

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания
по выполнению практических работ по дисциплине
Математика

Модуль: Математическая и естественно-научная подготовка (ядро СКФУ
химическая направленность)

Направления подготовки 04.03.01 «Химия»
Направленность (профиль) Химия окружающей среды, химическая экспертиза
и экологическая безопасность

Ставрополь
2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Раздел 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Практическое занятие № 1 «Основные элементарные функции, их свойства и графики»

Практическое занятие № 2 «Предел функции. Основные теоремы о пределах»

Практическое занятие № 3 «Замечательные пределы. Бесконечно малые, бесконечно большие и неограниченные функции»

Практическое занятие № 4 «Непрерывные функции и их свойства. Точки разрыва и их классификация»

Практическое занятие № 5 «Понятие производной. Правила дифференцирования»

Практическое занятие № 6 «Дифференцирование сложной функции»

Практическое занятие № 7 «Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Функции заданные неявно и параметрически и их дифференцирование»

Практическое занятие № 8 «Дифференциал функции, применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков»

Практическое занятие № 9 «Приложения производной: уравнение касательной и нормали к плоской кривой, правила Лопиталя, формула Тейлора»

Практическое занятие № 10. «Применение производной к исследованию функций. Построение графиков функций»

Практическое занятие № 11. Итоговое занятие по разделу 1

Раздел 2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

Практическое занятие № 12. «Высказывания, логические операции над ними».

Практическое занятие № 13. «Понятие множества, способы задания множеств. Операции над множествами»

Практическое занятие № 14. «Основные числовые множества, их определения и свойства. Множество натуральных чисел, аксиомы Пеано, метод математической индукции»

Практическое занятие № 15. «Комплексные числа, алгебраическая форма записи»

Практическое занятие № 16. «Комплексные числа, тригонометрическая и показательная форма записи»

Практическое занятие № 17. Матрицы и определители

Практическое занятие № 18. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Практическое занятие № 19. Итоговое занятие по разделу 2.

Раздел 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ

ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Практическое занятие № 20. *«Первообразная функция, неопределенный интеграл и его свойства. Непосредственное интегрирование»*

Практическое занятие № 21. *«Методы интегрирования в неопределенном интеграле»*

Практическое занятие № 22. *«Интегрирование рациональных функций»*

Практическое занятие № 23. *«Интегрирование иррациональных функций»*

Практическое занятие № 24. *«Интегрирование трансцендентных функций»*

Практическое занятие № 25. *«Системы координат на плоскости и в пространстве»*

Практическое занятие № 26. *«Скалярные и векторные величины»*

Практическое занятие № 27. *«Прямая линия на плоскости»*

Практическое занятие № 28. *«Канонические уравнения линий второго порядка»*

Практическое занятие № 29. *«Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду»*

Практическое занятие № 30-31. *«Плоскость и прямая в пространстве»*

Практическое занятие № 32. *«Поверхности второго порядка»*

Практическое занятие № 33. *«Понятие определенного интеграла. Интегрирование по частям и замена переменной в определенном интеграле»*

Практическое занятие № 34. *«Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования, интегралы от неограниченных функций»*

Практическое занятие № 35. *«Приложения определенного интеграла»*

Практическое занятие № 36. *«Итоговое занятие по разделу 3»*

Раздел 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Практическое занятие № 37. *«Функции нескольких переменных. Основные определения»*

Практическое занятие № 38. *«Дифференцирование функции нескольких переменных. Частные производные первого и более высоких порядков»*

Практическое занятие № 39. *«Дифференцирование функции нескольких переменных. Производные сложной функции. неявные функции и их дифференцирование»*

Практическое занятие № 40 «Полный дифференциал, его свойства, вычисление»

Практическое занятие № 41 «Полный дифференциал функции нескольких переменных и его применение к приближенным вычислениям»

Практическое занятие № 42 «Экстремум функции двух переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума»

Практическое занятие № 43 «Итоговое занятие по разделу 4»

Раздел 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Практическое занятие № 44 «Двойной интеграл: определение, свойства, вычисление»

Практическое занятие № 45 «Двойной интеграл: замена переменных, переход к полярной системе координат, приложения»

Практическое занятие № 46 «Тройной интеграл: определения, свойства, вычисление»

Практическое занятие № 47 «Тройной интеграл: замена переменных, переход к цилиндрической и сферической системам координат, приложения»

Практическое занятие № 48 «Криволинейные интегралы по длине дуги и по координатам, их вычисление и приложения»

Практическое занятие № 49 «Поверхностные интегралы первого и второго рода, их вычисление»

Раздел 6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Практическое занятие № 50 «Скалярные поля. Производная по направлению. Градиент скалярного поля»

Практическое занятие № 51 «Векторные поля. Поток и производная по направлению векторного поля»

Практическое занятие № 52 «Векторные поля. Дивергенция, ротор векторного поля. Циркуляция векторного поля»

Практическое занятие № 53 «Основные интегральные формулы анализа: формула Грина»

Практическое занятие № 54 «Основные интегральные формулы анализа: формула Остроградского-Гаусса, формула Стокса»

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения данной дисциплины является освоение студентами основ математического аппарата, необходимого для приобретения ими соответствующих компетенций (УК-1, ОПК-3) в формировании способности использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности.

