций:

а) $y = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$; б) $y = 3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x^2+1}}$; в) $y = x - \operatorname{arctg} 2x$;
 г) $y = e^{-2x} (1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2})$; д) $y = \frac{5^{2x}}{2 + \sqrt{4 + 5^{2x}}}$; е) $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;
 ж) $y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$; з) $y = \frac{\cos \sqrt{e^{1-2x}}}{x}$.

5. Вычислите $u'(2) + u'(0)$, если $u = x\sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{2}$.

6. Покажите, что $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, $y = e^{-\sin x} + \sin x - 1$.

Практическое занятие № 6

Тема занятия Итоговое занятие по темам "Функции. Пределы. Непрерывность"

Цель занятия: Проверка навыков вычисления пределов функции.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение функции.
2. Что называется областью определения функции?
3. Что называется областью значений функции?
4. Дайте определение графика функции $y=f(x)$.
5. Дайте определение возрастающей и убывающей функции.
6. Какая функция называется монотонной?
7. Дайте определение четной и нечетной функции.
8. Какая функция называется периодической?
9. Определите нули функции.
10. Что называется промежутком знакопостоянства функции?
11. Какая функция называется ограниченной?
12. Какие Вы знаете способы задания функций?
13. Что называется пределом функции в точке?
14. Определите предел функции на бесконечности.
15. Чему равен предел постоянной величины?
16. Чему равен предел: а) суммы; б) разности; в) произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$?
17. Чему равен предел частного функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ($x \rightarrow a$)?
18. Запишите первый замечательный предел и следствия из него.
19. Запишите второй замечательный предел и следствия из него.
20. Что называется приращением аргумента?
21. Что называется приращением функции?
22. Какая функция называется непрерывной в точке x_0 ?
23. Какая функция называется непрерывной на интервале?
24. Что называется точкой разрыва функции?

. Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Выполните ИДЗ по теме «Пределы функций»

Вычислить пределы функций путем алгебраических образований и применения замечательных пределов;

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + px + q}{bx^2 - a}; 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + px + q}{bx^3 - ax^2};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - b}{ax^2 + px + q}; 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + px + q}{x^2 - a};$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + px + q}{x^3 + b}; 6. \lim_{x \rightarrow k} \frac{ax^2 + px + q}{x^2 - a};$$

$$7. \lim_{x \rightarrow m} \frac{x^3 + b}{x^2 + px + q}; 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\operatorname{tg} bx};$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} px}{\operatorname{ctg} qx}; 10. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} px \cdot \sin 2ax;$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{bx}\right)^{mx}; 12. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{p + ax}{q + ax}\right)^{bx+k}.$$

Для выполнения заданий коэффициенты a, b, k, m, p, q выбираются из таблицы в соответствии с номером варианта.

ВАРИАНТ	a	b	k	m	p	q
1	4	-1	2	1	-3	2
2	9	-1	3	1	-4	3
3	16	-1	4	1	-5	4
4	25	-1	5	1	-6	5
5	4	1	2	-1	-1	-2
6	9	1	3	-1	-2	-3
7	16	1	4	-1	-3	-4
8	25	1	5	-1	-4	-5
9	4	-27	2	3	-5	6
10	64	-8	8	2	-10	16
11	16	-8	4	2	-6	8
12	25	-8	5	2	-7	10
13	9	8	3	-2	-1	-6
14	16	8	4	-2	-2	-8
15	25	8	5	-2	-3	-10
16	4	27	2	-3	1	-6

17	16	-27	4	3	-7	12
18	16	27	4	-3	-1	-12
19	25	-27	5	3	-8	15
20	25	27	5	-3	-2	-15
21	25	-64	5	4	-9	20
22	25	64	5	-4	-1	-20
23	4	1	-2	-1	3	2
24	9	8	-3	-2	5	6
25	16	27	-4	-3	7	12
26	25	64	-5	-4	9	20
27	9	64	-3	-4	7	12
28	9	125	-3	-5	8	15
29	4	64	-2	-4	6	8
30	4	125	-2	-5	7	10

Практическое занятие № 7

Тема занятия «Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Функции заданные неявно и параметрически и их дифференцирование»

Цель занятия: Формирование умений и навыков нахождения производных неявно заданных и параметрически заданных функций, применения логарифмического дифференцирования.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Запишите формулу логарифмического дифференцирования.
2. Когда применяется формула логарифмического дифференцирования?
3. Расскажите о дифференцировании показательно-степенной функции.
4. Дайте определение производной второго порядка, производной n-го порядка.
5. Дайте определение неявного задания функции. Приведите примеры.
6. Как от неявного задания перейти к явному заданию функции? Всегда ли это можно сделать. Приведите примеры.
7. Как проводят дифференцирование неявной функции?
8. Расскажите о нахождении производных высших порядков от неявно заданных функций.
9. Дайте определение параметрически заданной функции. Приведите примеры.
10. Расскажите как от параметрического задания функции перейти к явному заданию функции.
11. Запишите формулы для нахождения производных первого и второго порядков от параметрически заданной функции.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные следующих функций:
а) $y = x^5(1+3x)^3(1-2x)^2$; б) $y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$; в) $y = \sqrt[3]{\frac{x(1+x)^2}{(1-x)^2}}$;
г) $y = (\sin x)^x$; д) $y = \sqrt[3]{x}$.
2. Найдите производные высших порядков для следующих функций:
а) $y = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 1$; $y'' = ?$ б) $y = \cos 2x$; $y''' = ?$
3. Для данных неявных функций найдите производные первого порядка $y'(x)$:
а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; б) $y = \operatorname{tg}(x+y)$.
4. Для функций, заданных параметрически, найдите производные первого

и второго порядков

$$\text{а) } \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 + 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные следующих функций:

$$\text{а) } y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}; \quad \text{б) } y = \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{в) } y = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3} \sqrt[3]{(x-3)^7}};$$

$$\text{г) } y = (\cos x)^{\sin 2x}.$$

2. Найдите производные высших порядков для следующих функций:

$$\text{а) } y = 3x^3 - 5x^2 + x; \quad y''' = ? \quad \text{б) } y = e^x + 2x; \quad y^{IV} = ?$$

3. Для данной неявной функции найдите производные первого и второго порядков $e^y \sin x = e^{-x} \cos y$.

4. Для функций, заданных параметрически, найдите производные первого и второго порядков

$$\text{а) } \begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{3t}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

Практическое занятие № 8

Тема занятия «Дифференциал функции, применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков»

Цель занятия: Введение понятия дифференциал функции, изучение способа применения дифференциала функции в приближенных вычислениях.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение дифференциала функции.
2. Запишите формулу для вычисления дифференциала первого и последующих порядков.
3. Сформулируйте основные свойства дифференциалов.
4. В чем заключается свойство инвариантности формы дифференциала? Дифференциалы каких порядков обладают указанным свойством?
5. Расскажите о геометрическом смысле дифференциала первого порядка.
6. Как используется дифференциал в приближенных вычислениях?
7. Выведите формулу приближенного вычисления значений функций. Как определить погрешность приближения?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите дифференциалы следующих функций:
а) $y = \frac{x^3}{1-x}$; б) $y = e^{x^2} - 2x + 1$; в) $y = \arccos^2 3x$; г) $y = \frac{2 \sin 2x - 3 \cos 2x}{e^{3x}}$.
2. Вычислите с точностью до 0,01 дифференциал функции $y = x + (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x$ при $x = -\frac{\pi}{4}$ и $dx = 0,2$.
3. С помощью дифференциала найдите приближенные значения для данных выражений:
а) $\sqrt[3]{1,02}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{120}$; г) $\sqrt[3]{9}$; д) $\sin 29^\circ$; е) $\operatorname{arctg} 0,98$; е) $\ln 1,01$; ж) $\log_2 1,98$.
4. Для данных функций найдите дифференциалы высших порядков:
а) $y = \ln 2x$; $d^3 x = ?$ б) $y = \sqrt{x}$, $d^4 x = ?$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите дифференциалы следующих функций:
а) $y = \sqrt{3 - x^2}$; б) $y = 3^{2x}$; в) $y = \sin^2 \frac{x}{3}$; г) $y = e^{-x} (2 - 2x - x^2)$.
2. Вычислите с точностью до 0,01 дифференциалы функций:
а) $y = x(1+x)(1-x)$ при $x = 10$ и $dx = 0,1$;
б) $y = x\sqrt{x^2 + 5}$ при $x = -2$ и $dx = \frac{1}{5}$.
3. С помощью дифференциала найдите приближенные значения для данных выражений:

а) $\sqrt[3]{1,1}$; б) $\sqrt[3]{26,81}$; в) $\sqrt{34}$; г) $\sqrt[4]{17}$; д) $\sqrt[10]{1000}$; е) $\cos 151^0$; ж) $\arccos 0,4993$;
з) $\operatorname{tg} 44^0 56'$; и) $\lg 11$.

4. Для данной функций найдите дифференциалы высших порядков:

$$y = e^{2x}, d^n y = ?$$

Практическое занятие № 9

Тема занятия «Приложения производной: уравнение касательной и нормали к плоской кривой, правила Лопиталя, формула Тейлора»

Цель занятия: изучение приложений производной функции.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Сформулируйте геометрический смысл производной функции.
2. Выведите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
3. Какая прямая называется нормалью к кривой? Какой вид имеет уравнение нормали?
4. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов функции.
5. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов функции.
6. Сколько раз подряд можно применять правило Лопиталя и когда это правило неприменимо?
7. Как можно раскрыть неопределенность вида $0 \cdot \infty$ при вычислении предела функции?
8. Что нужно сделать при вычислении предела функции, если он содержит неопределенность вида $\infty - \infty$?
9. Какой прием применяют для применения правил Лопиталя, если предел функции содержит неопределенность вида 0^0 , или ∞^0 , или 1^∞ ?
10. Расскажите о формуле Тейлора и формуле Маклорена. Для чего эти формулы могут использоваться?
11. Разложите по формуле Тейлора (Маклорена) функции $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Составьте уравнение касательной и нормали
 - а) к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке с абсциссой $x = 1$;
 - б) к кривой $y = \ln x$ в точке с абсциссой $x = 1$.
2. Используя правило Лопиталя, найдите следующие пределы:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$; в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 \ln x$;
 - е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$; ж) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 5x}$; з) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$; и) $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} \ln x$;

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{x^2 - 1} - \frac{7}{x^3 - 1} \right); \text{ л) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right); \text{ м) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

3. По формуле Тейлора разложите многочлен $P(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$ по степеням $x + 1$.

4. Закон зависимости массы вещества, вступившего в химическую реакцию, в зависимости от времени, выражается формулой: $m = e^{2t-2}(t^2 + 1)$, где t - время в минутах, m - масса в граммах. Сколько вещества вступит в реакцию через 66 секунд?

Задания для самостоятельной работы дома

1. Составьте уравнение касательной и нормали

а) к окружности $x^2 + y^2 = 25$ в точке $A(3; -4)$;

б) к гиперболе $y = 1/x$ в точке $A(1; 1)$.

2. Используя правило Лопиталя, найдите следующие пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 11x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1+x)};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}; \text{ е) } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{\ln(e^x - e^2)}{\ln(x - 2)}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 5x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x;$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln(x + e^x); \text{ к) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right); \text{ л) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}; \text{ м) } \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}.$$

3. По формуле Тейлора разложите многочлен:

а) $P(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$ по степеням $x - 2$;

б) $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ по степеням $x - 1$.

Практическое занятие № 10.

Тема занятия «Применение производной к исследованию функций.

Построение графиков функций»

Цель занятия: Показать возможность применения аппарата дифференциального исчисления к исследованию функций и построения их графиков.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение возрастающей и убывающей функции на некотором промежутке.
2. Как найти интервалы монотонности функции?
3. Дайте определения экстремумов функции.
4. Определите наибольшее и наименьшее значения функции.
5. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
6. Какие точки называются критическими?
7. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.
8. Как ведется исследование функции на экстремум с помощью второй производной?
9. Укажите порядок исследования функции на возрастание и убывание и экстремумы.
10. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции? Укажите порядок решения этой задачи.
11. Определите понятия выпуклость и вогнутость графика функции.
12. Какую точку называют точкой перегиба?
13. Как найти интервалы выпуклости и вогнутости функции?
14. Как определить точки перегиба?
15. Что называется асимптотой кривой $y = f(x)$?
16. Как найти асимптоту $y = ax + b$ кривой $y = f(x)$, т.е. как найти a и b ?
17. По какой схеме следует проводить исследование функции и построение ее графика?
18. Для решения каких вопросов исследования функции и построения ее графика:
 - а) не нужны теория пределов и дифференциальное исчисление?
 - б) необходимо уметь вычислять пределы?
 - в) нужна первая производная?
 - г) нужна вторая производная?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите интервалы возрастания и убывания следующих функций:
 - а) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$; б) $y = \frac{2x}{1+x^2}$; в) $y = \cos x - x$.
2. Исследуйте на экстремум следующие функции:

а) $y = x^2(x - 6)$; б) $y = e^x \sin x$; в) $y = \frac{x}{\ln x}$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения следующих функций:

а) $y = x^2 - 4x + 6$ на отрезке $[-3; 10]$

б) $y = \sqrt{5 - 4x}$ на отрезке $[-1; 1]$.

в) Реакции организма на два лекарства как функции t (время выражается в часах) составляют $r_1(t) = te^{-t}$ и $r_2(t) = t^2 e^{-t}$. У какого из лекарств выше максимальная реакция?

4. Найдите точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости следующих кривых:

а) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$; б) $y = 3 - \sqrt[5]{(x + 2)^7}$; в) $y = 1 - \ln(x^2 - 4)$.

5. Найдите асимптоты следующих функций:

а) $y = \frac{2x}{x-1}$; б) $y = \frac{1}{2x^2 + x - 1}$.

6. Исследуйте функции и постройте их графики:

а) $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$; б) $y = (x-3)\sqrt{x}$.

7. Закон перехода некоторого вещества в раствор в зависимости от времени t задается формулой: $x(t) = 2(1 - e^{-5t})$. Исследуйте эту функцию и постройте график этой зависимости.

1. Выполните ИДЗ по теме «Исследование функций и построение их графиков».

Исследовать функцию и построить ее график.

Вариант 1 $y = 2 + \frac{12}{x^2 - 4}$	Вариант 2 $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$
Вариант 3 $y = x + \frac{4}{x + 2}$	Вариант 4 $y = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}$
Вариант 5 $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$	Вариант 6 $y = \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}$
Вариант 7 $y = \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{x^3}$	Вариант 8 $y = \frac{1}{x(2x - 1)}$
Вариант 9 $y = \frac{1}{x(x - 1)}$	Вариант 10 $y = x + \frac{x}{3x - 1}$
Вариант 11 $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$	Вариант 12 $y = \frac{x^3}{2(x + 1)^2}$
Вариант 13 $y = \frac{4}{2 - x} - x$	Вариант 14 $y = 1 + \frac{3}{x^2 - 1}$
Вариант 15 $y = \frac{x^3}{2(x - 1)^2}$	Вариант 16 $y = \frac{3}{4x^2 - 1} - 1$
Вариант 17 $y = \frac{-6x^2}{3x - 1}$	Вариант 18 $y = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$
Вариант 19 $y = -x + \frac{x}{3x + 1}$	Вариант 20 $y = \frac{x^4 + x^3 - 1}{x^3 - 1}$
Вариант 21 $y = \frac{1}{x(x + 1)}$	Вариант 22 $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{4x^3}$
Вариант 23 $y = \frac{x^3}{4x^2 - 1}$	Вариант 24 $y = x + \frac{x}{6x - 1}$
Вариант 25 $y = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 2}$	Вариант 26 $y = \frac{x^4}{1 - x^3}$

Вариант 27 $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$	Вариант 28 $y = \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^2}$
Вариант 29 $y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$	Вариант 30 $y = \frac{x^3}{1 - 4x^2} + 1$

Практическое занятие №11. Итоговое занятие по теме "Производная и её приложения"

Подготовьтесь к коллоквиуму по вопросам приведённым ниже.

**Коллоквиум
Базовый уровень**

Тема. Функции одной переменной и числовые последовательности.

1. Дайте определение функции.
2. Что называется областью определения функции?
3. Что называется областью значений функции?
4. Дайте определение графика функции $y=f(x)$.
5. Дайте определение возрастающей и убывающей функции.
6. Какая функция называется монотонной?
7. Дайте определение четной и нечетной функции.
8. Какая функция называется периодической?
9. Определите нули функции.
10. Что называется промежутком знакопостоянства функции?
11. Какая функция называется ограниченной?
12. Какие Вы знаете способы задания функций?

Тема. Предел функции.

1. Что называется пределом функции в точке?
2. Определите предел функции на бесконечности.
3. Чему равен предел постоянной величины?
4. Чему равен предел: а) суммы; б) разности; в) произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$?
5. Чему равен предел частного функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ($x \rightarrow a$)?
6. Запишите первый замечательный предел и следствия из него.
7. Запишите второй замечательный предел и следствия из него.

Тема. Непрерывность функции.

1. Что называется приращением аргумента?
2. Что называется приращением функции?
3. Какая функция называется непрерывной в точке x_0 ?
4. Какая функция называется непрерывной на интервале?
5. Что называется точкой разрыва функции?

Тема. Производная функции. Правила дифференцирования.

1. Какие задачи, приводящие к понятию производной, Вам известны?
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Опишите порядок вычисления производной функции по определению.
4. Чему равна производная: а) постоянной б) алгебраической суммы дифференцируемых функций; в) произведения двух дифференцируемых функций; г) дроби; д) сложной функции; е) обратной функции?
5. Запишите формулы для нахождения производных основных элементарных функций.

Тема. Дифференциал функции.

1. Дайте определение дифференциала функции.
2. Сформулируйте основные свойства дифференциалов.

Тема. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.

1. Запишите формулу логарифмического дифференцирования. Когда применяется формула логарифмического дифференцирования?
2. Дайте определение неявного задания функции. Приведите примеры. Как от неявного задания перейти к явному заданию функции? Всегда ли это можно сделать. Приведите примеры.
3. Как проводят дифференцирование неявной функции?
4. Дайте определение параметрически заданной функции. Приведите примеры. Расскажите как от параметрического задания функции перейти к явному заданию функции.

Тема. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения.

1. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов функции.
2. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов функции.
3. Расскажите о формуле Тейлора и формуле Маклорена. Для чего эти формулы могут использоваться?

Тема. Приложения производной.

1. Дайте определение возрастающей и убывающей функции на некотором промежутке. Как найти интервалы монотонности функции?
2. Дайте определения экстремумов функции.
3. Определите наибольшее и наименьшее значения функции.
4. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
5. Какие точки называются критическими?
6. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.
7. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции? Укажите порядок решения этой задачи.
8. Определите понятия выпуклость и вогнутость графика функции. Какую точку называют точкой перегиба? Как найти интервалы выпуклости и вогнутости функции? Как определить точки перегиба?

Повышенный уровень

Тема. Функции одной переменной и числовые последовательности.

1. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции.
2. Определите функцию обратную по отношению к функции $y=f(x)$.
3. Определите целую рациональную функцию.

4. Какая функция называется линейной? Что является ее графиком?
5. Какая функция называется квадратичной? Что является ее графиком?
6. Определите дробно-рациональную функцию.
7. Какую функцию называют степенной? Графики каких степенных функций Вы можете построить?
8. Определите показательную функцию. Постройте в тетради графики функций $y = 2^x$, $y = (1/2)^x$.
9. Какую функцию называют логарифмической? Постройте в тетради графики функций $y = \log_2 x$, $y = \lg x$, $y = \log_{1/2} x$.
10. Какие тригонометрические функции Вы знаете? Постройте графики основных тригонометрических функций в тетради.
11. Назовите обратные тригонометрические функции. Постройте их графики.
12. Вспомните основные преобразования графиков функций (параллельный перенос на вектор, растяжение или сжатие от координатных осей), приведите примеры.

Тема. Предел функции.

1. Дайте определение предела функции слева (справа).
2. Может ли функция $f(x)$ иметь два различных предела при $x \rightarrow a$?
3. Как можно избавиться от неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, если числитель и знаменатель дроби содержат многочлены?
4. Как разложить квадратный трехчлен на линейные множители? Сформулируйте теорему Виета.
5. Как можно избавиться от неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$, если числитель и (или) знаменатель содержат иррациональные выражения? Запишите формулы сокращенного умножения, помогающие определить сопряженные выражения для данных.
6. Сформулируйте правила вычисления пределов дроби при $x \rightarrow \infty$, если числитель и знаменатель содержат многочлены.
7. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
8. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
9. Какова простейшая связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?
10. Какова простейшая связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой величиной?
11. Что значит сравнить две бесконечно малые величины?
12. Какие две бесконечно малые величины называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных величин.
13. Как эквивалентные бесконечно малые величины могут быть использованы при вычислении пределов функции?

Тема. Непрерывность функции.

1. Предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке. Что можно сказать о непрерывности этой функции в точке x_0 ?
2. Какая точка называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$?
3. Какая точка называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$?
4. Сформулируйте теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями.
5. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции, составленной из непрерывных функций.
6. Сформулируйте теорему о непрерывности основных элементарных функций.
7. Сформулируйте свойства функции, непрерывной на замкнутом интервале.

Тема. Производная функции. Правила дифференцирования.

1. Как найти производную функции $y=f(x)$ по определению?
2. В чем состоит механический смысл производной?
3. Как связаны между собой дифференцируемость функции в некоторой точке с непрерывностью функции в этой точке?
4. Приведите пример непрерывной функции, не имеющей производной в некоторой точке.
5. Дайте определение сложной функции. Приведите примеры.
6. Сформулируйте теорему для нахождения производной сложной функции.
7. Составьте таблицу нахождения производных для функций вида $f(u)$, где f - одна из элементарных функций, $u = u(x)$.

Тема. Дифференциал функции.

1. Запишите формулу для вычисления дифференциала первого и последующих порядков.
2. В чем заключается свойство инвариантности формы дифференциала? Дифференциалы каких порядков обладают указанным свойством?
3. Расскажите о геометрическом смысле дифференциала первого порядка.
4. Как используется дифференциал в приближенных вычислениях?
5. Выведите формулу приближенного вычисления значений функций. Как определить погрешность приближения?
6. Дайте определение производной второго порядка, производной n -го порядка.

Тема. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.

1. Расскажите о дифференцировании показательной-степенной функции.
2. Расскажите о нахождении производных высших порядков от неявно заданных функций.
3. Запишите формулы для нахождения производных первого и второго порядков от параметрически заданной функции.

Тема. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения.

1. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
2. Теоремы Ферма, Роля.
3. Теоремы Лагранжа, Коши.

Тема. Приложения производной к исследованию функций.

1. Выведите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2. Сколько раз подряд можно применять правило Лопиталя и когда это правило неприменимо?
3. Как можно раскрыть неопределенность вида $0 \cdot \infty$ при вычислении предела функции?
4. Что нужно сделать при вычислении предела функции, если он содержит неопределенность вида $\infty - \infty$?
5. Какой прием применяют для применения правил Лопиталя, если предел функции содержит неопределенность вида 0^0 , или ∞^0 , или 1^∞ ?
6. Разложите по формуле Тейлора (Маклорена) функции $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.
7. Как ведется исследование функции на экстремум с помощью второй производной?
8. Укажите порядок исследования функции на возрастание и убывание и экстремумы.
9. Что называется асимптотой кривой $y = f(x)$?
10. Как найти асимптоту $y = ax + b$ кривой $y = f(x)$, т.е. как найти a и b ?
11. По какой схеме следует проводить исследование функции и построение ее графика?
12. Для решения каких вопросов исследования функции и построения ее графика:
 - а) не нужны теория пределов и дифференциальное исчисление?
 - б) необходимо уметь вычислять пределы?
 - в) нужна первая производная?
 - г) нужна вторая производная

2. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

Практическое занятие №12.

Тема занятия Действия над матрицами. Вычисление определителей

Цель занятия: Введение основных понятий линейной алгебры, формирование умений выполнять действия над матрицами.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение матрицы, элементов матрицы; расскажите, как матрицы обозначаются, приведите примеры.
2. Введите понятия квадратной, диагональной, единичной, нулевой, ступенчатой, транспонированной, симметрической матриц, матрицы-строки и матрицы-столбца. Приведите примеры.
3. Когда говорят о размерах, а когда о размерности матрицы? Приведите примеры и введите соответствующие обозначения.
4. Дайте определение суммы двух матриц. Какие матрицы можно складывать? Приведите примеры.
5. Как умножить матрицу на число? Приведите пример.
6. Для каких двух матриц можно определить операцию произведения? Введите эту операцию, проиллюстрируйте ее на примере. Коммутативно ли умножение двух матриц?
7. Приведите пример использования матриц в области Вашей предметной деятельности.
8. Какие задачи приводят к понятиям определителей второго и третьего порядков. Как обозначаются определители?
9. Расскажите о правилах вычисления определителей второго и третьего порядков. Как называют правило вычисления определителей третьего порядков?
10. Введите понятия члена определителя, перестановки, транспозиции. Как определить четность перестановки?

11. Дайте определение определителя n-го порядка? Докажите, что правило «треугольника» является частным случаем этого определения.
12. Сформулируйте основные свойства определителей.
13. Введите понятия минора и алгебраического дополнения элемента определителя.
14. Сформулируйте теорему о вычислении определителя и следствие из нее.

Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями
Задания, решаемые в аудитории

1. Выполните действия над матрицами:

$$а) 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T ;$$

$$б) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Найдите произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют:

$$а) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \end{pmatrix};$$

$$б) A = (1 \ 2 \ 4 \ 5), B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите определители второго порядка:

$$а) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; б) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; в) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}.$$

4. По правилу «треугольника» вычислите определители третьего порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 6 \end{vmatrix}; \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & -7 \end{vmatrix}; \text{в) } \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Выполните действия над матрицами:

$$\text{а) } 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^T + 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \text{б) } A \cdot A^T, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \\ 2 & 6 \\ 1 & -9 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -4 \end{pmatrix}^2.$$

2. Найдите произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 8 & -2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, B = (2 \quad -1 \quad 5 \quad -3);$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите определители третьего порядков по правилу «треугольника»:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ 12 & 5 & 2 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}, \text{ где } \varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}.$$

4. Решите неравенство:

$$\begin{vmatrix} x-1 & x & 2 \\ -1 & 1 & -x \\ 2 & 1 & x+1 \end{vmatrix} \leq 2.$$

Практическое занятие № 13

Тема занятия Ранг матрицы и методы его нахождения. Методы нахождения обратной матрицы

Цель занятия: Сформировать умение находить ранг матрицы и обратную матрицу.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какая матрица называется матрицей ступенчатого вида?
2. Дайте определение ранга матрицы.
3. Перечислите элементарные преобразования матрицы.
4. Как вычислить ранг матрицы с помощью элементарных преобразований?
5. Введите понятия линейно зависимых и линейно независимых строк (столбцов) матрицы. Какое еще можно дать определение ранга матрицы?
6. Изложите метод окаймляющих миноров для нахождения ранга матрицы. На каких свойствах этот метод основан?
7. Определите понятия обратимая матрица, обратная матрица, вырожденная и невырожденная матрицы.
8. В каком случае определитель матрицы равен нулю?
9. Назовите условия обратимости матрицы.
10. Дайте определение минора и алгебраического дополнения.
11. Выведите формулу нахождения обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.
12. Сформулируйте алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.
13. Назовите элементарные преобразования матрицы.
14. Расскажите, как найти обратную матрицу с помощью элементарных преобразований путем присоединения единичной матрицы.

15. Как решается вопрос об обратимости матрицы при применении метода элементарных преобразований для ее отыскания?

16. Как проверить правильность нахождения обратной матрицы?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. С помощью элементарных преобразований вычислите ранги следующих матриц:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 & 3 \\ 10 & 18 & 22 & 17 \\ 4 & 8 & 10 & 7 \\ 0 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \text{ б) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -7 & 2 & 7 & -5 & -1 & 3 \\ 6 & -1 & -9 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Методом окаймляющих миноров найдите ранги следующих матриц:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -2 \\ 9 & 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \text{ б) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -7 & 2 & 7 & -5 & -1 & 3 \\ 6 & -1 & -9 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Найдите обратные матрицы для данных матриц с помощью алгебраических дополнений:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \text{ б) } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ в) } C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Путем присоединения единичной матрицы найдите обратные матрицы для данных матриц:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \text{ б) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$

Задания для самостоятельной работы дома

1. 1. С помощью элементарных преобразований вычислите ранги следующих матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -2 \\ 9 & 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -7 & 2 & 7 & -5 & -1 & 3 \\ 6 & -1 & -9 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

2. Методом окаймляющих миноров найдите ранги следующих матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$

3. Найдите обратные матрицы для данных матриц с помощью алгебраических дополнений:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$

4. Путем присоединения единичной матрицы найдите обратные матрицы для данных матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$

5. Решите матричное уравнение: $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

Практические занятия № 14

Тема занятия «Системы линейных уравнений. Методы решения»

Цель занятия: Сформировать умения и навыки решения систем линейных уравнений, овладение критериями исследования систем линейных уравнений.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определения системы линейных уравнений, однородной и неоднородной систем, решения системы.
2. Какая система называется совместной, а какая несовместной?
3. Дайте определение определенной и неопределенной систем.
4. Сформулируйте критерий совместности систем линейных уравнений.
5. Расскажите о методе Гаусса. Перечислите элементарные преобразования матрицы.
6. Когда, решая систему методом Гаусса, делаем вывод
 - о несовместности системы;
 - об определенности системы;
 - о неопределенности системы?
7. Как найти общее решение системы, приведенной к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса?
8. В чем особенность применения метода Гаусса при решении однородной системы?
9. Как записать систему линейных уравнений в матричной форме?
10. Вспомните условия существования обратной матрицы и методы ее нахождения.
11. Изложите матричный метод решения систем линейных уравнений. Какие системы можно решать этим методом.
12. Расскажите о методе Крамера решения систем линейных уравнений. Каковы границы его применения?

13. Какие выводы можно сделать о числе решений однородной системы линейных уравнений.
14. Сделайте сравнительный анализ рассмотренных методов решения систем линейных уравнений.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

2. Решите систему линейных уравнений матричным методом, методом Крамера и методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 13x_3 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 13x_3 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

3. Исследуйте и решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 7 \end{cases}$$

4. Найдите фундаментальную систему решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы дома

Выполните ИДЗ по теме «Методы решения систем линейных уравнений»

1. Исследовать систему на совместность и число решений системы.
2. Изменить систему таким образом, чтобы она была совместной (определенной и неопределенной), несовместной.
3. Решить систему методом Гаусса.

Для определенной системы

4. Решить систему методом Крамера.

5. Решить систему матричным методом.

Системы к индивидуальным домашним заданиям.

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 18, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 = -10, \\ x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = -48. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 12, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 17, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_3 + 6x_4 = 8, \\ 2x_2 + 5x_4 = 9. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 12x_3 - 3x_4 = 27, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 7. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 - 7x_2 + 8x_3 + x_4 = 15, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 25, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 13x_4 = 11, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + 14x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 13. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
15. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + 14x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{array} \right. & 16. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 9x_3 - 5x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6. \end{array} \right. \\
17. \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 5. \end{array} \right. & 18. \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2. \end{array} \right. \\
19. \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{array} \right. & 20. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 21x_3 + 52x_4 = -8, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = -48. \end{array} \right. \\
21. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 265x_4 = -48, \\ 4x_2 + 18x_3 + 48x_4 = -10, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{array} \right. & 22. \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 29, \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + x_4 = 41, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 30, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19. \end{array} \right. \\
23. \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 29, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 12, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{array} \right. & 24. \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{array} \right. \\
25. \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1. \end{array} \right. & 26. \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 16. \end{array} \right. \\
27. \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 16, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 11. \end{array} \right. & 28. \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ x_1 - 12x_2 + 15x_3 + 5x_4 = 23, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{array} \right. \\
29. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12. \end{array} \right. & 30. \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 25, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 19, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8. \end{array} \right.
\end{array}$$

Практическое занятие № 15

1. **Тема занятия** «Итоговое занятие по теме "Системы линейных уравнений и их приложения".»

Цель занятия: Проверка теоретических знаний и практических умений и навыков по разделу «Основы линейной и векторной алгебры».

Организационная форма занятия: контрольное собеседование.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Базис и ранг системы векторов.
2. Обратная матрица, методы ее нахождения.
3. Критерий совместности системы линейных уравнений.
4. Методы решения систем линейных уравнений.
5. Фундаментальная система решений системы линейных уравнений.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Собеседование 1

Базовый уровень

Тема. Матрицы и определители.

1. Дайте определение матрицы, элементов матрицы; расскажите, как матрицы обозначаются, приведите примеры.
2. Введите понятия квадратной, диагональной, единичной, нулевой, ступенчатой, транспонированной, симметрической матриц, матрицы-строки и матрицы-столбца. Приведите примеры.
3. Когда говорят о размерах, а когда о размерности матрицы? Приведите примеры и введите соответствующие обозначения.
4. Дайте определение суммы двух матриц. Какие матрицы можно складывать? Приведите примеры.
5. Как умножить матрицу на число? Приведите пример.
6. Какие задачи приводят к понятиям определителей второго и третьего порядков. Как обозначаются определители?
7. Расскажите о правилах вычисления определителей второго и третьего порядков. Как называют правило вычисления определителей третьего порядков?
8. Сформулируйте основные свойства определителей.
9. Какая матрица называется матрицей ступенчатого вида?
10. Дайте определение ранга матрицы.
11. Перечислите элементарные преобразования матрицы.

12. Как вычислить ранг матрицы с помощью элементарных преобразований?
13. Введите понятия линейно зависимых и линейно независимых строк (столбцов) матрицы. Какое еще можно дать определение ранга матрицы?
14. Определите понятия обратимая матрица, обратная матрица, вырожденная и невырожденная матрицы.
15. В каком случае определитель матрицы равен нулю?
16. Дайте определение минора и алгебраического дополнения.
17. Сформулируйте алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.
18. Назовите элементарные преобразования матрицы.
19. Расскажите, как найти обратную матрицу с помощью элементарных преобразований путем присоединения единичной матрицы.
20. Как проверить правильность нахождения обратной матрицы?

Тема. Системы линейных уравнений и методы их решения.

1. Дайте определения системы линейных уравнений, однородной и неоднородной систем, решения системы.
2. Какая система называется совместной, а какая несовместной?
3. Дайте определение определенной и неопределенной систем.
4. Сформулируйте критерий совместности систем линейных уравнений.
5. Расскажите о методе Гаусса. Перечислите элементарные преобразования матрицы.
6. Расскажите о методе Крамера решения систем линейных уравнений. Каковы границы его применения?

Повышенный уровень

Тема. Матрицы и определители.

1. Для каких двух матриц можно определить операцию произведения? Введите эту операцию, проиллюстрируйте ее на примере. Коммутативно ли умножение двух матриц?
2. Приведите пример использования матриц в области Вашей предметной деятельности.
3. Введите понятия члена определителя, перестановки, транспозиции. Как определить четность перестановки?
4. Дайте определение определителя n -го порядка? Докажите, что правило «треугольника» является частным случаем этого определения.
5. Введите понятия минора и алгебраического дополнения элемента определителя.
6. Сформулируйте теорему о вычислении определителя и следствие из нее. Изложите метод окаймляющих миноров для нахождения ранга матрицы. На каких свойствах этот метод основан?
7. Назовите условия обратимости матрицы.
8. Выведите формулу нахождения обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.

Тема. Системы линейных уравнений и методы их решения.

1. Как найти общее решение системы, приведенной к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса?
2. В чем особенность применения метода Гаусса при решении однородной системы?
3. Как записать систему линейных уравнений в матричной форме?
4. Изложите матричный метод решения систем линейных уравнений. Какие системы можно решать этим методом.
5. Какие выводы можно сделать о числе решений однородной системы линейных уравнений.
6. Сделайте сравнительный анализ рассмотренных методов решения систем линейных уравнений.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(0;-3;6)$, $B(-12;-3;-3)$, $C(-9;-3;-6)$.
2. Найдите какой-нибудь базис и ранг системы векторов $a_1 = (0, 4, 10, 1)$, $a_2 = (4, 8, 17, 7)$, $a_3 = (10, 18, 40, 17)$, $a_4 = (1, 7, 17, 3)$.

3. Решите матричное уравнение
$$X \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследуйте и решите систему уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 + 15x_4 = 1 \end{cases}.$$

5. Решите систему линейных уравнений методом Крамера и матричным способом

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 = -6 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

6. Найдите фундаментальную систему решений системы линейных уравнений

3. ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Практическое занятие №18.

Тема занятия «Множество натуральных чисел, аксиомы Пеано, метод математической индукции»

Цель занятия: формирование аксиоматического подхода к определению числовых множеств и умений доказывать утверждения, содержащие натуральные числа.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие способы построения множества натуральных чисел Вы знаете? Дайте аксиоматическое определение множества натуральных чисел. Объясните смысл каждой из аксиом Пеано.
2. Для чего в математике используется метод математической индукции (ММИ)? Перечислите основные этапы – доказательства с помощью ММИ.
3. Какие операции определены на множестве натуральных чисел? Перечислите свойства введенных операций. Какую алгебраическую структуру относительно введенных операций образует множество натуральных чисел?
4. Назовите причины расширения множества натуральных чисел до множества целых чисел. Дайте определение множества целых чисел и укажите основные свойства этого числового множества.
5. Сформулируйте определение множества рациональных чисел и перечислите основные свойства этого множества.
7. Какие Вы знаете способы построения множества действительных чисел? Расскажите об одном из способов построения.
8. В каком отношении находятся рассмотренные выше числовые множества? Каково соотношение между этими числовыми множествами и точками числовой прямой?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. С помощью метода математической индукции докажите равенства

а) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$; б) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$;

в) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$;

г) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

2. Докажите неравенства с помощью метода математической индукции

а) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$;

б) $(1+x)^n > 1+nx$, где $x > -1$, $n \geq 2$. (неравенство Бернулли).

3. Доказать, что для любого натурального n

а) $(11^{n+2} + 12^{2n+1}) : 133$; б) $(4^n + 15n - 1) : 9$;

в) $(3^{2n+2} \cdot 5^{2n} - 3^{3n+2} \cdot 2^{2n}) : 1053$.

4. Докажите, что при всех допустимых значениях x и для любого натурального n имеют места тождества

а) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$, $x \neq 1$.

б) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \dots + \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)^2 = \frac{1}{x^2 - 1} \left(x^{2n+2} - \frac{1}{x^{2n}}\right) - 2n - 1$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. С помощью метода математической индукции докажите равенства:

а) $1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = n \cdot (2n - 1)$;

б) $\frac{1}{1 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(7n-6) \cdot (7n+1)} = \frac{n}{7n+1}$;

в) $-1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + (-1)^n (2n - 1) = (-1)^n \cdot n$;

г) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{n}{(2n-1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)} = \frac{n \cdot (n+1)}{2 \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)}$.

2. Докажите неравенства с помощью метода математической индукции

$$\text{а) } \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}; \text{ б) } \sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n};$$

$$\text{в) } |\sin nx| \leq n |\sin x| \text{ для любого } x.$$

3. Доказать, что для любого натурального n

$$\text{а) } (6^{2n} - 1) : 35; \text{ б) } (6^{2n} + 3^{n+2} + 3^2) : 11; \text{ в) } (n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) : 24.$$

4. Докажите, что при всех допустимых значениях x и для любого натурального n имеют места тождества

$$\text{а) } 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1;$$

$$\text{б) } \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \dots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x - x^{2^n}}{1-x^{2^n}}, \quad |x| \neq 1.$$

5. Докажите, что число диагоналей выпуклого n -угольника равно $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

6. Числовая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ определяется следующими условиями $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 3a_n + 1$. Докажите, что $a_n = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 3^{n-1} - 1)$.

Практическое занятие №17.

Тема занятия «Комплексные числа, алгебраическая форма записи»

Цель занятия: формирование понятия комплексного числа и умений выполнять действия над ними в алгебраической форме.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие задачи привели к необходимости расширения поля действительных чисел до поля комплексных чисел?
2. Дайте определение поля комплексных чисел.
3. Какие формы записи комплексного числа Вы знаете? Дайте их определения.
4. Определите следующие понятия: действительная и мнимая части комплексного числа, мнимая единица, коэффициент при мнимой части, сопряженное комплексное число, модуль и аргумент комплексного числа.
5. Какие способы геометрической интерпретации комплексных чисел Вы знаете?
6. Как перевести комплексное число из алгебраической формы записи в тригонометрическую форму и обратно?
7. Определите действия сложения, вычитания, умножения и деления над комплексными числами в алгебраической форме. Докажите записанные Вами правила. Какое свойство сопряженных комплексных чисел используется при делении?
8. Определите действия умножения, деления, возведения в целую степень и извлечение корня n -ой степени ($n \in \mathbb{N}$) для комплексных чисел записанных в тригонометрической и показательных формах. Укажите роль корней n -ой степени из единицы и их геометрическую интерпретацию.
9. Докажите формулы для умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме.

Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями
Задания, решаемые в аудитории

1. Решите уравнения во множестве комплексных чисел:

а) $x^2 + 2x + 10 = 0$ б) $x^2 - x + 3 = 0$.

2. Составьте квадратное уравнение по его корням

а) $x_1 = 3 - i$, $x_2 = 3 + i$, б) $x_1 = \frac{1 - 3i}{2}$, $x_2 = \frac{1 + 3i}{2}$.

3. Изобразите комплексные числа

$z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = -3 + 5i$; $z_3 = -4 - i$; $z_4 = -2 + 4i$; $z_5 = -4$.

4. Найдите действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел $5xi - 2 + 4y = 9i + 2x + 3yi$.

5. Вычислить в алгебраической форме

а) $(3 - 5i) + (1 + 2i)$; б) $(1 + 4i) \cdot (1 + 3i)$; в) $(-3 - i) \cdot (-1 + 2i)$; г) $\frac{1 + 2i}{1 - 3i}$;

д) $\frac{-1 + 3i}{-1 - 5i}$; е) $(3 + 2i)^2$; ж) i^{20} ; з) $\frac{i^8 - 3i^{11}}{1 + 2i^{19}}$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Решите уравнения во множестве комплексных чисел:

а) $x^2 - 3x + 5 = 0$; б) $x^2 + 12x + 40 = 0$.

2. Составьте квадратное уравнение по его корням

а) $x_1 = 7 - i$, $x_2 = 7 + i$; б) $x_1 = \frac{-2 - 5i}{4}$, $x_2 = \frac{-2 + 5i}{4}$.

3. Изобразите комплексные числа

$z_1 = 1 - 3i$; $z_2 = 2 + i$; $z_3 = -1 + 4i$; $z_4 = -3 - 3i$; $z_5 = 3$.

4. Найдите действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел $4x + 5y - 9 + 7(3x - y) \cdot i = 10z + 14yi$.

5. Вычислить в алгебраической форме

а) $(1 - i) - (3 + 2i)$; б) $(2 - 4i) \cdot (1 + 2i)$; в) $(1 + i) \cdot (4 - 3i)$; г) $\frac{1 - i}{1 + 4i}$; д) $\frac{-5 + 3i}{-2 + 2i}$;

$$6. \text{ e) } (1-3i)^3; \text{ ж) } (-i)^{12}; \text{ з) } \frac{i^{4n+3} + i^{15}}{2+i^{17}}.$$

Практическое занятие №18.
Тема занятия «Комплексные числа, тригонометрическая и
показательная форма записи»

Цель занятия: формирование понятия комплексного числа и умений выполнять действия над ними в тригонометрической форме.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие формы записи комплексного числа Вы знаете? Дайте их определения.
2. Определите следующие понятия: модуль и аргумент комплексного числа.
3. Какие способы геометрической интерпретации комплексных чисел Вы знаете?
4. Как перевести комплексное число из алгебраической формы записи в тригонометрическую форму и обратно?
5. Определите действия умножения, деления, возведения в целую степень и извлечение корня n -ой степени ($n \in \mathbb{N}$) для комплексных чисел записанных в тригонометрической и показательных формах. Укажите роль корней n -ой степени из единицы и их геометрическую интерпретацию.
6. Докажите формулы для умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Изобразите комплексные числа

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right); \quad z_2 = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right).$$

2. Переведите комплексные числа в тригонометрическую форму

а) 10; б) $2i$; в) $1+i$; г) $-\sqrt{3}+i$.

3. Вычислите, предварительно переведя числа в тригонометрическую форму

а) $(1+i) \cdot (2-2i)$; б) $\frac{\sqrt{3}-i}{2+2i}$; в) $(1-i)^{15}$; г) $\sqrt{1-i}$; д) $\sqrt[4]{1}$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = -2i$. Представьте их в показательной форме, найдите частные $\frac{z_1}{z_2}$ и результат представьте в алгебраической форме.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Переведите комплексные числа в тригонометрическую форму

а) -2 ; б) $-3i$; в) $-2-2i$; г) $2-2\sqrt{3}i$.

2. Вычислите, предварительно переводя числа в тригонометрическую форму

а) $(-3 + \sqrt{3}i) \cdot (-4 - 4i)$; б) $\frac{-2\sqrt{3} - 2i}{3 - 3i}$; в) $(-\sqrt{3} + 3i)^2$; г) $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$; д) $\sqrt[3]{-i}$.

3. Даны комплексные числа $z_1 = -5 + 5i\sqrt{3}$, $z_2 = 3i$. Представьте их в

показательной форме, найдите частные $\frac{z_2}{z_1}$ и результат представьте в алгебраической форме.

4. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Практическое занятие № 19

Тема занятия «Прямая линия на плоскости»

Цель занятия: Формирование умений составлять различные уравнения прямой и исследовать их взаимное расположение.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение уравнения линии. К линиям какого порядка относят прямую?
2. Выведите уравнение прямой с угловыми коэффициентами. Назовите геометрический смысл углового коэффициента. Любая ли прямая может быть задана уравнением с угловым коэффициентом?
3. Расскажите об общем уравнении прямой и о её расположении относительно координатных осей в зависимости от коэффициентов уравнения.
4. Выведите уравнение прямой в отрезках; назовите геометрический смысл его коэффициентов.
5. Расскажите о нормальном уравнении прямой.
6. Определите угол между прямыми. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
7. Выведите формулу расстояния между точкой и прямой.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Составьте уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b = 3$ и образующий с осью Ox угол:
а) 45° , б) 90° , в) 120° .
2. Уравнение прямой $2x - 3y = 6$ приведите к виду «в отрезках» на осях.

3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;3)$ и составляющей с осью Ox угол 60° и построить её.
4. Найдите точку пересечения двух прямых $3x - 4y - 29 = 0$, $2x + 5y + 19 = 0$.
5. Напишите уравнения двух прямых, проходящих через точку $A(3:4)$, так, чтобы одна была параллельна оси Ox , другая параллельна оси Oy .
6. Напишите уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1:1)$ под углом 45° к прямой $2x + 3y = 6$.
7. Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(6:2)$ на прямую $x - 4y - 7 = 0$.
8. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(5:-4)$ и составляющей с осью Ox тот же угол, что и прямая $5x + 2y - 3 = 0$.
9. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $2x - 3y + 5 = 0$ и $3x + y - 7 = 0$ перпендикулярной к прямой $y = 2x$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Составьте уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b = 3$ и образующий с осью Ox угол:
 - а) 60° , б) 135° .
2. Уравнение прямой $3x - 2y + 4 = 0$ приведите к виду «в отрезках» на осях.
3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;3)$ и составляющей с осью Ox угол: а) 45° , б) 135° и построить её.
4. Стороны AB , BC и AC треугольника ABC даны соответственно уравнениями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Определите координаты его вершин.
5. Напишите уравнение прямой, параллельной оси Ox и отсекающей на оси Oy отрезок, равный: а) 6, б) -2 , в) 0.
6. Напишите уравнение прямой, если точка $A(2;3)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

7. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4;3)$ и параллельной другой прямой $x + 2y + 3 = 0$.
8. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - 3y - 1 = 0$ и $3x - y - 2 = 0$ перпендикулярно прямой $y = x + 1$.
9. В треугольнике ABC даны: 1) уравнение стороны AB $3x + 2y = 12$; 2) уравнение высоты BM $x + 2y = 4$; 3) уравнение высоты AM $4x + y = 6$, где M – точка пересечения высот. Напишите уравнения сторон AC , BC и высоты CM .
10. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$ и $8x + 4y + 9 = 0$ и параллельной прямой $x + 3y = 0$.
11. Выполните ИДЗ №2 по теме «Прямая на плоскости»:
- Составить уравнение прямой
 - проходящей через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$;
 - проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ параллельно прямой $l: Ax + By + C = 0$;
 - проходящей через точку $B(x_2; y_2)$ перпендикулярно прямой $l: Ax + By + C = 0$;
 - проходящей через точку $B(x_2; y_2)$ и параллельной оси Ox ;
 - проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ и параллельной оси Oy ;
 - проходящей через точку $B(x_2; y_2)$ и перпендикулярной оси Ox ;
 - проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ и перпендикулярной оси Oy ;
 - с угловым коэффициентом k и проходящей через точку $A(x_1; y_1)$;
 - проходящей через точку $B(x_2; y_2)$ и составляющей с осью Ox угол α ;
 - проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ и образующей с прямой $l: Ax + By + C = 0$ угол α .
 - Построить все прямые из задания 1.
 - Для каждой из прямой из задания 1 записать (если это возможно)
 - общее уравнение прямой;
 - уравнение прямой с угловым коэффициентом;
 - уравнение прямой в отрезках;
 - нормальное уравнение прямой.
 - Определить угол между прямой AB и прямой $l: Ax + By + C = 0$.
 - Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой AB , концы которого лежат на осях координат.
 - Записать уравнения диагоналей квадрата из задания 5 и определить их длину.
 - Определить координаты всех вершин квадрата из задания 5 и координаты

точки O - точки пересечения его диагоналей.

8. Определить расстояние от точки O из задания 7 до прямой $l: Ax + By + C = 0$.

9. Найти координаты такой точки C , что треугольник ABC будет равносторонним.

Данные для заданий выберите из таблицы согласно своему варианту:

Вариант	$A(x_1; y_1)$	$B(x_2; y_2)$	$l: Ax + By + C = 0$	k	α
1	$(-1; 3)$	$(1; 1)$	$2x + 3y - 1 = 0$	-1	30°
2	$(-2; 3)$	$(1; 2)$	$x + 2y - 1 = 0$	-2	45°
3	$(-3; 3)$	$(1; 4)$	$2x - 3y - 1 = 0$	-3	60°
4	$(-4; 3)$	$(2; 1)$	$5x + 3y - 10 = 0$	-4	120°
5	$(-5; 3)$	$(2; 2)$	$x + 2y - 10 = 0$	-5	135°
6	$(-1; 1)$	$(2; 4)$	$x + 4y - 5 = 0$	-6	150°
7	$(-1; 2)$	$(3; 1)$	$-5x + y - 7 = 0$	6	30°
8	$(-1; 4)$	$(3; 2)$	$2x - 5y - 1 = 0$	5	45°
9	$(-2; 1)$	$(3; 4)$	$-2x + 3y + 1 = 0$	4	60°
10	$(-2; 2)$	$(4; 1)$	$-x + 2y + 1 = 0$	3	120°
11	$(-2; 4)$	$(4; 2)$	$-2x + 3y - 1 = 0$	2	135°
12	$(-3; 1)$	$(4; 4)$	$-5x + 3y - 10 = 0$	1	150°
13	$(-3; 2)$	$(5; 1)$	$-x + 2y - 10 = 0$	8	30°
14	$(-3; 4)$	$(5; 2)$	$-x + 4y - 5 = 0$	10	45°
15	$(-4; 1)$	$(5; 4)$	$-5x + y + 7 = 0$	-9	60°
16	$(-4; 2)$	$(1; -1)$	$2x + 5y - 1 = 0$	-1	120°
17	$(-4; 4)$	$(1; -2)$	$4x - 3y - 1 = 0$	-2	135°
18	$(-5; 1)$	$(1; -4)$	$-x + 2y - 7 = 0$	-3	150°
19	$(-5; 2)$	$(2; -1)$	$-2x + 5y - 1 = 0$	-4	30°
20	$(-5; 4)$	$(2; -2)$	$5x - y - 10 = 0$	-5	45°
21	$(1; 3)$	$(2; -4)$	$x - 8y - 10 = 0$	-6	60°
22	$(2; 3)$	$(3; -1)$	$-7x + 4y - 5 = 0$	6	120°
23	$(3; 3)$	$(3; -2)$	$-6x + y - 7 = 0$	5	135°
24	$(4; 3)$	$(3; -4)$	$2x - 9y - 1 = 0$	4	150°
25	$(5; 3)$	$(4; -1)$	$-4x + 3y - 1 = 0$	3	30°
26	$(1; 1)$	$(-4; -2)$	$x - 3y - 8 = 0$	2	45°
27	$(1; 2)$	$(-4; -4)$	$x - 9y - 1 = 0$	1	60°
28	$(1; 4)$	$(-5; -1)$	$x + 3y - 5 = 0$	8	120°
29	$(2; 1)$	$(-5; -2)$	$x - 4y - 1 = 0$	10	135°
30	$(2; 2)$	$(-5; -4)$	$-3x + 4y - 5 = 0$	-9	150°

Практическое занятие № 20

Тема занятия «Канонические уравнения линий второго порядка»

Цель занятия: Формирование умений составлять канонические уравнения кривых второго порядка.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение окружности. Выведите уравнение окружности с центром в заданной точке. Запишите каноническое уравнение окружности.
2. В каком случае уравнение вида $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ на плоскости задает окружность?
3. Сформулируйте определение эллипса. Определите следующие понятия: центр эллипса, фокусное расстояние, полуфокусное расстояние, диаметр эллипса, большая и малая оси (полуоси) эллипса, эксцентриситет эллипса.
4. Укажите способы построения эллипса. Нарисуйте эллипс и покажите на нем все понятия, определенные выше.
5. Выведите каноническое уравнение эллипса.
6. Дайте определение гиперболы. Нарисуйте эту линию. Введите понятия центра гиперболы, фокусного и полуфокусного расстояний, диаметра гиперболы, действительной оси (полуоси), мнимой оси гиперболы, вершин и асимптот гиперболы. Покажите введенные понятия на рисунке. Определите эксцентриситет гиперболы.
7. Выведите каноническое уравнение гиперболы.
8. Расскажите о равнобочной гиперболе.
9. Сформулируйте определение параболы и постройте ее. Покажите фокус и директрису параболы, вершину параболы.
10. Выведите каноническое уравнение параболы.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Постройте эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найдите: 1) полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет.
2. Напишите каноническое уравнение эллипса, если известно, что:
1) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b = 3$; 2) расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет $\varepsilon = 3/5$; 3) расстояние между фокусами равно $2\sqrt{13}$, а $a - b = 1$.
3. Напишите каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1 = (2; 3)$ и $M_2 = (1; 3\sqrt{5}/2)$.
4. Постройте гиперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$.
Найдите: 1) действительную и мнимую полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.
5. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:
1) расстояние между фокусами $2c = 10$, а между вершинами $2a = 8$;
2) расстояние между фокусами $2c = 6$, а эксцентриситет $\varepsilon = 3/2$.
6. Напишите уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.
7. Постройте параболу $y^2 = 6x$. Найдите: 1) координаты фокуса; 2) уравнение директрисы.
8. Напишите уравнение параболы, проходящей через точки $(0; 0)$ и $(1; -3)$ и симметричной относительно оси Ox .

Задания для самостоятельной работы дома

1. Постройте эллипс $3x^2 + 16y^2 = 192$. Найдите 1) полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет.
2. Напишите каноническое уравнение эллипса, если известно, что:
1) большая полуось $a = 6$, а эксцентриситет $\varepsilon = 0,5$; 2) расстояние между фокусами равно 6, а $a + b = 9$.
3. Напишите каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки:

- 1) $M_1(4; 9/5)$ и $M_2(5\sqrt{5}/3; 2)$; 2) $M_1(2; 0)$ и $M_2(1; 2)$.
4. На эллипсе $9x^2 + 25y^2 = 225$ найдите точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния ее от левого фокуса.
5. Постройте гиперболу $3x^2 - 4y^2 = 12$. Найдите 1) действительную и мнимую полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.
6. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:
- 1) действительная полуось $a = 2\sqrt{5}$, а эксцентриситет $e = \sqrt{1,2}$;
- 2) расстояние между фокусами $2c = 20$, а уравнение асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$;
- 3) мнимая полуось $b = 4$, а расстояние между фокусами $2c = 10$.
7. Найдите расстояние фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ от ее асимптот и угол между асимптотами.
8. Напишите уравнение гиперболы, проходящей через точки $(0; 0)$ и $(2; -4)$, и симметричной относительно оси Oy .
9. Напишите уравнение параболы и ее директрисы, если известно, что парабола проходит через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 + 4y = 0$, и симметрична относительно оси Oy .
10. Определите, пересекает ли заданная прямая L данный эллипс Γ , касается его или проходит вне его:
- 1) $L: 2x - y - 3 = 0$, $\Gamma: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;
- 2) $L: 2x + y - 10 = 0$, $\Gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$;
- 3) $L: 3x + 2y - 20 = 0$, $\Gamma: \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$.

Практическое занятие № 21

Тема занятия «Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду»

Цель занятия: Формирование навыков приводить уравнения кривых второго порядка к каноническому виду.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. При пересечении каких поверхностей можно получить все линии второго порядка? Покажите как это можно сделать?
2. Дайте определение общего уравнения линии второго порядка.
3. Назовите основные этапы приведения общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.
4. Расскажите, как от общего уравнения кривой второго порядка перейти к пятичленному уравнению.
5. С каким преобразованием системы координат связано преобразование пятичленного уравнения кривой второго порядка к каноническому уравнению. Выполните это преобразование.
6. Проведите классификацию кривых второго порядка.
7. Выведите полярное уравнение эллипса, гиперболы, параболы.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Приведите уравнение кривых второго порядка к каноническому виду и построить заданные кривые

а) $x^2 + 4xy + 4y^2 = 0$, б) $2x^2 + y^2 - 2x + y = 0$, в) $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$.

2. Определите, какую кривую в полярной системе координат задает уравнение

а) $\rho = \frac{10}{2 - 2 \cos \varphi}$; б) $\rho = \frac{5}{3 + 4 \cos \varphi}$

и приведите уравнения кривых к каноническому виду в прямоугольной декартовой системе координат.

Задания для самостоятельной работы дома

Выполните ИДЗ по теме «Приведение кривых 2-го порядка к каноническому виду» согласно номеру вашего варианта.

Приведите уравнение кривых второго порядка к каноническому виду и построить заданные кривые:

1. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9 = 0$,
2. $9x^2 - 6xy + y^2 - \sqrt{10}x - 3\sqrt{10}y = 0$,
3. $23x^2 + 72xy + 2y^2 + 25 = 0$,
4. $4x^2 - 4xy + y^2 - 15 = 0$,
5. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2\sqrt{3}x + 2y = 0$,
6. $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 16 = 0$,
7. $34x^2 + 24xy + 41y^2 - 25 = 0$,
8. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$,
9. $2x^2 + 12xy - 7y^2 + 20 = 0$,
10. $x^2 + 2xy + y^2 = 0$,
11. $-17x^2 + 2\sqrt{35}xy + 17y^2 = 0$,
12. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + 4 = 0$,
13. $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$,
14. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$,
15. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$,
16. $29x^2 + 144xy + 71y^2 - 40x + 30y - 50 = 0$,
17. $40x^2 + 36xy + 25y^2 - 8x - 14y + 1 = 0$,
18. $xy + 2x + y + \frac{5}{2} = 0$,
19. $9x^2 + 16y^2 - 24xy + 30x - 40y - 25 = 0$,
20. $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}y^2 + 2xy - 2x - 2\sqrt{3}y = 0$,
21. $9x^2 + 6y^2 + 4xy + 2x - 4y - 4 = 0$,
22. $9x^2 - 6xy + y^2 - 3\sqrt{10}x - 9\sqrt{10}y - 90 = 0$,

23. $25x^2 + 40y^2 + 36xy - 34x - 116y + 89 = 0,$

24. $16x^2 + 9y^2 - 24xy + 66y - 88x + 121 = 0,$

25. $9x^2 + 4y^2 - 12xy + 39 = 0,$

26. $3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0,$

27. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0,$

28. $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0,$

29. $3x^2 - 12xy + 6y^2 + 2x - 2y + 5 = 0,$

30. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0.$

Практическое занятие № 22

Тема занятия «Плоскость и прямая в пространстве»

Цель занятия: изучение способов задания плоскости и прямой в пространстве.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие уравнения плоскости в пространстве Вы знаете? Запишите эти уравнения.
2. Выведите уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору.
3. Получите общее уравнение плоскости и расскажите о расположении плоскости в зависимости от равенства нулю некоторых из коэффициентов этого уравнения. Каков геометрический смысл коэффициентов при неизвестных общего уравнения плоскости?
4. Сформулируйте условия прохождения плоскости через начало координат, через координатные оси.
5. Сформулируйте условие параллельности плоскости координатным осям; координатным плоскостям.
6. Сформулируйте условие перпендикулярности плоскости координатным осям; координатным плоскостям.
7. Какими уравнениями задаются координатные плоскости?
8. Получите уравнение плоскости в отрезках. Расскажите о геометрическом смысле коэффициентов этого уравнения.
9. Запишите нормальное уравнение плоскости
10. Выведите формулу расстояния от точки до плоскости.
11. Дайте определение угла между плоскостями и выведите формулу для его нахождения. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
12. Как можно задать прямую в пространстве? Расскажите об общих уравнениях прямой.

13. Выведите канонические и параметрические уравнения прямой. Определите геометрический смысл входящих в эти уравнения коэффициентов.
14. Расскажите как перейти от общих уравнений прямой к каноническим (параметрическим) и обратно.
15. Дайте определение для угла между прямыми в пространстве. Выведите формулу для его нахождения и сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
16. Дайте определение угла между прямой и плоскостью. Выведите формулу для его нахождения и сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности прямой плоскости.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Даны точки $M_1(3; -1; 2)$ и $M_2(4; -2; -1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overline{M_1M_2}$.
2. Построить плоскость $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ и найти углы ее нормального вектора с осями координат.
3. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M_0(0; -2; 3)$.
4. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(2; 2; 0)$ и $M_2(4; 0; 0)$.
5. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:
 - 1) $2x - 3y + 5z - 7 = 0$, $2x - 3y + 5z + 3 = 0$;
 - 2) $4x + 2y - 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$;
 - 3) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 7 = 0$.
6. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1; -1; 2)$ и перпендикулярной плоскостям $x - 2y + z - 4 = 0$ и $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(3;-2;-7)$ параллельно плоскости $2x - 3z + 5 = 0$
8. Найти расстояние точки $(5;1;-1)$ от плоскости $x - 2y - 2z + 4 = 0$.
9. Привести к каноническому виду уравнение следующей прямой
- $$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$$
10. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2;0;-3)$ параллельно прямой $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$.
11. Доказать параллельность прямых $x = 2t + 5, y = -t + 2, z = t - 7$ и
- $$\begin{cases} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$$
12. Найти угол между прямыми $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0, \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x + 3y - z - 6 = 0. \end{cases}$
13. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ и перпендикулярной плоскости $2x + 3y - z = 4$.
14. Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:
- 1) $3x - y - 2z - 5 = 0, \quad x + 9y - 3z + 2 = 0$;
 - 2) $2x + 3y - z - 3 = 0, \quad x - y - y + 5 = 0$;
 - 3) $2x - 5y + z = 0, \quad x + 2z - 3 = 0$.
2. Найти расстояние точки $(4;3;0)$ от плоскости, проходящей через точки $M_1(1;3;0), M_2(4;-1;2), M_3(3;0;1)$.
3. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $(1;2;-4), (-1;2;-4)$.

4. Доказать, что прямая $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости

$2x + y - z = 0$, а прямая $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3}$ лежит в этой плоскости.

5. Выполните ИДЗ № 8 в соответствии с номером вашего варианта

1. Составить уравнение плоскости

- а) проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overline{BC}$;
- б) проходящей через точки A , B и C ;
- в) проходящей через точки B и C и перпендикулярной плоскости α ;
- г) проходящей через ось Ox и перпендикулярной плоскости ABC ;
- д) проходящей через ось Oy и перпендикулярной плоскости ABC ;
- е) проходящей через ось Oz и перпендикулярной плоскости ABC ;
- ж) содержащей ось Ox и проходящей через точку A ;
- з) содержащей ось Oy и проходящей через точку B ;
- и) содержащей ось Oz и проходящей через точку C ;
- к) проходящей через точку B и линию пересечения плоскостей XOY и α ;
- л) проходящей через точку A и параллельной плоскости α .

2. Найти расстояние от начала координат до плоскости ABC .

3. Найти угол между плоскостями ABC и α .

4. Составить канонические уравнения прямой

- а) проходящей через точку A и параллельной вектору $\overline{BC}$;
- б) проходящей через точки B и C ;
- в) проходящей через точку B и пересекающей ось Ox под прямым углом;
- г) являющейся линией пересечения плоскостей ABC и α ;
- д) проходящей через точку C и образующей с осью Oy угол 60° ;
- е) проходящей через точку B и параллельной оси Oz .

5. Определить угол между прямыми AB и BC .

6. Определить угол между прямой AB и плоскостью α .

7. Определить площадь пирамиды $OABC$, где точка O - начало координат.

8. Записать уравнение высоты пирамиды $OABC$, опущенной из вершины O , и определить ее длину.

9. Найти площади граней пирамиды $OABC$.

10. В пирамиде $OABC$ определить угол между

а) ребрами BC и AO ;

б) гранями ABC и AOC ;

в) ребром AO и гранью ABC .

Данные для заданий выбираются из предлагаемой студентам таблицы согласно их варианту.

Вариант	$A(x_1; y_1; z_1)$	$B(x_2; y_2; z_2)$	$C(x_3; y_3; z_3)$	α
1	$(-1; 3; 2)$	$(1; 1; -5)$	$(-4; 2; 4)$	$2x + 3y + 3z - 1 = 0$
2	$(-2; 3; 1)$	$(1; 2; 4)$	$(-4; 4; 5)$	$x + 2y - 4z - 1 = 0$
3	$(-3; 3; -5)$	$(1; 4; -2)$	$(-5; 1; 4)$	$2x - 3y + z - 1 = 0$
4	$(-4; 3; 2)$	$(2; 1; 2)$	$(-5; 2; -3)$	$5x + 3y - 2z - 10 = 0$
5	$(-5; 3; 1)$	$(2; 2; -5)$	$(-5; 4; -4)$	$x + 2y - 3z - 10 = 0$
6	$(-1; 1; 5)$	$(2; 4; -3)$	$(1; 3; 1)$	$x + 4y + 4z - 5 = 0$
7	$(-1; 2; -3)$	$(3; 1; 4)$	$(2; 3; -5)$	$-5x + y + 3z - 7 = 0$
8	$(-1; 4; 1)$	$(3; 2; -1)$	$(3; 3; 7)$	$2x - 5y - z - 1 = 0$
9	$(-2; 1; -1)$	$(3; 4; -2)$	$(4; 3; -2)$	$-2x + 3y - z + 1 = 0$
10	$(-2; 2; 4)$	$(4; 1; -2)$	$(5; 3; -6)$	$-x + 2y + 2z + 1 = 0$
11	$(-2; 4; 1)$	$(4; 2; -5)$	$(1; 1; -7)$	$-2x + 3y + 3z - 1 = 0$
12	$(-3; 1; 1)$	$(4; 4; 2)$	$(1; 2; -6)$	$-5x + 3y + 2z - 10 = 0$
13	$(-3; 2; 3)$	$(5; 1; -2)$	$(3; -2; 6)$	$-x + 2y - z - 10 = 0$
14	$(-3; 4; -2)$	$(5; 2; -3)$	$(3; -4; -5)$	$-x + 4y - 2z - 5 = 0$
15	$(-4; 1; 2)$	$(5; 4; -2)$	$(4; -1; -6)$	$-5x + y - z + 7 = 0$
16	$(-4; 2; 4)$	$(1; -1; 3)$	$(-4; -2; -5)$	$2x + 5y - 3z - 1 = 0$
17	$(-4; 4; 5)$	$(1; -2; 7)$	$(-4; -4; 1)$	$4x - 3y - z - 1 = 0$
18	$(-5; 1; 4)$	$(1; -4; 2)$	$(-5; -1; 6)$	$-x + 2y + 3z - 7 = 0$
19	$(-5; 2; -3)$	$(2; -1; -2)$	$(-5; -2; 2)$	$-2x + 5y + 2z - 1 = 0$
20	$(-5; 4; -4)$	$(2; -2; 3)$	$(-5; -4; 2)$	$5x - y + 2z - 10 = 0$
21	$(1; 3; 1)$	$(2; -4; -3)$	$(1; 1; -5)$	$x - 8y + 3z - 10 = 0$
22	$(2; 3; -5)$	$(3; -1; 2)$	$(1; 2; 4)$	$-7x + 4y + z - 5 = 0$
23	$(3; 3; 7)$	$(3; -2; 6)$	$(1; 4; -2)$	$-6x + y - z - 7 = 0$
24	$(4; 3; -2)$	$(3; -4; -5)$	$(2; 1; 2)$	$2x - 9y - z - 1 = 0$
25	$(5; 3; -6)$	$(4; -1; -6)$	$(2; 2; -5)$	$-4x + 3y - 3z - 1 = 0$
26	$(1; 1; -7)$	$(-4; -2; -5)$	$(2; 4; -3)$	$x - 3y + 2z - 8 = 0$
27	$(1; 2; -6)$	$(-4; -4; 1)$	$(3; 1; 4)$	$x - 9y + 3z - 1 = 0$

28	$(1;4;2)$	$(-5;-1;6)$	$(-3;4;-2)$	$x + 3y - 4z - 5 = 0$
29	$(2;1;-5)$	$(-5;-2;2)$	$(-4;1;2)$	$x - 4y + 5z - 1 = 0$
30	$(2;2;-6)$	$(-5;-4;2)$	$(-4;2;4)$	$-3x + 4y + 2z - 5 = 0$

Практическое занятие № 23

Тема занятия «Поверхности второго порядка»

Цель занятия: изучение формы, уравнений и свойств поверхностей второго порядка.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Запишите общее уравнение поверхности второго порядка. Перечислите, какие поверхности второго порядка вы знаете.
2. Дайте определение эллипсоида, исследуйте его форму с помощью метода сечений, постройте эту поверхность.
3. Расскажите об эллипсоиде вращения и о сфере.
4. Дайте определения однополостного и двуполостного гиперboloидов, исследуйте их форму с помощью метода сечений, постройте эти поверхности.
5. Расскажите о гиперboloидах вращения.
6. Дайте определения эллиптического и гиперболического параболоидов, исследуйте их форму с помощью метода сечений, постройте эти поверхности. Для какого из параболоидов существует параболоид вращения?
7. Дайте определение цилиндрической поверхности. Какие цилиндрические поверхности Вы знаете, дайте им определения и нарисуйте их. Существуют ли цилиндры вращения?
8. Дайте определение конуса второго порядка, исследуйте форму этой поверхности и нарисуйте ее.
9. Расскажите о конусе вращения.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Составить уравнение сферы в каждом из следующих случаев:

- сфера имеет центр $C(0;0;0)$ и радиус $R = 9$;
 - сфера проходит через начало координат и имеет центр $C(4;-4-2)$;
 - центром сферы является начало координат, и плоскость $16x - 15y - 12z + 75 = 0$ является касательной к сфере.
2. Составить уравнение сферы радиуса $R = 3$, касающейся плоскости $x + 2y + 2z + 3 = 0$ в точке $M(1;1;-3)$.
 3. Сфера, центр которой лежит на прямой $\begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0, \\ 4x + 5y + z - 14 = 0, \end{cases}$ касается плоскостей $x + 2y - 2z - 2 = 0$, $x + 2y - 2z + 4 = 0$. Составить уравнение этой сферы.
 4. Определить координаты центра C и радиуса R сферы, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 1 = 0$.
 5. Какие поверхности определяются следующими уравнениями:
 1) $x^2 + y^2 = 4$; 2) $y^2 - 2x$; 3) $x^2 + y^2 = 2y$; 4) $x^2 + y^2 = 0$;
 5) $x^2 - z^2 = 0$; 6) $y^2 = xy$; 7) $x^2 + 2x + y^2 = 0$.
 Построить эти поверхности.
 6. Установить, что плоскость $x - 2 = 0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$ по эллипсу; найти его полуоси и вершины.
 7. По какой линии пересекается конус $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ с плоскостями:
 1) $y = 3$; 2) $z = 1$; 3) $x = 0$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Составить уравнение сферы в каждом из следующих случаев:
 - 1) сфера имеет центр $C(5; -3; 7)$ и радиус $R = 2$;
 - 2) сфера проходит через точку $A(2; -1; -3)$ и имеет центр $C(3; -2; 1)$;
 - 3) сфера имеет центр $C(3; -5; -2)$, и плоскость $2x - y - 3z + 11 = 0$ является касательной к сфере.

2. Вычислить радиус R сферы, которая касается плоскостей $3x + 2y - 6z - 15 = 0$, $3x + 2y - 6z + 55 = 0$.

3. Составить уравнение сферы, касающейся двух параллельных плоскостей $6x - 3y - 2z - 35 = 0$, $6x - 3y - 2z + 63 = 0$, причем одной из них в точке $M(5; -1; -1)$.

4. Определить координаты центра C и радиуса R сферы, заданной одним из следующих уравнений:

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 + 20y = 0$.

5. Какие поверхности определяются следующими уравнениями:

1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 2) $x^2 - y^2 = 0$; 3) $z^2 = y$;

4) $z + x^2 = 0$; 5) $x^2 = 4y$; 6) $z^2 = xz$.

Построить эти поверхности.

6. Установить, что плоскость $z + 1 = 0$ пересекает однополосный гиперболоид $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{2} = 1$ по гиперболе; найти ее полуоси и вершины.

7. Установить, что плоскость $y + 6 = 0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 6z$ по параболе; найти ее параметр и вершину.

8. Построить поверхность $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$ и найти площади ее сечений плоскостями: 1) $x = 3$; 2) $y = 1$.

5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Практическое занятие № 24

Тема занятия «Первообразная функция, неопределенный интеграл и его свойства. Непосредственное интегрирование»

Цель занятия: Установление связи между понятиями первообразной функции и неопределенный интеграл. Формирование навыков вычисления неопределенных интегралов с помощью непосредственного интегрирования.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение первообразной функции для данной функции $f(x)$ на данном промежутке.
2. Как связаны между собой две первообразные для функции $f(x)$ в некотором промежутке?
3. Что называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$?
4. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла (правила интегрирования).
5. Составьте таблицу основных интегралов.
6. В чем суть метода непосредственного интегрирования?
7. Сформулируйте теорему об инвариантности формул интегрирования.
9. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
Когда целесообразно применять замену переменной интегрирования?
10. Расскажите, как применяется формула замены переменной в неопределенном интеграле. Что необходимо сделать после сведения интеграла к табличному?
11. Запишите формулу интегрирования по частям.
12. Когда целесообразно применение способа интегрирования по частям?
13. Интегралы какого вида можно вычислять с помощью формулы интегрирования по частям?
14. Что принимается за u для интегралов вида

$$\int P(x)e^{ax} dx, \int P(x)\sin ax dx, \int P(x)\cos ax dx \quad (P(x) - \text{многочлен})?$$

15. Что принимается за u для интегралов вида $\int P(x)\ln x dx, \int P(x)\arctg x dx, \int P(x)\operatorname{arccotg} x dx, \int P(x)\arcsin x dx, \int P(x)\arccos x dx$ ($P(x)$ - многочлен)?

16. Как вычисляются интегралы $\int a^{kx} \sin nxdx$ и $\int a^{kx} \cos nxdx$?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите первообразные следующих функций и результаты проверьте дифференцированием: а) $\frac{1}{\sin^2 x}$; б) $x^2 - 2x + 2$.

2. Вычислите методом непосредственного интегрирования:

а) $\int (x^5 + 4x^2 - 3x + 1)dx$; б) $\int (1-2x)(1-x)(1-3x)dx$; в) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx$;

г) $\int \frac{2x^2 + x - 1}{x^3} dx$; д) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$; е) $\int (1 + \sin x + \cos x) dx$.

3. Преобразуя дифференциал, сведите интегралы к табличным и вычислите их:

а) $\int \sqrt[3]{1-3x} dx$; б) $\int \frac{dx}{5-2x}$; в) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$; г) $\int \frac{dx}{\cos^2 12x}$.

Методом замены переменной вычислите интегралы:

а) $\int \cos^5 4x \cdot \sin 4x dx$; б) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4-1}}$.

1. Вычислите интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int (1-3x)e^{2x} dx$; б) $\int (x^2-1)\sin 3x dx$; в) $\int x \arctg 3x dx$;

г) $\int e^x \cos x dx$; д) $\int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} dx$.

2. Вычислите интегралы:

а) $\int e^{x+x^2} (1+2x) dx$; б) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$; в) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

3. Разбейте предложенные ниже интегралы на классы

А) – интегралы, вычисляемые непосредственно;

Б) – интегралы, вычисляемые с помощью замены переменных;

В) – интегралы, берущиеся по частям

$\int (3-x^2)^3 dx$; $\int \frac{e^{x/2} dx}{\sqrt{16-e^x}}$; $\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx$; $\int (2^x + 3^x)^2 dx$; $\int \frac{x dx}{(5+9x^2)^3}$; $\int e^{2x}(1-x) dx$;

$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$; $\int e^{5+9x^2} x dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$; $\int (1-3x)\cos 5x dx$; $\int (2x^3-1)e^{-x} dx$;

$\int e^{-3x} \cos 4x dx$; $\int \frac{dx}{x^2-36}$; $\int x^2 \arccos 2x dx$; $\int (2x-3)^{10} dx$; $\int 2^{3x} \sin 5x dx$;

$\int \sin^4 3x \cos 3x dx$; $\int (2x^3-1)\ln(x-1) dx$.

5. Вычислите интегралы, вычисляемые непосредственно, из предложенных в предыдущем задании.

6. В классе Б) укажите интегралы, сводящиеся к интегралам вида

а) $\int t^\alpha dt$; б) $\int \sin t dt$.

7. Для интегралов класса В) определите

а) какую функцию необходимо выбирать в качестве u ;

б) сколько раз необходимо брать интеграл по частям;

в) вычислите по одному интегралу из каждого из трех классов берущихся по частям.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Даны пары функций. Из каждой пары выпишите ту функцию, которая является первообразной для другой, и обозначьте ее через $F(x)$:

а) $\cos 3x$ и $-3 \sin 3x$; б) $3x^2 + 5$ и $x^3 + 5x$; в) $\frac{5}{\cos^2 5x}$ и $\operatorname{tg} 5x$;

г) $2e^{2x}$ и e^{2x} ; д) 7^x и $7^x \ln 7$; е) $-\frac{2}{\sin^2 2x}$ и $\operatorname{ctg} 2x$.

2. Найдите первообразные следующих функций и результаты проверьте дифференцированием:

а) $\frac{2}{x}$; б) $\sqrt{x}$; в) $\sin x + 2\cos x$; г) $e^x + 3x$.

3. Проверьте справедливость формул интегрирования:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + C$; б) $\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right) + C$.

4. Вычислите методом непосредственного интегрирования:

а) $\int (3 - x^2)^3 dx$; б) $\int (x + \sqrt{x}) dx$; в) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$;

г) $\int \frac{x^2 + 3x - 1}{\sqrt[3]{x}} dx$; д) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$; е) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

5. Преобразуя дифференциал, сведите интегралы к табличным и вычислите их:

а) $\int (2x - 3)^{10} dx$; б) $\int \frac{dx}{1 - x}$; в) $\int \frac{dx}{3x - 7}$; г) $\int 2e^{-3x} dx$; д) $\int (\sin 5x - \cos 7x) dx$.

4. Методом замены переменной вычислите интегралы:

а) $\int x(\sin x^2) dx$; б) $\int \frac{x dx}{x^2 - 1}$; в) $\int \frac{e^{\frac{x}{2}} dx}{\sqrt{16 - e^x}}$.

5. Вычислите интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int (x - 1)\cos 2x dx$; б) $\int \arcsin x dx$; в) $\int (x^2 - 1)\ln 2x dx$; г) $\int e^{-x} \cos 2x dx$.

6. Вычислите интегралы:

а) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 4x^2}}$; в) $\int \frac{\cos x dx}{(5\sin x + 2)^2}$.

4. Разбейте предложенные ниже интегралы на классы

А) – интегралы, вычисляемые непосредственно;

Б) – интегралы, вычисляемые с помощью замены переменных;

В) – интегралы, берущиеся по частям.

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{3x-7}; \int \frac{dx}{3+x^2}; \int \frac{dx}{\cos^2 12x}; \int (1-3x) \ln 2x dx; \int \frac{xdx}{5+9x^2}; \int \frac{e^{2x}}{e^x-1} dx; \int \frac{dx}{x \ln^3 x}; \\
& \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2\cos x}}; \int \frac{2x^2+x-1}{x^3} dx; \int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)}; \int (2^x - 2^{-x}) dx; \int \frac{\ln^2 x dx}{x}; \int x \sin x^2 dx; \\
& \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}; \int 2^{-x} \cos 5x dx; \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-\cos x}}; \int (x^2+1) 2^{3x} dx; \int (3x^4-3x^2) \sin 3x dx; \\
& \int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x}; \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx; \int \cos x e^{\sin x} dx; \int x^2 e^{2x} dx; \int \ln 3x dx; \int (x^3-2x) \sin x dx; \\
& \int (2x-1) 2^{3x} dx; \int \frac{dx}{x \ln x}; \int (1-5x^3) \cos 2x dx.
\end{aligned}$$

5. В классе Б) укажите интегралы

- а) вычисляемые с помощью подстановки $t = \ln x$;
- б) вычисляемые с помощью подстановки $t = x^2$;
- в) вычисляемые с помощью подстановки $t = \sin x$.

6. В классе В) укажите интегралы

- а) дважды берущиеся по частям;
- б) трижды берущиеся по частям;
- в) сводящиеся к линейному уравнению относительно искомого интеграла.

7. Вычислите по одному интегралу из каждого класса, выделенному в заданиях 1-3.

Практическое занятие № 25

Тема занятия «Интегрирование рациональных функций»

Цель занятия: изучение способов интегрирования рациональных функций и формирование навыков интегрирования.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Расскажите о нахождении интегралов вида $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$; $\int \frac{(Ax + B)dx}{ax^2 + bx + c}$.
2. Как находится интеграл от целой рациональной функции?
3. Какая рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется правильной?
4. Рациональные дроби, какого вида называются элементарными?
5. Как связана правильная рациональная дробь с элементарными дробями? Расскажите, как составляется схема разложения правильной дроби на основные элементарные дроби.
6. Какой способ применяется для разложения правильной рациональной дроби на сумму элементарных дробей?
7. Как интегрируются правильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от правильной рациональной дроби.
8. Как интегрируются неправильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от неправильной рациональной дроби.
9. Всегда ли можно найти интеграл от рациональной функции?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Вычислите следующие интегралы:

а) $\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 3}$; б) $\int \frac{5x + 3}{x^2 + 10x + 29}$; в) $\int \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 7}$; г) $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 2x^3 + 3}$;
д) $\int \frac{(x^2 + 2)dx}{(x + 1)^2(x - 1)}$; е) $\int \frac{dx}{x^4 + x^2}$; ж) $\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 - 1} dx$.

Задания для самостоятельной работы дома

Вычислите следующие интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 25}$; б) $\int \frac{dx}{x^2 - x - 6}$; в) $\int \frac{x dx}{2x^2 + 2x + 5}$; г) $\int \frac{2x^3 + 3x}{x^4 + x^2 + 1} dx$;

д) $\int \frac{6x^3 - 7x^2 + 3x - 1}{2x - 3x^2} dx$; е) $\int \frac{2x + 3}{(x - 2)(x + 5)} dx$; ж) $\int \frac{dx}{1 - x^3}$; з) $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$;

и) $\int \frac{dx}{(1 + x^3)^2}$; к) $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$; л) $\int \frac{x^4}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx$.

Практическое занятие № 26

Тема занятия «Интегрирование иррациональных функций»

Цель занятия: формирование умений и навыков интегрирования иррациональных функций.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Перечислите, в каких случаях интегралы, содержащие элементарные функции интегрируются в элементарных функциях.

2. Расскажите о нахождении интегралов $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$.

Какие замены при их вычислении необходимо сделать и к каким табличным интегралам они сводятся?

3. Сформулируйте порядок отыскания интеграла от функции, содержащей квадратный корень из квадратного трехчлена в знаменателе дроби и постоянную величину в числителе.

4. Сформулируйте порядок отыскания интеграла от функции, содержащей квадратный корень из квадратного трехчлена в знаменателе дроби и линейную функцию в числителе.

5. Какие подстановки удобно применить для взятия следующих интегралов:

$$\int R\left(x, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{s}{t}}\right) dx; \quad \int R\left(x, (\alpha x + \beta)^{\frac{p}{q}}, \dots, (\alpha x + \beta)^{\frac{s}{t}}\right) dx;$$

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{\frac{s}{t}}\right) dx, \text{ где } R - \text{рациональная функция, } p, q, \dots, s, t -$$

целые числа.

6. Расскажите, какие подстановки применяются при вычислении интегралов

$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$? К каким табличным интегралам они сводятся?

7. Расскажите о вычислении интегралов от дифференциального бинома

$\int x^m(a+bx^n)^p dx$. Назовите случаи интегрирования дифференциального бинома в элементарных функциях.

8. Какие способы нахождения интеграла вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ можете указать?

9. Расскажите о применении подстановок Эйлера при вычислении интегралов $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Сколько существует подстановок Эйлера? В каком случае может применяться каждая из них? Без какой из подстановок можно было бы обойтись? Объясните почему?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Вычислите интегралы:

1. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$; в) $\int \frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}} dx$.
2. а) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$.
3. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^5}}$; в) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}$.

Задания для самостоятельной работы дома

Вычислите интегралы:

1. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x-3}}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$.
2. а) $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}} dx$; б) $\int \frac{(2-5x)dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$; в) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+6x}} dx$.
3. а) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-16)^3}}$; в) $\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}} dx$.

Практическое занятие № 27

Тема занятия «Интегрирование трансцендентных функций»

Цель занятия: формирование умений и навыков вычисления интегралов, содержащие тригонометрические и другие трансцендентные функции.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие формулы применяются для вычисления следующих интегралов:

а) $\int \sin ax \cos bxdx, \int \cos ax \cos bxdx, \int \sin ax \sin bxdx$, где $a \neq b$.

б) $\int \sin^m x dx, \int \cos^n x dx$, где m и n положительные целые числа.

2. Расскажите о нахождении интегралов от четной степени синуса или косинуса.

3. Расскажите о нахождении интегралов от нечетной степени синуса или косинуса.

4. Какие случаи необходимо рассмотреть при нахождении интегралов вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

5. Какую замену следует сделать при нахождении интегралов вида $\int \operatorname{tg}^n x dx, \int \operatorname{ctg}^n x dx$?

6. Расскажите о вычислении интегралов от произведения тригонометрических функций.

7. Какой способ нахождения интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, $\int R(\operatorname{tg} x) dx$, $\int R(e^x) dx$ Вы можете предложить? К какому типу интегралов они сводятся?

8. Какие подстановки удобно применить для взятия следующих интегралов:

а) $\int f(\sin x) \cos x dx$;

б) $\int f(\cos x) \sin x dx$;

в) $\int f(\operatorname{tg} x) \frac{dx}{\cos^2 x}$ или $\int f(\operatorname{tg} x) dx$;

г) $\int f(\operatorname{ctg} x) \frac{dx}{\sin^2 x}$ или $\int f(\operatorname{ctg} x) dx$;

д) $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R - рациональная функция.

9. Приведите примеры «неберущихся» интегралов.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Вычислите интегралы:

1. а) $\int \sin 5x \sin 6x dx$; б) $\int \cos \frac{4}{3} x \cos 3x dx$.

2. а) $\int \sin^2 3x dx$; б) $\int \cos^4 x dx$; в) $\int \sin^5 x dx$; г) $\int \cos^7 x dx$.

3. а) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$; б) $\int \cos^3 x \sin^5 x dx$; в) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

4. а) $\int \operatorname{ctg}^3 3x dx$; б) $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$; в) $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x}$; г) $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$.

Задания для самостоятельной работы дома

Вычислите интегралы:

1. а) $\int \sin 2x \cos 5x dx$; б) $\int \cos 3x \cos 4x dx$.

2. а) $\int \cos^5 x dx$; б) $\int \sin^2 4x dx$; в) $\int (1 + 2 \cos x)^2 dx$.

3. а) $\int \cos^4 x \cdot \sin^3 x dx$; б) $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$.

4. а) $\int \operatorname{tg}^5 3x dx$; б) $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$; в) $\int \frac{dx}{5 + 4 \cos 2x}$; г) $\int \frac{dx}{5 \sin x - \cos x}$.

Практическое занятие № 28

Тема занятия «Понятие определенного интеграла. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле»

Цель занятия: Установление связи между понятиями неопределенного и определенного интегралов. Формирование навыков нахождения определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница, применения формулы замены переменной и метода интегрирования по частям в определенном интеграле.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Что называется определенным интегралом от a до b от функции $f(x)$?
2. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
3. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
4. Запишите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.
5. Запишите формулу замены переменной в определенном интеграле.
6. На что следует обращать внимание при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной по сравнению с неопределенным интегралом?
7. Расскажите о приближенных способах вычисления определенного интеграла (формула прямоугольников, формула трапеций, метод Симпсона).
8. Разберите примеры решения типовых задач в тетради.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислите определенные

интегралы: а) $\int_0^1 x^4 dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; в) $\int_1^e \frac{dx}{x}$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; д) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

2. Методом замены переменной вычислите определенные интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_1^2 \frac{dx}{2x-1}; \text{ б) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5x dx}{(1-x^2)^3}; \text{ в) } \int_{2\sqrt{2}}^4 x \sqrt{x^2-7} dx; \text{ г) } \int_1^e \frac{\ln x dx}{x}; \text{ д) } \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}} x^2 \sin 3x^3 dx; \\ \text{е) } \int_0^4 \frac{x dx}{\sqrt{9+x^2}}; \text{ ж) } \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

3. Вычислите определенные интегралы методом интегрирования по частям:

$$\text{а) } \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx; \text{ б) } \int_0^{\pi} x \sin x dx; \text{ в) } \int_1^e \ln^2 x dx; \text{ г) } \int_0^1 \arcsin x dx; \text{ д) } \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx.$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, вычислите определенные

$$\text{интегралы: а) } \int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx; \text{ б) } \int_0^1 e^x dx; \text{ в) } \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \text{ г) } \int_0^{\pi} \sin x dx.$$

2. Методом замены переменной вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}; \text{ б) } \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)^4}; \text{ в) } \int_0^1 \frac{3e^x dx}{e^x+2}; \text{ г) } \int_1^2 \frac{3x^2+2}{x^3+2x} dx; \text{ д) } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{5 \sin x dx}{(1-\cos x)^3};$$

$$\text{е) } \int_0^2 3x e^{x^2} dx; \text{ ж) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{1+4x^2} dx.$$

3. Вычислите определенные интегралы методом интегрирования по частям:

$$\text{а) } \int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx; \text{ б) } \int_0^{\frac{\pi}{4}} (x+3) \sin 2x dx; \text{ в) } \int_1^e x^2 \ln x dx; \text{ г) } \int_0^1 \arccos x dx.$$

Практическое занятие № 29-30

Тема занятия «Приложения определенного интеграла»

Цель занятия: Показать возможность применения интегрального исчисления к решению задач различных областей естествознания.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Подготовьтесь к самостоятельной работе №12 по теме «Определенный интеграл». Примерный вариант можете найти в программе дисциплины.
2. Что называется площадью плоской фигуры?
3. Как найти площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла?
4. Дайте определение полярной системы координат. Установите формулы, связывающие полярные и прямоугольные координаты точки.
5. Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры в полярных координатах.
5. Что называется объемом тела? Как найти объем тела вращения?
7. Что называется длиной дуги?
8. Как найти длину дуги: если функция задана:
 - а) в декартовых координатах?
 - б) в полярных координатах?
 - в) параметрически?
9. Какие еще приложения определенных интегралов Вы знаете?
10. Разберите примеры решения типовых задач в тетради.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Вычислите площадь, ограниченную линиями:
 - а) параболой $y = 2x - x^2$ и осью Ox ;
 - б) параболой $y = x^2 + 4x$ и прямой $x - y + 4 = 0$;
 - в) кубической параболой $y = x^3$ и прямыми $y = x$, $y = 2x$;
 - г) эллипсом $x = a \cos t$, $y = a \sin t$; д) кардиодой $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

2. Вычислите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

а) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ вокруг оси Oy ; б) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ вокруг оси Ox .

3. Вычислите длину дуги кривой:

а) одной арки циклоиды и $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$;

б) кривой $\rho = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$.

4. Найдите количество вещества m , вступившего в реакцию за первые 5 секунд, если скорость химической реакции $v = 2t^3 - t^2 + 2$.

5. Скорость роста некоторой популяции микроорганизмов задается формулой $v(t) = 5e^{2t}$. Найдите прирост численности популяции за промежуток времени с 10 по 25 секунду.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Вычислите площадь, ограниченную линиями:

а) полукубической параболой $y^2 = x^3$ и прямыми $x = 0, y = 4$;

б) первым завитком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ и полярной осью.

2. Вычислите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x, x = 4$ вокруг оси Ox .

3. Вычислите длину дуги полукубической параболы $y^2 = (x-1)^3$ между точками $A(2;-1)$ и $B(5;-8)$.

4. Численность особей популяции возраста τ (усл.ед.) задается формулой $N(\tau) = -\tau^2 + 1000\tau$, а средняя масса особи возраста $\pi P(\tau) = 2\tau^2 - \tau$. Найдите биомассу этой популяции, если максимальный возраст особи в данной популяции 10^3 .

Практическое занятие № 31

Тема занятия «Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования, интегралы от неограниченных функций»

Цель занятия: формирование умений вычислять несобственные интегралы.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Определите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования.
2. Когда несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся (расходящимся)?
3. Для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
4. Определите несобственный интеграл от разрывной функции.
5. Когда несобственный интеграл от разрывной функции называется сходящимся (расходящимся)?
6. Для несобственного интеграла от разрывной функции запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
7. Сформулируйте теорему сравнения для несобственных интегралов.
8. Дайте определение абсолютно сходящегося интеграла.
9. Подготовьтесь к коллоквиуму по приведённым ниже вопросам.

Коллоквиум

Базовый уровень

Тема . Неопределенный интеграл, основные методы интегрирования.

1. Дайте определение первообразной функции для данной функции $f(x)$ на данном промежутке. Как связаны между собой две первообразные для функции $f(x)$ в некотором промежутке?
2. Что называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$?
3. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла (правила интегрирования).
4. Составьте таблицу основных интегралов.
5. В чем суть метода непосредственного интегрирования?

6. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле. Когда целесообразно применять замену переменной интегрирования?
7. Запишите формулу интегрирования по частям. Когда целесообразно применение способа интегрирования по частям?
8. Интегралы какого вида можно вычислять с помощью формулы интегрирования по частям?

Тема 19. Классы интегрируемых функций.

1. Расскажите о нахождении интегралов вида $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$;
 $\int \frac{(Ax + B)dx}{ax^2 + bx + c}$.
2. Как находится интеграл от целой рациональной функции?
3. Какая рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется правильной?
4. Рациональные дроби, какого вида называются элементарными? Как связана правильная рациональная дробь с элементарными дробями? Расскажите, как составляется схема разложения правильной дроби на основные элементарные дроби.
5. Какой способ применяется для разложения правильной рациональной дроби на сумму элементарных дробей?
6. Интегрирование иррациональных функций, содержащих квадратный трехчлен.
7. Какие подстановки удобно применить для взятия следующих интегралов:

$$\int R\left(x, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{s}{t}}\right) dx; \quad \int R\left(x, (\alpha x + \beta)^{\frac{p}{q}}, \dots, (\alpha x + \beta)^{\frac{s}{t}}\right) dx;$$

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{\frac{s}{t}}\right) dx, \quad \text{где } R - \text{рациональная функция,}$$

$p, q, \dots, s, t$ - целые числа.

8. Расскажите о нахождении интегралов от четной степени синуса или косинуса.
9. Расскажите о нахождении интегралов от нечетной степени синуса или косинуса.
10. Приведите примеры «неберущихся» интегралов.

Тема . Определенный интеграл.

1. Что называется определенным интегралом от a до b от функции $f(x)$?
2. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
3. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
4. Запишите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.
5. Запишите формулу замены переменной в определенном интеграле.

Тема. Приложения определённого интеграла.

1. Что называется площадью плоской фигуры? Как найти площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла?
2. Что называется объемом тела? Как найти объем тела вращения?
3. Что называется длиной дуги? Как найти длину дуги: если функция задана в декартовых координатах?
4. Какие еще приложения определенных интегралов Вы знаете?

Тема. Несобственные интегралы.

1. Несобственные интегралы с бесконечным верхним, бесконечным нижним пределами интегрирования, с бесконечными пределами интегрирования.

2. Несобственные интегралы от разрывных функций.

Повышенный уровень

Тема. Неопределенный интеграл, основные методы интегрирования.

1. Сформулируйте теорему об инвариантности формул интегрирования.
2. Расскажите, как применяется формула замены переменной в неопределенном интеграле. Что необходимо сделать после сведения интеграла к табличному?
3. Что принимается за u для интегралов вида $\int P(x)e^{ax} dx$, $\int P(x)\sin ax dx$, $\int P(x)\cos ax dx$ ($P(x)$ - многочлен)?
4. Что принимается за u для интегралов вида $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arctg x dx$, $\int P(x)\operatorname{arccot} x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$ ($P(x)$ - многочлен)?
5. Как вычисляются интегралы $\int a^{kx} \sin nxdx$ и $\int a^{kx} \cos nxdx$?

Тема 19. Классы интегрируемых функций.

1. Как интегрируются правильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от правильной рациональной дроби.
2. Как интегрируются неправильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от неправильной рациональной дроби.
3. Всегда ли можно найти интеграл от рациональной функции?
4. Вычисление интегралов $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$.
5. Интегралы от дифференциального бинома $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, случаи интегрирования в элементарных функциях.
6. Сформулируйте порядок отыскания интеграла от функции, содержащей квадратный корень из квадратного трехчлена в знаменателе дроби и линейную функцию в числителе.
7. Какие способы нахождения интеграла вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ можете указать?

8. Расскажите о применении подстановок Эйлера при вычислении интегралов $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$. Сколько существует подстановок Эйлера? В каком случае может применяться каждая из них? Без какой из подстановок можно было бы обойтись? Объясните почему?
9. Какие формулы применяются для вычисления следующих интегралов:
- $\int \sin ax \cos bxdx, \int \cos ax \cos bxdx, \int \sin ax \sin bxdx$, где $a \neq b$.
 - $\int \sin^m x dx, \int \cos^n x dx$, где m и n положительные целые числа.
 - Какие случаи необходимо рассмотреть при нахождении интегралов вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$.
10. Какую замену следует сделать при нахождении интегралов вида $\int tg^n x dx, \int ctg^n x dx$?
11. Какой способ нахождения интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, $\int R(tgx)dx$, $\int R(e^x)dx$ Вы можете предложить? К какому типу интегралов они сводятся?
12. Какие подстановки удобно применить для взятия следующих интегралов:
- $\int f(\sin x) \cos x dx$;
 - $\int f(\cos x) \sin x dx$;
 - $\int f(tgx) \frac{dx}{\cos^2 x}$ или $\int f(tgx) dx$;
 - $\int f(ctgx) \frac{dx}{\sin^2 x}$ или $\int f(ctgx) dx$;
 - $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R - рациональная функция.

Тема. Определенный интеграл.

- На что следует обращать внимание при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной по сравнению с неопределенным интегралом?
- Определите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования. Когда несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся (расходящимся)?
- Для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
- Определите несобственный интеграл от разрывной функции. Для несобственного интеграла от разрывной функции запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
- Сформулируйте теорему сравнения для несобственных интегралов.
- Дайте определение абсолютно сходящегося интеграла.

Тема. Приложения определённого интеграла.

1. На что следует обращать внимание при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной по сравнению с неопределенным интегралом?
2. Определите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования.
3. Когда несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся (расходящимся)?
4. Для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
5. Определите несобственный интеграл от разрывной функции.
6. Когда несобственный интеграл от разрывной функции называется сходящимся (расходящимся)?
7. Для несобственного интеграла от разрывной функции запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
8. Сформулируйте теорему сравнения для несобственных интегралов.
9. Дайте определение абсолютно сходящегося интеграла. Дайте определение полярной системы координат. Установите формулы, связывающие полярные и прямоугольные координаты точки.
10. Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры в полярных координатах. Как найти длину дуги: если функция задана в полярных координатах; параметрически?

Тема. Несобственные интегралы.

1. Признаки сравнения.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} e^{-x} dx; \text{ б) } \int_{-\infty}^0 x e^x dx; \text{ в) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}; \text{ г) } \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}; \text{ д) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}; \text{ е) } \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

2. Укажите верные утверждения:

Если $\forall x \in [a; +\infty)$ $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам $0 \leq g(x) \leq f(x)$, то ...

- из сходимости $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} g(x) dx$;
- из расходимости $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} f(x) dx$;

- из сходимости $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$;
- из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx$;
- из сходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx$;
- из расходимости $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость

а) $\int_{-\infty}^1 e^x dx$; б) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$; в) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{4+x^2}$; г) $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$; д) $\int_1^{+\infty} \frac{x+5}{x^3 \sqrt{x}} dx$;

е) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; ж) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^3}$; з) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$; и) $\int_{-2}^2 \frac{x dx}{x^2-1}$.

2. Укажите верные утверждения:

- из сходимости $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$;
- из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$;
- из сходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$;
- из расходимости $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

2. Выполните задание 1 (вычислите интегралы 1)-7)) ИДЗ №7 по теме «Основные методы интегрирования. Приложения определенного интеграла»

Вариант 1 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(\frac{5}{\cos^2 2x} - e^{3x} + 3\sqrt{x} \right) dx,$ 2) $\int (2 + \sqrt{x})^2 x^3 dx,$ 3) $\int x e^{\frac{x}{7}} dx,$ 4) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+3}} dx,$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} x \cos 4x dx,$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx,$ 7) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 6x - x^2$ и осью OX.	Вариант 2 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(3 \cos 6x + 5^{-x} - \frac{2}{x^2 - 4} \right) dx,$ 2) $\int \frac{(1-x)^3}{x} dx,$ 3) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x+5}} dx,$ 4) $\int x \sin \frac{x}{10} dx,$ 5) $\int_1^e x^2 \ln x dx,$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x + 2}{\cos^2 x} dx,$ 7) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{4+x}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \frac{1}{2}x^2 + 2, y = 0, x = 1, x = 3$.
Вариант 3 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(\frac{4}{\sqrt{9-x^2}} - e^{\frac{x}{3}} + \frac{12}{16+x^2} \right) dx,$ 2) $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^3} dx,$ 3) $\int \frac{\ln x + 4}{x} dx,$ 4) $\int \sqrt{x} \ln x dx,$ 5) $\int_0^1 x 4^x dx,$ 6) $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx,$ 7) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x+x^2}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = -x^2 + 7x - 10$ и $y = 0$.	Вариант 4 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(\frac{4}{9-x^2} - \sin 2x + 3\sqrt{x} \right) dx,$ 2) $\int \frac{(2+3x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx,$ 3) $\int x 7^x dx,$ 4) $\int \sqrt{x+1} dx,$ 5) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos 2x dx,$ 6) $\int_{-4}^4 \frac{x-5}{\sqrt{x+5}} dx,$ 7) $\int_{-\infty}^1 e^x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = -x^2 + 4$ и $y = 0$.
Вариант 5	Вариант 6

1. Вычислить интегралы. $\int \left(e^{4x} - 3 \cos \frac{x}{2} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 5}} \right) dx,$ $\int \frac{(2+x)^3}{x} dx,$ $\int x e^{10x} dx,$ $\int \sqrt{1-2x} \cdot x dx,$ $\int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2} dx,$ $\int_0^e \frac{\ln^2 x + 1}{x} dx,$ $\int_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 2x$.	1. Вычислить интегралы. $\int (tg 2x - 2^{-3x} + 6\sqrt[3]{x} - 1) dx,$ $\int (2-x)^2 \sqrt{x} dx,$ $\int tg x dx,$ $\int \frac{x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx,$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx,$ $\int_0^3 \sqrt{x+1} \cdot x dx,$ $\int_{-\infty}^0 e^x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $2y + x - 4 = 0$ и $y = 0$, $x = -3$, $x = 2$.
Вариант 7 1. Вычислить интегралы. $\int \left(4ctg 2x + \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} - 6 \right) dx,$ $\int \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x} dx,$ $\int \frac{tg^2 x + 5}{\cos^2 x} dx,$ $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx,$ $\int_0^7 \sqrt[3]{x+1} \cdot x dx,$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 4x dx,$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = -x$ и $y = 2x - x^2$.	Вариант 8 1. Вычислить интегралы. $\int \left(8 \cos 4x - \frac{6}{\sqrt{5+x^2}} - 3 \right) dx,$ $\int (1 + 2\sqrt{x}) \sqrt[3]{x} dx,$ $\int x^{11} \ln x dx,$ $\int \sqrt{2 + \sin x} dx,$ $\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx,$ $\int_0^3 x e^{-\frac{x}{3}} dx,$ $\int_1^{\infty} \cos x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x + 1$ и $y = 4 + 3x - x^2$.

Вариант 9 1. Вычислить интегралы. $\int \left(4tg2x + \frac{5}{x^2 - 25} - 2\sqrt{x} \right) dx,$ $\int (1+x)^2 \sqrt{x} dx,$ $\int x \cos \frac{x}{10} dx,$ $\int \sqrt{2x+1} x dx,$ $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx,$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin \frac{x}{3} dx,$ $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 - 6x + 5$ и $y = 2x - 7.$	Вариант 10 1. Вычислить интегралы. $\int \left(3 \cos 9x - \frac{6}{9+x^2} - tg x \right) dx,$ $\int \sqrt[5]{x} (1-2x)^2 dx,$ $\int x^2 \log, x dx,$ $\int \sqrt{3-2x} x dx,$ $\int_1^e \ln x dx,$ $\int_3^{10} \frac{x}{\sqrt[3]{x-2}} dx,$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x - 7$ и $y = 3 - x.$
Вариант 11 1. Вычислить интегралы. $\int (3ctg2x - 7 \sin 6x - \sqrt[3]{x}) dx,$ $\int (3-2x)^4 \sqrt{x} dx,$ $\int x 10^x dx,$ $\int \sqrt[3]{2-x} x dx,$ $\int_1^6 \log_6 x dx,$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx,$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 5x - 6.$	Вариант 12 1. Вычислить интегралы. $\int \left(2^{3x} - \frac{7}{4+x^2} - 4tg2x \right) dx,$ $\int \sqrt[5]{x} (3+2x) dx,$ $\int x \cos \frac{x}{12} dx,$ $\int \frac{1-x}{\sqrt{x+1}} dx,$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\cos^2 x} dx,$ $\int_{-3}^0 \sqrt{1-x} x dx,$ $\int_0^{\infty} e^{-x} dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = -x^2, y = 0, x = 2.$

Вариант 13 1. Вычислить интегралы. $\int \left(4 \sin 8x - \frac{3}{\cos^3 6x} + 2\sqrt[4]{x} \right) dx,$ $\int \frac{(1-6x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx,$ $\int \frac{x}{\sqrt{3+x}} dx,$ $\int x^2 \log_{11} x dx,$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos x dx,$ $\int_{-3}^{\frac{1}{4}} x e^{4x} dx,$ $\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^2}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $x + y = 3$.	Вариант 14 1. Вычислить интегралы. $\int \left(\frac{5}{x^2-1} - \frac{3}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{4}{x^2+1} \right) dx,$ $\int x(1+x)^3 dx,$ $\int e^{\frac{x}{6}} x dx,$ $\int \sqrt{4+x} x dx,$ $\int_1^{12} \log_{12} x dx,$ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x} dx,$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = -x^2 + 2x$ и осью OX.
Вариант 15 1. Вычислить интегралы. $\int \left(\frac{6}{\cos^2 2x} - \frac{4}{x^2+9} - \frac{5}{x} \right) dx$ $\int \frac{(3-2x)^2}{\sqrt{x}} dx$ $\int x e^{-\frac{x}{9}} dx$ $\int \sqrt{\sin x - 3} \cos x dx$ $\int_4^7 \frac{x+3}{\sqrt{x-3}} dx$ $\int_1^e x^6 \ln x dx$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \frac{1}{3}x^2 + 3$ и $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.	Вариант 16 1. Вычислить интегралы. $\int (3 \cos 8x - 9 - 4 \operatorname{ctg} 3x) dx,$ $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^2} dx,$ $\int x \cos \frac{x}{9} dx,$ $\int \sqrt[3]{x-8} x dx,$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^1 x 3^{-x} dx,$ $\int_0^3 \frac{x+3}{\sqrt{x+1}} dx,$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 1 - x^2$ и $y = x^2 - 7$.

Вариант 17 1. Вычислить интегралы. $\int \left(8 \operatorname{ctg} 2x + \sqrt{x} - \frac{7}{x^2 - 9} \right) dx,$ $\int x e^{11x} dx,$ $\int \sqrt[6]{x-5} \cdot x dx,$ $\int \frac{(1+3x)^2}{x^2} dx,$ $\int_1^2 x^2 \log_2 x dx,$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3 \cos x + 6} \sin x dx,$ $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$ и $x + y = 2$.	Вариант 18 1. Вычислить интегралы. $\int \left(3 \operatorname{tg} 10x + 7 - \frac{5}{\sqrt{81 - x^2}} \right) dx,$ $\int \frac{(1-4x)^2}{x} dx,$ $\int x^3 \ln x dx,$ $\int \sqrt[10]{x-5} \cdot x dx,$ $\int_0^1 x 2^{-x} dx,$ $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{5x+4}} dx,$ $\int_0^{\infty} \cos x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = e^x$ и $x = 0, x = 1$.
Вариант 19 1. Вычислить интегралы. $\int \left(4 - 3 \cos \frac{x}{2} + \frac{2}{4+x^2} \right) dx,$ $\int \frac{(2x-3)^2}{\sqrt{x}} dx,$ $\int x \cos 4x dx,$ $\int \sqrt{\cos x} \sin x dx,$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx,$ $\int_0^1 x 10^{-x} dx,$ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 9}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $y = 0, x = -1, x = 2$.	Вариант 20 1. Вычислить интегралы. $\int (4x^7 - 5 \cos 3x + 2^{-x} - 1) dx,$ $\int (\sqrt{x} - 3)^2 x^3 dx,$ $\int x e^{3x} dx,$ $\int \frac{\sin x}{\cos^6 x} dx,$ $\int_2^5 \frac{2x+5}{\sqrt{x-1}} dx,$ $\int_1^e x^7 \ln x dx,$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$ и $x + y = 2$.

Вариант 21 1. Вычислить интегралы. $\int (9^{4x} - 3 \cos \frac{x}{5} + 13\sqrt[5]{x} - 2) dx,$ $\int (x-2)\sqrt[3]{x} dx,$ $\int x^{12} \ln x dx,$ $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx,$ $\int_4^7 \frac{x}{\sqrt{x-3}} dx,$ $\int_0^{\pi} x \cos \frac{x}{2} dx,$ $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^2 + 9}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 + 4x$ и $x - y + 4 = 0.$	Вариант 22 1. Вычислить интегралы. $\int \left(\frac{7}{x} + 4 \operatorname{tg} 2x - \sqrt[4]{x} + 6 \right) dx,$ $\int \frac{(x+8)^2}{\sqrt[3]{x}} dx,$ $\int x 2^{\frac{x}{2}} dx,$ $\int \frac{\ln^2 x + 3}{x} dx,$ $\int_{-2}^1 \frac{1+x}{\sqrt{x+3}} dx,$ $\int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2} dx,$ $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{x^3}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $x + y = 0.$
Вариант 23 1. Вычислить интегралы. $\int \left(9^{4x} - 3 \cos \frac{x}{5} + 13\sqrt[5]{x} - 2 \right) dx,$ $\int (x-2)\sqrt[3]{x} dx,$ $\int x^9 \ln x dx,$ $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x+4}} dx,$ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\sin x} \cos x dx,$ $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \sin 3x dx,$ $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 5} dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $2x - 3y + 6 = 0$ и $x = 3, y = 0.$	Вариант 24 1. Вычислить интегралы. $\int \left(2x^3 - \frac{4}{x^2 + 1} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{3} + 2 \right) dx,$ $\int \frac{(2x-1)^2}{x^3} dx,$ $\int x e^{-2x} dx,$ $\int \frac{1-x}{\sqrt{x+3}} dx,$ $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x} dx,$ $\int_1^e \sqrt{x} \ln x dx,$ $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $2x - 3y + 6 = 0$ и $x = 3, y = 0.$

Вариант 25 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(\frac{4}{x^2 + 16} - \cos \frac{x}{2} + 5 \right) dx,$ 2) $\int \frac{(3 - 4x)^2}{x} dx,$ 3) $\int \frac{x}{\cos^2 \frac{x}{3}} dx,$ 4) $\int \sqrt{x - 3} x dx,$ 5) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^5 x \cos x dx,$ 6) $\int_{\frac{1}{2}}^1 x 7^x dx,$ 7) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 - 3x$ и $x = -1, x = 2, y = 0.$	Вариант 26 1. Вычислить интегралы. 1) $\int (5\sqrt{x} - 3\operatorname{ctg} 6x + 4) dx,$ 2) $\int (\sqrt{x} + 1)^2 \sqrt[3]{x} dx,$ 3) $\int \sqrt{x + 2} x dx,$ 4) $\int x^{-7} \ln x dx,$ 5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \sin x dx,$ 6) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} x e^{3x} dx,$ 7) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x + 3}.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \ln x$ и $x = 1, x = e, y = 0.$
Вариант 27 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(\frac{5}{\cos^2 x} - 2^x + 16 \cos 4x \right) dx,$ 2) $\int (1 - 3x)^2 \sqrt{x} dx,$ 3) $\int \frac{x}{\sin^2 \frac{x}{6}} dx,$ 4) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx,$ 5) $\int_{\frac{1}{2}}^3 \sqrt{x + 1} x dx,$ 6) $\int_{\frac{1}{2}}^1 x e^{-x} dx,$ 7) $\int_{-\infty}^0 \cos x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $4y = 8x - x^2$ и $4y = x + 6.$	Вариант 28 1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(5x^4 - \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}} + 6 \right) dx,$ 2) $\int \frac{(1 - 7x)^2}{\sqrt{x}} dx,$ 3) $\int x e^{9x} dx,$ 4) $\int \frac{1 - 3x}{\sqrt{x + 1}} dx,$ 5) $\int_{-3}^2 \sqrt{x + 7} x dx,$ 6) $\int_{\frac{1}{2}}^5 x \cos x dx,$ 7) $\int_1^{\infty} e^{4 - x} dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y + x - 6 = 0$ и $y = x^2.$

Вариант 29	Вариант 30
1. Вычислить интегралы. 1) $\int (4 \cos 2x - \sqrt[4]{x} + 6) dx,$ 2) $\int \frac{(1 + 3x)^2}{x^4} dx,$ 3) $\int x \cos \frac{x}{8} dx,$ 4) $\int \frac{tg^2 x - 3}{\cos^2 x} dx,$ 5) $\int_0^1 x \sqrt{3x + 1} dx,$ 6) $\int_1^e x^{17} \ln x dx,$ 7) $\int_e^\infty dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x - y + 2 = 0$ и $y = x^2$.	1. Вычислить интегралы. 1) $\int \left(7x^6 - 3ctg \frac{x}{7} + 4 \right) dx,$ 2) $\int (x - 9)^2 x^7 dx,$ 3) $\int x \cos 6x dx,$ 4) $\int \sqrt{x + 7} x dx,$ 5) $\int_1^e \frac{\ln^{10} x}{x} dx,$ 6) $\int_0^2 x 5^x dx,$ 7) $\int_{-\infty}^0 e^x dx.$ 2. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $xy = 6$ и $y = 7 - x$.

6. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Практическое занятие № 32

Тема занятия «Числовые ряды. Признаки сходимости знакоположительных рядов»

Цель занятия: Формирование умений исследовать знакоположительные ряды на сходимость.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определения числового ряда, общего члена ряда. Как определяется сумма числового ряда?
2. Какой ряд называется сходящимся, а какой расходящимся? Приведите примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов.
3. Введите понятие остатка числового ряда.
4. Сформулируйте основные свойства рядов.
5. Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости числового ряда.
6. Приведите пример какого-нибудь числового ряда, для которого выполнено необходимое условие сходимости, но ряд расходится.
7. Какие достаточные условия сходимости числовых рядов Вы знаете?
8. Сформулируйте признаки сравнения знакоположительных рядов.
9. Когда для исследования числовых рядов может быть применен признак Даламбера? Сформулируйте этот признак.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите пятый член ряда $a_n = \frac{1}{2^n(n+1)}$.
2. Найдите первые четыре члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$.
3. Определите разность между 4-м и 2-м членами ряда, общий член которого имеет вид $a_n = \frac{1}{n!}$.

4. Определите вид общего члена ряда

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

5. Проверьте, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+3}{n^2+1}$.

6. Исследуйте ряд на сходимость с помощью первого признака сравнения

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

7. Исследуйте ряд на сходимость с помощью второго признака сравнения

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{5^n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(2^n+1)}$.

8. Исследуйте с помощью признака Даламбера исследовать, сходятся или расходятся ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n n!}{(2n)!}$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите шестой член ряда $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{20} + \dots$.

2. Укажите пятый член ряда $a_n = n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$.

3. Вычислите сумму первых пяти членов гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

4. Запишите общий член ряда

а) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + 2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + 3\operatorname{tg} \frac{\pi}{16} + \dots$; б) $10 + \frac{100}{2} + \frac{1000}{6} + \dots$.

5. Проверьте, выполняется ли необходимое условие сходимости ряда

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

6. Исследуйте ряд на сходимость с помощью первого признака сравнения

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{7^n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$.

7. Исследуйте ряд на сходимость с помощью второго признака сравнения

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{7^n - 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

8. Исследовать с помощью признака Даламбера исследовать, сходятся или расходятся ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(n^3 + 1)}{(n+1)!}$.

Практическое занятие № 33

Тема занятия «Знакопередающие ряды. Признак Лейбница.»

Цель занятия: формирование умений и навыков исследовать знакоположительные и знакопередающие ряды.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Когда согласно с радикальным признаком Коши сходимости числовой ряд сходится, а когда расходится?
2. Сформулируйте интегральный признак Коши сходимости знакоположительных рядов.
3. Какой из рассмотренных признаков сходимости знакоположительных рядов является самым мощным?
4. Дайте определение суммы числового ряда.
5. Какой способ вычисления суммы числового ряда Вы можете предложить.
6. Дайте определение знакопеременного ряда.
7. Определите знакопередающий ряд.
8. Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакопередающего ряда.
9. Введите определения абсолютно сходящихся и условно сходящихся рядов. Приведите примеры.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Запишите шестой член ряда, общий член которого имеет вид

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

2. Исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$ по радикальному признаку Коши.

3. С помощью интегрального признака исследуйте, сходятся или расходятся ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$.

4. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

$$\text{a) } 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \dots;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sqrt[3]{n}}{n+2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}.$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{n^2}$ по радикальному признаку Коши.

2. С помощью интегрального признака исследуйте, сходятся или расходятся ряды

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} (\alpha > 0); \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - 1}.$$

3. Найдите сумму ряда $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{36}{n^2 - 11n + 28}.$

4. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

$$\text{a) } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \dots;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2n}{3n+2}.$$

Практическое занятие № 34

Тема занятия «Степенные ряды и область их сходимости»

Цель занятия: Сформировать умения и навыки разложения функций в степенной ряд и находить область сходимости степенного ряда.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение функционального ряда и его области сходимости.
2. Дайте определение степенного ряда.
3. Запишите ряд по степеням x .
4. Сформулируйте теорему Абеля о сходимости степенных рядов.
5. Введите понятия область сходимости (интервал сходимости), радиус сходимости степенного ряда.
6. Приведите примеры рядов, сходящихся
 - а) в одной точке; б) на всей числовой прямой;
 - в) на некотором конечном интервале.
7. Какие способы нахождения радиуса и интервала сходимости Вы знаете?
8. Запишите формулу Коши-Адамара для нахождения радиуса сходимости степенного ряда.
9. Дайте определение ряда Тейлора и ряда Маклорена.
10. Выведите разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена и укажите интервалы сходимости полученных рядов.
11. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании степенных рядов.

12. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании степенных рядов.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите радиус и интервал сходимости ряда и исследуйте его сходимость на границах интервала:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$; г) $1 + \frac{2x}{\sqrt{5 \cdot 5}} + \frac{4x^2}{\sqrt{9 \cdot 5^2}} + \frac{8x^3}{\sqrt{13 \cdot 5^3}} + \dots$

2. Разложите в ряд Маклорена следующие функции и найдите интервалы сходимости полученных рядов

а) $f(x) = x^2 e^{-2x}$; б) $f(x) = \sin x^2$; в) $f(x) = \sqrt[3]{27 + x}$; г) $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите радиус и интервал сходимости ряда и исследуйте его сходимость на границах интервала

а) $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{3^{n-1}}$.

2. Разложите в ряд Маклорена следующие функции и найдите интервалы сходимости полученных рядов

а) $f(x) = x^3 \cos x$; б) $f(x) = \ln \frac{1+3x}{1-3x}$; в) $f(x) = \frac{1}{3+2x}$; г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

3. Приступите к выполнению ИДЗ № 9 по теме «Ряды»

1. Найдите область сходимости степенных рядов

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{c^n \sqrt{n}} x^n; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{a^n \cdot (n+b)}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(an-1)!}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an^2 + bn + c}{cn^2 - b} \right)^{kn} \cdot (x-b)^n.$$

2. Разложить функцию $f(x) = ax - m$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi; \pi)$.

При решении задач коэффициенты a, b, c, k, m выбрать из таблицы в соответствии с номером варианта.

ВАРИАНТ	a	b	c	k	m
1	1	2	3	2	1
2	2	3	5	3	2
3	3	4	7	4	3
4	4	5	9	1	4
5	5	2	11	2	5
6	6	3	3	3	6
7	7	4	5	4	-1
8	8	5	7	1	-2
9	1	2	9	2	-3
10	2	3	11	3	-4
11	3	4	2	4	-5
12	4	5	4	1	-6
13	5	2	6	2	1
14	6	3	8	3	2
15	7	4	10	1	3
16	8	5	2	2	4
17	1	3	4	3	5
18	2	4	6	1	6
19	3	5	8	2	-1
20	4	1	10	3	-2
21	5	-3	3	4	-3
22	6	-4	6	1	-4
23	7	-5	9	2	-5
24	8	-1	2	3	-6
25	1	-3	5	4	-1
26	2	-4	8	1	-2
27	3	-5	11	2	-3
28	4	-2	1	3	-4
29	5	-3	4	1	-5
30	6	-4	7	2	-6

Практическое занятие № 35

Тема занятия «Применение степенных рядов к приближенным вычислениям значений функций, интегралов, пределов»

Цель занятия: Показать возможность применения степенных рядов для приближенных вычислений.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Вспомните разложения в степенной ряд функций $y = e^x$, $y = \sin x$,
 $y = \cos x$, $y = (1+x)^n$, $y = \frac{1}{1+x}$.
2. Выведите разложения в степенной ряд для функций $y = \sqrt{1+x}$, $y = \frac{1}{1+x^2}$,
 $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \ln(1+x)$.
3. Расскажите о приближенном вычислении значений функций с помощью степенных рядов.
4. Как определить погрешность приближения при вычислении приближенного значения функции? Какие теоремы по этому вопросу Вы знаете?
5. Приведите примеры вычисления «неберущихся» интегралов с помощью рядов.
6. Расскажите о приближенном вычислении определенных интегралов и определении погрешности приближения.
7. Как можно воспользоваться разложением функций в степенной ряд для раскрытия неопределенности при вычислении пределов функции?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Оцените погрешность приближенного равенства

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad 0 < x < n+1.$$

2. Вычислите с точностью до 0,00001

а) e ; б) $\sqrt{e}$; в) $\cos 18^\circ$; г) $\sqrt[5]{1,1}$.

3. Вычислите с точностью до 0,0001

а) $\ln 0,98$; б) $\ln 10$; в) $\int_0^{1/2} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$.

4. Вычислите с точностью до 0,001

а) $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$; б) $\int_0^{0,5} x \ln(1+x^2) dx$.

5. Найдите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1 - x}$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Вычислите $1/\sqrt[5]{e}$ с точностью до 0,00001.

2. Вычислите с точностью до 0,0001

а) $\sin 9^\circ$; б) $\sqrt[3]{1,06}$; в) $\ln 1,1$; г) $\ln 3$; д) $\int_0^{0,2} \frac{\sin x}{x} dx$.

3. Вычислите с точностью до 0,001

а) $\sqrt{27}$; б) $\int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx$.

4. Найдите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}$.

Практическое занятие № 36-37

Тема занятия «Ряды Фурье. Ряды Фурье для четных и нечетных периодических функций»

Цель занятия: Показать возможность разложения функций в ряд Фурье.

Организационная форма занятия: дискуссия.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какая система функций называется ортогональной? Приведите примеры ортогональных систем тригонометрических функций.
2. Дайте определение тригонометрического ряда.
3. Какой ряд называется рядом Фурье?
4. Покажите, что при $n \neq k$ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx = 0$,
 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx = 0$.
5. Докажите, что $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi$.
6. Выведите формулы для определения коэффициентов ряда Фурье для периодической с периодом 2π функции.
7. Запишите формулы для разложения в ряд Фурье четной функции.
8. По каким формулам можно вычислить коэффициенты ряда Фурье для нечетной функции?
9. Запишите формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье для функции с периодом $2l$.
10. Сформулируйте достаточное условие представимости функции рядом Фурье (теорему Дирихле).

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T , заданную на указанном сегменте.
 - а) $f(x)=|x|$, $T=2$, $[-1,1]$; б) $f(x)=e^x$, $T=2\pi$, $[-\pi,\pi]$;
 - в) $f(x)=\begin{cases} -h \text{ при} & -\pi \leq x \leq 0, \\ h \text{ при} & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases} T=2\pi$; г) $f(x)=\begin{cases} -x \text{ при} & -\pi < x < 0, \\ 0 \text{ при} & 0 < x < \pi; \end{cases} T=2\pi$.
2. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=\pi-2x$ с периодом $T=2\pi$ на отрезке $[0,\pi]$. Продолжите $f(x)$ на сегмент $[-\pi,0]$:
 - а) четным образом; б) нечетным образом.
3. Разложите в ряд по синусам $f(x)=\cos 2x$ с периодом $T=2\pi$ на $[0,\pi]$.
4. Разложите в ряд по косинусам $f(x)=\begin{cases} x \text{ при} & 0 < x \leq 1, \\ 2-x \text{ при} & 1 < x \leq 2; \end{cases} T=4$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$ с периодом T , заданную на указанном сегменте.
 - а) $f(x)=x^3$, $T=2\pi$, $[-\pi,\pi]$; б) $f(x)=\begin{cases} -2x \text{ при} & -\pi \leq x \leq 0, \\ 3x \text{ при} & 0 \leq x \leq \pi; \end{cases} T=2\pi$.
2. Разложите в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x^2$ с периодом $T=2\pi$ на отрезке $[0,\pi]$. Продолжите $f(x)$ на сегмент $[-\pi,0]$ нечетным образом.
3. Разложите в ряд по синусам периодическую функцию $f(x)=x$ с периодом $T=2$ на отрезке $[0,1]$.
4. Закончите выполнение ИДЗ №9.

7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Практическое занятие № 38

Тема занятия «Дифференцирование функции нескольких переменных.

Частные производные первого и более высоких порядков»

Цель занятия: изучить определения частных производных и правила их нахождения.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Вспомните определение производной функции для функции одной переменной.
2. Вспомните основные свойства производной и правила дифференцирования.
3. Запишите таблицу производных.
4. Дайте определение функции двух переменных. Приведите примеры зависимостей, которые можно описать с помощью функций двух переменных.
5. Дайте определение функции нескольких переменных.
6. Для функции двух переменных определите понятия приращения функции по каждой из переменных. Введите понятие полного приращения функции двух переменных.
7. Введите понятие непрерывности для функции двух переменных
8. Дайте определение частных производных первого порядка на примере функции двух переменных.
9. Определите частные производные второго и более высоких порядков.
10. Сколько существует частных производных
 - а) второго порядка для функции трех переменных;
 - б) третьего порядка для функции двух переменных;
 - в) третьего порядка для функции трех переменных.
14. Сформулируйте теорему о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования.

Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите частные производные первого порядка для следующих функций

а) $z = x^2 \sin^2 y$; б) $u = e^{x^2+y^2+z^2}$; в) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; г) $z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$;

д) $z = \operatorname{arctg}(x + y)$.

2. Вычислите $f'_x(2,3)$ и $f'_y(2,3)$, если $f(x,y) = x^2 + y^3$

3. Вычислите частные производные второго порядка для функции $z = x^3 - 4x^2y + 5y^2$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите частные производные первого порядка для следующих функций

а) $z = x^{y^2}$; б) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; в) $z = \operatorname{arctg}(xy)$; г) $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$;

д) $z = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$; е) $z = e^x \ln y + \sin y \ln x$.

2. Докажите, что если $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, то $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

3. Докажите, что если $z = \frac{x^2 y^2}{x + y}$, то $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial x}$.

Практическое занятие № 39-40

Тема занятия «Экстремум функции двух переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума. Условный экстремум»

Цель занятия: Формирование умений исследовать функцию двух переменных на экстремум и условный экстремум.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение точки максимума и точки минимума для функции двух переменных.
2. Дайте определение экстремума для функции двух переменных.
3. Сформулируйте необходимые условия экстремума для функции двух переменных.
4. Сформулируйте достаточное условие экстремума для функции двух переменных. Как определить вид экстремума.
5. Расскажите о порядке исследования функции двух переменных на экстремум.
6. Какой экстремум называется условным?
7. Запишите функцию Лагранжа для отыскания условного экстремума.
8. Как можно исследовать функцию на условный экстремум?
9. Расскажите об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите экстремумы функций
а) $z = xy(1 - x - y)$; б) $z = e^{0,5x}(x + y^2)$; в) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

2. Найдите экстремум функции $z = xy$ при условии, что x и y связаны уравнением $2x - 3y - 5 = 0$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 1 - x^2 - y^2$ в круге $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$.
4. Из всех прямоугольников с заданной площадью найдите тот, у которого периметр наименьший.
5. Определите размеры конуса наибольшего объема при условии, что его боковая поверхность равна S .

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите экстремумы функций
а) $z = 2xy - 4x - 2y$; б) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.
2. Определите размеры прямоугольного открытого бассейна, имеющего наименьшую поверхность, при условии, что его объем равен V .
3. Решите вариант самостоятельной работы в соответствии с последней цифрой Вашей зачетной книжки.

Вариант 1 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \ln(2x - 5y)$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = x \cdot \sin \frac{3y}{1-x}$. 3. Найти экстремумы функции $z = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3$.	Вариант 2 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \sqrt{4 - x^2 + 6x - y^2}$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = x^2 \cdot \arctg \frac{y-2}{x}$. 3. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 2y^2 + 1$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$.
Вариант 3 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \ln(4x + 5y)$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = \frac{5-x}{y} \cdot e^{y^2}$. 3. Найти экстремумы функции $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = 3 - 2x^2 - xy - y^2$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $x \leq 1, y \geq 0, y \leq x$.	Вариант 4 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \arcsin \frac{2x-3}{y}$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = \ln(3x + \ln y)^2$. 3. Найти экстремумы функции $z = x^3 - y^3 - 3xy$. 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $x \geq 1, y \geq -1, x + y \leq 1$.
Вариант 5 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \ln(3x - y)$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = \arccos \frac{1-y}{x^2}$. 3. Найти экстремумы функции $z = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 2xy + 2y^2$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.	Вариант 6 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \sqrt{1 - x^2 + 4y - y^2}$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = e^{1-y} \cdot (2xy + x^2)$. 3. Найти экстремумы функции $z = 2xy - 4x - 2y$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $x \geq -1, y \geq -1, x + y \leq 1$.

Вариант 7 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \ln(7x + 4y)$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = \sqrt{\frac{x^2 - 5y}{y^3}}$. 3. Найти экстремумы функции $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = 10 + 2xy - x^2$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $0 \leq y \leq 4 - x^2$.	Вариант 8 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \arccos \frac{x + 4y}{5}$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = \sqrt[3]{(1 - xy^2 + 5y - 2x)^2}$. 3. Найти экстремумы функции $z = xy \cdot (1 - x - y)$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + xy - 2$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $4x^2 - 4 \leq y \leq 0$.
Вариант 9 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \arccos(x + y)$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = \frac{x^2}{y^2} - \frac{y}{x}$. 3. Найти экстремумы функции $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $x \leq 0, y \leq 0, x + y + 2 \geq 0$.	Вариант 10 1. Найти и изобразить область определения функции $z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$. 2. Найти частные производные первого порядка $z = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{x - y}$. 3. Найти экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$. 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + xy$ в замкнутой области, заданной системой неравенств $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3$.

Практическое занятие № 41

Тема занятия «Итоговое занятие по темам "Ряды. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных"»

Цель занятия: Проверка теоретических знаний по темам "Ряды. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных".

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Тема 6. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

1. Дайте определения числового ряда, общего члена ряда. Как определяется сумма числового ряда?
2. Какой ряд называется сходящимся, а какой расходящимся? Приведите примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов.
3. Введите понятие остатка числового ряда.
4. Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости числового ряда.
5. Сформулируйте признаки сравнения знакоположительных рядов.
6. Когда для исследования числовых рядов может быть применен признак Даламбера? Сформулируйте этот признак.
7. Когда согласно с радикальным признаком Коши сходимости числовой ряд сходится, а когда расходится?
8. Сформулируйте интегральный признак Коши сходимости знакоположительных рядов.
9. Определите знакочередующийся ряд.
10. Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.
11. Дайте определение степенного ряда. Запишите ряд по степеням x .
12. Введите понятия область сходимости (интервал сходимости), радиус сходимости степенного ряда.
13. Какие способы нахождения радиуса и интервала сходимости Вы знаете?
14. Запишите формулу Коши-Адамара для нахождения радиуса сходимости степенного ряда.
15. Дайте определение ряда Тейлора и ряда Маклорена.
16. Вспомните разложения в степенной ряд функций $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$,
 $y = (1+x)^n$, $y = \frac{1}{1+x}$.
17. Расскажите о приближенном вычислении значений функций с помощью степенных рядов.

Повышенный уровень

Тема 6. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

1. Сформулируйте основные свойства рядов.
2. Приведите пример какого-нибудь числового ряда, для которого выполнено необходимое условие сходимости, но ряд расходится.
3. Какой из рассмотренных признаков сходимости знакоположительных рядов является самым мощным?
4. Дайте определение суммы числового ряда. Какой способ вычисления суммы числового ряда Вы можете предложить.
5. Дайте определение знакопеременного ряда.

6. Введите определения абсолютно сходящихся и условно сходящихся рядов. Приведите примеры.
7. Дайте определение функционального ряда и его области сходимости.
8. Сформулируйте теорему Абеля о сходимости степенных рядов.
9. Приведите примеры рядов, сходящихся
10. а) в одной точке; б) на всей числовой прямой;
11. в) на некотором конечном интервале.

Базовый уровень

Тема 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Функции нескольких переменных. Основные определения.
2. Область определения и область значений функции двух переменных.
3. График функции двух переменных.
4. Частные производные функции нескольких переменных. Определение, правила вычисления.
5. Смешанные производные.
6. Теорема о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования.
7. Полный дифференциал.
8. Дифференциал сложной функции.
9. Дифференциалы высших порядков.
10. Экстремум функции двух переменных.
11. Необходимое условие экстремума для функции двух переменных.
12. Достаточное условие экстремума для функции двух переменных.

Повышенный уровень

Тема 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Линии уровня.
2. Поверхности уровня.
3. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
4. Свойства непрерывных функций двух переменных.
5. Производные сложной функции.
6. Неявные функции и их дифференцирование.
7. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.
8. Условный экстремум, метод множителей Лагранжа.
9. Вывод метода наименьших квадратов с помощью решения задачи на нахождение экстремума функции нескольких переменных.

**8.ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ
ПЕРЕМЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ
Практическое занятие № 42**

Тема занятия «Двойной интеграл: определение, свойства, вычисление»

Цель занятия: Обобщение понятия определенного интеграла и введение понятия двойного интеграла.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

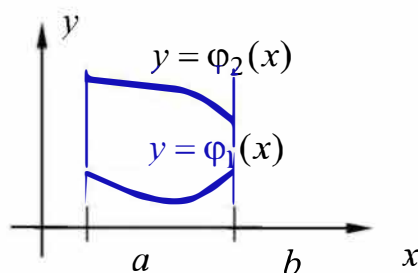
1. Приведите задачу, приводящую к понятию двойного интеграла.
2. Сформулируйте определение двойного интеграла.
3. Назовите основные свойства двойного интеграла.
4. Расскажите, как определить пределы интегрирования при вычислении двойного интеграла для случая прямоугольной области.
5. Расскажите, как определить пределы интегрирования при вычислении двойного интеграла для случая криволинейной области.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

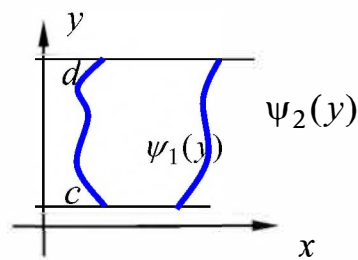
1. Пусть область интегрирования D функции двух переменных $f(x, y)$ определяется согласно следующему рисунку



Перейдите к повторным интегралам при вычислении интеграла

$$\iint_D f(x, y) dx dy .$$

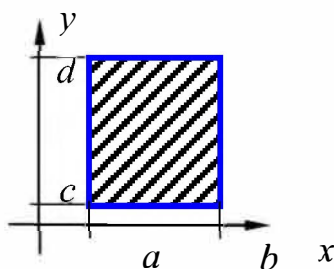
2. Пусть область интегрирования D функции двух переменных $f(x, y)$ определяется согласно рисунку



Перейдите к повторным интегралам при вычислении интеграла

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

3. Пусть область интегрирования D функции двух переменных $f(x, y)$ определяется согласно рисунку



Перейдите к повторным интегралам при вычислении интеграла

$$\iint_D f(x, y) dx dy.$$

4. Для данных интегралов изобразите область интегрирования и измените порядок интегрирования

а) $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy$; б) $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy$; в) $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$; г) $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

5. Измените порядок интегрирования $\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Для данных интегралов изобразите область интегрирования и измените порядок интегрирования

а) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$; б) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$; в) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$; г) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy$.

2. Измените порядок интегрирования $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f dx$.

Практическое занятие № 43

Тема занятия «Двойной интеграл: замена переменных, переход к полярной системе координат, приложения»

Цель занятия: Формирование умений вычислять двойные интегралы и использовать их для вычисления геометрических и физических величин.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Сформулируйте определение двойного интеграла.
2. Назовите основные свойства двойного интеграла.
3. Запишите формулу замены переменных в двойном интеграле.
4. Запишите формулу перехода к полярной системе координат при вычислении двойного интеграла. Когда целесообразно выполнять эту замену?
5. Приведите примеры применения двойных интегралов при вычислении различных величин.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Вычислите:
а) $\iint_D (18x^2y^2 + 32x^3y^3) dx dy; D: x=1, y=x^3, y=-\sqrt[3]{x};$
б) $\iint_D y^2 e^{-xy/4} dx dy; D: x=0, y=2, y=x.$
2. Из пособия [2], часть 2 решите номера 30, 33, 35 (задачи на замену переменной в двойном интеграле, номера 44, 47, 58, 71, 82 (задачи на приложения двойного интеграла).

Задания для самостоятельной работы дома

1. Вычислите
а) $\iint_D (36x^2y^2 - 96x^3y^3) dx dy; D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3;$
б) $\iint_D y \cos xy dx dy; D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=1, x=2.$

2. Из пособия [2], часть 2 решите номера 31, 32, 34 (задачи на замену переменной в двойном интеграле, номера 45, 48, 57, 72, 83 (задачи на приложения двойного интеграла)).

Практическое занятие № 44

Тема занятия «Тройной интеграл: определения, свойства, вычисление»

Цель занятия: Обобщение понятия определенного интеграла и введение понятия тройного интеграла.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Приведите задачу, приводящую к понятию тройного интеграла.
2. Дайте определение тройного интеграла.
3. Расскажите, как определить пределы интегрирования при вычислении тройного интеграла.
4. Запишите формулу замены переменных в тройном интеграле.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Вычислите

$$\iiint_V 15(y^2 + z^2) dx dy dz; V : z = x + y, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0, \text{ изобразив}$$

область интегрирования.

2. Из пособия [2], часть 2 решите номера 101, 103, 105.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Для данных интегралов изобразите область интегрирования и вычислите их

а) $\iiint_V (3x + 4y) dx dy dz; V : y = x, y = 0, x = 1;$

б) $\iiint_V 8y^2 z e^{2xyz} dx dy dz; V : \begin{cases} x = -1, y = 2, z = 1, \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$

2. Из пособия [2], часть 2 решите номера 102, 104, 106.

Практическое занятие № 45

Тема занятия «Тройной интеграл: замена переменных, переход к цилиндрической и сферической системам координат, приложения»

Цель занятия: Формирование умений вычислять двойные интегралы и использовать их для вычисления геометрических и физических величин.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Приведите задачу, приводящую к понятию тройного интеграла.
2. Дайте определение тройного интеграла.
3. Расскажите, как определить пределы интегрирования при вычислении тройного интеграла.
4. Запишите формулу замены переменных в тройном интеграле.
5. Запишите формулу перехода к цилиндрической системе координат при вычислении тройного интеграла.
6. Запишите формулу перехода к сферической системе координат при вычислении тройного интеграла.
7. Приведите примеры применения тройных интегралов при вычислении различных величин.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Из пособия [2], часть 2 решите задания 107, 109, 111 (задачи на замену переменных), задания 114, 116, 118 (приложения тройного интеграла)

Задания для самостоятельной работы дома

Из пособия [2], часть 2 решите задания 108, 110, 112 (задачи на замену переменных), задания 115, 117, 119 (приложения тройного интеграла)

Практическое занятие № 46

Тема занятия «Криволинейные интегралы по длине дуги и по координатам, их вычисление и приложения»

Цель занятия: Формирование умений вычислять криволинейные интегралы и использовать их для вычисления геометрических и физических величин.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Из пособия [2], часть 2 решите задания 186, 188, 191, 197, 199.

Задания для самостоятельной работы дома

Из пособия [2], часть 2 решите задания 187, 190, 192, 200.

Практическое занятие № 47

Тема занятия «Поверхностные интегралы первого и второго рода, их вычисление»

Цель занятия: Формирование умений вычислять поверхностные интегралы первого и второго рода.

План проведения занятия соответствует разработке занятия в пособии [3], часть 2, глава 8 с 169-183, разобрать в аудитории задания 1,2(1,3), 3(4,5); для самостоятельной работы дома 2(2,4), 3(1-3), 4(1), 5.

Кроме того можно предложить

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Из пособия [2], часть 2 рассмотреть разобранные задания 227-231

Задания для самостоятельной работы дома

Из пособия [2], часть 2 решите задания 232, 233, 234.

9. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Практическое занятие № 48

Тема занятия «Скалярные и векторные поля»

Цель занятия: Формирование понятия скалярного поля и умений находить производную по направлению и градиент скалярного поля.

1. Скалярное поле и его геометрическое изображение

Определение. Скалярным полем называется часть пространства (или все пространство), каждой точке P которой соответствует численное значение некоторой скалярной величины U .

Например, неоднородное тело, каждой точке которого соответствует определенное значение плотности, можно рассматривать как скалярное поле. Другими примерами скалярных полей являются поле распределения электрического потенциала и т.д. Во всех случаях мы будем предполагать, что скалярная величина u не зависит от времени, а зависит от положения точки P в пространстве. Иными словами, величина u рассматривается как функция точки $P: u = F(P)$. Эта функция называется *функцией поля*. Если в пространстве ввести систему координат $Oxyz$, то точка P в этой системе будет иметь определенные координаты x, y и z , и скалярная величина u станет функцией этих координат:

$$u = F(P) = F(x, y, z).$$

Обратно, всякая функция трех переменных $u = F(x, y, z)$ задает некоторое скалярное поле.

Скалярные поля часто изображаются геометрически с помощью так называемых поверхностей уровня.

Определение. Поверхностью уровня (или эквипотенциальной поверхностью) скалярного поля называется геометрическое место точек пространства, в которых функция поля $u = F(x, y, z)$ имеет одно и то же значение C .

Уравнение поверхности уровня имеет вид:

$$F(x, y, z) = C.$$

Придавая C различные значения, получим семейство поверхностей уровня.

2. Производная по направлению

Пусть задана дифференцируемая функция скалярного поля $u = F(x, y, z)$. Рассмотрим точку $P(x; y; z)$ этого поля и луч l , выходящий из точки P в направлении единичного вектора

$$l = \cos\alpha \cdot i + \cos\beta \cdot j + \cos\gamma \cdot k,$$

где α, β и γ - углы вектора l с осями координат.

Пусть $P_1(x + \Delta x; y + \Delta y; z + \Delta z)$ - какая-нибудь другая точка этого луча. Разность значений функции u скалярного поля в точках P_1 и P назовем *приращением этой функции в направлении l* и обозначим через $\Delta_l u$. Тогда

$$\Delta_l u = F(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - F(x, y, z).$$

Обозначим также через Δl расстояние между точками P и P_1 :

$$\Delta l = PP_1.$$

Определение. Производной функции $u = F(x, y, z)$ по направлению l называется предел $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}$.

Производная функции $u = F(x, y, z)$ по направлению l обозначается символом $\frac{\partial u}{\partial l}$. Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta_l u}{\Delta l}.$$

Формула для вычисления:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = F'_x(x, y, z) \cos \alpha + F'_y(x, y, z) \cos \beta + F'_z(x, y, z) \cos \gamma.$$

Пример 1. Найти производную функции $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точке $P_1(1; 2; -1)$ по направлению, идущему от точки P_1 к точке $P_2(2; 4; -3)$.

Решение. Находим вектор $\overrightarrow{P_1 P_2} = (2 - 1)i + (4 - 2)j + (-3 + 1)k = i + 2j - 2k$ и соответствующий ему единичный вектор

$$l = \frac{\overline{P_1 P_2}}{|P_1 P_2|} = \frac{i + 2j - 2k}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j - \frac{2}{3}k.$$

Таким образом, вектор l имеет следующие направляющие косинусы:

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}; \cos \beta = \frac{2}{3}; \cos \gamma = -\frac{2}{3}.$$

Теперь найдем частные производные функции $u = x^2 - 2xz + y^2$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 - 2xz + y^2)'_x = 2x - 2z; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 - 2xz + y^2)'_y = 2y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2 - 2xz + y^2)'_z = -2x,$$

и их значения в точке $P_1(1; 2; -1)$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{P_1} = (2x - 2z)\bigg|_{\substack{x=1 \\ z=-1}} = 4; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{P_1} = (2y)\bigg|_{y=2} = 4; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{P_1} = -2x\bigg|_{x=1} = -2;$$

Подставляя найденные значения, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} + (-2)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

3. Градиент

При изучении скалярных полей наряду с функцией поля $u = F(x, y, z)$ рассматривается некоторый вектор, тесно связанный с этой функцией, - градиент скалярного поля.

Определение. *Градиентом в точке $P(x, y, z)$ скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией $u = F(x, y, z)$, называется вектор, равный*

$$F'_x(x, y, z)i + F'_y(x, y, z)j + F'_z(x, y, z)k.$$

Градиент функции $u = F(x, y, z)$ мы будем обозначать одним из символов $grad F(x, y, z)$, $grad F(P)$.

По определению

$$grad F(x, y, z) = F'_x(x, y, z)i + F'_y(x, y, z)j + F'_z(x, y, z)k.$$

Таким образом, каждой точке $P(x; y; z)$ скалярного поля, заданного дифференцируемой функцией $u = F(x, y, z)$, относятся не только значение этой функции, но и вполне определенный вектор- $grad F(P)$.

Пример. Найти градиент функции $u = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$ в точке $P_0(2; -1, 1)$.

Решение. Введя обозначение $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$, найдем $F'_x(x, y, z) = 2x$; $F'_y(x, y, z) = 4y$; $F'_z(x, y, z) = -2z$. Затем, пользуясь формулой (42), получим

$$\text{grad } u(P_0) = F'_x(2; -1, 1)i + F'_y(2; -1, 1)j + F'_z(2; -1, 1)k = 4i - 4j - 2k.$$

Между градиентом функции $u = F(x, y, z)$ в данной точке и производной по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ в той же точке имеется связь, которая устанавливается следующей теоремой.

Теорема. Проекция вектора $\text{grad } u$ на единичный вектор $l = \cos\alpha \cdot i + \cos\beta \cdot j + \cos\gamma \cdot k$ равна производной функции u по направлению

$$l: \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial l}.$$

Учитывая, что производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ выражает скорость изменения скалярного поля $u = F(x, y, z)$ в этом направлении, формулу можно прочесть так: проекция $\text{grad } u$ на вектор l равна скорости изменения поля $u = F(x, y, z)$ в направлении вектора l .

Обозначим через φ угол между единичным вектором l и $\text{grad } u$. Тогда $\text{grad } u = |\text{grad } u| \cdot \cos\varphi$. Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad } u| \cos\varphi.$$

Если направления векторов l и $\text{grad } u$ совпадают ($\varphi = 0$), то производная по направлению $\frac{\partial u}{\partial l}$ имеет, очевидно, наибольшее значение равное

$$|\text{grad } u| \cos 0 = |\text{grad } u|.$$

Таким образом, мы приходим к следующему выводу: $\text{grad } u$ есть вектор, указывающий направление наибольшего возрастания поля в данной точке и имеющий модуль, равный скорости этого возрастания.

Отсюда следует, что $\text{grad } u$ функции скалярного поля $u = F(x, y, z)$ определяется самим полем и не зависит от системы координат, в которой рассматривается функция поля.

Пример 2. Найти наибольшую скорость возрастания функции $z = x^2y - 5y^3$ в точке $P_0(2; 1)$.

Решение. Наибольшая скорость возрастания функции равна модулю градиента этой функции. Находим

$$\text{grad } z = (z^2y - 5y^3)'_x i + (x^2y - 5y^3)'_y j = 2xyi + (x^2 - 15y^2)j.$$

В точке $P_0(2; 1)$ $\text{grad } z = 4i - 11j$. Следовательно, наибольшая скорость возрастания функции равна

$$|\text{grad } z|_{P_0} = \sqrt{4^2 + 11^2} = \sqrt{137}.$$

Говорят, что в области D задано *векторное поле*, если каждой точке M этой области сопоставлен по некоторому закону вектор $a(M)$. Таким образом, понятия векторного поля и векторной функции, определенной в области D , совпадают.

Пусть M - точка области D , e - единичный вектор с координатами $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, определяющий некоторое направление. Пусть M' - любая точка из D , отличная от M и такая, что вектор MM' коллинеарен вектору e . Обозначим расстояние между M и M' через ρ .

Определение. Производной векторного поля $a(M)$ в точке M по направлению e называется предел отношения

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta a(M)}{\rho} = \frac{\partial a(M)}{\partial e} = \frac{\partial a}{\partial e}$$

(в случае, если этот предел существует). Здесь $\Delta a(M) = a(M') - a(M)$.

Пусть в этом базисе вектор $a(M)$ имеет координаты P, Q, R . Согласно формулам

$$\frac{\partial a}{\partial i} = \frac{\partial a}{\partial x} = A_i, \quad \frac{\partial a}{\partial j} = \frac{\partial a}{\partial y} = A_j, \quad \frac{\partial a}{\partial k} = \frac{\partial a}{\partial z} = A_k.$$

$${}^0A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Определение. Поток Π векторного поля F через ориентированную поверхность S называется поверхностный интеграл

$$\Pi = \iint_S (F \cdot n) dS,$$

где n - единичный вектор нормали к поверхности S .

Направление вектора нормали обычно оговаривается в условии задачи. В случае замкнутой поверхности направление вектора нормали выбирается «изнутри наружу».