Достижение этой цели предполагает

формирование математической культуры студентов: умения логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения практических задач;

понимание и восприятие основных понятий математики;

освоение основ современного математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач, связанных с применением математических методов в неорганической химии, органической и физической химии, оптике, атомной физике, микробиологии, вирусологии и других дисциплинах естественнонаучного содержания;

создание условий для развития профессионального творчества и опыта самостоятельной деятельности по усвоению содержания математического образования.

К числу задач освоения курса можно отнести формирование минимума фундаментальных математических знаний в области линейной алгебры и аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчисления, обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, теории разложения функций в ряд;

применение основных понятий, идей и методов фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач;

применение численных методов решения базовых математических задач в практической деятельности;

умение находить, анализировать и контекстно обрабатывать научно-техническую информацию.

В результате изучения дисциплины «Математика» студент должен **Знать:**

основные понятия и результаты по алгебре: теория матриц, системы линейных уравнений;

основные понятия аналитической геометрии, определения и свойства геометрических объектов, их уравнения, формулировки утверждений, возможные сферы их приложений;

основные понятия, определения и свойства объектов математического анализа: функция, предел, непрерывность функции, производная функции, первообразная функция и неопределенный интеграл, определенный интеграл, двойной, тройной и криволинейные интегралы, численное интегрирование, возможные сферы их приложения в других областях

математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

Уметь:

решать системы линейных уравнений, вычислять определители, выполнять действия над матрицами;

составлять уравнения прямой и плоскости, кривых и поверхностей второго порядка, приводить уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определять взаимное расположение перечисленных геометрических объектов, решать задачи вычислительного и теоретического характера на плоскости и в трехмерном евклидовом пространстве;

решать задачи математического анализа: исследовать функции, опираясь на аппарат дифференциального исчисления, и строить их графики, вычислять пределы функций, находить производные и дифференциалы функций, применять их в приближенных вычислениях; вычислять неопределенные, определенные, кратные и криволинейные интегралы, применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания, решать дифференциальные уравнения;

Владеть:

аналитическими методами высшей алгебры для исследования геометрических объектов.

аппаратом математического анализа, методами доказательства утверждений, навыками применения этого в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

Раздел 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Практическое занятие № 1

Тема занятия «Основные элементарные функции, их свойства и графики»

Цель занятия: Введение понятия функции, проведение классификации функций, повторение свойств и графиков основных элементарных функций, известных из школьного курса.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение функции.
2. Что называется областью определения функции?
3. Что называется областью значений функции?
4. Дайте определение графика функции $y=f(x)$.
5. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции.
6. Определите функцию обратную по отношению к функции $y=f(x)$.
7. Дайте определение возрастающей и убывающей функции.
8. Какая функция называется монотонной?
9. Дайте определение четной и нечетной функции.
10. Какая функция называется периодической?
11. Определите нули функции.
12. Что называется промежутком знакопостоянства функции?
13. Какая функция называется ограниченной?
14. Какие Вы знаете способы задания функций?
15. Определите целую рациональную функцию.
16. Какая функция называется линейной? Что является ее графиком?
17. Какая функция называется квадратичной? Что является ее графиком?
18. Определите дробно-рациональную функцию.
19. Какую функцию называют степенной? Графики каких степенных функций Вы можете построить?
20. Определите показательную функцию. Постройте в тетради графики функций $y = 2^x$, $y = (1/2)^x$.
21. Какую функцию называют логарифмической? Постройте в тетради графики функций $y = \log_2 x$, $y = \lg x$, $y = \log_{1/2} x$.
22. Какие тригонометрические функции Вы знаете? Постройте графики основных тригонометрических функций в тетради.
23. Назовите обратные тригонометрические функции. Постройте их графики в рабочей тетради.
24. Вспомните основные преобразования графиков функций (параллельный перенос на вектор, растяжение или сжатие от координатных осей), приведите примеры.

**Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями
Задания, решаемые в аудитории**

1. Найдите область определения функции:

а) $y = \ln \frac{1}{(x^2 - 4x + 3)(x - 2)^2}$; б) $y = \sqrt{e^{x-2} - 2}$.

2. Найдите область изменения функции

а) $y = \sin(2x + 1)$; б) $y = 5\cos(3x - 2)$; в) $y = e^{x^2} - 1$.

3. Исследуйте функции на четность:

а) $y = \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 4}$; б) $y = x - \operatorname{tg} 3x$; в) $y = \frac{x+5}{x-5} + \frac{x-5}{x+5}$;

г) $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

4. Определите нули и промежутки знакопостоянства функции:

а) $y = \frac{2x^2 - 3}{x + 4}$; б) $y = e^{x^2 - 2x + 2}$; в) $y = \lg(x - 3) - \lg(x + 2)$.

5. Выделите промежутки, на которых существуют обратные функции для функции и найдите их

а) $f(x) = 2x + 6$; б) $f(x) = x^4 - 2x^2$.

6. С помощью геометрических преобразований постройте график функции $y = -\left|2\sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)\right| + 3$ исходя из графика функции $y = \sin x$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите области определения функций:

а) $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$; б) $y = \cos(3x - 1) + e^{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$;

в) $y = \sqrt{\ln(x^2 - 12x + 11)}$.