Вычислим производную векторного поля $a(M)$ по направлению e . Поскольку единичный вектор e имеет координаты $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, то

$$\frac{\partial a(M)}{\partial e} = Ae = A(i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma) = \cos \alpha (Ai) + \cos \beta (Aj) + \cos \gamma (Ak)$$

Далее,

$$Ai = \frac{\partial a}{\partial x}, \quad Aj = \frac{\partial a}{\partial y}, \quad Ak = \frac{\partial a}{\partial z}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial a(M)}{\partial e} = \cos \alpha \frac{\partial a}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial a}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial a}{\partial z}.$$

Учитывая, что $a = Pi + Qj + Rk$, запишем еще одно выражение для производной по направлению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(M)}{\partial e} = & \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial P}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial P}{\partial z} \cos \gamma \right) i + \\ & + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial Q}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \gamma \right) j + \\ & + \left(\frac{\partial R}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial R}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial R}{\partial z} \cos \gamma \right) k. \end{aligned}$$

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями Задания, решаемые в аудитории

1. Скалярное поле задано функцией $U(x, y, z) = xyz$. Найти градиент этой функции в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Каков его модуль?
2. Скалярное поле задано функцией $U(x, y, z) = z(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$. Найти уравнения поверхностей уровня. Какая из этих поверхностей проходит через точку $A(2; 0; \frac{2}{\sqrt{3}})$?

3. Вычислить производную функции поля $U = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ в точке $M(2; -1; -2)$, в направлении вектора $\vec{l} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$.
 4. Вычислить $|\text{grad } z|$ в точке $M_0(4; 2)$, если $z^2 = xy$.
 5. Вычислить производную функции $u = \ln(e^x + e^y)$ в точке $M_0(0; 0)$ по направлению луча биссектрисы третьего координатного угла. Вычислить для векторного поля F его поток через поверхность S .
1. $F = r, S: \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x > 0, y > 0, z > 0 \right\}$
 2. $F = xi + yk, S: \{x^2 + y^2 + z = 9, x < 0, y < 0, z > 0\}$
 3. $F = xyi + yzj + xzk, S$: Треугольник с вершинами в точках $A(0, 0, 4), B(-2, 1, 0), C(2, 1, 0)$
 4. $F = xzi + yzj + xyk, S: \{x^2 + y^2 = (z - 1)^2, y < 0, 1 > z > -1\}$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Составить уравнение линий уровня для поля $u = 4 - x^2 - y^2$.
2. Составить уравнения поверхностей уровня для поля $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.
3. Даны скалярные поля $u = x^2y + y^2x$ и $v = x - 6y + 5xy$. Найти угол между $\text{grad } u$ и $\text{grad } v$ в точке $M(2; -1; 0)$.
4. Найти геометрическое место точек, в которых модуль градиента поля $u = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ равен 2.
5. Вычислить координаты точек, в которых градиент поля $u = \ln(x + \frac{1}{y})$ равен $\vec{i} - \frac{16}{9}\vec{j}$.
6. Найти производные функции по направлению $\vec{l}$ в точке M_0 .
 - а) $z = x^3y - 5xy^2 + 8, \vec{l} = \vec{i} + \vec{j}, M_0(1; 1)$.
 - б) $z = \ln \frac{x^2 + y^2}{xy}, \vec{l} = 6\vec{i} + 8\vec{j}, M_0(1; 2)$.
 - в) $z = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \vec{l} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}, M_0(1; 1; 1)$.

Вычислить для векторного поля F его поток через поверхность S .

1. $F = (x + y)i + (y + z)j + (x + z)k$, S : Треугольник с вершинами в точках $A(0,0,5)$, $B(-2,-3,0)$, $C(-2,1,0)$
2. $F = xyi + yzj + xzk$, $S : \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x > 0, z > 0 \right\}$
3. $F = xzi + yzj + xyk$, $S : \{x^2 + y^2 + z = 9, y > 0, z > 0\}$

Практическое занятие № 49

Тема занятия «Основные интегральные формулы анализа»

Цель занятия: Формирование умений исследовать знакоположительные ряды на сходимость.

Методические рекомендации

Разработка занятия соответствует материалам пособия [3] п.53.4, 53.5, с 172-173, с. 182-183, 54.6-54.8 с 188-195, с. 196-197.

Из пособия [2], часть 2 рассмотреть разобранные задания 235-250.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Из пособия [2], часть 2 рассмотреть разобранные задания 216, 217.

Из пособия [2], часть 2 решите задания 251, 255, 261, 263.

Из пособия [3] п.53.4, 53.5, с 172-173, с. 182-183 решите задачи 9-13(1), п.54.6-54.8 с 188-195, с 196-197 задачи 9-14 (1).

Задания для самостоятельной работы дома

Из пособия [2], часть 2 решите задания 218, 219.

Из пособия [2], часть 2 решите задания 252, 256, 262, 264.

Из пособия [3] п.53.4, 53.5, с 172-173, с. 182-183 решите задачи 9-13(2), п.54.6-54.8 с 188-195, с 196-197 задачи 9-14 (2).

Практическое занятие № 50

Тема занятия «Итоговое занятие по разделам 8-9»

Цель занятия: Контроль знаний студентов по разделам «Интегральное исчисление функции нескольких переменных», «Элементы теории поля».

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Базовый уровень

Тема Двойные интегралы.

1. Определение двойного интеграла.
2. Свойства двойного интеграла.
3. Сведение двойного интеграла к повторным интегралам.
4. Приложения двойного интеграла.

Тема. Тройные интегралы.

1. Определение тройного интеграла.
2. Свойства тройного интеграла.
3. Сведение тройного интеграла к повторным интегралам.
4. Приложения тройного интеграла.

Тема Криволинейные интегралы.

1. Криволинейные интегралы по длине дуги, их определение и вычисление.
2. Криволинейные интегралы по координатам, их определение и вычисление.

Тема Поверхностные интегралы.

1. Понятие поверхности.
2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
3. Односторонние и двусторонние поверхности.
4. Площадь поверхности.
5. Поверхностные интегралы первого рода, их вычисление.

Тема Скалярные поля и их характеристики.

1. Скалярные поля, определение, описание.
2. Производная по направлению.

Тема Векторные поля и их характеристики.

1. Определение векторного поля.
2. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля.

Повышенный уровень

Тема Двойные интегралы

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
2. Замена переменных при вычислении двойного интеграла.
3. Переход к полярной системе координат при вычислении двойного интеграла.

Тема Тройные интегралы.

1. Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла.
2. Замена переменных при вычислении тройного интеграла.
3. Переход к цилиндрической и сферической системам координат при вычислении тройного интеграла.
4. Приближённое вычисление кратных интегралов. Аналог формул прямоугольников, трапеций, Симпсона, касательных.

Тема Криволинейные интегралы.

1. Сравнительный анализ свойств криволинейных интегралов первого и второго рода.
2. Приложения криволинейных интегралов первого рода.
3. Приложения криволинейных интегралов второго рода.

Тема. Поверхностные интегралы.

1. Поверхностные интегралы второго рода

Тема Скалярные поля и их характеристики.

1. Градиент скалярного поля.

Тема Векторные поля и их характеристики.

1. Циркуляция векторного поля.

Тема Основные интегральные формулы анализа.

1. Формула Грина, её применение.
2. Формула Остроградского-Гаусса.
3. Формула Стокса.

10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Практическое занятие № 51

Тема занятия «Дифференциальные уравнения, основные понятия.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными»

Цель занятия: формирование навыков решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение дифференциального уравнения, его порядка. Запишите общий вид дифференциального уравнения первого и n-го порядков.
2. Введите понятия общего и частного решений дифференциального уравнения. Расскажите, как из общего решения получить частное решение уравнения. Как по общему виду общего решения дифференциального уравнения определить его порядок.
3. Расскажите о задачах, приводящих к понятию дифференциального уравнения.
4. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися и разделенными переменными. Расскажите порядок решения уравнения с разделяющимися переменными.
5. Повторите таблицу основных интегралов и вспомните основные методы интегрирования, классы интегралов.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите общее решение следующих дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными
а) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$; б) $(1 + e^x)yy' = e^x$; в) $e^{-y}(1 + y') = 1$;
г) $xy(1 + x^2)y' - 1 - y^2 = 0$; д) $y^2y' = 1 - 5x$; е) $(x + 1)^3 y' - (y - 2)^2 = 0$.
2. Найдите частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданному начальному условию: $(1 + x^2)y' + y = 0$, $y(1) = 1$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите общее решение следующих дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

а) $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$; б) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$; в) $y' = 3^{x+y}$;

г) $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$; д) $y'x = \sqrt{y-1}$; е) $y' = \frac{3^{2x}}{7^{3y}}$.

2. Найдите частное решение дифференциального уравнения, отвечающее

заданному начальному условию: $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$.

Практическое занятие № 52

Тема занятия «Дифференциальные уравнения первого порядка: однородные, сводящиеся к однородным»

Цель занятия: формирование навыков решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение дифференциального уравнения, его порядка. Запишите общий вид дифференциального уравнения первого и n-го порядков.
2. Повторите таблицу основных интегралов и вспомните основные методы интегрирования, классы интегралов.
3. Введите определение однородной функции и дайте определение однородного дифференциального уравнения первого порядка. Расскажите, как свести решение однородного дифференциального уравнения к решению уравнения с разделяющимися переменными.
4. Расскажите, какие дифференциальные уравнения и как сводятся к однородным дифференциальным уравнениям.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите общее решение однородных дифференциальных уравнений

а) $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$; б) $y' = \frac{x - y}{x + 3y}$; в) $5xyy' = x^2 + y^2$;

г) $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$; д) $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y}$.

2. Сведите уравнение к однородному и найдите его общее решение

$$(x + 2y + 3)dy - (3x + 6y - 1)dx = 0.$$

3. Найдите частное решение дифференциального уравнения, отвечающее

заданному начальному условию: $y' = \frac{x + y - 2}{y - x - 2}$, $y(0) = 2$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите общее решение однородных дифференциальных уравнений

а) $(x + y)dx + xdy = 0$; б) $y' = \frac{x + 2y}{4x}$; в) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$;

г) $y' = 1 + \frac{y}{x}$; д) $xye^{\frac{x}{y}}dy + y^2dx = x^2e^{\frac{x}{y}}dy$.

2. Сведите уравнение к однородному и найдите его общее решение

$$(x - y + 4)dy + (x + y - 5)dx = 0.$$

3. Найдите частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданному начальному условию: $2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0$, $y(0) = 2$.

Практическое занятие № 53

Тема занятия «Дифференциальные уравнения первого порядка: линейные, в полных дифференциалах»

Цель занятия: формирование навыков решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение линейного дифференциального уравнения первого порядка, запишите его общий вид.
2. Расскажите о решении линейного дифференциального уравнения первого порядка. Укажите, какая замена используется при его решении, к каким типам уравнений сводится решение линейного уравнения в результате сделанной замены.
3. Запишите дифференциальное уравнение линейное по переменной x .
4. Дайте определение дифференциального уравнения Бернулли. Как свести уравнение Бернулли к линейному дифференциальному уравнению.
5. Расскажите о методе решения уравнения Бернулли.
6. Дайте определение дифференциального уравнения в полных дифференциалах. Почему это уравнение носит подобное название.
7. Расскажите, как найти общее решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах.
8. В каких случаях уравнение может быть сведено к уравнению в полных дифференциалах?
9. Составьте в рабочей тетради таблицу, отражающую типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы их решения.

Название дифференциального уравнения	Общий вид дифференциального уравнения	Подстановка или алгоритм решения	К какому типу дифференциального уравнения сводится

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите общие решения следующих линейных дифференциальных уравнений первого порядка

а) $y' - 2y = x^2 - x$; б) $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$; в) $y' \cdot \cos x + y = 1 - \sin x$.

2. Решите дифференциальное уравнение линейное относительно переменной x

$$(y^4 + 2x) \cdot y' = y.$$

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения Бернулли

$$4xy' + 3y = -e^x \cdot x^4 \cdot y^5.$$

4. Решите дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

а) $(x^2 + \sin y)dx + (e^x \cdot \cos y + y)dy = 0$;

б) $(xy + \sin y)dx + (0,5x^2 + x \cdot \cos y)dy = 0$.

5. Проинтегрируйте дифференциальное уравнение, сводящееся к уравнению в полных дифференциалах и имеющее интегрирующий множитель, зависящий только от x

$$(x^2 \cdot \cos x - y)dx + xdy = 0.$$

6. Найдите частные решения дифференциальных уравнений, отвечающие заданным начальным условиям

а) $(\ln y - 5y^2 \cdot \sin 5x)dx + \left(\frac{x}{y} + 2y \cdot \cos 5x\right)dy = 0$, $y(0) = e$;

б) $x^3 \cdot y' + 4y = 12$, $y(0) = 1$;

в) $(y^2 + 2y + x^2) \cdot y' + 2x = 0$, $y(1) = 0$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите общие решения следующих линейных дифференциальных уравнений первого порядка

а) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}$; б) $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$; в) $y' \cdot \sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x$.

2. Решите дифференциальное уравнение линейное относительно переменной x

$$y' \cdot (x + y^2) = y.$$

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения Бернулли

$$y' - 2y \cdot \operatorname{tg} x + y^2 \cdot \sin^2 x = 0.$$

4. Решите дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

а) $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0;$

б) $(\arcsin x + 2xy)dx + (x^2 + 1 + \operatorname{arctg} y)dy = 0.$

5. Проинтегрируйте дифференциальное уравнение, сводящееся к уравнению в полных дифференциалах и имеющее интегрирующий множитель, зависящий только от y

$$y \cdot \sqrt{1 - y^2} dx + (x \cdot \sqrt{1 - y^2} + y)dy = 0.$$

6. Найдите частные решения дифференциальных уравнений, отвечающие заданным начальным условиям

а) $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0, y(0) = 0;$

б) $y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0;$

в) $y' + y = e^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{y}, y(0) = 2,25.$

Практическое занятие № 54

Тема занятия «Дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков, случаи понижения порядка»

Цель занятия: изучение способов понижения порядка дифференциальных уравнений.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определения дифференциального уравнения n -го порядка, запишите общий вид такого уравнения.
2. Введите понятие общего решения дифференциального уравнения n -го порядка.
3. Расскажите, как из общего решения дифференциального уравнения n -го порядка получить частное решение.
4. Решение какого дифференциального уравнения n -го порядка можно найти n -кратным интегрированием.
5. Расскажите о решении дифференциального уравнения n -го порядка, которое не содержит искомой функции. Как понизить порядок этого дифференциального уравнения?
6. Расскажите о решении дифференциального уравнения n -го порядка, которое не содержит независимой переменной. Как понизить порядок этого дифференциального уравнения?
7. Рассмотрите решение дифференциального уравнения вида $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ однородного относительно $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Решите уравнения повторным интегрированием
 - а) $y''' = \sin^2 x$; б) $y'' = (x-1)\cos x$; в) $y''' = \sin^4 x$.
2. Найдите общее решение уравнения, не содержащего независимой переменной x

$$y'' = 2\sin y + 3y'^2; \text{ б) } y''(1+y) = y'^2 + y'.$$

3. Решите уравнение, не содержащее искомой функции

$$\text{а) } (1-x^2)y'' - xy' = 2; \text{ б) } y'''(x-1) - y'' = 0.$$

4. Найдите общее решение уравнения однородного относительно искомой функции и ее производных $(y+y')y'' + y'^2 = 0$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Решите уравнения повторным интегрированием

$$\text{а) } y'' = x \ln x; \text{ б) } y''' = (x-1)e^{-x}; \text{ в) } y^{IV} = \cos^2 x.$$

2. Найдите общее решение уравнения, не содержащего независимой переменной x

$$\text{а) } 1 + y'^2 = yy''; \text{ б) } y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}.$$

3. Решите уравнение, не содержащее искомой функции

$$\text{а) } xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}; \text{ б) } 2xy''' \cdot y'' = y''^2 - 1.$$

4. Найдите общее решение уравнения однородного относительно искомой функции и ее производных $2xy''' \cdot y'' = y''^2 - 4$.

Практическое занятие № 55

Тема занятия «Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка»

Цель занятия: формирование навыков решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, запишите его общий вид.
2. Дайте определение линейно независимых функций.
3. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.
4. Запишите вид общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в зависимости от корней характеристического уравнения.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Вопросы к занятию

Задания, решаемые в аудитории

1. Запишите общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, если известны корни характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$
а) $k_1 = 3; k_2 = -6$; б) $k_1 = 0; k_2 = -6$; в) $k_1 = 4 + 2i; k_2 = 4 - 2i$; г) $k_1 = k_2 = -3$.
2. По корням характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ составьте линейное однородное дифференциальное уравнение
а) $k_1 = 8; k_2 = 7$; б) $k_1 = 0; k_2 = 4$; в) $k_1 = 5i; k_2 = -5i$; г) $k_1 = k_2 = -4$.
3. Найдите общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка
а) $y'' - 12y' + 20y = 0$; б) $y'' - 5y' = 0$; в) $y'' + 20y = 0$; г) $y'' - 16y' + 68y = 0$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Запишите общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, если известны корни характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$

а) $k_1 = -8; k_2 = -7$; б) $k_1 = 6 + 5i; k_2 = 6 - 5i$; в) $k_1 = k_2 = 12$.

2. По корням характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$ составьте линейное однородное дифференциальное уравнение

а) $k_1 = -12; k_2 = 10$; б) $k_1 = 0; k_2 = -8$; в) $k_1 = k_2 = -2$.

3. Найдите общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

а) $y'' + 3y' - 15y = 0$; б) $y'' + 2y' = 0$; в) $y'' + 36y = 0$.

ИДЗ №10

Тема «Дифференциальные уравнения»

Выполнить следующие задания, выбрав соответствующие варианту величины из представленной ниже таблицы.

1. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

2. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = 0$, если корни характеристического уравнения:

а) $k_1 = a, k_2 = b$;

б) $k_1 = a, k_2 = 0$;

в) $k_1 = k_2 = b$;

г) $k_1 = a + bi, k_2 = a - bi$

Записать общее решение для каждого из составленных уравнений.

3. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

а) $y'' + py' + qy = 0$;

б) $y'' + py' = 0$;

в) $y'' + qy = 0$;

г) $y'' - qy = 0$.

4. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$, отвечающего заданным начальным условиям $y(0) = C_1, y'(0) = C_2$.

5. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

а) $y'' + py' + qy = f_1(x)$, где $f_1(x) = ax^2 + bx + p$;

б) $y'' + py' = f_2(x)$, где $f_2(x) = ax + b$;

- В) $y'' - py' = f_3(x)$, где $f_3(x) = a \cdot e^{px}$;
 Г) $y'' + qy = f_4(x)$, где $f_4(x) = a \cdot \cos \omega x + b \sin \omega x$;
 Д) $y'' - qy = f_1(x) + f_3(x)$.

6. Найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = f_2(x) + f_4(x)$, отвечающее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

7. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' = g(x)$.

ВАРИАНТ	$M(x, y)$	$N(x, y)$	a	b	p	q	C_1	C_2	ω	$g(x)$
1	$x^2y - 2y$	$3xy$	1	2	2	1	0	1	1	$2xe^{-x}$
2	$5xy - y^2$	$2x^2 + y^2$	2	3	5	4	1	4	2	$(x-1) \cdot e^{2x}$
3	$x - y$	$x + 3y$	3	4	10	9	2	3	3	$(2x+5) \cdot e^x$
4	$3xy$	$5x^2 + 2y^2$	4	5	10	16	4	0	4	$x \cdot \cos 3x$
5	$3x + y$	$2x - y + 5$	5	1	26	25	6	2	5	$x \cdot \sin x$
6	$x - y - 4$	$2x - 3y + 2$	-1	2	20	36	3	1	6	$2x \cdot \cos 2x$
7	$5x^2 - x^2y$	$2x + xy$	-2	3	-5	4	-1	3	2	$(x-1) \sin 2x$
8	$x + 2y$	$3x - 4y$	-3	4	4	4	-2	4	2	$(3x+5) \cdot \cos x$
9	$5xy + 2y$	$2xy$	-4	5	-4	4	-5	2	2	$x^2 e^x$
10	$3x - 7y$	$2x - y$	-5	1	-10	9	0	3	3	$2x \cdot e^{5x}$
11	$5x - 2y$	$2x + 7y$	1	3	6	9	-4	1	3	$(x-3) \cdot e^{-2x}$
12	$xy^2 - 3xy$	$2xy$	2	4	-6	9	1	3	3	$(5x+6) \cdot e^{2x}$
13	$2x - y$	$4x + 5y$	3	5	-10	16	0	2	4	$(x-7) \cdot e^{-x}$
14	$x - 3y + 2$	$x + y$	4	2	17	16	2	3	4	$(2x+5) \sin 3x$
15	$2x^2y$	$3xy - x$	5	3	-17	16	3	4	4	$(x+2) \cdot \cos 8x$
16	$5x + y$	$2x - 3y$	-1	4	8	16	4	1	4	$(3-2x) \cdot e^{-5x}$
17	$3y^2 - xy^2$	$2xy + y$	-2	5	-8	16	5	2	4	$(1-x) \cdot e^{-2x}$
18	$5x - 8y$	$x + y$	-3	1	-26	25	6	2	5	$(1+3x) \cdot e^{5x}$
19	$2xy + y$	$3xy$	-4	2	10	25	-2	1	5	$8x \cdot \cos 4x$
20	$x - 5y$	$2x + y$	-5	3	-10	25	-4	0	5	$x \sin 7x$
21	$3xy$	$x^2 + 5y^2$	1	4	37	36	-3	0	6	$(x-5) \cos x$
22	$8xy$	$x^2 - 8y^2$	2	5	-37	36	-2	1	6	$(x+5) \sin x$
23	$7x - y$	$x + y$	3	1	-20	36	-4	2	6	$(3x-4) \cos 8x$
24	$6x + 8y$	$2x + 3y$	4	3	15	36	0	6	6	$(x-2) \sin 3x$
25	$2x + 2y - 5$	$x + y + 3$	5	4	-15	36	4	5	6	$(4x-1) \cdot e^{-x}$
26	$2x^2 + 5y^2$	$xy - y^2$	-1	5	12	36	1	3	6	$(4x+3) \cdot e^x$
27	$7xy + x^2$	$x^2 + y^2$	-2	1	-12	36	-1	4	6	$(3-x) \cdot e^{-2x}$
28	$8xy - y$	$2x^3 - x^3y$	-3	2	8	15	-2	-2	2	$(5-3x) \cdot e^{-3x}$
29	$x + 3y$	$x - 2y + 5$	-4	3	-8	15	2	1	3	$(1-x) \sin 5x$

30	$3x + 5y$	$2x - 3y$	-5	4	14	-32	4	2	1	$(2 - 4x)\cos 2x$
-----------	-----------	-----------	----	---	----	-----	---	---	---	-------------------

Практическое занятие № 56
Тема занятия «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения
второго порядка»

Цель занятия: формирование навыков решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Запишите вид общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в зависимости от корней характеристического уравнения.
2. Дайте определение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, запишите его общий вид.
3. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
4. Расскажите, как найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка. Заполните таблицу, приведенную ниже.

$f(x)$	Особенности характерного уравнения $k^2 + pk + q = 0$	Вид частного решения
$P_n(x)$		
ae^{bx}		
$a\cos ax + b\sin ax$		

5. Расскажите о методе вариации произвольных постоянных для нахождения общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
6. Сформулируйте теорему о наложении решений для линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка. Как она используется?

Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями
Вопросы к занятию

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

а) $y'' - 5y' + 6y = 2x^2 - 5x + 3$; б) $y'' - 12y' + 20y = 3e^{2x}$; в) $y'' + 25y = 3\sin 5x - 4\cos 5x$.

2. Решите дифференциальное уравнение, пользуясь теоремой о наложении решений

$$y'' - 6y' = x^2 - e^{6x}.$$

3. Найдите частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям

$$y'' - 8y' + 12y = 3 - x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

а) $y'' - 8y' + 7y = 3x - 2$; б) $y'' - 8y' = 3x - 2$; в) $y'' - 8y' = 3\cos 4x$.

2. Решите дифференциальное уравнение, пользуясь теоремой о наложении решений $y'' - 12y' + 35y = 3x^2 - 4x + 5\sin 2x - e^{7x}$.

Практическое занятие № 57

Тема занятия «Итоговое занятие по теме "Дифференциальные уравнения.»

Цель занятия: Контроль знаний студентов по разделу «Дифференциальные уравнения».

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Базовый уровень

Тема . Дифференциальные уравнения, основные понятия. Уравнения с разделяющимися переменными.

1. Дайте определение дифференциального уравнения, его порядка. Запишите общий вид дифференциального уравнения первого и n -го порядков.
2. Введите понятия общего и частного решений дифференциального уравнения. Расскажите, как из общего решения получить частное решение уравнения. Как по общему виду общего решения дифференциального уравнения определить его порядок.
3. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися и разделенными переменными. Расскажите порядок решения уравнения с разделяющимися переменными.

Тема . Классификация дифференциальных уравнений первого порядка.

1. Введите определение однородной функции и дайте определение однородного дифференциального уравнения первого порядка. Расскажите, как свести решение однородного дифференциального уравнения к решению уравнения с разделяющимися переменными.
2. Дайте определение линейного дифференциального уравнения первого порядка, запишите его общий вид.
3. Расскажите о решении линейного дифференциального уравнения первого порядка. Укажите, какая замена используется при его решении, к каким типам уравнений сводится решение линейного уравнения в результате сделанной замены.
4. Дайте определение дифференциального уравнения в полных дифференциалах. Почему это уравнение носит подобное название.
5. Расскажите, как найти общее решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах.

Тема . Дифференциальные уравнения высших порядков.

1. Дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков. Определение.
2. Общее решение дифференциального уравнения n -го порядка, отыскание частного решения, отвечающего заданным условиям.
3. Уравнения, решаемые n -кратным интегрированием.

Тема . Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка.

1. Какие формы записи комплексного числа Вы знаете? Дайте их определения.
2. Определите следующие понятия: действительная и мнимая части комплексного числа, мнимая единица, коэффициент при мнимой части, сопряженное комплексное число, модуль и аргумент комплексного числа.
3. Определите действия сложения, вычитания, умножения и деления над комплексными числами в алгебраической форме. Докажите записанные Вами правила. Какое свойство сопряженных комплексных чисел используется при делении?
4. Дайте определение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, запишите его общий вид.
5. Дайте определение линейно независимых функций. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.
6. Запишите вид общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в зависимости от корней характеристического уравнения.
7. Дайте определение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, запишите его общий вид.
8. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
9. Расскажите, как найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка. Заполните таблицу, приведенную ниже.

$f(x)$	Особенности характерного уравнения $k^2 + pk + q = 0$	Вид частного решения
$P_n(x)$		
ae^{bx}		
$a \cos ax + b \sin ax$		

Тема . Системы дифференциальных уравнений.

1. Понятие о системах дифференциальных уравнений.
2. Методы решения систем дифференциальных уравнений.

Тема . Применение дифференциальных уравнений.

1. Дифференциальные уравнения в химии.
2. Приложение дифференциальных уравнений в биологии.
3. Дифференциальные уравнения в медицине.

Повышенный уровень

Тема . Дифференциальные уравнения, основные понятия. Уравнения с разделяющимися переменными.

1. Расскажите о задачах, приводящих к понятию дифференциального уравнения.
2. Приведите примеры дифференциальных уравнений из разных областей естествознания.

Тема . Классификация дифференциальных уравнений первого порядка.

1. Расскажите, какие дифференциальные уравнения и как сводятся к однородным дифференциальным уравнениям.
2. Запишите дифференциальное уравнение линейное по переменной x .
3. Дайте определение дифференциального уравнения Бернулли. Как свести уравнение Бернулли к линейному дифференциальному уравнению.
5. Расскажите о методе решения уравнения Бернулли.
4. В каких случаях уравнение может быть сведено к уравнению в полных дифференциалах?

Тема . Дифференциальные уравнения высших порядков.

1. Дифференциальные уравнения, не содержащие независимой переменной.
2. Дифференциальные уравнения, не содержащие функции.
3. Однородные дифференциальные уравнения.

Тема. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка.

1. Как перевести комплексное число из алгебраической формы записи в тригонометрическую форму и обратно?
2. Определите действия умножения, деления, возведения в целую степень и извлечение корня n -ой степени ($n \in \mathbb{N}$) для комплексных чисел записанных в тригонометрической и показательных формах. Укажите роль корней n -ой степени из единицы и их геометрическую интерпретацию.
3. Докажите формулы для умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме.
4. . Расскажите о методе вариации произвольных постоянных для нахождения общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
5. Сформулируйте теорему о наложении решений для линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка. Как она используется?

Тема . Системы дифференциальных уравнений.

1. Линейная однородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Тема . Применение дифференциальных уравнений.

1. Приложение систем дифференциальных уравнений при решении задач естествознания.
2. Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложение.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Найти общие решения дифференциальных уравнений первого порядка

а) $(xy^2 + x)dx + (y + x^2y)dy = 0$;

б) $(2^{x+y} + 3x^2)dx + (e^{x+y} + 4y^3)dy = 0$.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения первого порядка

$xy' - y = x^2 \cos x$, отвечающее заданному начальному условию $y(0) = 1$.

3. Найти частное решение ЛОДУ второго порядка $y'' + 6y' + 9y = 0$,

отвечающее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

4. Найти общее решение ЛНДУ второго порядка $y'' + 8y' = 2x^2$.

5. Найти частное решение ЛНДУ второго порядка $y'' + y' = 2 \cos 2x - \sin 2x$,

отвечающее заданным начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

11. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Практическое занятие № 58

Тема занятия «Классическое, геометрическое и статистическое определения вероятности»

Цель занятия: Формирование понятия вероятности события и умений её вычислять.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Введите определения элементарного события и пространства элементарных событий, приведите примеры
2. Что такое случайный эксперимент, приведите примеры.
3. Проведете классификацию событий: достоверное, невозможное, случайное. Примеры событий.
4. Введите определения зависимых и независимых событий, совместных и несовместных событий. Проиллюстрируйте данные определения примерами.
5. Введите классическое определение вероятности события. В чём его ограниченность?
6. Дайте определение относительной частоты наступления события. Введите статистическое определение вероятности события.
7. Дайте геометрическое определение вероятности события. Приведите примеры, когда можно применить это определение.
8. Решите устно задачи 1, 5, 6 из [5] глава 11 § 67.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Из [2] номера 3, 6, 10, 24, 26, 28. 32, 34, 44.

Задания для самостоятельной работы дома

Из [2] номера 5, 7, 25, 27, 29-31, 33, 37, 45.

Практическое занятие № 59

Тема занятия «Формулы полной вероятности и Байеса. Схема Бернулли. Формула Бернулли.»

Цель занятия: Формирование умений применять формулы полной вероятности и Байеса при нахождении вероятности события, различать условия их использования. Научить студентов различать условия применения формулы Бернулли, формирование навыков вычислять вероятность события с помощью этой формулы.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Сформулируйте условия применения формулы полной вероятности.
2. Запишите формулу полной вероятности и выведите её из теорем сложения и умножения вероятностей.
3. Каковы условия применения формулы Байеса, почему её называют формулой перераспределённых гипотез?
4. Выведите формулу Байеса.
5. Ответьте на вопросы задачи 1 из [5] глава 11 § 69.
6. Расскажите о схеме Бернулли.
7. Каковы условия применения формулы Бернулли.
8. Запишите и докажите формулу Бернулли.
9. Дайте определение наивероятнейшего числа наступления события.
10. Запишите и докажите формулу для определения наивероятнейшего числа наступления события.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Из [2] номера 90, 93, 95, 98, 100, 104, 107, 111, 113, 115, 117, 148, 154, 156.

Задания для самостоятельной работы дома

Из [2] номера 91, 92, 94, 96, 99, 101, 102, 109, 112, 114, 116, 118, 146, 151.

12 СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Практическое занятие № 60

Тема занятия «Дискретные случайные величины. Числовые характеристики дискретной случайной величины»

Цель занятия: Формирование понятия случайная величина и навыков вычислять числовые характеристики дискретной случайной величины.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение случайной величины.
2. Какие типы случайных величин знаете, дайте им определения.
3. Приведите примеры случайных величин дискретного типа.
4. Дайте определение математического ожидания случайной величины, расскажите как его найти для дискретной случайной величины.
5. Укажите свойства математического ожидания.
6. Дайте определение дисперсии, запишите формулу для вычисления дисперсии для дискретной случайной величины.
7. Назовите свойства дисперсии.
8. Сформулируйте и докажите теорему о вычислении дисперсии.
9. Дайте определение среднего квадратического отклонения.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Из [2] номера 165, 190, 193, 200, 214, 217, 220.

Задания для самостоятельной работы дома

Из [2] номера 191, 194, 209, 211, 218, 219.

Практическое занятие № 61

Тема занятия «Законы распределения дискретных случайных величин»

Цель занятия: Научить студентов составлять основные законы распределения для дискретных случайных величин и находить их характеристики.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Расскажите о биномиальном законе распределения.
2. Выведите формулы для определения числовых характеристик случайной величины, подчинённой биномиальному закону распределения.
3. Расскажите о законе Пуассона.
4. Запишите формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения случайной величины, имеющей Пуассоновское распределение.
5. Дайте определение геометрического закона распределения и запишите формулы для определения числовых характеристик случайной величины.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Из [2] номера 167, 175; из [5] глава 11 § 71 номера 3, 5, 7; § 73 задачи из образцов решения задач 2, 3.

Задания для самостоятельной работы дома

Из [2] номера 168, 169; из [5] глава 11 § 71 номера 4, 6; § 73 номера 3-7.

Практическое занятие № 62

Тема занятия «Непрерывные случайные величины. Числовые характеристики»

Цель занятия: Формирование понятия непрерывная случайная величина, навыков расчёта числовых характеристик случайной величины непрерывного типа.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение случайной величины непрерывного типа.
2. Введите понятие интегральной функции распределения случайной величины и расскажите о её свойствах.
3. Дайте определение дифференциальной функции распределения.
4. Расскажите, как по дифференциальной функции распределения найти интегральную и по интегральной найти дифференциальную функцию распределения для непрерывной случайной величины.
5. Как с помощью рассмотренных функций можно определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал?
6. Дайте определение математического ожидания случайной величины. Запишите формулу для нахождения математического ожидания непрерывной случайной величины.
7. Что такое дисперсия, какие способы определения дисперсии можете предложить для непрерывной случайной величины?
8. Определите среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины.
9. Определите моду и медиану случайной величины.
10. Дайте определения начального теоретического и центрального теоретического моментов k -го порядка непрерывной случайной величины. Запишите формулы для их вычисления.
11. Как центральные моменты выражаются через центральные? Запишите формулы.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Из [2] номера 253, 255, 263, 270, 273, 276, 284, 287, 296, 306.

Задания для самостоятельной работы дома

Из [2] номера 254, 257, 266, 269, 272, 274, 279, 283, 297, 300.

Практическое занятие № 63

Тема занятия «Законы распределения непрерывных случайных величин»

Цель занятия: формирование навыков определять равномерный закон распределения и вычислять его числовые характеристики. Формирование умений строить нормальный закон распределения и вычислять его числовые характеристики. Формирование умений строить показательный закон распределения и находить его числовые характеристики.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение равномерного закона распределения.
2. Запишите определение интегральной функции распределения для равномерного распределения.
3. Как выглядит дифференциальная функция распределения равномерного распределения?
4. Запишите формулу для нахождения вероятности попадания случайной величины в заданный интервал при условии, что она имеет равномерное распределение.
5. Запишите формулы для определения числовых характеристик равномерного распределения. Выведите записанные формулы.
6. Дайте определение нормального закона распределения. Какими параметрами он характеризуется.\
7. Введите определения основных числовых характеристик для нормального закона распределения.
8. Изобразите нормальную кривую и расскажите, как влияют параметры нормального закона распределения на форму этой кривой. Определите асимметрию, эксцесс, моду и медиану нормального распределения.
9. Запишите функцию Лапласа.
10. Как определить вероятность. Что нормально распределённая случайная величина примет значение из заданного интервала?
11. Расскажите, в чём заключается правило трёх сигм?

12. Дайте определение показательного закона распределения.
13. Запишите дифференциальную функцию распределения для показательного закона и выведите исходя из неё интегральную функцию распределения.
14. Выведите формулы для нахождения числовых характеристик показательного закона распределения.
15. Запишите формулу для определения вероятности попадания случайной величин, имеющей показательное распределение, в заданный интервал.
16. дайте определение функции надёжности.
17. Сформулируйте показательный закон надёжности.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Из [2] номера 309, 311, 314, 316, 319. 322, 324, 327, 329, 333, 336, 338, 341347, 352, 354, 358, 366, 368, 370.

Задания для самостоятельной работы дома

Из [2] номера 310, 312, 317, 320. 323, 325, 330, 332, 335, 342, 343. 348, 351, 357, 359, 365, 371.

13.ОСНОВЫ ВЫБОРОЧНОГО МЕТОДА

Практическое занятие № 64

Тема занятия «Генеральная и выборочная совокупности, их характеристики»

Цель занятия: Формирование понятий генеральная и выборочная совокупности, умений вычислять их характеристики по определению.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Расскажите, что изучает математическая статистика? Что является объектом статистического исследования?
2. Введите понятия генеральной и выборочной совокупностей.
3. Дайте определения объёма генеральной (выборочной) совокупности, частоты, относительной частоты.
4. Что такое вариационный ряд и статистическое распределение?
5. Как построить эмпирическую функцию распределения?
6. Расскажите, как построить полигон и гистограмму частот (относительных) частот. Когда лучше использовать гистограмму, а когда полигон?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Из [4] номера 947, 948, 949 из [2] номера 442 (а), 444 (а), 445 (а), 447 (а), 449 (а).

Задания для самостоятельной работы дома

Из [2] номера 440, 442 (б), 444 (б), 445 (б), 447(б), 449(б).

Практическое занятие № 65.1

Тема занятия «Метод произведений вычисления выборочных средней и дисперсии»

Цель занятия: Развитие навыков вычислять выборочную среднюю и выборочную дисперсию.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Введите определения условных эмпирических и условных теоретических моментов.
2. Запишите формулы для вычисления центральных моментов четырёх порядков.
3. Расскажите об алгоритме вычисления условных моментов первого и второго порядков и об их связи с выборочной средней и выборочной дисперсией.
4. Расскажите о приведении неравноотстоящих вариантов к равноотстоящим.
5. Запишите формулу для вычисления выборочной дисперсии с учётом поправки Шеппарда.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Из [2] номера 524 (а), 526, 527.

Задания для самостоятельной работы дома

Из [2] номера 524(б), 528.

Начните выполнение ИДЗ по теме «Вычисление сводных характеристик выборки. Проверка статистических гипотез», сделайте задания 1-3. Полный текст ИДЗ приведён в практическом занятии 99.