2. Найдите области значения функций:

а) $y = x^2 - 6x + 5$; б) $y = \lg(x^2 - 5x + 6)$.

3. Исследуйте данные функции на четность:

а) $y = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 2x}$; б) $y = x^4 - 40x + 5$; в) $y = x^2 + 1 + \cos 2x$.

4. Определите промежутки знакопостоянства функций:

а) $y = x^2 - 5x + 4$; б) $y = \sqrt{(x^2 - x - 2)}$.

5. Найдите функции обратные функциям:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 5, x \geq 2$; б) $f(x) = x^2 - 4x + 5, x \leq 2$.

6. С помощью геометрических преобразований постройте график функции

$y = 2|\log_2(x + 3)| - 4$ исходя из графика функции $y = \log_2 x$.

Практическое занятие № 2

Тема занятия «Предел функции. Основные теоремы о пределах»

Цель занятия: Введение понятия предел функции, формирование навыков вычисления пределов.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Что называется пределом функции в точке?
2. Определите предел функции на бесконечности.
3. Дайте определение предела функции слева (справа).
4. Может ли функция $f(x)$ иметь два различных предела при $x \rightarrow a$?
5. Чему равен предел постоянной величины?
6. Чему равен предел: а) суммы; б) разности; в) произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$?
7. Чему равен предел частного функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ($x \rightarrow a$)?
8. Как можно избавиться от неопределенности вида $\frac{0}{0}$, если числитель и знаменатель дроби содержат многочлены?
9. Как разложить квадратный трехчлен на линейные множители?
10. Сформулируйте теорему Виета.
11. Как можно избавиться от неопределенности $\frac{0}{0}$, если числитель и (или) знаменатель содержат иррациональные выражения?
12. Запишите формулы сокращенного умножения, помогающие определить сопряженные выражения для данных.
13. Сформулируйте правила вычисления пределов дроби при $x \rightarrow \infty$, если числитель и знаменатель содержат многочлены.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите пределы
а) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 3)$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 8x + 20}{x^3 + 3x^2 + 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^3 + 2x^2}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$; д) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$; е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$.
ж) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$; з) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt[3]{2+x} + x}$; и) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2)^3}{(x-5)^3}$;
к) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2}}{x^2 - 3x + 2}$.
2. Найдите пределы функций при $x \rightarrow \infty$:
а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+7}{x+2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-10^7}{3x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{3x^2} + x - 4}$;

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 1}{x^3 + 5x}; \text{ Д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}; \text{ е) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}.$$

3. Вычислите пределы функции при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$, если

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3}, & (x > 1) \\ \frac{2x}{4x-15}, & (x \leq 1) \end{cases}$$

4. Найдите односторонние пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{3}{4-2x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3}{4-2x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{4-2x}.$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow 2-0} 2^{\frac{1}{x-2}}; \quad \text{Д) } \lim_{x \rightarrow 2+0} 2^{\frac{1}{x-2}}$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^3 + 1}{x^2 + 5x + 3}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2};$$

$$\Gamma) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}; \text{ Д) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)(x-3)}; \text{ е) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 + x}{(x-2)(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{x-2} \right); \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x};$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}; \text{ к) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x^2} - 1}{x^2 + x^3}; \text{ л) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x-4};$$

$$\text{м) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}; \text{ н) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}}.$$

2. Найдите пределы функций при $x \rightarrow \infty$:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2}{2x + 1}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 - 1}{3x^4 + 3}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + x - 4}.$$

5. Найдите односторонние пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x-3}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x-3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1-0} 3^{\frac{1}{1+x}}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow -1+0} 3^{\frac{1}{1+x}}; \text{ д) } \lim_{x \rightarrow -1} 3^{\frac{1}{x+1}}.$$

Практическое занятие № 3

Тема занятия «Замечательные пределы. Бесконечно малые, бесконечно большие и неограниченные функции»

Цель занятия: Формирование умений вычислять пределы функций с помощью замечательных пределов.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Запишите первый замечательный предел и следствия из него.
2. Запишите второй замечательный предел и следствия из него.
3. Определите число e . Укажите его приближенное значение с точностью до одного десятичного знака.
4. Какая показательная функция называется экспоненциальной? Постройте ее график.
5. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
6. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
7. Какова простейшая связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?
8. Какова простейшая связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой величиной?
9. Что значит сравнить две бесконечно малые величины?
10. Какие две бесконечно малые величины называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных величин.
11. Как эквивалентные бесконечно малые величины могут быть использованы при вычислении пределов функции?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Вычислите пределы с помощью первого замечательного предела:
а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{3x}$; г) $\lim_{v \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2 \cos v}{\sin(v - \frac{\pi}{2})}$.
2. Вычислите пределы с помощью второго замечательного предела:
а) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{3}{x})^x$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{2x+3}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{2x+3}{2x+1})^{\frac{1}{x}}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x/2)^{\frac{3}{x}}$.
3. Определите порядок малости нижеследующих б.м функций относительно б.м функции $\beta(x) = x - 1$, если $x \rightarrow 1$:

- а) $\alpha(x) = x^3 + 2x - 3$; б) $\alpha(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$; в) $\alpha(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2x - 1}$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Вычислите пределы с помощью первого замечательного предела:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$; в) $\lim_{z \rightarrow 1} (1-z) \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2}$.

2. Вычислите пределы с помощью второго замечательного предела:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{5x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{1+x}\right)^{3x-1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{2k}{x}}$.

3. Выполните ИДЗ по теме «Пределы функций»

Вычислить пределы функций путем алгебраических образований и применения замечательных пределов;

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + px + q}{bx^2 - a}$; 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + px + q}{bx^3 - ax^2}$;

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - b}{ax^2 + px + q}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + px + q}{x^2 - a}$;

5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + px + q}{x^3 + b}$; 6. $\lim_{x \rightarrow k} \frac{ax^2 + px + q}{x^2 - a}$;

7. $\lim_{x \rightarrow m} \frac{x^3 + b}{x^2 + px + q}$; 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\operatorname{tg} bx}$.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} px}{\operatorname{ctg} qx}$; 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} px \cdot \sin 2ax$;

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{bx}\right)^{mx}$; 12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{p+ax}{q+ax}\right)^{bx+k}$.

Для выполнения заданий коэффициенты a, b, k, m, p, q выбираются из таблицы в соответствии с номером варианта.

ВАРИАНТ	a	b	k	m	p	q
1	4	-1	2	1	-3	2
2	9	-1	3	1	-4	3
3	16	-1	4	1	-5	4
4	25	-1	5	1	-6	5
5	4	1	2	-1	-1	-2
6	9	1	3	-1	-2	-3
7	16	1	4	-1	-3	-4
8	25	1	5	-1	-4	-5
9	4	-27	2	3	-5	6

10	64	-8	8	2	-10	16
11	16	-8	4	2	-6	8
12	25	-8	5	2	-7	10
13	9	8	3	-2	-1	-6
14	16	8	4	-2	-2	-8
15	25	8	5	-2	-3	-10
16	4	27	2	-3	1	-6
17	16	-27	4	3	-7	12
18	16	27	4	-3	-1	-12
19	25	-27	5	3	-8	15
20	25	27	5	-3	-2	-15
21	25	-64	5	4	-9	20
22	25	64	5	-4	-1	-20
23	4	1	-2	-1	3	2
24	9	8	-3	-2	5	6
25	16	27	-4	-3	7	12
26	25	64	-5	-4	9	20
27	9	64	-3	-4	7	12
28	9	125	-3	-5	8	15
29	4	64	-2	-4	6	8
30	4	125	-2	-5	7	10

Практическое занятие № 4

Тема занятия «Непрерывные функции и их свойства. Точки разрыва и их классификация»

Цель занятия: Введение понятия непрерывность функции, исследование функций на непрерывность.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Что называется приращением аргумента?
2. Что называется приращением функции?
3. Какая функция называется непрерывной в точке x_0 ?
4. Предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке. Что можно сказать о непрерывности этой функции в точке x_0 ?
5. Какая функция называется непрерывной на интервале?
6. Что называется точкой разрыва функции?
7. Какая точка называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$?
8. Какая точка называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$?
9. Сформулируйте теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями.
10. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции, составленной из непрерывных функций.
11. Сформулируйте теорему о непрерывности основных элементарных функций.
12. Сформулируйте свойства функции, непрерывной на замкнутом интервале.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Дана функция $y = \frac{-1}{x^2}$, найдите:
 - а) x и Δy , если $x_0 = 4$ и $\Delta x = 0,2$;
 - б) Δx и Δy , если $x = 2$ и $x_0 = 2,3$; в) Δy , если $x = 1$ и $\Delta x = 0,5$.
2. Определите точки разрыва функций и исследуйте ее характер:
 - а) $y = \frac{x+2}{x^2 + 2x - 3}$;
 - б) $f(x) = \begin{cases} 2/x & (x \leq -2) \\ x-1 & (-2 < x < 1) \\ \frac{1}{x+1} & (x \geq 1) \end{cases}$.
3. Будет ли непрерывной функция $f(x)$ в точках 1; 2; -1; 0, если
 - а) $f(x) = 2x^2 - 2$;
 - б) $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

4. Испытайте функцию $y = 5 + \frac{1}{\frac{1}{3x}}$ на непрерывность в точке $x = 0$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Определите точки разрыва функций и исследуйте ее характер:

а) $y = \frac{x-3}{x^2+3x+5}$; б) $y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$.

2. Будет ли непрерывной функция $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ в точках 1; 2; -1; 0 ?

3. Приведите примеры функций непрерывных:

а) в любой точке числовой прямой;

б) при всех значениях x , кроме $x = 5$;

в) при всех значениях x , кроме $x = -3$; 3 и 8.

4. Какого рода разрыв в точке $x = 0$ имеет функция $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$?

Докажите это.