Практическое занятие № 65.2

Тема занятия «Метод сумм вычисления выборочных средней и дисперсии»

Цель занятия: Развитие навыков вычислять выборочную среднюю и выборочную дисперсию с помощью метода _сумм.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

Из [2] номера 530 (а), (в).

Задания для самостоятельной работы дома

Из [2] номера 530 (б), (г).

Практическое занятие № 66

Тема занятия «Построение нормальной кривой по опытным данным»

Цель занятия: Формирование умений на основе опытных данных строить нормальную кривую и вычислять асимметрию и эксцесс.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение нормального закона распределения, запишите его дифференциальную функцию распределения.
2. Расскажите, как на основе опытных данных можно построить нормальную кривую.
3. Дайте определения асимметрии и эксцесса эмпирического распределения. Запишите формулы для вычисления этих характеристик через центральные эмпирические моменты третьего и четвёртого порядков.
4. Расскажите, как влияют указанные характеристики на форму нормальной кривой.
5. Запишите формулы для вычисления центральных эмпирических моментов третьего и четвёртого порядков.
6. Как составить расчётную таблицу для вычисления условных моментов третьего и четвёртого порядков с помощью метода произведений?
7. Как составить расчётную таблицу для вычисления условных моментов третьего и четвёртого порядков с помощью метода сумм?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Из [2] номера 532 (а), 534 (а).
2. На основе опытных данных были получены значения некоторого признака.

253	272	274	278	281	261	262	267	273	267
277	269	286	269	264	275	286	285	286	281
277	278	276	279	263	292	276	103	286	277
281	273	284	265	263	274	285	286	289	278
285	280	275	282	275	280	281	287	277	279

280	282	272	269	275	272	276	284	283	268
269	280	279	278	276	290	294	278	279	278
285	281	275	285	273	263	285	283	269	285
286	285	274	284	276	289	284	292	295	278
284	281	256	281	286	287	276	289	270	269

Составьте распределение равноотстоящих вариантов, разбив всю совокупность на 8 интервалов. Постройте нормальную кривую по полученному распределению. Найдите асимметрию и эксцесс эмпирического распределения.

Задания для самостоятельной работы дома

Из [2] номера 532 (б), 534 (б).

Выполнение ИДЗ по теме «Вычисление сводных характеристик выборки.

Проверка статистических гипотез».

Практическое занятие № 67

Тема занятия «Итоговое занятие по темам 11-13»

Цель занятия: контроль и обобщение теоретических знаний по темам 11-13.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Тема 11. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. Основные понятия теории вероятностей.
2. Классификация событий.
3. Случайные события и их вероятности.
4. Классическое, геометрическое и статистическое определение вероятности.
5. Комбинаторика, основные правила комбинаторики.
6. Виды соединений: перестановки, размещения, сочетания без повторений.
7. Основные формулы комбинаторики и их применение к вычислению вероятностей.
8. Совместные и несовместные события, определение, примеры.
9. Зависимые и независимые события, примеры.
10. Алгебра событий: сумма и произведение событий, примеры.
11. Сумма совместных и несовместных событий.
12. Произведение зависимых и независимых событий.
13. Вычисление вероятности события, которое может появиться с одним из событий, образующих полную группу (формула полной вероятности).
14. Схема Бернулли.
15. Формула Бернулли. Условия её применения.
16. Условия применения локальной теоремы Муавра-Лапласа, отличие условий применения от формулы Бернулли. Вычисление вероятности появления события в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз, интегральная теорема Муавра-Лапласа.
17. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.

Тема 12. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Понятие случайной величины. Виды случайных величин и законы их распределения.
2. Числовые характеристики дискретной случайной величины.
3. Биномиальное распределение, числовые характеристики.
4. Распределение Пуассона, числовые характеристики.
5. Геометрическое распределение, числовые характеристики.
6. Непрерывная случайная величина. Дифференциальная и интегральная функции распределения, определение, свойства, взаимосвязь.
7. Определение вероятности попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.
8. Нахождение числовых характеристик непрерывной случайной величины.
9. Равномерное распределение. Числовые характеристики.
10. Нормальное распределение. Числовые характеристики.
11. Показательное распределение. Числовые характеристики
1. Какие теоремы входят в «закон больших чисел»?
2. Запишите неравенство Чебышева, при решении каких задач оно применяется.
3. Теорема Чебышева.

Тема 13. ОСНОВЫ ВЫБОРОЧНОГО МЕТОДА

1. Задачи математической статистики.
2. Связь между математической статистикой и теорией вероятностей.
3. Генеральная и выборочная совокупность.

4. Виды выборок.
5. Вариационный ряд.
6. Статистическая функция распределения частот.
7. Полигон и гистограмма частот.
8. Определение статистической оценки.
9. Несмещённые, эффективные и состоятельные оценки.
10. Точечные и интервальные оценки.
11. Оценки генеральной средней по выборочной средней.
12. Оценки генеральной дисперсии по исправленной выборочной дисперсии.
13. Условные эмпирические моменты. Отыскание центральных моментов по условным.
14. Метод произведений вычисления сводных характеристик выборки.
15. Метод сумм вычисления сводных характеристик выборки.

Повышенный уровень

Тема 11. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. Предмет теории вероятностей. Исторический обзор развития теории вероятностей как науки.
2. Основные разделы современной теории вероятностей.
3. Связь между теорией вероятностей и математической статистикой.
4. Перестановки, размещения, сочетания с повторениями.
5. Условная вероятность.
6. Полная группа событий, противоположные события.
7. Вероятность появления хотя бы одного события.
8. Вероятность перераспределённых гипотез (формула Байеса).
9. Вывод формулы Бернулли.
10. Найвероятнейшее число наступления события.
11. Условия применения формулы Пуассона, отличие от условий применения формулы Бернулли и локальной теоремы Муавра-Лапласа.

Тема 12. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Сформулируйте и докажите свойства математического ожидания дискретной случайной величины.
2. Сформулируйте и докажите свойства дисперсии дискретной случайной величины.
3. Понятие многомерной случайной величины.
4. Функция распределения многомерной случайной величины.
5. Плотность вероятности двумерной случайной величины. Условные законы распределения.
6. Числовые характеристики двумерной случайной величины.
7. Выведите формулы для вычисления числовых характеристик случайной величины, имеющей равномерное распределение.
8. Выведите формулы для вычисления числовых характеристик случайной величины, имеющей показательное распределение.
9. В чём заключается правило $3\text{-х } \sigma$, для какого закона распределения оно справедливо?
10. Сформулируйте теорему Бернулли.
11. Центральная предельная теорема.

Тема 13. ОСНОВЫ ВЫБОРОЧНОГО МЕТОДА

1. Задачи математической статистики.
2. Связь между математической статистикой и теорией вероятностей.
3. Генеральная и выборочная совокупность. Виды выборок.
4. Вариационный ряд. Статистическая функция распределения. Полигон и гистограмма.

5. Определение генеральной средней, выборочной средней, генеральной и выборочной дисперсий, генерального и выборочного среднего квадратического отклонений.
6. Способы отбора статистических сведений.
7. Статистическая функция относительных частот.
8. Полигон и гистограмма относительных частот.
9. Чему равна площадь гистограммы частот и гистограммы относительных частот?
10. Выведите формулы для вычисления выборочной средней и выборочной дисперсии, если значения случайной величины близки к постоянному числу.
11. Введите понятие исправленной дисперсии.
12. Вывести формулы для вычисления выборочной средней и выборочной дисперсии через условные эмпирические моменты.
13. Как получить выборку с равноотстоящими вариантами. Построение нормальной кривой по опытным данным.
14. Вычисление асимметрии и эксцесса.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания
для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «Дополнительный курс по математике»
для студентов направления подготовки
18.03.01 «Химическая технология»
Профиль: Химический инжиниринг и цифровые технологии

Ставрополь 2026

Общая характеристика самостоятельной работы студента при изучении дисциплины

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

Самостоятельная работа включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим занятиям) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными модулями (темами) дисциплины в соответствии с рабочей программой;
- написание рефератов, докладов;
- подготовку к практическим занятиям и выполнение предусмотренных ими заданий;
- подготовку ко всем видам аттестаций;
- подготовку презентаций по темам (части темы).

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать

следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;

б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

Работоспособность - способность человека к труду с высокой степенью напряженности в течение определенного времени. Различают

внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организация рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться информацией;
- величина умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н. Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;
- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп работы;
- привычная последовательность и систематичность деятельности;
- правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменой дела. В течение дня работоспособность изменяется. Наиболее плодотворным является *утреннее время (с 8 до 14 часов)*, причем максимальная работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем *послеобеденное* - (с 16 до 19 часов) и *вечернее* (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1-1,5 часа нужны перерывы по 10 - 15 мин, через 3 - 4 часа работы отдых должен быть продолжительным - около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда.

Физически здоровый молодой человек, обладающий хорошей подготовкой и нормальными способностями, должен, будучи студентом, отдавать *учению 9-10 часов в день* (из них 6 часов в вузе и 3 - 4 часа дома). Любой предмет нельзя изучить за несколько дней перед экзаменом. Если студент в году работает систематически, то он быстро все вспомнит, восстановит забытое. Если же подготовка шла аврально, то у студента не будет даже общего представления о предмете, он забудет все сданное.

Следует взять за правило: *учиться ежедневно, начиная с первого дня семестра.*

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные

внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы – это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

Методические рекомендации по подготовке к занятиям

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ КАРТА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Код оцениваемой компетенции, индикатора (ов)	Этап формирования компетенции (№ темы) (в соответствии с рабочей программой дисциплины)	Средства и технологии и оценки	Вид контроля, аттестация (текущий/промежуточный)	Тип контроля (устный, письменный или с использованием технических средств)	Наименование оценочного средства
ИД-1 УК-1	1, 7, 11, 12, 13	Коллоквиум	Текущий	Устный	вопросы к коллоквиуму 1, 4, 6
	2, 11, 13	Индивидуальное задание	Текущий	Письменный	Комплект разноуровневых заданий, задач
	2, 11, 13	Собеседование	Текущий	Устный	Вопросы для собеседования 1, 5, 6
	1,2,7,11,12,13	Вопросы к экзамену	Промежуточный	Устный	Экзамен 1, 2, 3
ИД-2 УК-1	3, 8, 9	Коллоквиум	Текущий	Устный	вопросы к коллоквиуму 2, 5
	4,10,13	Индивидуальное задание	Текущий	Письменный	Комплект разноуровневых заданий, задач
	4, 10,13	Собеседование	Текущий	Устный	Вопросы для собеседования 2,4,6
	3,4,8,9,10,13	Вопросы к экзамену	Промежуточный	Устный	Экзамен 1, 2, 3
ИД-3 УК-1	4,5,8,9,12	Коллоквиум	Текущий	Устный	вопросы к коллоквиуму 3,5,6
	6,11	Индивидуальное задание	Текущий	Письменный	Комплект разноуровневых заданий, задач
	6,11	Собеседование	Текущий	Устный	Вопросы для собеседования 1, 3,5
	3,4,5,6,8,9,11, 12	Вопросы к экзамену	Промежуточный	Устный	Экзамен 1, 2, 3

ПЛАН-ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ СТУДЕНТАМИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки выполнения
1 семестр		
1	Практическое занятие 12	8
2	Практическое занятие 22	14
3	Практическое занятие 26	17
	Итого за 1 семестр:	
2 семестр		
1	Практическое занятие 14	7
2	Практическое занятие 19	10
3	Практическое занятие 31	16
	Итого за 2 семестр:	
3 семестр		
1	Практическое занятие 7	7
2	Практическое занятие 17	17
	Итого за 3 семестр:	
	Итого:	

Вопросы к экзамену

Вопросы к экзамену (1 семестр)

Вопросы (задача, задание) для проверки уровня обученности

Знать

1. Определение и способы задания функции. Область определения, область значения, график функции. Обратная функция. Сложная функция.
2. Основные элементарные функции, элементарные функции (линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические), их свойства, графики.
3. Предел функции. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы.
4. Бесконечно малые, бесконечно большие и неограниченные функции.
5. Непрерывные функции и их свойства. Непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций.
6. Задачи, приводящие к понятию производной, ее геометрический и механический смысл.
7. Производная сложной функции. Правила дифференцирования. Таблица основных производных.
8. Функции заданные неявно и параметрически и их дифференцирование.
9. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.
10. Дифференциал функции. Дифференциалы высших порядков.
11. Правила Лопиталя.
12. Возрастание и убывание функции, необходимое и достаточные условия.
13. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
14. Экстремумы функции, необходимое и достаточные условия существования точек экстремума.
15. Выпуклость и вогнутость кривой, точки перегиба: определение, необходимые и достаточные условия.
16. Асимптоты плоских кривых, их виды.
17. Общая схема исследования функции и построения ее графика.
18. Матрицы, основные определения.

19. Действия над матрицами: сумма, произведение матрицы на число, произведение матрицы на матрицу.
20. Определение определителя квадратной матрицы. Определители второго и третьего порядков.
21. Миноры и алгебраические дополнения. Ранг матрицы, его вычисление с помощью элементарных преобразований.
22. Обратная матрица. Вычисление обратной матрицы путем присоединения единичной.
23. Системы линейных уравнений. Основные определения.
24. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
25. Критерий совместности систем линейных уравнений.
26. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.
27. Высказывания, логические операции над ними: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция. Таблицы истинности.
28. Понятие множества, способы задания множеств.
29. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность, дополнение. Диаграммы Эйлера-Венна.
30. Множество натуральных чисел, аксиомы Пеано.
31. Метод математической индукции и его роль.
32. Алгебраическая форма записи комплексного числа, действия над комплексными числами в алгебраической форме.
33. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Геометрическая интерпретация модуля и аргументы комплексного числа.
34. Перевод комплексных чисел из алгебраической формы записи в тригонометрическую и обратно.
35. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Повышенный уровень

1. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Число e . Натуральные логарифмы.
2. Односторонние и бесконечные пределы.
3. Сравнение бесконечно малых функций.
4. Точки разрыва и их классификация.
5. Связь дифференцируемости с непрерывностью.
6. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой.
7. Инвариантность формы первого дифференциала, применение дифференциала к приближенным вычислениям.

8. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.
9. Формула Тейлора.
10. Определение определителя n -го порядка. Свойства определителей (с доказательством).
11. Вычисление определителя n -го порядка.
12. Вычисление ранга матрицы методом окаймления миноров.
13. Нахождение обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.
14. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
15. Однородная система линейных уравнений, условие существования ненулевых решений.
16. Логические формулы, их виды. Основные законы логики (уметь доказать любой из законов).
17. Алгебра с одной операцией: полугруппа, моноид, группа.
18. Алгебра с двумя операциями: кольцо, поле.
19. Кольцо целых чисел.
20. Поле рациональных чисел.
21. Сечения в поле рациональных чисел, определение поля действительных чисел.
22. Определение поля комплексных чисел.
23. Показательная форма записи комплексного числа. Действия над комплексными числами в показательной форме.

Уметь, владеть

$$y = \arcsin(5 - x) + \log_2 \frac{1}{x^2 - 4}.$$

1. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{2-x}{x^2-7x-8}} + \ln(2-3x).$$

2. Найти область определения функции

$$y = x^2 - 10x + 16.$$

3. Указать область значений функции

$$y = 3^{1-2x} + 5.$$

4. Указать область значений функции

$$y = x^2 - \sqrt{\frac{1-x^2}{3+2x^2}}.$$

5. Исследовать функцию на четность

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{2-x}} - 3\sin 5x.$$

6. Исследовать функцию на четность

7. Найти наименьший положительный период функции $y = \cos 6x + 4\sin \frac{2x}{9}.$

8. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + x - 6}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{5}}{3x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{9+x}-3}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2x}\right)^{x+5};$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt[3]{8-x} - \sqrt[3]{8+x}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x-8}{7x+2} \right)^{x+1}.$$

9. Найти производную по определению $y = \cos 2x$.

10. Найти производную, пользуясь правилами дифференцирования $y = (3 - 7x) \cdot (1 + x)^3$.

11. Найти производную сложной функции $y = \log_2 \frac{e^{2x} - e^{4x}}{xe^{5x}}$.

12. С помощью логарифмического дифференцирования найти производную $y = (1 - 2x)^5 \cdot (2 + x)^6 \cdot \sqrt{2 - x}$.

13. Найти производную неявно заданной функции $x \cos 3y - 2x + 3y^2 = 0$.

14. Найти производную параметрически заданной функции $\begin{cases} x = t \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$.

15. .Найти производную по определению $y = \sqrt{2 - 3x}$.

16. Найти производную, пользуясь правилами дифференцирования $y = \frac{3 - 5x}{(1 + 3x)^2}$.

17. Найти производную сложной функции $y = \sqrt[4]{\frac{\sin 3x + \cos 3x}{\operatorname{tg}^2 2x}}$.

18. С помощью логарифмического дифференцирования найти производную $y = (1 - x)^4 \cdot (2 - 7x)^3 \cdot \sqrt[5]{2 + 3x}$.

19. Найти производную неявно заданной функции $\frac{2 - 3x}{y \ln(x - y)} = 0$.

20. Найти производную параметрически заданной функции $\begin{cases} x = -t^2 \cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}$.

21. Вычислить предел, используя правило Лопиталя $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\ln(x - 1) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}{\operatorname{ctg} \pi x}$.

22. Вычислите приближенно $\sqrt[3]{7,99}$.

23. Определить точки экстремума функции $f(x) = (x - 1)^3 \cdot (x + 1)^2$.

24. Найти экстремумы функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

25. Найти точки перегиба графика функции $f(x) = (x - 4)^5 + 4x + 4$.

26. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = (2 - x) \cdot (x + 1)^2$.

27. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют.

28. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

29. Вычислить ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 & 21 & -3 & -12 \\ -4 & 6 & -14 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

30. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

31. Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

32. Решить систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 11x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

33. Проверить истинность формулы $p \wedge q \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p))$.

34. С помощью метода математической индукции (ММИ) доказать, что для любого натурального n верно равенство

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

35. Вычислить в алгебраической форме $\frac{(-1-i)^2 \cdot (1+i)}{2+3i}$.
36. Вычислить в тригонометрической форме $(2\sqrt{3} - 6i)^8$.
37. Вычислить в тригонометрической форме $(4 - 4 \cdot \sqrt{3}i) \cdot (-2 - 2i)$.
38. Найти все корни уравнения $(-7 - 7i)Z^4 - \sqrt{3} + i = 0$.
39. Вычислить в тригонометрической форме $\frac{-4}{2 + 2 \cdot \sqrt{3}i}$.
40. Вычислить в тригонометрической форме $\sqrt[3]{-5 - 5\sqrt{3}i}$.

Повышенный уровень

1. . Найти область определения $y = e^x + \ln(2 - \sqrt{x-3})$.
2. Вычислить пределы а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{1+3x^2} - 1}{x^3 + x^2} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{3x-5}$.
3. Найти производную функции $y = \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})$.
4. Найти производную третьего порядка от функции $y = x^2 \ln x$.
5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(2; -1)$ и касающейся кривой $y = x^2 - 4$.
6. Из куска проволоки длиной l согнуть прямоугольник, чтобы его площадь была наибольшей.
7. На прямой между двумя источниками света силы F и $8F$ найти наименее освещенную точку, если расстояние между источниками 24 м . Учесть, что освещенность точки обратно пропорциональна расстоянию ее от источника света.
8. Водный канал должен иметь заданную глубину и заданную площадь поперечного сечения. Если поперечное сечение есть равнобокая трапеция, то каким должен быть угол наклона ее боковых сторон, чтобы при движении воды по каналу потери на сопротивление трения были наименьшими. Т.е. чтобы сумма нижнего основания и боковых сторон трапеции была наименьшая?
9. Канал, ширина которого 27 м , под прямым углом впадает в другой канал шириной 64 м . Какова наибольшая длина бревен, которые можно сплавлять по

этой системе каналов?

10. Доказать равенство множеств и проиллюстрировать равенство на диаграмме Эйлера-Венна $A/(B \cup C) = A/B/C$

11. Доказать ММИ, что для любого натурального $n: (2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}) : 17$.

12. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

13. Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 5 \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3 \end{cases}.$$

14. Решить систему линейных уравнений методом Крамера и матричным способом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}.$$

15. Найти фундаментальную систему решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Вопросы к экзамену (2 семестр)

Вопросы (задача, задание) для проверки уровня обученности

Знать

1. Уравнение линии на плоскости. Пересечение линии.
2. Прямая линия на плоскости и ее уравнения.
3. Угол между двумя прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых.
4. Расстояние от точки до прямой.
5. Линии второго порядка.
6. Окружность, эллипс, гипербола, парабола, их канонические уравнения.
7. Полярное уравнение эллипса, гиперболы, параболы. Графики линий второго порядка
8. Преобразования прямоугольной системы координат.
9. Приведение кривых второго порядка к каноническому виду. Классификация кривых второго порядка.
10. Понятие об уравнении поверхности.
11. Различные уравнения плоскости.
12. Прямая как линия пересечения двух плоскостей.
13. Угол между двумя плоскостями, между двумя прямыми, между прямой и плоскостью.

14. Расстояние от точки до плоскости, взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых.
15. Сфера, Эллипсоид.
16. Гиперболоиды.
17. Параболоиды.
18. Цилиндрические и конические поверхности.
19. Поверхности вращения второго порядка. Исследование формы поверхности с помощью метода сечений
20. Первообразная функция и неопределенный интеграл.
21. Таблица основных интегралов. Метод непосредственного интегрирования.
22. Метод замены переменной в неопределённом интеграле.
23. Интегрирование по частям в неопределённом интеграле.
24. Классы интегрируемых функций. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трёхчлен.
25. Интегрирование рациональных функций.
26. Интегрирование иррациональных функций.
27. Интегрирование трансцендентных функций.
28. Примеры «неберущихся интегралов».
29. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
30. Определенный интеграл как предел интегральных сумм.
Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
31. Замена переменной в определенном интеграле.
32. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
33. Геометрические приложения определённого интеграла.
34. Физические приложения определённого интеграла.
35. Биологические приложения определённого интеграла.
36. Численное интегрирование. Формула прямоугольников. Формула трапеций. Формула Симпсона.
37. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
38. Несобственные интегралы от разрывных функций.
39. Признаки сравнения.
40. Числовые ряды: основные понятия, необходимые условия сходимости ряда. Остаток ряда.
41. Ряды с положительными членами и признаки их сходимости: признаки сравнения, Даламбера, Коши.
42. Знакопередающиеся ряды, признак Лейбница.
43. Степенные ряды. Основные определения.
44. Теорема Абеля. Способы нахождения радиуса и интервала сходимости степенного ряда.
45. Свойства степенных рядов.
46. Разложение функций в степенной ряд.
47. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (Маклорена).
48. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям значений функций, интегралов, пределов.
49. Тригонометрическая система функций, ее ортогональность.
50. Ряд Фурье. Формулы для вычисления его коэффициентов.
51. Ряды Фурье для четных и нечетных периодических функций.

52. Сходимость ряда Фурье. Разложение функции, заданной на интервале, в косинус и синус ряд Фурье
53. Функции нескольких переменных. Основные определения.
54. Область определения и область значений функции двух переменных. График функции. Линии уровня. Поверхности уровня.
55. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
56. Свойства непрерывных функций двух переменных.
57. Частные производные и дифференциалы первого и более высоких порядков.
58. Теорема о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования.
59. Производные сложной функции.
60. Неявные функции и их дифференцирование.
61. Полный дифференциал.
62. Дифференциал сложной функции.
63. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.
64. Производная сложной функции.
65. Экстремум функции двух переменных.
66. Условный экстремум, метод множителей Лагранжа.
67. Метод наименьших квадратов.
68. Двойной интеграл: определение, свойства, вычисление.
69. Замена переменных, переход к полярной системе координат.
70. Приложения двойного интеграла..
71. Тройной интеграл: определения, свойства, вычисление
72. Замена переменных, переход к цилиндрической и сферической системам координат.
73. Приложения тройного интеграла.
74. Приближённое вычисление кратных интегралов. Аналог формул прямоугольников, трапеций, Симпсона, касательных.
75. Криволинейные интегралы по длине дуги, их вычисление.
76. Криволинейные интегралы по координатам, их вычисление.
77. Приложения криволинейных интегралов.
78. Понятие поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
79. Односторонние и двусторонние поверхности. Площадь поверхности.
80. Поверхностные интегралы первого и второго рода, их вычисление.
81. Скалярные поля. Производная по направлению. Градиент скалярного поля.
82. Векторные поля. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля. Циркуляция векторного поля.
83. Основные интегральные формулы анализа: формула Грина.
84. Формула Остроградского-Гаусса.
85. Формула Стокса.

Уметь
, владеть

1. Находить различные уравнения прямой на плоскости.
2. Находить угол между двумя прямыми, проверять условия параллельности и перпендикулярности прямых.
3. Вычислять расстояние от точки до прямой.
4. Находить канонические уравнения окружности, эллипса, гиперболы, параболы.
5. Получать полярное уравнение эллипса, гиперболы, параболы.
6. Приводить уравнения кривых второго порядка к каноническому виду.
7. Проводить классификацию кривых второго порядка.
8. Находить различные уравнения плоскости.

9. Находить различные уравнения прямой в пространстве.
10. Вычислять угол между двумя плоскостями, между двумя прямыми, между прямой и плоскостью.
11. Определять расстояние от точки до плоскости, взаимное расположение прямой и плоскости, двух прямых.
12. Записывать уравнения поверхностей второго порядка.
13. Проводить исследование формы поверхности с помощью метода сечений.
14. Находить первообразную функции и неопределённый интеграл непосредственно.
15. Применять метод замены переменной в неопределённом интеграле.
16. Использовать интегрирование по частям в неопределённом интеграле.
17. Интегрировать функции, содержащие квадратный трёхчлен.
18. Интегрировать рациональные функции.
19. Интегрировать иррациональные функций.
20. Интегрировать трансцендентные функций.
21. Применять формулу Ньютона-Лейбница при вычислении определённого интеграла.
22. Проводить замену переменной в определённом интеграле.
23. Проводить интегрирование по частям в определённом интеграле.
24. Вычислять площади, объёмы и длины дуг с помощью определённого интеграла.
25. Проводить численное интегрирование по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона.
26. Вычислять несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
27. Исследовать на сходимость несобственные интегралы от разрывных функций.
28. Исследовать ряды с положительными членами на сходимость.
29. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды.
30. Находить радиус и интервал сходимости степенного ряда.
31. Разлагать функции в степенной ряд.
32. Применять степенные ряды к приближенным вычислениям значений функций, интегралов, пределов.
33. Разлагать функции в ряд Фурье.
34. Находить область определения и область значений функции двух переменных, строить график функции, линии уровня, поверхности уровня.
35. Вычислять предел и исследовать непрерывность функции нескольких переменных.
36. Вычислять частные производные и дифференциалы первого и более высоких порядков для функции нескольких переменных.
37. Вычислять производные сложной функции.
38. Находить полный дифференциал.
39. Вычислять дифференциал сложной функции.
40. Применять полный дифференциал к приближенным вычислениям.
41. Находить экстремум функции двух переменных.
42. Определять условный экстремум методом множителей Лагранжа.
43. Применять метод наименьших квадратов.
44. Вычислять двойной интеграл.
45. Применять замену переменных, переходить к полярной системе координат при вычислении двойного интеграла.
46. Решать задачи на приложения двойного интеграла.
47. Вычислять тройной интеграл.

48. Применять замену переменных, переход к цилиндрической и сферической системам координат при вычислении тройного интеграла.
49. Решать задачи на приложения тройного интеграла.
50. Вычислять криволинейные интегралы по длине дуги.
51. Находить криволинейные интегралы по координатам.
52. Решать задачи на приложения криволинейных интегралов.
53. Находить касательную плоскость и нормаль к поверхности.
54. Вычислять поверхностные интегралы первого и второго рода.
55. Вычислять производную по направлению и градиент скалярного поля.
56. Вычислять дивергенцию, ротор и производную по направлению векторного поля, циркуляцию векторного поля.
57. Применять формулу Грина.
58. Использовать формулу Остроградского-Гаусса.
59. Проводить вычисления с помощью формулы Стокса.

Знать

Вопросы к экзамену (3 семестр)

Вопросы (задача, задание) для проверки уровня обученности

1. Задачи, приводящие к дифференциации уравнениям.
2. Основные понятия о дифференциальных уравнениях: определение дифференциального уравнения, его порядка, решения, общего и частного решений.
3. Уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, алгоритм их решения.
4. Однородные дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения, приводящиеся к однородным.
5. Линейные дифференциальные уравнения и уравнения Бернулли.
6. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Уравнения, приводящиеся к уравнениям в полных дифференциалах
7. Дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков.
8. Случаи понижения порядка.
9. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
10. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
11. Отыскание частного решения неоднородного уравнения методом вариации произвольных постоянных.
12. Понятие о системах дифференциальных уравнений.
13. Методы решения систем дифференциальных уравнений.
14. Линейная однородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
15. Дифференциальные уравнения в химии.
16. Приложение дифференциальных уравнений в биологии.
17. Дифференциальные уравнения в медицине.
18. Приложение дифференциальных уравнений при решении других задач естествознания.
19. Понятие о дифференциальных уравнениях в частных производных и их приложения.
20. Предмет теории вероятностей. Исторический обзор развития теории вероятностей как науки.

21. Основные разделы современной теории вероятностей. Связь между теорией вероятностей и математической статистикой.
22. Основные понятия теории вероятностей. Классификация событий.
23. Случайные события и их вероятности. Классическое, геометрическое и статистическое определение вероятности.
24. Комбинаторика, основные правила комбинаторики.
25. Виды соединений: перестановки, размещения, сочетания с повторениями и без повторений.
26. Основные формулы комбинаторики и их применение к вычислению вероятностей.
27. Совместные и несовместные события, определение, примеры. Зависимые и независимые события, примеры. Условная вероятность. Полная группа событий, противоположные события.
28. Алгебра событий: сумма и произведение событий, примеры.
29. Сумма совместных и несовместных событий.
30. Произведение зависимых и независимых событий. Вероятность появления хотя бы одного события.
31. Вычисление вероятности события, которое может появиться с одним из событий, образующих полную группу (формула полной вероятности).
32. Вероятность перераспределённых гипотез (формула Байеса).
33. Схема Бернулли. Вывод формулы Бернулли. Условия её применения.
34. Найвероятнейшее число наступления события.
35. Условия применения локальной теоремы Муавра-Лапласа, отличие условий применения от формулы Бернулли.
36. Вычисление вероятности появления события в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз, интегральная теорема Муавра-Лапласа.
37. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
38. Условия применения формулы Пуассона, отличие от условий применения формулы Бернулли и локальной теоремы Муавра-Лапласа.
39. Понятие случайной величины. Виды случайных величин и законы их распределения. Многоугольник распределения.
40. Числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение; определение, свойства, вычисление. Теорема о вычислении дисперсии.
41. Биномиальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое распределение. Вычисление числовых характеристик случайной величины, подчинённой конкретному закону распределения.
42. Непрерывная случайная величина. Дифференциальная и интегральная функции распределения.
43. Числовые характеристики: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение.
44. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал.
45. Равномерное распределение, его числовые характеристики.
46. Нормальное распределение. Нормальная кривая. Влияние параметров нормального распределения на форму нормальной кривой. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины. Правило трёх сигм.
47. Показательное распределение. Вероятность попадания в заданный интервал показательного распределённой случайной величины. Числовые характеристики

показательного распределения.

48. Функция надёжности. Показательный закон надёжности.

49. Понятие многомерной случайной величины. Функция распределения многомерной случайной величины. Плотность вероятности двумерной случайной величины.

50. Закон больших чисел.

51. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева.

52. Теорема Бернулли. Центральная предельная теорема.

53. Задачи математической статистики.

54. Генеральная и выборочная совокупности. Повторная и бесповторная выборки. Репрезентативная выборка. Способы отбора.

55. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения.

56. Полигон и гистограмма.

57. Несмещённые, эффективные и состоятельные оценки. Генеральная и выборочная средние. Оценка генеральной средней по выборочной средней. Устойчивость выборочных средних. Групповая и общая средние.

58. Генеральная и выборочная дисперсии. Групповая, внутригрупповая, межгрупповая и общая дисперсии. Оценка генеральной дисперсии по исправленной выборочной дисперсии.

59. Точность оценки, доверительная вероятность (надёжность), доверительный интервал. Доверительные интервалы для оценки математического ожидания при известном и неизвестном среднем квадратическом отклонении. Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения. Оценка точности измерений.

60. Метод произведений для вычисления выборочных средних и дисперсии.

61. Метод сумм для вычисления выборочных средних и дисперсии.

62. Сведение первоначальных вариантов к равноотстоящим. Эмпирические и теоретические частоты.

63. Построение нормальной кривой по опытным данным.

64. Оценка отклонения эмпирического распределения от нормального. Асимметрия и эксцесс.

- Уметь
, владеть
1. Проводить классификацию событий.
 2. Вычислять вероятности по классическому, геометрическому и статистическому определению.
 3. Применять основные правила комбинаторики.
 4. Использовать формулы комбинаторики к вычислению вероятностей.
 5. Применять основные формулы и теоремы теории вероятностей при вычислении вероятностей событий.
 6. Находить числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.
 7. Записывать законы распределения дискретной случайной величины и находить их основные параметры.
 8. Для непрерывной случайной величины уметь строить дифференциальную и интегральную функции распределения, находить числовые характеристики.
 9. Находить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал.
 10. Определять равномерное распределение, его числовые характеристики.
 11. Строить нормальное распределение и определять вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины.

12. Определять показательное распределение, вероятность попадания в заданный интервал показательно распределённой случайной величины, находить числовые характеристики показательного распределения.

13. Строить функция надёжности, показательный закон надёжности.

14. Определять функцию распределения многомерной случайной величины, плотность вероятности двумерной случайной величины.

15. Применять на практике закон больших чисел.

16. Использовать неравенство Чебышева и Теорему Чебышева при оценке вероятности.

17. Находить статистическое распределение выборки, эмпирическую функцию распределения.

18. Строить полигон и гистограмму по данной выборке.

19. Находить доверительные интервалы для оценки математического ожидания при известном и неизвестном среднем квадратическом отклонении, доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения. Проводить оценку точности измерений.

20. Применять метод моментов для точечной оценки параметров распределения.

21. Использовать метод наибольшего правдоподобия.

22. Применять метод произведений для вычисления выборочных средней и дисперсии.

23. Использовать метод сумм для вычисления выборочных средней и дисперсии.

24. Проводить сведение первоначальных вариантов к равноотстоящим.

25. Выполнять построение нормальной кривой по опытным данным.

26. Проводить оценку отклонения эмпирического распределения от нормального. Вычислять асимметрию и эксцесс.

32. Проверять гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона

33. Решать дифференциальные уравнения первого порядка (с разделяющимися переменными, однородные, сводящиеся к линейным, уравнения Бернулли, в полных дифференциалах.).

34. Понижать порядок дифференциальных уравнений

35. Решать линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

36. Находить общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

37. Находить частное решение дифференциального уравнения, отвечающее заданным начальным условиям.

38. Применять дифференциальные уравнения к решению практических задач

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка «отлично» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает материал; свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний как базового так и повышенного уровня; использует в ответе дополнительный материал все предусмотренные программой задания выполнены, качество их выполнения оценено; анализирует полученные результаты; проявляет самостоятельность при выполнении заданий.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено полностью, необходимые практические компетенции в основном сформированы, все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения достаточно высокое, при ответе на вопрос или решении задачи повышенного уровня возможны некоторые затруднения, хотя основное содержание этих заданий

студенту известно. Студент твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, большинство предусмотренных программой заданий базового уровня выполнено, но в них имеются ошибки, при ответе на поставленный вопрос студент допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, наблюдаются нарушения логической последовательности в изложении программного материала.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы, необходимые практические компетенции не сформированы, большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено, качество их выполнения оценено не удовлетворительно.

2. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения **экзамена** осуществляется в соответствии с Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования в СКФУ.

В экзаменационный билет включаются 3 вопроса: два теоретических вопроса и задача. Один из теоретических вопросов может быть заменён защитой индивидуального проекта (темы проектов представлены в соответствующем ФОСе), подготовленного студента в семестре и представляющем разработку одной из тем с презентацией для интерактивной доски. В билете один из вопросов (теоретический или задача) представлены из вопросов базового уровня, а другой из вопросов повышенного уровня.

Для подготовки по билету отводится 30 – 40 минут.

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования калькулятором. Телефонами, планшетами и иными справочными материалами пользоваться не разрешается.

Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой дисциплины. При проверке усвоения этого материала производится выявление полноты, прочности усвоения студентами теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

Оценка на экзамене выставляется в соответствии с соответствующим критерием. При оценке в первую очередь учитываются показанные студентами знания и умения (их полноту, глубину, прочность, использование). Оценка также зависит от наличия и характера погрешностей. Среди погрешностей выделяют ошибки и недочеты. Погрешность считается ошибкой, если она свидетельствует о том, что студент не овладел основными знаниями, умениями, указанными в программе.

К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или о отсутствии знаний не считающихся основными в соответствии с программой. Недочетами также являются: погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного студентом задания или способа его выполнения, неаккуратная запись, небрежное выполнение чертежа, графика.

Ответ на теоретический вопрос считается безупречным, если по своему содержанию полностью соответствует вопросу, содержит все необходимые теоретические факты и обоснованные выводы, а устное изложение и письменная запись ответа математически грамотна и отличается последовательностью и аккуратностью.

Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, верно выполнены нужные вычисления и преобразования, получен верный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.