Практическое занятие № 5

Тема занятия «Понятие производной. Правила дифференцирования»

Цель занятия: Введение понятия производной функции с помощью операции предельного перехода, отработка навыков в вычислении производных.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие задачи, приводящие к понятию производной, Вам известны?
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Как найти производную функции $y=f(x)$ по определению?
4. В чем состоит механический смысл производной?
5. Дайте определение непрерывной функции в точке и на отрезке. Сформулируйте свойства непрерывных функций.
6. Как связаны между собой дифференцируемость функции в некоторой точке с непрерывностью функции в этой точке?
7. Приведите пример непрерывной функции, не имеющей производной в некоторой точке.
8. Чему равна производная:
а) постоянной; б) алгебраической суммы дифференцируемых функций;
в) произведения двух дифференцируемых функций; г) дроби; д) сложной функции; е) обратной функции?
10. Запишите формулы для нахождения производных основных элементарных функций.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Пользуясь определением производной, найдите производные от следующих функций:

а) $y = 3x^2 - 4x$; б) $y = \frac{1}{x^2}$; в) $y = \sqrt{4x+1}$; г) $y = \sin(3x+1)$.

2.

Дана функция:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$
. Найдите производную этой

функции в точке $x = 0$.

3. Найдите производные следующих функций:

а) $y = x^4 + 3x^2 - 6$; б) $y = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 5$; в) $y = (x^2 + 2x + 1)(4x^2 + 1)$;

г) $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$; д) $y = \sqrt[3]{(1+2x)^2}$; е) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$; ж) $y = x^2 - \frac{3}{x^4}$;

з) $y = 2x \sin 3x - \cos 4x$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Пользуясь определением производной, найдите производные от следующих функций:

$$y = -2x; y = (2x-1)^2; y = \sqrt{x}.$$

2. Найдите производные следующих функций:

а) $y = 6x^3 - x^2$; б) $y = x - 2\sqrt{x}$; в) $y = (\sqrt{x} - 2)^2$; г) $y = x^3(1 - 3x)$;

д) $y = (x^3 - 3x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^5}$; е) $y = \frac{2x}{1 - x^2}$; ж) $y = \frac{1 + 2x}{1 - 3x}$;

з) $y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$; и) $y = x^2 \sin 5x$; к) $y = 3x + \operatorname{tg} 2x$.

Практическое занятие № 6

Тема занятия «Дифференцирование сложной функции»

Цель занятия: Формирование навыков вычисления производной сложной функции.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение производной функции в точке.
2. Назовите основные правила дифференцирования функций.
3. Запишите таблицу производных основных элементарных функций.
4. Дайте определение сложной функции. Приведите примеры.
5. Сформулируйте теорему для нахождения производной сложной функции.
6. Составьте таблицу нахождения производных для функций вида $f(u)$, где f - одна из элементарных функций, $u = u(x)$.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите производные следующих функций:
а) $y = e^{-x^2}$; б) $y = \frac{1}{4} \ln(1+x^2)$; в) $y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$;
г) $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$; д) $y = \arccos(e^{x^2})$; е) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}$;
ж) $y = 2 \sin^2 2x \cdot \operatorname{ctg}^3 2x$; з) $y = \arcsin \sqrt{\sin x}$;
и) $y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$; к) $y = \sqrt{\frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}} \cdot (\arccos e^{2x})$.
2. Вычислите $y'' - \frac{1}{2} y'$, если $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \ln \frac{4\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите производные следующих функций:
а) $y = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{x}$; б) $y = 3 \operatorname{arctg} \sqrt{x^2+1}$; в) $y = x - \operatorname{arctg} 2x$;
г) $y = e^{-2x} (1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2})$; д) $y = \frac{5^{2x}}{2 + \sqrt{4 + 5^{2x}}}$; е) $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$;
ж) $y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$; з) $y = \frac{\cos \sqrt{e^{1-2x}}}{x}$.
1. Вычислите $u'(2) + u'(0)$, если $u = x \sqrt{4-x^2} + 4 \arcsin \frac{x}{2}$.
2. Покажите, что $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, $y = e^{-\sin x} + \sin x - 1$.

4. В тетради для индивидуальных домашних заданий выполните задания 1-3 из ИДЗ по теме «Вычисление производных» в соответствии с Вашим вариантом. В заданиях 1-3 вычислите производные функций с помощью правил дифференцирования. В задании 4 найти производную с помощью логарифмического дифференцирования; в задании 5 найти производную y'_x для функции заданной неявно.

Вариант 1 1. $y = \frac{5}{\cos^2 2x} - e^{3x} + 3\sqrt{x}$; 2. $y = \frac{(2 + \sqrt{x})^2}{x^3(2 + x)}$; 3. $y = \arcsin \frac{\sqrt{x^2}}{x^3}$; 4. $y = \frac{(1-2x)^3 \cdot (3+5x)^2}{\sqrt[4]{(2-x)^5} \cdot (7+x)^4}$; 5. $5x - 2y + 3x^2y - x^2y^2 + 7y^2 = 0$.	Вариант 2 1. $y = \frac{4}{\sqrt{9-x^2}} - e^{\frac{x}{3}} + \frac{12}{16+x^2}$; 2. $y = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^3}$; 3. $y = \arccos \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^3}$; 4. $y = \frac{(4-6x)^3 \cdot (1-x)^4}{\sqrt[3]{(x+2)^4} \cdot (5x-2)^2}$; 5. $x + 6y - 3x^2y + x^3y^2 - 5y^2 = 0$.
Вариант 3 1. $y = 3\cos 6x + 5^{-x} - \frac{2}{x^2-4}$; 2. $y = \frac{(1-x)^3}{x}$; 3. $y = \operatorname{arctg} \frac{(1-x)^3}{x}$; 4. $y = \frac{(x-2)^2 \cdot (3x+2)^4}{\sqrt{(4x-6)^3} \cdot (1-x)^3}$; 5. $2x - 3y + x^3y - x^2y^2 + 4y^2 = 0$.	Вариант 4 1. $y = \frac{4}{9-x^2} - \sin 2x + 3\sqrt{x}$; 2. $y = \frac{(2+3x)^2}{\sqrt[3]{x}}$; 3. $y = \operatorname{arcctg} \frac{(2+3x)^2}{\sqrt[3]{x}}$; 4. $y = \frac{(x+5x)^2 \cdot (6x-7)^4}{\sqrt[4]{(1-x)^3} \cdot (2x+3)^5}$; 5. $2x + 4y - x^2y + x^2y^2 - 8y^3 = 0$.
Вариант 5 1. $y = e^{4x} - 3\cos \frac{x}{2} + \frac{2}{\sqrt{x^2+5}}$; 2. $y = \frac{(2+x)^3}{x}$; 3. $y = \log_2 \frac{(2+x)^3}{x}$; 4. $y = \frac{(7x-2)^3 \cdot (x+3)^2}{\sqrt{(1-5x)^5} \cdot (3x-2)^4}$; 5. $4x - 2y + x^2y - 3x^2y^2 + 4y^2 = 0$.	Вариант 6 1. $y = \operatorname{tg} 2x - 2^{-3x} + 6\sqrt[3]{x} - 10^{2x}$; 2. $y = \frac{(2-x)^2}{\sqrt{x}}$; 3. $y = \cos \frac{(2-x)^2}{\sqrt{x}}$; 4. $y = \frac{(x-4)^2 \cdot (3x+5)^5}{\sqrt[5]{(1-2x)^2} \cdot (3-4x)^3}$; 5. $6x + y - 5x^2y + 3x^3y^4 - y^2 = 0$.
Вариант 7 1. $y = 4\operatorname{ctg} 2x + \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} - 6^{-3x}$;	Вариант 8 1. $y = 8\cos 4x - \frac{6}{\sqrt{5+x^2}} - 3^{-2x}$;

2. $y = \frac{\sqrt{x} + 2^3\sqrt{x}}{x}$; 3. $y = \ln \frac{\sqrt{x} + 2^3\sqrt{x}}{x}$; 4. $y = \frac{(7x-2)^3 \cdot (1-x)^7}{\sqrt[5]{(3x+2)^4} \cdot (8x+2)^3}$; 5. $7x - 4y + x^2y - 4x^2y^3 + 7y^4 = 0$.	2. $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + 2\sqrt[3]{x}}$; 3. $y = \sin \frac{\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}}$; 4. $y = \frac{(8x-7)^4 \cdot (1-3x)^2}{\sqrt[3]{(2x+3)^5} \cdot (4x+3)^3}$; 5. $x + 6y - x^5y + x^3y^4 - 8y^2 = 0$.
Вариант 9 1. $y = 4tg2x + \frac{5}{x^2 - 25} - 2\sqrt{x}$; 2. $y = \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}$; 3. $y = \arcsin \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}$; 4. $y = \frac{(5x-2)^2 \cdot (2x+3)^4}{\sqrt{(1-5x)^3} \cdot (2x-6)^3}$; 5. $3x - 5y + 4x^5y - x^3y^3 + 5y^6 = 0$.	Вариант 10 1. $y = 3\cos 9x - \frac{6}{9+x^2} - tg x$; 2. $y = \frac{\sqrt[5]{x}}{(1-2x)^2}$; 3. $y = \arccos \frac{\sqrt[5]{x}}{(1-2x)^2}$; 4. $y = \frac{(5x-3)^2 \cdot (1-3x)^3}{\sqrt[3]{(4x-5)^2} \cdot (2-3x)^4}$; 5. $x + 4y - 4x^2y + x^2y^2 - 6y^3 = 0$.
Вариант 11 1. $y = 3ctg2x - 7\sin 6x - \sqrt[3]{x}$; 2. $y = \frac{(3-2x)^2}{\sqrt[4]{x}}$; 3. $y = \log_4 \frac{(3-2x)^2}{\sqrt[4]{x}}$; 4. $y = \frac{(5x+7)^3 \cdot (3-x)^2}{\sqrt[3]{(1-3x)^2} \cdot (4x+1)^5}$; 5. $5x - 6y + 4x^3y - 3x^3y^3 + 4y^6 = 0$.	Вариант 12 1. $y = 2^{3x} - \frac{7}{4+x^2} - 4tg2x$; 2. $y = \frac{\sqrt{x}}{3+2x}$; 3. $y = \arcsin \frac{\sqrt{x}}{3+2x}$; 4. $y = \frac{(3x+2)^2 \cdot (2x-5)^4}{\sqrt[3]{(4-3x)^2} \cdot (2x+4)^4}$; 5. $x + 5y - 5x^3y + 2x^3y^2 - y^2 = 0$.
Вариант 13 1. $y = 4\sin 8x - \frac{3}{\cos^3 6x} + 2^4\sqrt{x}$; 2. $y = \frac{(1-6x)^2}{\sqrt[3]{x}}$; 3. $y = \arctg \frac{(1-6x)^2}{\sqrt[3]{x}}$; 4. $y = \frac{(8x+1)^2 \cdot (4x-3)^5}{\sqrt[6]{(2x-7)^5} \cdot (5x+3)^4}$; 5. $10x - 6y + x^3y - x^4y^2 + y^2 = 0$.	Вариант 14 1. $y = \frac{5}{x^2} - \frac{3}{\sqrt{x^2-1}} + 4\sin 2x$; 2. $y = \frac{(1+x)^3}{\sqrt{1-x}}$; 3. $y = \operatorname{arctg} \frac{(1+x)^3}{\sqrt{1-x}}$; 4. $y = \frac{(3x-4)^3 \cdot (5-x)^2}{\sqrt{(3x+4)^5} \cdot (2x+3)^4}$; 5. $x + 5y - x^2y + 3x^2y^3 - 5y^2 = 0$.
Вариант 15 1. $y = \frac{6}{\cos^2 2x} - \frac{4}{x^2+9} - 5x^2$; 	Вариант 16 1. $y = 3\cos 8x - 9 - 4ctg 3x$;