**Вопросы для коллоквиумов
по дисциплине «Математика»
Коллоквиум 1**

Базовый уровень

**Тема 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ
ПЕРЕМЕННОЙ.**

25. Дайте определение функции.
26. Что называется областью определения функции?
27. Что называется областью значений функции?
28. Дайте определение графика функции $y=f(x)$.
29. Дайте определение возрастающей и убывающей функции.
30. Какая функция называется монотонной?
31. Дайте определение четной и нечетной функции.
32. Какая функция называется периодической?
33. Определите нули функции.
34. Что называется промежутком знакопостоянства функции?
35. Какая функция называется ограниченной?
36. Какие Вы знаете способы задания функций?
37. Что называется пределом функции в точке?
38. Определите предел функции на бесконечности.
39. Чему равен предел постоянной величины?
40. Чему равен предел: а) суммы; б) разности; в) произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$?
41. Чему равен предел частного функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ($x \rightarrow a$)?
42. Запишите первый замечательный предел и следствия из него.
43. Запишите второй замечательный предел и следствия из него.
44. Что называется приращением аргумента?
45. Что называется приращением функции?
46. Какая функция называется непрерывной в точке x_0 ?
47. Какая функция называется непрерывной на интервале?
48. Что называется точкой разрыва функции?
49. Какие задачи, приводящие к понятию производной, Вам известны?
50. Дайте определение производной функции в точке.
51. Опишите порядок вычисления производной функции по определению.
52. Чему равна производная: а) постоянной б) алгебраической суммы дифференцируемых функций; в) произведения двух дифференцируемых функций; г) дроби; д) сложной функции; е) обратной функции?
53. Запишите формулы для нахождения производных основных элементарных функций.
54. Дайте определение дифференциала функции.
55. Сформулируйте основные свойства дифференциалов.
56. Запишите формулу логарифмического дифференцирования. Когда применяется формула логарифмического дифференцирования?
57. Дайте определение неявного задания функции. Приведите примеры. Как от неявного задания перейти к явному заданию функции? Всегда ли это можно сделать. Приведите примеры.
58. Как проводят дифференцирование неявной функции?

59. Дайте определение параметрически заданной функции. Приведите примеры. Расскажите как от параметрического задания функции перейти к явному заданию функции.
60. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов функции.
61. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов функции.
62. Расскажите о формуле Тейлора и формуле Маклорена. Для чего эти формулы могут использоваться?
63. Дайте определение возрастающей и убывающей функции на некотором промежутке. Как найти интервалы монотонности функции?
64. Дайте определения экстремумов функции.
65. Определите наибольшее и наименьшее значения функции.
66. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
67. Какие точки называются критическими?
68. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.
69. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции? Укажите порядок решения этой задачи.
70. Определите понятия выпуклость и вогнутость графика функции. Какую точку называют точкой перегиба? Как найти интервалы выпуклости и вогнутости функции? Как определить точки перегиба?

Повышенный уровень

Тема 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции.
2. Определите функцию обратную по отношению к функции $y=f(x)$.
3. Определите целую рациональную функцию.
4. Какая функция называется линейной? Что является ее графиком?
5. Какая функция называется квадратичной? Что является ее графиком?
6. Определите дробно-рациональную функцию.
7. Какую функцию называют степенной? Графики каких степенных функций Вы можете построить?
8. Определите показательную функцию. Постройте в тетради графики функций $y = 2^x$, $y = (1/2)^x$.
9. Какую функцию называют логарифмической? Постройте в тетради графики функций $y = \log_2 x$, $y = \lg x$, $y = \log_{1/2} x$.
10. Какие тригонометрические функции Вы знаете? Постройте графики основных тригонометрических функций в тетради.
11. Назовите обратные тригонометрические функции. Постройте их графики.
12. Вспомните основные преобразования графиков функций (параллельный перенос на вектор, растяжение или сжатие от координатных осей), приведите примеры.
13. Дайте определение предела функции слева (справа).
14. Может ли функция $f(x)$ иметь два различных предела при $x \rightarrow a$?
15. Как можно избавиться от неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, если числитель и знаменатель дроби содержат многочлены?

16. Как разложить квадратный трехчлен на линейные множители? Сформулируйте теорему Виета.
17. Как можно избавиться от неопределенности $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, если числитель и (или) знаменатель содержат иррациональные выражения? Запишите формулы сокращенного умножения, помогающие определить сопряженные выражения для данных.
18. Сформулируйте правила вычисления пределов дроби при $x \rightarrow \infty$, если числитель и знаменатель содержат многочлены.
19. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
20. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
21. Какова простейшая связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?
22. Какова простейшая связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой величиной?
23. Что значит сравнить две бесконечно малые величины?
24. Какие две бесконечно малые величины называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных величин.
25. Как эквивалентные бесконечно малые величины могут быть использованы при вычислении пределов функции?
26. Предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке. Что можно сказать о непрерывности этой функции в точке x_0 ?
27. Какая точка называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$?
28. Какая точка называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$?
29. Сформулируйте теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями.
30. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции, составленной из непрерывных функций.
31. Сформулируйте теорему о непрерывности основных элементарных функций.
32. Сформулируйте свойства функции, непрерывной на замкнутом интервале.
33. Как найти производную функции $y=f(x)$ по определению?
34. В чем состоит механический смысл производной?
35. Как связаны между собой дифференцируемость функции в некоторой точке с непрерывностью функции в этой точке?
36. Приведите пример непрерывной функции, не имеющей производной в некоторой точке.
37. Дайте определение сложной функции. Приведите примеры.
38. Сформулируйте теорему для нахождения производной сложной функции.
39. Составьте таблицу нахождения производных для функций вида $f(u)$, где f - одна из элементарных функций, $u = u(x)$.
40. Запишите формулу для вычисления дифференциала первого и последующих порядков.
41. В чем заключается свойство инвариантности формы дифференциала? Дифференциалы каких порядков обладают указанным свойством?
42. Расскажите о геометрическом смысле дифференциала первого порядка.
43. Как используется дифференциал в приближенных вычислениях?
44. Выведите формулу приближенного вычисления значений функций. Как определить погрешность приближения?

45. Дайте определение производной второго порядка, производной n -го порядка.
46. Расскажите о дифференцировании показательно-степенной функции.
47. Расскажите о нахождении производных высших порядков от неявно заданных функций.
48. Запишите формулы для нахождения производных первого и второго порядков от параметрически заданной функции.
 - а. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
 - б. Теоремы Ферма, Роля.
 - с. Теоремы Лагранжа, Коши.
49. Выведите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
50. Сколько раз подряд можно применять правило Лопиталя и когда это правило неприменимо?
51. Как можно раскрыть неопределенность вида $0 \cdot \infty$ при вычислении предела функции?
52. Что нужно сделать при вычислении предела функции, если он содержит неопределенность вида $\infty - \infty$?
53. Какой прием применяют для применения правил Лопиталя, если предел функции содержит неопределенность вида 0^0 , или ∞^0 , или 1^∞ ?
54. Разложите по формуле Тейлора (Маклорена) функции $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.
55. Как ведется исследование функции на экстремум с помощью второй производной?
56. Укажите порядок исследования функции на возрастание и убывание и экстремумы.
57. Что называется асимптотой кривой $y = f(x)$?
58. Как найти асимптоту $y = ax + b$ кривой $y = f(x)$, т.е. как найти a и b ?
59. По какой схеме следует проводить исследование функции и построение ее графика?
60. Для решения каких вопросов исследования функции и построения ее графика:
 - а) не нужны теория пределов и дифференциальное исчисление?
 - б) необходимо уметь вычислять пределы?
 - в) нужна первая производная?
 - г) нужна вторая производная?

Коллоквиум 2

Базовый уровень

Тема 3. ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Высказывания, логические операции над ними.
2. Логические формулы, их виды,
3. Понятие множества, способы задания множеств.
4. Операции над множествами.
5. Множество натуральных чисел, аксиомы Пеано,
6. Метод математической индукции и его роль.
7. Алгебраическая форма записи комплексного числа, действия над комплексными числами в алгебраической форме.
8. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Геометрическая интерпретация модуля и аргументы комплексного числа.
9. Перевод комплексных чисел из алгебраической формы записи в тригонометрическую и обратно.
10. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Повышенный уровень

Тема 3. ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Законы логики.

2. Диаграммы Эйлера – Венна.
3. Алгебра с одной операцией: полугруппа, моноид, группа.
4. Алгебра с двумя операциями: кольцо, поле.
5. Кольцо целых чисел.
6. Поле рациональных чисел.
7. Сечения в поле рациональных чисел, определение поля действительных чисел
8. Показательная форма записи комплексного числа. Действия над комплексными числами в показательной форме.
9. Показательная форма записи комплексного числа. Действия над комплексными числами в показательной форме.

Коллоквиум 3

Базовый уровень

Тема 4. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Кривые второго порядка. Общее уравнение линии второго порядка, классификация кривых второго порядка.
2. Окружность. Каноническое уравнение окружности, его вывод.
3. Эллипс, его каноническое уравнение (с выводом), способы построения.
4. Гипербола, каноническое уравнение (с выводом), асимптоты гиперболы.
5. Парабола, вывод канонического уравнения.
6. Понятие об уравнении поверхности.
7. Плоскость в пространстве. Различные уравнения плоскости: общее, в отрезках, нормальное.
8. Уравнение плоскости, проходящей через три данных точки.
9. Прямая в пространстве. Прямая как линия пересечения двух плоскостей.
10. Канонические уравнения плоскости.
11. Параметрические уравнения плоскости.
12. Приведение уравнений прямой к каноническим.
13. Угол между двумя плоскостями, между двумя прямыми, между прямой и плоскостью и их нахождение.
14. Условия параллельности двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости. Условия перпендикулярности двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости.
15. Поверхности второго порядка: сфера, эллипсоид. Исследование их формы и построение.

Тема 4. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Кривые второго порядка. Общее уравнение линии второго порядка, классификация кривых второго порядка.
2. Окружность. Каноническое уравнение окружности, его вывод.
3. Эллипс, его каноническое уравнение (с выводом), способы построения.
4. Гипербола, каноническое уравнение (с выводом), асимптоты гиперболы.
5. Парабола, вывод канонического уравнения.
6. Понятие об уравнении поверхности.
7. Плоскость в пространстве. Различные уравнения плоскости: общее, в отрезках, нормальное.
8. Уравнение плоскости, проходящей через три данных точки.
9. Прямая в пространстве. Прямая как линия пересечения двух плоскостей.
10. Канонические уравнения плоскости.
11. Параметрические уравнения плоскости.
12. Приведение уравнений прямой к каноническим.
13. Угол между двумя плоскостями, между двумя прямыми, между прямой и плоскостью и их нахождение.

14. Условия параллельности двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости.
Условия перпендикулярности двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости.
15. Поверхности второго порядка: сфера, эллипсоид. Исследование их формы и построение.

Тема 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Дайте определение первообразной функции для данной функции $f(x)$ на данном промежутке. Как связаны между собой две первообразные для функции $f(x)$ в некотором промежутке?
2. Что называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$?
3. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла (правила интегрирования).
4. Составьте таблицу основных интегралов.
5. В чем суть метода непосредственного интегрирования?
6. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле. Когда целесообразно применять замену переменной интегрирования?
7. Запишите формулу интегрирования по частям. Когда целесообразно применение способа интегрирования по частям?
8. Интегралы какого вида можно вычислять с помощью формулы интегрирования по частям?
9. Расскажите о нахождении интегралов вида $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$; $\int \frac{(Ax + B)dx}{ax^2 + bx + c}$.
10. Как находится интеграл от целой рациональной функции?
11. Какая рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется правильной?
12. Рациональные дроби, какого вида называются элементарными? Как связана правильная рациональная дробь с элементарными дробями? Расскажите, как составляется схема разложения правильной дроби на основные элементарные дроби.
13. Какой способ применяется для разложения правильной рациональной дроби на сумму элементарных дробей?
14. Интегрирование иррациональных функций, содержащих квадратный трехчлен.
15. Какие подстановки удобно применить для взятия следующих интегралов:

$$\int R\left(x, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{s}{t}}\right) dx; \quad \int R\left(x, (\alpha x + \beta)^{\frac{p}{q}}, \dots, (\alpha x + \beta)^{\frac{s}{t}}\right) dx;$$

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^{\frac{s}{t}}\right) dx,$$
где R - рациональная функция, $p, q, \dots, s, t$ - целые числа.
16. Расскажите о нахождении интегралов от четной степени синуса или косинуса.
17. Расскажите о нахождении интегралов от нечетной степени синуса или косинуса.
18. Приведите примеры «небериущихся» интегралов.
19. Что называется определенным интегралом от a до b от функции $f(x)$?
20. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
21. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
22. Запишите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.
23. Запишите формулу замены переменной в определенном интеграле.

24. Что называется площадью плоской фигуры? Как найти площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла?
25. Что называется объемом тела? Как найти объем тела вращения?
26. Что называется длиной дуги? Как найти длину дуги: если функция задана в декартовых координатах?
27. Какие еще приложения определенных интегралов Вы знаете?
28. Несобственные интегралы с бесконечным верхним, бесконечным нижним пределами интегрирования, с бесконечными пределами интегрирования.
29. Несобственные интегралы от разрывных функций.

Повышенный уровень

Тема 4. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.
2. Полярное уравнение эллипса, гиперболы, параболы.
3. Однополостный и двуполостный гиперболоиды. Исследование их формы и построение.
4. Эллиптический и гиперболический параболоиды. Исследование их формы и построение.
5. Цилиндрические и конические поверхности. Исследование их формы и построение

Тема 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Сформулируйте теорему об инвариантности формул интегрирования.
2. Расскажите, как применяется формула замены переменной в неопределенном интеграле. Что необходимо сделать после сведения интеграла к табличному?
3. Что принимается за u для интегралов вида $\int P(x)e^{ax} dx$, $\int P(x)\sin ax dx$, $\int P(x)\cos ax dx$ ($P(x)$ - многочлен)?
4. Что принимается за u для интегралов вида $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arctg x dx$, $\int P(x)\operatorname{arccotg} x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$ ($P(x)$ - многочлен)?
5. Как вычисляются интегралы $\int a^{kx} \sin nxdx$ и $\int a^{kx} \cos nxdx$?
6. Как интегрируются правильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от правильной рациональной дроби.
7. Как интегрируются неправильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от неправильной рациональной дроби.
8. Всегда ли можно найти интеграл от рациональной функции?
9. Вычисление интегралов $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$.
10. Интегралы от дифференциального бинома $\int x^m (a + bx^n)^p dx$, случаи интегрирования в элементарных функциях.
11. Сформулируйте порядок отыскания интеграла от функции, содержащей квадратный корень из квадратного трехчлена в знаменателе дроби и линейную функцию в числителе.
12. Какие способы нахождения интеграла вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ можете указать?
13. Расскажите о применении подстановок Эйлера при вычислении интегралов $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$. Сколько существует подстановок Эйлера? В каком случае

может применяться каждая из них? Без какой из подстановок можно было бы обойтись? Объясните почему?

14. Какие формулы применяются для вычисления следующих интегралов:

а) $\int \sin ax \cos bxdx, \int \cos ax \cos bxdx, \int \sin ax \sin bxdx$, где $a \neq b$.

б) $\int \sin^m x dx, \int \cos^n x dx$, где m и n положительные целые числа.

в) Какие случаи необходимо рассмотреть при нахождении интегралов вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

15. Какую замену следует сделать при нахождении интегралов вида $\int tg^n x dx, \int ctg^n x dx$?

16. Какой способ нахождения интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x) dx, \int R(tgx) dx$,

$\int R(e^x) dx$ Вы можете предложить? К какому типу интегралов они сводятся?

17. Какие подстановки удобно применить для взятия следующих интегралов:

а) $\int f(\sin x) \cos x dx$;

б) $\int f(\cos x) \sin x dx$;

в) $\int f(tgx) \frac{dx}{\cos^2 x}$ или $\int f(tgx) dx$;

г) $\int f(ctgx) \frac{dx}{\sin^2 x}$ или $\int f(ctgx) dx$;

д) $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R - рациональная функция.

18. На что следует обращать внимание при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной по сравнению с неопределенным интегралом?

19. Определите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования. Когда несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся (расходящимся)?

20. Для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.

21. Определите несобственный интеграл от разрывной функции. Для несобственного интеграла от разрывной функции запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.

22. Сформулируйте теорему сравнения для несобственных интегралов.

23. Дайте определение абсолютно сходящегося интеграла.

24. На что следует обращать внимание при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной по сравнению с неопределенным интегралом?

25. Определите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования.

26. Когда несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся (расходящимся)?

27. Для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.

28. Определите несобственный интеграл от разрывной функции.

29. Когда несобственный интеграл от разрывной функции называется сходящимся (расходящимся)?

30. Для несобственного интеграла от разрывной функции запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.

31. Сформулируйте теорему сравнения для несобственных интегралов.

32. Дайте определение абсолютно сходящегося интеграла. Дайте определение полярной системы координат. Установите формулы, связывающие полярные и прямоугольные координаты точки.

33. Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры в полярных координатах. Как найти длину дуги: если функция задана в полярных координатах; параметрически?
34. Признаки сравнения.

Коллоквиум 4

Базовый уровень

Тема 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

13. Функции нескольких переменных. Основные определения.
14. Область определения и область значений функции двух переменных.
15. График функции двух переменных.
16. Частные производные функции нескольких переменных. Определение, правила вычисления.
17. Смешанные производные.
18. Теорема о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования.
19. Полный дифференциал.
20. Дифференциал сложной функции.
21. Дифференциалы высших порядков.
22. Экстремум функции двух переменных.
23. Необходимое условие экстремума для функции двух переменных.
24. Достаточное условие экстремума для функции двух переменных.

Повышенный уровень

Тема 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

8. Линии уровня.
9. Поверхности уровня.
10. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
11. Свойства непрерывных функций двух переменных.
12. Производные сложной функции.
13. Неявные функции и их дифференцирование.
14. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.
15. Условный экстремум, метод множителей Лагранжа.
16. Вывод метода наименьших квадратов с помощью решения задачи на нахождение экстремума функции нескольких переменных.

Коллоквиум 5

Базовый уровень

Тема 8. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Определение двойного интеграла.
2. Свойства двойного интеграла.
3. Сведение двойного интеграла к повторным интегралам.
4. Приложения двойного интеграла.
5. Определение тройного интеграла.
6. Свойства тройного интеграла.
7. Сведение тройного интеграла к повторным интегралам.
8. Приложения тройного интеграла.
9. Криволинейные интегралы по длине дуги, их определение и вычисление.
10. Криволинейные интегралы по координатам, их определение и вычисление.

11. Понятие поверхности.
12. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
13. Односторонние и двусторонние поверхности.
14. Площадь поверхности.
15. Поверхностные интегралы первого рода, их вычисление.

Тема 9. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Скалярные поля, определение, описание.
2. Производная по направлению.
3. Определение векторного поля.
4. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля.

Повышенный уровень

Тема 8. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
2. Замена переменных при вычислении двойного интеграла.
3. Переход к полярной системе координат при вычислении двойного интеграла.
4. Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла.
5. Замена переменных при вычислении тройного интеграла.
6. Переход к цилиндрической и сферической системам координат при вычислении тройного интеграла.
7. Приближённое вычисление кратных интегралов. Аналог формул прямоугольников, трапеций, Симпсона, касательных.
8. Сравнительный анализ свойств криволинейных интегралов первого и второго рода.
9. Приложения криволинейных интегралов первого рода.
10. Приложения криволинейных интегралов второго рода.
11. Поверхностные интегралы второго рода

Тема 9. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Градиент скалярного поля.
2. Циркуляция векторного поля.
3. Формула Грина, её применение.
4. Формула Остроградского-Гаусса.
5. Формула Стокса.

Коллоквиум 6

Базовый уровень

Тема 11. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

18. Основные понятия теории вероятностей.
19. Классификация событий.
20. Случайные события и их вероятности.
21. Классическое, геометрическое и статистическое определение вероятности.
22. Комбинаторика, основные правила комбинаторики.
23. Виды соединений: перестановки, размещения, сочетания без повторений.
24. Основные формулы комбинаторики и их применение к вычислению вероятностей.
25. Совместные и несовместные события, определение, примеры.
26. Зависимые и независимые события, примеры.
27. Алгебра событий: сумма и произведение событий, примеры.
28. Сумма совместных и несовместных событий.
29. Произведение зависимых и независимых событий.
30. Вычисление вероятности события, которое может появиться с одним из событий, образующих полную группу (формула полной вероятности).
31. Схема Бернулли.
32. Формула Бернулли. Условия её применения.

33. Условия применения локальной теоремы Муавра-Лапласа, отличие условий применения от формулы Бернулли. Вычисление вероятности появления события в n независимых испытаниях от k_1 до k_2 раз, интегральная теорема Муавра-Лапласа.
34. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.

Тема 12. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

12. Понятие случайной величины. Виды случайных величин и законы их распределения.
13. Числовые характеристики дискретной случайной величины.
14. Биномиальное распределение, числовые характеристики.
15. Распределение Пуассона, числовые характеристики.
16. Геометрическое распределение, числовые характеристики.
17. Непрерывная случайная величина. Дифференциальная и интегральная функции распределения, определение, свойства, взаимосвязь.
18. Определение вероятности попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.
19. Нахождение числовых характеристик непрерывной случайной величины.
20. Равномерное распределение. Числовые характеристики.
21. Нормальное распределение. Числовые характеристики.
22. Показательное распределение. Числовые характеристики
4. Какие теоремы входят в «закон больших чисел»?
5. Запишите неравенство Чебышева, при решении каких задач оно применяется.
6. Теорема Чебышева.

Тема13. ОСНОВЫ ВЫБОРОЧНОГО МЕТОДА

16. Задачи математической статистики.
17. Связь между математической статистикой и теорией вероятностей.
18. Генеральная и выборочная совокупность.
19. Виды выборок.
20. Вариационный ряд.
21. Статистическая функция распределения частот.
22. Полигон и гистограмма частот.
23. Определение статистической оценки.
24. Несмещённые, эффективные и состоятельные оценки.
25. Точечные и интервальные оценки.
26. Оценки генеральной средней по выборочной средней.
27. Оценки генеральной дисперсии по исправленной выборочной дисперсии.
28. Условные эмпирические моменты. Отыскание центральных моментов по условным.
29. Метод произведений вычисления сводных характеристик выборки.
30. Метод сумм вычисления сводных характеристик выборки.

Повышенный уровень

Тема 11. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

12. Предмет теории вероятностей. Исторический обзор развития теории вероятностей как науки.
13. Основные разделы современной теории вероятностей.
14. Связь между теорией вероятностей и математической статистикой.
15. Перестановки, размещения, сочетания с повторениями.
16. Условная вероятность.
17. Полная группа событий, противоположные события.
18. Вероятность появления хотя бы одного события.
19. Вероятность перераспределённых гипотез (формула Байеса).
20. Вывод формулы Бернулли.
21. Найвероятнейшее число наступления события.

22. Условия применения формулы Пуассона, отличие от условий применения формулы Бернулли и локальной теоремы Муавра-Лапласа.

Тема 12. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

12. Сформулируйте и докажите свойства математического ожидания дискретной случайной величины.
13. Сформулируйте и докажите свойства дисперсии дискретной случайной величины.
14. Понятие многомерной случайной величины.
15. Функция распределения многомерной случайной величины.
16. Плотность вероятности двумерной случайной величины. Условные законы распределения.
17. Числовые характеристики двумерной случайной величины.
18. Выведите формулы для вычисления числовых характеристик случайной величины, имеющей равномерное распределение.
19. Выведите формулы для вычисления числовых характеристик случайной величины, имеющей показательное распределение.
20. В чём заключается правило 3-х σ , для какого закона распределения оно справедливо?
21. Сформулируйте теорему Бернулли.
22. Центральная предельная теорема.

Тема 13. ОСНОВЫ ВЫБОРОЧНОГО МЕТОДА

15. Задачи математической статистики.
16. Связь между математической статистикой и теорией вероятностей.
17. Генеральная и выборочная совокупность. Виды выборок.
18. Вариационный ряд. Статистическая функция распределения. Полигон и гистограмма.
19. Определение генеральной средней, выборочной средней, генеральной и выборочной дисперсий, генерального и выборочного среднего квадратического отклонений.
20. Способы отбора статистических сведений.
21. Статистическая функция относительных частот.
22. Полигон и гистограмма относительных частот.
23. Чему равна площадь гистограммы частот и гистограммы относительных частот?
24. Выведите формулы для вычисления выборочной средней и выборочной дисперсии, если значения случайной величины близки к постоянному числу.
25. Введите понятие исправленной дисперсии.
26. Вывести формулы для вычисления выборочной средней и выборочной дисперсии через условные эмпирические моменты.
27. Как получить выборку с равноотстоящими вариантами. Построение нормальной кривой по опытным данным.
28. Вычисление асимметрии и эксцесса.

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка "*отлично*" выставляется, если студент при ответе на вопросы как базового так и повышенного уровня показывает глубокое и всестороннее знание предмета, обязательной и дополнительной литературы, аргументировано и логически стройно излагает материал, пользуясь математической символикой, может применять знания для анализа конкретных ситуаций, свободно ориентируется в межпредметных связях.

Оценка "*хорошо*" ставится, если при ответе на вопросы базовой части студент показывает знание предмета, обязательной литературы, знакомстве с дополнительной литературой, аргументировано излагает материал, умеет применять знания для анализа конкретных ситуаций, однако незначительно нарушает последовательность изложения материала, дает недостаточно полное, хотя и верное определение понятий.

Оценка **«удовлетворительно»** ставится, если студент при ответе на вопросы базовой части показал, что он в основном знает предмет, обязательную литературу, может практически применять свои знания, но программный материал излагает фрагментарно и непоследовательно, допускает отдельные ошибки и погрешности при применении математической символики и понятий, слабо ориентируется в межпредметных связях;

Оценка **«неудовлетворительно»** ставится, если студент не отвечает на предлагаемые ему вопросы базовой или его ответ показывает, что не усвоено основное содержание предмета, обнаруживается незнание большей части учебного материала, допускаются грубые ошибки при формулировке теорем, определении основных понятий, неправильно используется математическая символика.

2. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя устный опрос студентов в форме индивидуального собеседования на вопросы коллоквиума. Каждому студенту предлагается по одному вопросу из каждой темы. Сначала студент отвечает на вопросы базового уровня. При успешном ответе ему предлагается один-два вопроса из вопросов повышенного уровня, что позволяет преподавателю определить уровень владения материалом.

Предлагаемые студенту задания позволяют проверить компетенции УК-1. Для подготовки к данному оценочному мероприятию необходимо прочитать лекционный материал, найти ответы на поставленные вопросы, изучить дополнительную литературу, установить взаимосвязи между изучаемыми понятиями, запомнить основные определения, свойства, теоремы, продумать, где они могут применяться. Рекомендуется готовиться к данному контрольному мероприятию в течение семестра, разбирая теоретические задания для оценки сформированности компетенций к каждому практическому занятию. Эти задания предлагаются в УМК дисциплины «Математика», представленном на кафедре Математического анализа, алгебры и геометрии.

При подготовке к ответу студенту не разрешается пользоваться никакими справочными материалами. Для подготовки к ответу даётся время на подготовку до 10 -15 минут, в течение которого студент может записать план своего ответа, основные формулы, план доказательства теорем. Для подготовки к ответу на вопросы повышенного уровня предлагается дополнительное время.

Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой дисциплины. При проверке усвоения этого материала производится выявление полноты, прочности усвоения студентами теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

При оценке в первую очередь учитываются показанные студентами знания и умения (их полноту, глубину, прочность, использование). Оценка также зависит от наличия и характера погрешностей. Среди погрешностей выделяют ошибки и недочеты. Погрешность считается ошибкой, если она свидетельствует о том, что студент не овладел основными знаниями, умениями, указанными в программе.

К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или о отсутствии знаний не считающихся основными в соответствии с программой. Недочетами также являются: погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного студентом задания или способа его выполнения, неаккуратная запись, небрежное выполнение чертежа, графика.

Вопросы для собеседования

по дисциплине «Математика»

Собеседование 1

Базовый уровень

Тема 2. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Дайте определение матрицы, элементов матрицы; расскажите, как матрицы обозначаются, приведите примеры.
2. Введите понятия квадратной, диагональной, единичной, нулевой, ступенчатой, транспонированной, симметрической матриц, матрицы-строки и матрицы-столбца. Приведите примеры.
3. Когда говорят о размерах, а когда о размерности матрицы? Приведите примеры и введите соответствующие обозначения.
4. Дайте определение суммы двух матриц. Какие матрицы можно складывать? Приведите примеры.
5. Как умножить матрицу на число? Приведите пример.
6. Какие задачи приводят к понятиям определителей второго и третьего порядков. Как обозначаются определители?
7. Расскажите о правилах вычисления определителей второго и третьего порядков. Как называют правило вычисления определителей третьего порядков?
8. Сформулируйте основные свойства определителей.
9. Какая матрица называется матрицей ступенчатого вида?
10. Дайте определение ранга матрицы.
11. Перечислите элементарные преобразования матрицы.
12. Как вычислить ранг матрицы с помощью элементарных преобразований?
13. Введите понятия линейно зависимых и линейно независимых строк (столбцов) матрицы. Какое еще можно дать определение ранга матрицы?
14. Определите понятия обратимая матрица, обратная матрица, вырожденная и невырожденная матрицы.
15. В каком случае определитель матрицы равен нулю?
16. Дайте определение минора и алгебраического дополнения.
17. Сформулируйте алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.
18. Назовите элементарные преобразования матрицы.
19. Расскажите, как найти обратную матрицу с помощью элементарных преобразований путем присоединения единичной матрицы.
20. Как проверить правильность нахождения обратной матрицы?
21. Дайте определения системы линейных уравнений, однородной и неоднородной систем, решения системы.
22. Какая система называется совместной, а какая несовместной?
23. Дайте определение определенной и неопределенной систем.
24. Сформулируйте критерий совместности систем линейных уравнений.
25. Расскажите о методе Гаусса. Перечислите элементарные преобразования матрицы.
26. Расскажите о методе Крамера решения систем линейных уравнений. Каковы границы его применения?
27. Расскажите о координатной прямой и о прямоугольной декартовой системе координат на плоскости и в пространстве.
28. Раскройте сущность метода координат.
29. Как будет выглядеть формула при делении отрезка пополам?
30. Дайте определение полярной системы координат.

31. Установите связь между полярной и прямоугольной системой координат на плоскости.
32. Какие системы координат в пространстве помимо прямоугольной декартовой системы Вы знаете? Расскажите о цилиндрической и сферической системах координат. Установите взаимосвязь этих систем с прямоугольной декартовой системой координат.
33. Какие величины относятся к скалярным, а какие к векторным величинам? Приведите примеры.
34. Дайте определение вектора, модуля вектора. Как обозначают эти величины.
35. Введите понятие единичного вектора, нулевого вектора, коллинеарных, сонаправленных и противоположно направленных векторов, равных векторов, компланарных векторов.
36. Расскажите, какие операции над векторами относят к числу линейных операций.
37. Объясните правила построения суммы двух векторов (правило треугольника, правило параллелограмма), суммы конечного числа векторов (правило ломанной).
38. Дайте определение разности двух векторов и постройте разность двух векторов.
39. Как найти произведение вектора на действительное число?
40. Перечислите основные свойства линейных операций над векторами.
41. Введите понятие линейной комбинации системы векторов, линейно зависимой и линейно независимой системы векторов. Сколько векторов на плоскости и в пространстве могут быть линейно независимы?
42. Дайте определение базиса и ранга системы векторов, координат вектора.
43. Как определяются линейные операции над векторами в координатной форме?
44. Дайте определение скалярного произведения двух геометрических векторов и сформулируйте его основные свойства и геометрическую интерпретацию.
45. Как определить угол между векторами и длину вектора? Запишите формулы в координатной форме.
46. Линейное пространство. Евклидово пространство.
47. Линейный оператор и его матрица.
48. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Повышенный уровень

Тема 2. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Для каких двух матриц можно определить операцию произведения? Введите эту операцию, проиллюстрируйте ее на примере. Коммутативно ли умножение двух матриц?
2. Приведите пример использования матриц в области Вашей предметной деятельности.
3. Введите понятия члена определителя, перестановки, транспозиции. Как определить четность перестановки?
4. Дайте определение определителя n -го порядка? Докажите, что правило «треугольника» является частным случаем этого определения.
5. Введите понятия минора и алгебраического дополнения элемента определителя.
6. Сформулируйте теорему о вычислении определителя и следствие из нее. Изложите метод окаймляющих миноров для нахождения ранга матрицы. На каких свойствах этот метод основан?
7. Назовите условия обратимости матрицы.
8. Выведите формулу нахождения обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.
9. Как найти общее решение системы, приведенной к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса?
10. В чем особенность применения метода Гаусса при решении однородной системы?
11. Как записать систему линейных уравнений в матричной форме?

12. Изложите матричный метод решения систем линейных уравнений. Какие системы можно решать этим методом.
13. Какие выводы можно сделать о числе решений однородной системы линейных уравнений.
14. Сделайте сравнительный анализ рассмотренных методов решения систем линейных уравнений.
15. Выведите формулу расстояния между двумя точками плоскости или двумя точками пространства по их прямоугольным декартовым координатам.
16. Докажите формулу деления отрезка в заданном отношении (на плоскости и в пространстве). Какие виды преобразования прямоугольной декартовой системы координат на плоскости Вы знаете?
17. Расскажите о параллельном переносе прямоугольной декартовой системы координат и о зеркальном отображении осей координат.
18. Выведите формулы поворота прямоугольной декартовой системы координат.
19. Расскажите о компланарных векторах и о направляющих косинусах.
20. Сформулируйте определение векторного произведения, расскажите о его геометрических приложениях. Перечислите основные свойства векторного произведения.
21. Дайте определение смешенного произведения векторов. Сформулируйте основные свойства смешанного произведения, расскажите о его геометрических приложениях.
22. Основные алгебраические структуры.
23. Алгебры с одной операцией: полугруппы, группы.
24. Алгебры с двумя операциями: кольцо, поле.

ИДЗ по теме «Методы решения систем линейных уравнений»

Базовый уровень

1. Исследовать систему на совместность и число решений системы.
2. Решить систему методом Гаусса.
Для определенной системы
3. Решить систему методом Крамера.

Повышенный уровень

4. Изменить систему таким образом, чтобы она была совместной (определенной и неопределенной), несовместной.
5. Определённую систему решить матричным методом.

Системы к индивидуальным домашним заданиям выбираются согласно номера варианта, выданного преподавателем (порядковый номер студента в журнале группы).

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 18, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 = -10, \\ x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = -48. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 12, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 17, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_3 + 6x_4 = 8, \\ 2x_2 + 5x_4 = 9. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 12x_3 - 3x_4 = 27, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 7. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 - 7x_2 + 8x_3 + x_4 = 15, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 25, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 13x_4 = 11, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + 14x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 13. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + 14x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 9x_3 - 5x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 5. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 21x_3 + 52x_4 = -8, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = -48. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 265x_4 = -48, \\ 4x_2 + 18x_3 + 48x_4 = -10, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 29, \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + x_4 = 41, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 30, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 29, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 12, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 16. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 16, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 11. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ x_1 - 12x_2 + 15x_3 + 5x_4 = 23, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 25, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 19, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

Собеседование 2

Базовый уровень

Тема 4. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Дайте определение уравнения линии. К линиям какого порядка относят прямую?
2. Выведите уравнение прямой с угловыми коэффициентами. Назовите геометрический смысл углового коэффициента. Любая ли прямая может быть задана уравнением с угловым коэффициентом?
3. Расскажите об общем уравнении прямой и о её расположении относительно координатных осей в зависимости от коэффициентов уравнения.
4. Выведите уравнение прямой в отрезках; назовите геометрический смысл его коэффициентов.
5. Дайте определение окружности. Выведите уравнение окружности с центром в заданной точке. Запишите каноническое уравнение окружности.
6. Сформулируйте определение эллипса. Определите следующие понятия: центр эллипса, фокусное расстояние, полуфокусное расстояние, диаметр эллипса, большая и малая оси (полуоси) эллипса, эксцентриситет эллипса.
7. Дайте определение гиперболы. Нарисуйте эту линию. Введите понятия центра гиперболы, фокусного и полуфокусного расстояний, диаметра гиперболы, действительной оси (полуоси), мнимой оси гиперболы, вершин и асимптот гиперболы. Покажите введенные понятия на рисунке. Определите эксцентриситет гиперболы.
8. Сформулируйте определение параболы и постройте ее. Покажите фокус и директрису параболы, вершину параболы.
9. Какие уравнения плоскости в пространстве Вы знаете? Запишите эти уравнения.
10. Выведите уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору.
11. Получите общее уравнение плоскости и расскажите о расположении плоскости в зависимости от равенства нулю некоторых из коэффициентов этого уравнения. Каков геометрический смысл коэффициентов при неизвестных общего уравнения плоскости?
12. Дайте определение угла между плоскостями и выведите формулу для его нахождения
13. Как можно задать прямую в пространстве? Расскажите об общих уравнениях прямой.
14. Выведите канонические и параметрические уравнения прямой. Определите геометрический смысл входящих в эти уравнения коэффициентов.

Повышенный уровень

Тема 4. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Расскажите о нормальном уравнении прямой.
2. Определите угол между прямыми. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
3. Выведите формулу расстояния между точкой и прямой.
4. В каком случае уравнение вида $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ на плоскости задает окружность?
5. Укажите способы построения эллипса. Расскажите о равнобочной гиперболы.
6. Выведите каноническое уравнение параболы.
7. Выведите каноническое уравнение гиперболы.
8. Выведите каноническое уравнение эллипса.
9. Сформулируйте условия прохождения плоскости через начало координат, через координатные оси.
10. Сформулируйте условие параллельности плоскости координатным осям; координатным плоскостям.
11. Сформулируйте условие перпендикулярности плоскости координатным осям; координатным плоскостям.

12. Получите уравнение плоскости в отрезках. Расскажите о геометрическом смысле коэффициентов этого уравнения.
13. Запишите нормальное уравнение плоскости
14. Выведите формулу расстояние от точки до плоскости.
15. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
16. Расскажите, как перейти от общих уравнений прямой к каноническим (параметрическим) и обратно.
17. Дайте определение для угла между прямыми в пространстве. Выведите формулу для его нахождения и сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
18. Дайте определение угла между прямой и плоскостью. Выведите формулу для его нахождения и сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности прямой плоскости.