$2. y = \frac{(3-2x)^2}{\sqrt{3x-2x}};$ $3. y = \ln \frac{\sqrt{3x-2x}}{s \sqrt{x}};$ $4. y = \frac{(9-5x)^3 \cdot (4-6x)^2}{\sqrt[5]{(1+3x)^4} \cdot (5x+3)^4};$ $5. 8x - y + 6x^2y - x^2y^3 + 4y^7 = 0.$	$2. y = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^2};$ $3. y = \log_5 \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^2};$ $4. y = \frac{(8x+5)^3 \cdot (x-5)^6}{\sqrt{(3x+7)^6} \cdot (6x+3)^2};$ $5. 8x + 9y - x^3y + x^2y^3 - 7y^2 = 0.$
Вариант 17 $1. y = 8ctg 2x + \sqrt{x} - \frac{7}{x^2-9};$ $2. y = \frac{(1+3x)^2}{x^2};$ $3. y = \cos \frac{(1+3x)^2}{x^2};$ $4. y = \frac{(8x+4)^3 \cdot (x-4)^5}{\sqrt{(1-2x)^3} \cdot (3x+6)^2};$ $5. x - 7y + x^4y - 2x^2y^2 + 7y^3 = 0.$	Вариант 18 $1. y = 3tg 10x + 7^{2x} - \frac{5}{\sqrt{81-x^2}};$ $2. y = \frac{(1-4x)^2}{x};$ $3. y = ctg \frac{(1-4x)^2}{x};$ $4. y = \frac{(7-4x)^2 \cdot (3x+4)^4}{\sqrt[3]{(3x+5)^7} \cdot (6x-2)^5};$ $5. 5x + 6y - x^3y + 2x^3y^2 - 7y^3 = 0.$
Вариант 19 $1. y = 4^{-3x} - 3\cos \frac{x}{2} + \frac{2}{4+x^2};$ $2. y = \frac{(2x-3)^2}{\sqrt{x}};$ $3. y = tg \frac{(2x-3)^2}{\sqrt{x}};$ $4. y = \frac{(2x+9)^5 \cdot (6-3x)^2}{\sqrt[3]{(3x+5)^4} \cdot (3-7x)^3};$ $5. 8x - 7y + 12x^2y - 8x^4y^3 + 5y^2 = 0.$	Вариант 20 $1. y = 4x^7 - 5\cos 3x + 2^{-x} - \ln 2x;$ $2. y = \frac{2x+5}{\sqrt{x-1}};$ $3. y = \arcsin \frac{2x+5}{\sqrt{x-1}};$ $4. y = \frac{(3x+4)^6 \cdot (4x-7)^2}{\sqrt[4]{(2x+5)^7} \cdot (1-3x)^3};$ $5. 9x + 4y - x^3y + 3x^2y^6 - 7y^2 = 0.$
Вариант 21 $1. y = 9^{4x} - 3\cos \frac{x}{5} + 13\sqrt[5]{x} - 2\ln 5x;$ $2. y = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}};$ $3. y = \ln \frac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{x-3}};$ $4. y = \frac{(2x+3)^4 \cdot (x-4)^3}{\sqrt{(6x-5)^3} \cdot (2x-3)^2};$ $5. 6x - 3y + 3x^3y - 4x^2y^2 + 9y^3 = 0.$	Вариант 22 $1. y = \frac{7}{x} + 4tg 2x - \sqrt[4]{x} + 6^{3x};$ $2. y = \frac{(x+8)^2}{\sqrt[3]{x}};$ $3. y = \arccos \frac{(x+8)^2}{\sqrt[3]{x}};$ $4. y = \frac{(4x-2)^5 \cdot (4+3x)^4}{\sqrt[5]{(1-12x)^2} \cdot (3x-4)^2};$ $5. 7x + 8y - 9x^2y + x^2y^4 - 3y^5 = 0.$
Вариант 23 $1. y = 9^{4x} - 3\cos \frac{x}{5} + 13\sqrt[5]{x};$	Вариант 24 $1. y = 2x^3 - \frac{4}{x^2+1} - 2tg \frac{x}{3};$