ИДЗ по теме «Прямая на плоскости»

1. Составить уравнение прямой
 - а) проходящей через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$;
 - б) проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ параллельно прямой $l: Ax + By + C = 0$;
 - в) проходящей через точку $B(x_2; y_2)$ перпендикулярно прямой $l: Ax + By + C = 0$;
 - г) проходящей через точку $B(x_2; y_2)$ и параллельной оси Ox ;
 - д) проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ и параллельной оси Oy ;
 - е) проходящей через точку $B(x_2; y_2)$ и перпендикулярной оси Ox ;
 - ж) проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ и перпендикулярной оси Oy ;
 - з) с угловым коэффициентом k и проходящей через точку $A(x_1; y_1)$;
 - и) проходящей через точку $B(x_2; y_2)$ и составляющей с осью Ox угол α ;
 - к) проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ и образующей с прямой $l: Ax + By + C = 0$ угол α .
2. Построить все прямые из задания 1.
3. Для каждой из прямой из задания 1 записать (если это возможно)
 - а) общее уравнение прямой;
 - б) уравнение прямой с угловым коэффициентом;
 - в) уравнение прямой в отрезках;
 - г) нормальное уравнение прямой.
4. Определить угол между прямой AB и прямой $l: Ax + By + C = 0$.
5. Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой AB , концы которого лежат на осях координат.
6. Записать уравнения диагоналей квадрата из задания 5 и определить их длину.
7. Определить координаты всех вершин квадрата из задания 5 и координаты точки O - точки пересечения его диагоналей.
8. Определить расстояние от точки O из задания 7 до прямой $l: Ax + By + C = 0$.
9. Найти координаты такой точки C , что треугольник ABC будет равносторонним.

Данные для заданий выбираются из таблицы согласно своему варианту:

Вариант	$A(x_1; y_1)$	$B(x_2; y_2)$	$l: Ax + By + C = 0$	k	α
1	$(-1; 3)$	$(1; 1)$	$2x + 3y - 1 = 0$	-1	30°
2	$(-2; 3)$	$(1; 2)$	$x + 2y - 1 = 0$	-2	45°

3	$(-3;3)$	$(1;4)$	$2x - 3y - 1 = 0$	-3	60^0
4	$(-4;3)$	$(2;1)$	$5x + 3y - 10 = 0$	-4	120^0
5	$(-5;3)$	$(2;2)$	$x + 2y - 10 = 0$	-5	135^0
6	$(-1;1)$	$(2;4)$	$x + 4y - 5 = 0$	-6	150^0
7	$(-1;2)$	$(3;1)$	$-5x + y - 7 = 0$	6	30^0
8	$(-1;4)$	$(3;2)$	$2x - 5y - 1 = 0$	5	45^0
9	$(-2;1)$	$(3;4)$	$-2x + 3y + 1 = 0$	4	60^0
10	$(-2;2)$	$(4;1)$	$-x + 2y + 1 = 0$	3	120^0
11	$(-2;4)$	$(4;2)$	$-2x + 3y - 1 = 0$	2	135^0
12	$(-3;1)$	$(4;4)$	$-5x + 3y - 10 = 0$	1	150^0
13	$(-3;2)$	$(5;1)$	$-x + 2y - 10 = 0$	8	30^0
14	$(-3;4)$	$(5;2)$	$-x + 4y - 5 = 0$	10	45^0
15	$(-4;1)$	$(5;4)$	$-5x + y + 7 = 0$	-9	60^0
16	$(-4;2)$	$(1;-1)$	$2x + 5y - 1 = 0$	-1	120^0
17	$(-4;4)$	$(1;-2)$	$4x - 3y - 1 = 0$	-2	135^0
18	$(-5;1)$	$(1;-4)$	$-x + 2y - 7 = 0$	-3	150^0
19	$(-5;2)$	$(2;-1)$	$-2x + 5y - 1 = 0$	-4	30^0
20	$(-5;4)$	$(2;-2)$	$5x - y - 10 = 0$	-5	45^0
21	$(1;3)$	$(2;-4)$	$x - 8y - 10 = 0$	-6	60^0
22	$(2;3)$	$(3;-1)$	$-7x + 4y - 5 = 0$	6	120^0
23	$(3;3)$	$(3;-2)$	$-6x + y - 7 = 0$	5	135^0
24	$(4;3)$	$(3;-4)$	$2x - 9y - 1 = 0$	4	150^0
25	$(5;3)$	$(4;-1)$	$-4x + 3y - 1 = 0$	3	30^0
26	$(1;1)$	$(-4;-2)$	$x - 3y - 8 = 0$	2	45^0
27	$(1;2)$	$(-4;-4)$	$x - 9y - 1 = 0$	1	60^0
28	$(1;4)$	$(-5;-1)$	$x + 3y - 5 = 0$	8	120^0
29	$(2;1)$	$(-5;-2)$	$x - 4y - 1 = 0$	10	135^0
30	$(2;2)$	$(-5;-4)$	$-3x + 4y - 5 = 0$	-9	150^0

ИДЗ по теме «Плоскость и прямая в пространстве»

1. Составить уравнение плоскости

- а) проходящей через точку A перпендикулярно вектору $\overline{BC}$;
 - б) проходящей через точки A , B и C ;
 - в) проходящей через точки B и C и перпендикулярной плоскости α ;
 - г) проходящей через ось Ox и перпендикулярной плоскости ABC ;
 - д) проходящей через ось Oy и перпендикулярной плоскости ABC ;
 - е) проходящей через ось Oz и перпендикулярной плоскости ABC ;
 - ж) содержащей ось Ox и проходящей через точку A ;
 - з) содержащей ось Oy и проходящей через точку B ;
 - и) содержащей ось Oz и проходящей через точку C ;
 - к) проходящей через точку B и линию пересечения плоскостей XOY и α ;
 - л) проходящей через точку A и параллельной плоскости α .
2. Найти расстояние от начала координат до плоскости ABC .
 3. Найти угол между плоскостями ABC и α .
 4. Составить канонические уравнения прямой
 - а) проходящей через точку A и параллельной вектору $\overline{BC}$;
 - б) проходящей через точки B и C ;
 - в) проходящей через точку B и пересекающей ось Ox под прямым углом;
 - г) являющейся линией пересечения плоскостей ABC и α ;
 - д) проходящей через точку C и образующей с осью Oy угол 60° ;
 - е) проходящей через точку B и параллельной оси Oz .
 5. Определить угол между прямыми AB и BC .
 6. Определить угол между прямой AB и плоскостью α .
 7. Определить площадь пирамиды $OABC$, где точка O - начало координат.
 8. Записать уравнение высоты пирамиды $OABC$, опущенной из вершины O , и определить ее длину.
 9. Найти площади граней пирамиды $OABC$.
 10. В пирамиде $OABC$ определить угол между
 - а) ребрами BC и AO ;
 - б) гранями ABC и AOC ;
 - в) ребром AO и гранью ABC .

Данные для заданий выбираются из предлагаемой студентам таблицы согласно их варианту.

Вариант	$A(x_1; y_1; z_1)$	$B(x_2; y_2; z_2)$	$C(x_3; y_3; z_3)$	α
---------	--------------------	--------------------	--------------------	----------

1	$(-1;3;2)$	$(1;1;-5)$	$(-4;2;4)$	$2x+3y+3z-1=0$
2	$(-2;3;1)$	$(1;2;4)$	$(-4;4;5)$	$x+2y-4z-1=0$
3	$(-3;3;-5)$	$(1;4;-2)$	$(-5;1;4)$	$2x-3y+z-1=0$
4	$(-4;3;2)$	$(2;1;2)$	$(-5;2;-3)$	$5x+3y-2z-10=0$
5	$(-5;3;1)$	$(2;2;-5)$	$(-5;4;-4)$	$x+2y-3z-10=0$
6	$(-1;1;5)$	$(2;4;-3)$	$(1;3;1)$	$x+4y+4z-5=0$
7	$(-1;2;-3)$	$(3;1;4)$	$(2;3;-5)$	$-5x+y+3z-7=0$
8	$(-1;4;1)$	$(3;2;-1)$	$(3;3;7)$	$2x-5y-z-1=0$
9	$(-2;1;-1)$	$(3;4;-2)$	$(4;3;-2)$	$-2x+3y-z+1=0$
10	$(-2;2;4)$	$(4;1;-2)$	$(5;3;-6)$	$-x+2y+2z+1=0$
11	$(-2;4;1)$	$(4;2;-5)$	$(1;1;-7)$	$-2x+3y+3z-1=0$
12	$(-3;1;1)$	$(4;4;2)$	$(1;2;-6)$	$-5x+3y+2z-10=0$
13	$(-3;2;3)$	$(5;1;-2)$	$(3;-2;6)$	$-x+2y-z-10=0$
14	$(-3;4;-2)$	$(5;2;-3)$	$(3;-4;-5)$	$-x+4y-2z-5=0$
15	$(-4;1;2)$	$(5;4;-2)$	$(4;-1;-6)$	$-5x+y-z+7=0$
16	$(-4;2;4)$	$(1;-1;3)$	$(-4;-2;-5)$	$2x+5y-3z-1=0$
17	$(-4;4;5)$	$(1;-2;7)$	$(-4;-4;1)$	$4x-3y-z-1=0$
18	$(-5;1;4)$	$(1;-4;2)$	$(-5;-1;6)$	$-x+2y+3z-7=0$
19	$(-5;2;-3)$	$(2;-1;-2)$	$(-5;-2;2)$	$-2x+5y+2z-1=0$
20	$(-5;4;-4)$	$(2;-2;3)$	$(-5;-4;2)$	$5x-y+2z-10=0$
21	$(1;3;1)$	$(2;-4;-3)$	$(1;1;-5)$	$x-8y+3z-10=0$
22	$(2;3;-5)$	$(3;-1;2)$	$(1;2;4)$	$-7x+4y+z-5=0$
23	$(3;3;7)$	$(3;-2;6)$	$(1;4;-2)$	$-6x+y-z-7=0$
24	$(4;3;-2)$	$(3;-4;-5)$	$(2;1;2)$	$2x-9y-z-1=0$
25	$(5;3;-6)$	$(4;-1;-6)$	$(2;2;-5)$	$-4x+3y-3z-1=0$
26	$(1;1;-7)$	$(-4;-2;-5)$	$(2;4;-3)$	$x-3y+2z-8=0$
27	$(1;2;-6)$	$(-4;-4;1)$	$(3;1;4)$	$x-9y+3z-1=0$
28	$(1;4;2)$	$(-5;-1;6)$	$(-3;4;-2)$	$x+3y-4z-5=0$
29	$(2;1;-5)$	$(-5;-2;2)$	$(-4;1;2)$	$x-4y+5z-1=0$
30	$(2;2;-6)$	$(-5;-4;2)$	$(-4;2;4)$	$-3x+4y+2z-5=0$

Собеседование 3 Базовый уровень

Тема 6. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

18. Дайте определения числового ряда, общего члена ряда. Как определяется сумма числового ряда?
19. Какой ряд называется сходящимся, а какой расходящимся? Приведите примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов.
20. Введите понятие остатка числового ряда.
21. Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости числового ряда.
22. Сформулируйте признаки сравнения знакоположительных рядов.
23. Когда для исследования числовых рядов может быть применен признак Даламбера? Сформулируйте этот признак.
24. Когда согласно с радикальным признаком Коши сходимости числовой ряд сходится, а когда расходится?
25. Сформулируйте интегральный признак Коши сходимости знакоположительных рядов.
26. Определите знакочередующийся ряд.
27. Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.
28. Дайте определение степенного ряда. Запишите ряд по степеням x .
29. Введите понятия область сходимости (интервал сходимости), радиус сходимости степенного ряда.
30. Какие способы нахождения радиуса и интервала сходимости Вы знаете?
31. Запишите формулу Коши-Адамара для нахождения радиуса сходимости степенного ряда.
32. Дайте определение ряда Тейлора и ряда Маклорена.
33. Вспомните разложения в степенной ряд функций $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$,
 $y = (1+x)^n$, $y = \frac{1}{1+x}$.
34. Расскажите о приближенном вычислении значений функций с помощью степенных рядов.

Повышенный уровень

Тема 6. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

12. Сформулируйте основные свойства рядов.
13. Приведите пример какого-нибудь числового ряда, для которого выполнено необходимое условие сходимости, но ряд расходится.
14. Какой из рассмотренных признаков сходимости знакоположительных рядов является самым мощным?
15. Дайте определение суммы числового ряда. Какой способ вычисления суммы числового ряда Вы можете предложить.
16. Дайте определение знакпеременного ряда.
17. Введите определения абсолютно сходящихся и условно сходящихся рядов. Приведите примеры.
18. Дайте определение функционального ряда и его области сходимости.
19. Сформулируйте теорему Абеля о сходимости степенных рядов.
20. Приведите примеры рядов, сходящихся
21. а) в одной точке; б) на всей числовой прямой;
22. в) на некотором конечном интервале.

23. Выведите разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена и укажите интервалы сходимости полученных рядов.
24. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании степенных рядов.
25. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании степенных рядов.
26. Выведите разложения в степенной ряд для функций $y = \sqrt{1+x}$, $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \arcsin x$, $y = \arctg x$, $y = \ln(1+x)$.
27. Как определить погрешность приближения при вычислении приближенного значения функции? Какие теоремы по этому вопросу Вы знаете?
28. Приведите примеры вычисления «неберущихся» интегралов с помощью рядов.
29. Расскажите о приближенном вычислении определенных интегралов и определении погрешности приближения.
30. Как можно воспользоваться разложением функций в степенной ряд для раскрытия неопределенности при вычислении пределов функций?

ИДЗ по теме «Ряды»

1. Найдите область сходимости степенных рядов

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{c^n \sqrt{n}} x^n; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{a^n \cdot (n+b)}; \text{ в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(an-1)!}; \text{ г) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an^2 + bn + c}{cn^2 - b} \right)^{kn} \cdot (x-b)^n.$$

При решении задач коэффициенты a, b, c, k, m выбрать из таблицы в соответствии с номером варианта.

ВАРИАНТ	a	b	c	k	m
1	1	2	3	2	1
2	2	3	5	3	2
3	3	4	7	4	3
4	4	5	9	1	4
5	5	2	11	2	5
6	6	3	3	3	6
7	7	4	5	4	-1
8	8	5	7	1	-2
9	1	2	9	2	-3
10	2	3	11	3	-4
11	3	4	2	4	-5
12	4	5	4	1	-6
13	5	2	6	2	1
14	6	3	8	3	2
15	7	4	10	1	3
16	8	5	2	2	4
17	1	3	4	3	5
18	2	4	6	1	6
19	3	5	8	2	-1
20	4	1	10	3	-2
21	5	-3	3	4	-3
22	6	-4	6	1	-4
23	7	-5	9	2	-5
24	8	-1	2	3	-6
25	1	-3	5	4	-1

26	2	-4	8	1	-2
27	3	-5	11	2	-3
28	4	-2	1	3	-4
29	5	-3	4	1	-5
30	6	-4	7	2	-6

Собеседование 4 Базовый уровень

Тема 10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Дайте определение дифференциального уравнения, его порядка. Запишите общий вид дифференциального уравнения первого и n -го порядков.
2. Введите понятия общего и частного решений дифференциального уравнения. Расскажите, как из общего решения получить частное решение уравнения. Как по общему виду общего решения дифференциального уравнения определить его порядок.
3. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися и разделенными переменными. Расскажите порядок решения уравнения с разделяющимися переменными.
4. Введите определение однородной функции и дайте определение однородного дифференциального уравнения первого порядка. Расскажите, как свести решение однородного дифференциального уравнения к решению уравнения с разделяющимися переменными.
5. Дайте определение линейного дифференциального уравнения первого порядка, запишите его общий вид.
6. Расскажите о решении линейного дифференциального уравнения первого порядка. Укажите, какая замена используется при его решении, к каким типам уравнений сводится решение линейного уравнения в результате сделанной замены.
7. Дайте определение дифференциального уравнения в полных дифференциалах. Почему это уравнение носит подобное название.
8. Расскажите, как найти общее решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах.
9. Дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков. Определение.
10. Общее решение дифференциального уравнения n -го порядка, отыскание частного решения, отвечающего заданным условиям.
11. Уравнения, решаемые n -кратным интегрированием.
12. Какие формы записи комплексного числа Вы знаете? Дайте их определения.
13. Определите следующие понятия: действительная и мнимая части комплексного числа, мнимая единица, коэффициент при мнимой части, сопряженное комплексное число, модуль и аргумент комплексного числа.
14. Определите действия сложения, вычитания, умножения и деления над комплексными числами в алгебраической форме. Докажите записанные Вами правила. Какое свойство сопряженных комплексных чисел используется при делении?
15. Дайте определение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, запишите его общий вид.
16. Дайте определение линейно независимых функций. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.
17. Запишите вид общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в зависимости от корней характеристического уравнения.

18. Дайте определение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, запишите его общий вид.
19. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
Расскажите, как найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка. Заполните таблицу, приведенную ниже.

• $f(x)$	• Особенност и характерного уравнения $k^2+pk+q=0$	• Вид частного решения
• $P_n(x)$	•	•
• ae^{bx}	•	•
• $a\cos \omega x + b\sin \omega x$	•	•

20. Понятие о системах дифференциальных уравнений.
21. Методы решения систем дифференциальных уравнений.
22. Дифференциальные уравнения в химии.
23. Приложение дифференциальных уравнений в биологии.
24. Дифференциальные уравнения в медицине.

Повышенный уровень

Тема 10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Расскажите о задачах, приводящих к понятию дифференциального уравнения.
- Приведите примеры дифференциальных уравнений из разных областей естествознания.
- Расскажите, какие дифференциальные уравнения и как сводятся к однородным дифференциальным уравнениям.
- Запишите дифференциальное уравнение линейное по переменной x .
- Дайте определение дифференциального уравнения Бернулли. Как свести уравнение Бернулли к линейному дифференциальному уравнению. Расскажите о методе решения уравнения Бернулли.
- В каких случаях уравнение может быть сведено к уравнению в полных дифференциалах?
- Дифференциальные уравнения, не содержащие независимой переменной.
- Дифференциальные уравнения, не содержащие функции.
- Однородные дифференциальные уравнения.
- Как перевести комплексное число из алгебраической формы записи в тригонометрическую форму и обратно?
- Определите действия умножения, деления, возведения в целую степень и извлечение корня n -ой степени ($n \in \mathbb{N}$) для комплексных чисел записанных в тригонометрической и показательных формах. Укажите роль корней n -ой степени из единицы и их геометрическую интерпретацию.
- Докажите формулы для умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме.
- Расскажите о методе вариации произвольных постоянных для нахождения общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

14. Сформулируйте теорему о наложении решений для линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка. Как она используется?
15. Линейная однородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
16. Приложение систем дифференциальных уравнений при решении задач естествознания.
17. Дифференциальные уравнения в частных производных и их приложение.

ИДЗ по теме «Дифференциальные уравнения»

Выполнить следующие задания, выбрав соответствующие варианту величины из представленной ниже таблицы.

1. Найти общее решение дифференциального уравнения $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.
2. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = 0$, если корни характеристического уравнения:
 - а) $k_1 = a, k_2 = b$;
 - б) $k_1 = a, k_2 = 0$;
 - в) $k_1 = k_2 = b$;
 - г) $k_1 = a + bi, k_2 = a - bi$
 Записать общее решение для каждого из составленных уравнений.
3. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения
 - а) $y'' + py' + qy = 0$;
 - б) $y'' + py' = 0$;
 - в) $y'' + qy = 0$;
 - г) $y'' - qy = 0$.
4. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$, отвечающего заданным начальным условиям $y(0) = C_1, y'(0) = C_2$.
5. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения
 - а) $y'' + py' + qy = f_1(x)$, где $f_1(x) = ax^2 + bx + p$;
 - б) $y'' + py' = f_2(x)$, где $f_2(x) = ax + b$;
 - в) $y'' - py' = f_3(x)$, где $f_3(x) = a \cdot e^{px}$;
 - г) $y'' + qy = f_4(x)$, где $f_4(x) = a \cdot \cos ax + b \sin ax$;
 - д) $y'' - qy = f_1(x) + f_3(x)$.
6. Найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = f_2(x) + f_4(x)$, отвечающее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
7. Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' = g(x)$.

ВАРИАНТ	$M(x, y)$	$N(x, y)$				p	q		C_2	$g(x)$
1	$x^2y - 2y$	$3xy$								$2xe^{-x}$
2	$5xy - y^2$	$2x^2 + y^2$								$(x-1) \cdot e^{2x}$
3	$x - y$	$x + 3y$			0					$(2x+5) \cdot e^x$
4	$3xy$	$5x^2 + 2y^2$			0	6				$x \cdot \cos 3x$
5	$3x + y$	$2x - y + 5$								$x \cdot \sin x$

					6	5				
6	$x - y - 4$	$2x - 3y + 2$	1		0	6				$2x \cdot \cos 2x$
7	$5x^2 - x^2y$	$2x + xy$	2		5		1			$(x - 1) \sin 2x$
8	$x + 2y$	$3x - 4y$	3				2			$(3x + 5) \cdot \cos x$
9	$5xy + 2y$	$2xy$	4		4		5			$x^2 e^x$
10	$3x - 7y$	$2x - y$	5		10					$2x \cdot e^{5x}$
11	$5x - 2y$	$2x + 7y$					4			$(x - 3) \cdot e^{-2x}$
12	$xy^2 - 3xy$	$2xy$			6					$(5x + 6) \cdot e^{2x}$
13	$2x - y$	$4x + 5y$			10	6				$(x - 7) \cdot e^{-x}$
14	$x - 3y - 2$	$x + y$			7	6				$(2x + 5) \sin 3x$
15	$2x^2y$	$3xy - x$			17	6				$(x + 2) \cdot \cos 8x$
16	$5x + y$	$2x - 3y$	1			6				$(3 - 2x) \cdot e^{-5x}$
17	$3y^2 - xy^2$	$2xy + y$	2		8	6				$(1 - x) \cdot e^{-2x}$
18	$5x - 8y$	$x + y$	3		26	5				$(1 + 3x) \cdot e^{5x}$
19	$2xy + y$	$3xy$	4		0	5	2			$8x \cdot \cos 4x$
20	$x - 5y$	$2x + y$	5		10	5	4			$x \sin 7x$
21	$3xy$	$x^2 + 5y^2$			7	6	3			$(x - 5) \cos x$
22	$8xy$	$x^2 - 8y^2$			37	6	2			$(x + 5) \sin x$
23	$7x - y$	$x + y$			20	6	4			$(3x - 4) \cos 8x$
24	$6x + 8y$	$2x + 3y$			5	6				$(x - 2) \sin 3x$
25	$2x + 2y - 5$	$x + y + 3$			15	6				$(4x - 1) \cdot e^{-x}$
26	$2x^2 + 5y^2$	$xy - y^2$	1		2	6				$(4x + 3) \cdot e^x$
27	$7xy + x^2$	$x^2 + y^2$	2		12	6	1			$(3 - x) \cdot e^{-2x}$
28	$8xy - y$	$2x^3 - x^3y$								$(5 - 3x) \cdot e^{-3x}$

			3			5	2	2		
29	$x + 3y$	$x - 2y + 5$	4		8	5				$(1 - x) \sin 5x$
30	$3x + 5y$	$2x - 3y$	5		4	32				$(2 - 4x) \cos 2x$

Собеседование 5 Базовый уровень

Тема 11. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. Связь между теорией вероятностей и математической статистикой.
2. Классическое определение вероятности события. Свойства вероятности.
3. Геометрическое определение вероятности события.
4. Относительная частота наступления события.
5. Статистическое определение вероятности.
6. Основные правила комбинаторики: правило суммы, правило произведения.
7. Перестановки без повторений, примеры.
8. Сочетания без повторений, примеры.
9. Размещения без повторений, примеры.
10. Приложение комбинаторики к определению вероятности события.
11. Задача о безвозвратной выборке.
12. Классификация событий: совместные и несовместные, зависимые и независимые события.
13. Теорема о сумме несовместных событий.
14. Теорема о сумме совместных событий.
15. Теорема о произведении независимых событий.
16. Теорема о произведении зависимых событий.
17. Формула полной вероятности.
18. Формула Байеса.
19. Схема Бернулли. Формула Бернулли, условия её применения.
20. Повторение испытаний: локальная теорема Лапласа, условия ее применения.

Повышенный уровень

Тема 11. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. Исторический обзор развития теории вероятностей как науки. Основные разделы современной теории вероятностей.
 2. В чём ограниченность классического определения события?
 3. В каком случае применяется геометрическое определение события? Приведите примеры.
 4. Перечислите свойства относительной частоты.
 5. Исторический обзор развития теории вероятностей как науки. Основные разделы современной теории вероятностей.
 6. Связь между теорией вероятностей и математической статистикой.
 7. Перестановки с повторениями, примеры.
 8. Сочетания с повторениями, примеры.
 9. Размещения с повторениями, примеры.
 10. Приведите примеры зависимых и независимых событий.
 11. Приведите примеры совместных и несовместных событий.
 12. Докажите формулу полной вероятности.
 13. Выведите формулу Байеса.
 14. Повторение испытаний: интегральная теорема Муавра-Лапласа, условия её применения.
 15. Повторение испытаний: формула Пуассона, условие её применения.
- Допуском к собеседованию является выполнение следующего ИДЗ.

**ИДЗ по теме «Теория вероятностей:
Случайные события и случайные величины»**

Решить предложенные задачи, выбрав параметры a, b, c, x, y, p_1, p_2 из приведенной ниже таблицы в соответствии с номером варианта.

1. В урне a белых и b черных шаров. Найти вероятности следующих событий

A – при извлечении одного шара вынули белый шар;

B_1 – при извлечении двух шаров вынули два черных шара;

B_2 -при извлечении двух шаров вынули разноцветные шары;

B_3 - при извлечении двух шаров вынули разноцветные шары;

C_1 - при извлечении четырех шаров вынули только один белый шар;

C_2 - при извлечении четырех шаров вынули хотя бы один белый шар;

D_1 - при извлечении пяти шаров вынули три черных шара;

D_2 - при извлечении пяти шаров вынули не менее двух черных шаров.

2. В первой урне a белых, b красных шаров, c – черных шаров, во второй урне c красных шаров, b – черных. Из первой урны во вторую переложили

а) один шар;

б) два шара.

Какова вероятность, что после этого из второй урны извлекли красный шар?

3. В условии предыдущей задачи из первой урны во вторую переложили один шар. После этого из второй урны извлекли черный шар. Найти вероятность событий

а) во вторую урну переложили белый шар;

б) во вторую урну переложили черный шар;

в) во вторую урну переложили красный шар.

4. В пакете содержится 100 семян петунии. Всхожесть семян составляет 80%. Найти вероятности событий

а) при высевании всех семян взойдет ровно x растений;

б) при высевании всех семян взойдет от x до y растений.

5. Найти числовые характеристики дискретной случайной величины x , закон распределения которой задан таблицей

x	1	2	3	4	5
p	0,1	0,05	?	p_1	p_2

ВАРИАНТ	a	b	c	x	y	p_1	p_2
1	6	8	16	61	86	0,1	0,2
2	7	10	10	62	87	0,15	0,15
3	8	12	14	63	88	0,2	0,1
4	9	16	12	64	89	0,05	0,25
5	10	6	8	65	90	0,1	0,05
6	11	7	6	66	91	0,2	0,25
7	12	9	15	67	92	0,1	0,25
8	14	11	11	68	93	0,15	0,1
9	15	5	9	69	94	0,15	0,2
10	16	15	7	70	95	0,1	0,1
11	8	16	6	71	88	0,1	0,15

12	10	10	7	72	90	0,1	0,3
13	12	14	8	73	90	0,05	0,05
14	16	12	9	74	90	0,05	0,1
15	6	8	10	75	92	0,05	0,2
16	7	6	11	76	92	0,05	0,3
17	9	15	12	77	92	0,05	0,4
18	11	11	14	78	93	0,15	0,05
19	5	9	15	79	93	0,15	0,25
20	15	7	16	80	93	0,15	0,3
21	16	6	8	81	94	0,15	0,35
22	10	7	10	82	94	0,15	0,4
23	14	8	12	83	94	0,2	0,05
24	12	9	16	84	95	0,2	0,15
25	8	10	6	85	95	0,2	0,2
26	6	11	7	86	95	0,2	0,3
27	15	12	9	87	96	0,25	0,1
28	11	14	11	88	96	0,25	0,2
29	9	15	5	89	96	0,25	0,3
30	7	16	15	60	96	0,3	0,1

Собеседование 6

Базовый уровень

Тема 13. ОСНОВЫ ВЫБОРОЧНОГО МЕТОДА

1. Дайте определение генеральной и выборочной совокупностей. Назовите основные характеристики генеральной и выборочной совокупности.
2. Что такое объём выборки, объём генеральной совокупности?
3. Как построить полигон и гистограмму частот?
4. Расскажите о точечных и интервальных оценках параметров распределения.
5. В чём заключается метод моментов точечной оценки параметров распределения?
6. Расскажите о методе наибольшего правдоподобия точечной оценки параметров распределения.
7. Как строят функцию правдоподобия для дискретного и для непрерывного распределения?
8. Что такое логарифмическая функция правдоподобия?
9. Расскажите о вычислении выборочной средней и выборочной дисперсии с помощью метода произведений.
10. Как проверить правильность заполнения таблицы при вычислении сводных характеристик выборки с помощью метода произведений?
11. Расскажите о вычислении выборочной средней и выборочной дисперсии с помощью метода сумм.

Тема 14. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОРРЕЛЯЦИИ И РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

1. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимости.
2. Коррелированность и зависимость случайных величин.
3. Условные средние. Выборочные уравнения регрессии. Линейная регрессия. Прямые линии среднеквадратической регрессии.
4. Отыскание параметров выборочного уравнения прямой линии среднеквадратической регрессии по несгруппированным данным.
5. Простейшие случаи криволинейной корреляции.
6. Ранговая корреляция, коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла и их вычисление.

Тема 15. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

1. Дайте определение статистической гипотезы и статистического критерия.
2. Расскажите о порядке проверки статистической гипотезы.
3. Объясните, как проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Как называется критерий её проверки?
4. Какой тип критической области при проверке гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности?

Собеседование 6

Повышенный уровень

Тема 13. ОСНОВЫ ВЫБОРОЧНОГО МЕТОДА

1. Расскажите, в каком случае лучше строить гистограмму, а в каком случае полигон?
2. Объясните, как получить на основе статистических данных распределение с равноотстоящими вариантами.
3. Как с помощью метода моментов оценить параметры нормального распределения?
4. Как с помощью метода моментов оценить параметры показательного распределения?
5. Оцените с помощью метода моментов параметры биномиального распределения.
6. С помощью метода наибольшего правдоподобия оцените параметры

- перечисленных законов распределения в вопросах 1-3.
7. Расскажите о построении нормальной кривой на основе выборочных данных.
 8. Как можно рассчитать асимметрию и эксцесс методом сумм и методом произведений?
 9. Что показывают характеристики, перечисленные в предыдущем вопросе?
 10. Как проверить правильность заполнения таблицы при вычислении моментов 1-го – 4-го порядков методом сумм?
- Допуском к собеседованию б является выполнение следующего ИДЗ.

ИДЗ по теме «Вычисление сводных характеристик выборки. Проверка статистических гипотез»

На опыте было получено 200 значений одного и того же признака, что составило выборочную совокупность.

Номера значений признака	Значения признака, полученные на опыте									
1 – 10	6 3	8 2	8 4	8 8	9 1	7 1	7 2	7 7	8 3	7 7
11 – 20	8 7	7 9	9 6	7 9	7 4	8 5	9 6	9 5	9 6	9 1
21 – 30	8 7	8 8	8 6	8 9	7 3	9 2	8 6	1 03	9 6	8 7
37 – 40	8 1	8 3	9 4	7 5	7 3	8 4	9 5	9 6	8 9	8 8
41 – 50	9 5	9 0	8 5	9 2	8 5	9 0	9 1	9 7	8 7	8 9
51 – 60	9 0	9 2	8 2	7 9	8 5	8 2	7 6	8 4	8 3	7 8
61 – 70	6 9	8 0	7 9	7 8	7 6	9 0	9 4	7 8	7 9	8 8
71 – 80	9 5	8 1	7 5	9 5	8 3	7 3	9 5	9 3	7 9	8 5
81 – 90	9 6	8 5	7 4	9 4	8 6	7 9	8 4	9 2	9 5	7 8
91 – 100	8 4	8 1	6 6	9 1	8 6	8 7	9 6	8 9	9 0	7 9
101 – 110	8 2	7 9	8 8	8 3	9 0	9 2	8 0	8 1	8 5	8 1
111 – 120	8 1	9 5	8 0	7 5	8 4	8 6	9 5	8 9	8 4	7 7
121 – 130	8 4	9 6	8 6	9 4	8 5	8 2	7 9	7 5	9 4	6 6
131 – 140	8 8	7 9	8 9	7 5	9 2	7 9	7 8	9 5	8 4	9 1
141 – 150	9 1	7 4	7 3	7 3	8 5	8 5	7 6	8 3	7 6	8 6
151 – 160	7 1	8 5	9 2	8 4	9 0	8 2	9 0	7 3	8 9	8 7
161 – 170	7 2	9 6	8 6	9 5	9 1	7 6	9 4	9 5	8 4	9 6
171 –	7	9	1	9	9	8	7	9	9	8

180	7	5	03	6	7	4	8	3	2	9
181 –	8	9	9	8	8	8	7	7	9	9
190	3	6	6	9	7	3	9	9	3	0
191 –	7	9	8	8	8	7	8	8	7	7
200	7	1	7	8	9	8	8	5	8	9

1. Составить распределение равноотстоящих вариантов, разбив всю совокупность на 7 интервалов, используя 100 данных из 200 предложенных (согласно номера варианта).

2. Построить полигон и гистограмму частот.

3. Методом произведений найти $\bar{x}_B$, D_B , σ_B .

4. Методом сумм найти $\bar{x}_B$, D_B , σ_B .

5. Считая, что выбранные данные взяты из нормально распределенной генеральной совокупности X с неизвестными параметрами a и σ , найти:

а) методом моментов точечные оценки неизвестных параметров a и σ нормального распределения;

б) методом наибольшего правдоподобия точечные оценки параметров a и σ

нормального распределения, плотность которого $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ (указание:

составить и решить систему $\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0. \end{cases}$).

6. Считая, что выборочные 100 данных взяты из нормально распределенной генеральной совокупности X , определите доверительные интервалы для оценки неизвестного математического ожидания a генеральной совокупности с заданной надежностью $\gamma = 0,95$, используя полученные Вами значения $\bar{x}_B$ и σ_B .

7. Построить нормальную кривую по полученному распределению. Найти асимметрию и эксцесс эмпирического распределения.

8. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости

а) 0,05;

б) 0,01

проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объема $n = 100$.

Вариант	Номера значений признака	Вариант	Номера значений признака
1	1 – 100	16	41 – 90, 141 – 190
2	11 – 110	17	51 – 100, 151 – 200
3	21 – 120	18	31 – 50, 101 – 180
4	31 – 130	19	41 – 60, 121 – 200
5	41 – 140	20	51 – 70, 11 – 190
6	51 – 150	21	21 – 50, 101 – 170
7	61 – 160	22	31 – 60, 111 – 180
8	71 – 170	23	41 – 70, 121 – 190
9	81 – 180	24	51 – 80, 131 – 200
10	91 – 190	25	61 – 90, 111 – 180
11	101 – 200	26	71 – 100, 121 – 190

12	1 – 50, 101 – 150	27	81 – 110, 131 – 200
13	11 – 60, 11 – 160	28	21 – 60, 111 – 170
14	21 – 80, 121 – 150	29	31 – 70, 121 – 180
15	1 – 50, 131 – 180	30	41 – 80, 131 – 190

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка **"отлично"** выставляется, если студент при ответе на вопросы как базового так и повышенного уровня показывает глубокое и всестороннее знание предмета, обязательной и дополнительной литературы, аргументировано и логически стройно излагает материал, пользуясь математической символикой, может применять знания для анализа конкретных ситуаций, свободно ориентируется в межпредметных связях.

Оценка **«хорошо»** ставится, если при ответе на вопросы базовой части студент показывает знание предмета, обязательной литературы, знакомстве с дополнительной литературой, аргументировано излагает материал, умеет применять знания для анализа конкретных ситуаций, однако незначительно нарушает последовательность изложения материала, дает недостаточно полное, хотя и верное определение понятий.

Оценка **«удовлетворительно»** ставится, если студент при ответе на вопросы базовой части показал, что он в основном знает предмет, обязательную литературу, может практически применять свои знания, но программный материал излагает фрагментарно и непоследовательно, допускает отдельные ошибки и погрешности при применении математической символики и понятий, слабо ориентируется в межпредметных связях;.

Оценка **«неудовлетворительно»** ставится, если студент не отвечает на предлагаемые ему вопросы базовой или его ответ показывает, что не усвоено основное содержание предмета, обнаруживается незнание большей части учебного материала, допускаются грубые ошибки при формулировке теорем, определении основных понятий, неправильно используется математическая символика.

2. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя собеседование по представленным вопросам. Допуском к собеседованию является правильное выполнение не менее 60% заданий ИДЗ, по темам представленным к каждому собеседованию. Каждому студенту предлагается по одному вопросу из каждой темы. Сначала студент отвечает на вопросы базового уровня. При успешном ответе ему предлагается один-два вопроса из вопросов повышенного уровня, что позволяет преподавателю определить уровень владения материалом.

Предлагаемые студенту задания позволяют проверить компетенции УК-1. Для подготовки к данному оценочному мероприятию необходимо прочитать лекционный материал, выполнить ИДЗ и сдать их на проверку не позднее чем за неделю до контрольного мероприятия, найти ответы на поставленные вопросы, изучить дополнительную литературу, установить взаимосвязи между изучаемыми понятиями, запомнить основные определения, свойства, теоремы, продумать, где они могут применяться. Рекомендуется готовиться к данному контрольному мероприятию в течение семестра, разбирая теоретические задания для оценки сформированности компетенций к каждому практическому занятию, вовремя выполняя индивидуальные домашние задания (ИДЗ). Эти задания предлагаются в УМК дисциплины «Математика», представленном на кафедре Математического анализа, алгебры и геометрии.

При подготовке к ответу студенту разрешается пользоваться своими тетрадями с ИДЗ, никакими другими справочными материалами пользоваться не разрешается. Для подготовки к ответу на каждый вопрос отводится время до 3-5 минут, в течение которого студент может записать план своего ответа. Для подготовки к ответу на вопросы повышенного уровня предлагается дополнительное время.

Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой дисциплины. При проверке усвоения этого материала производится выявление полноты, прочности усвоения студентами теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

При оценке в первую очередь учитываются показанные студентами знания и умения (их полноту, глубину, прочность, использование). Оценка также зависит от наличия и характера погрешностей. Среди погрешностей выделяют ошибки и недочеты. Погрешность считается ошибкой, если она свидетельствует о том, что студент не овладел основными знаниями, умениями, указанными в программе.

К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или о отсутствии знаний не считающихся основными в соответствии с программой. Недочетами также являются: погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного студентом задания или способа его выполнения, неаккуратная запись, небрежное выполнение чертежа, графика.