$2. y = \frac{2x-1}{\sqrt{x+4}};$ $3. y = \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{x+4}};$ $4. y = \frac{(7x+3)^2 \cdot (x+2)^5}{\sqrt[4]{(1-3x) \cdot (2+3x)^4}};$ $5. 7x - 4y + x^5 y - 12x^3 y^2 + 3y^2 = 0.$	$2. y = \frac{(2x-1)^2}{x^3};$ $3. y = \operatorname{arcc} \frac{(2x-1)^2}{x^3};$ $4. y = \frac{(x+3)^2 \cdot (4x-5)^3}{\sqrt[3]{(7-2x)^4 \cdot (8x+3)^5}};$ $5. 5x + 6y - 3x^3 y + 4x^3 y^6 - 2y^2 = 0.$
Вариант 25 $1. y = \frac{4}{x^2+16} - \cos \frac{x}{2} + 5^{3x};$ $2. y = \frac{(3-4x)^2}{x(3-4x)};$ $3. y = \log_7 \frac{x(3-4x)}{x};$ $4. y = \frac{(x-7)^4 \cdot (2x+5)^3}{\sqrt[4]{(1-7x)^5 \cdot (4x-3)^2}};$ $5. x - 6y + 5x^3 y - x^3 y^3 + 6y^2 = 0.$	Вариант 26 $1. y = 5\sqrt{x} - 3\operatorname{ctg} 6x + 4^{2x};$ $2. y = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x}};$ $3. y = \ln \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x}};$ $4. y = \frac{(x-4)^5 \cdot (2x-6)^3}{\sqrt{(4x+6)^3 \cdot (3x-5)^2}};$ $5. 6x + y - 8x^2 y + 3x^3 y^2 - y^2 = 0.$
Вариант 27 $1. y = \frac{5}{\cos^2 x} - 2^x + 16\cos 4x;$ $2. y = \frac{(1-3x)^2}{\sqrt{x}};$ $3. y = \arccos \frac{(1-3x)^2}{\sqrt{x}};$ $4. y = \frac{(6x-5)^4 \cdot (2-x)^3}{\sqrt[3]{(1-3x)^5 \cdot (4-2x)^4}};$ $5. x - 2y + x^4 y - 2x^2 y^2 + 8y^5 = 0.$	Вариант 28 $1. y = 5x^4 - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + 6^{4x};$ $2. y = \frac{(1-7x)^2}{\sqrt{x}};$ $3. y = \arcsin \frac{(1-7x)^2}{\sqrt{x}};$ $4. y = \frac{(1+3x)^2 \cdot (2x-5)^5}{\sqrt[5]{(2x+4)^6 \cdot (3x-4)^3}};$ $5. 5x + 6y - 7x^2 y + 3x^2 y^3 - 6y^3 = 0.$
Вариант 29 $1. y = 4\cos 2x - \sqrt[4]{x} + 6^{-3x};$ $2. y = \frac{(1+3x)^2}{x^4};$ $3. y = \operatorname{arcc} \frac{(1+3x)^2}{x^4};$ $4. y = \frac{(6x+4)^3 \cdot (4x-5)^2}{\sqrt[5]{(3x-4)^2 \cdot (8x+5)^4}};$ $5. 9x - 6y + 4x^2 y - 2x^3 y^4 + 2y^5 = 0.$	Вариант 30 $1. y = 7x^6 - 3\operatorname{ctg} \frac{x}{7} + 4^{5x};$ $2. y = \frac{1-3x}{\sqrt{x+1}};$ $3. y = \operatorname{arctg} \frac{1-3x}{\sqrt{x+1}};$ $4. y = \frac{(6x-4)^3 \cdot (3-2x)^6}{\sqrt[5]{(3x+6)^4 \cdot (x-6)^2}};$ $5. 6x + 8y - 4x^5 y + 2x^5 y^2 - 5y^3 = 0.$

Практическое занятие № 7

Тема занятия «Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Функции заданные неявно и параметрически и их дифференцирование»

Цель занятия: Формирование умений и навыков нахождения производных неявно заданных и параметрически заданных функций, применения логарифмического дифференцирования.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Запишите формулу логарифмического дифференцирования.
2. Когда применяется формула логарифмического дифференцирования?
3. Расскажите о дифференцировании показательной-степенной функции.
4. Дайте определение производной второго порядка, производной n -го порядка.
5. Дайте определение неявного задания функции. Приведите примеры.
6. Как от неявного задания перейти к явному заданию функции? Всегда ли это можно сделать. Приведите примеры.
7. Как проводят дифференцирование неявной функции?
8. Расскажите о нахождении производных высших порядков от неявно заданных функций.
9. Дайте определение параметрически заданной функции. Приведите примеры.
10. Расскажите как от параметрического задания функции перейти к явному заданию функции.
11. Запишите формулы для нахождения производных первого и второго порядков от параметрически заданной функции.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные следующих функций:
а) $y = x^5 (1+3x)^3 (1-2x)^2$; б) $y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$; в) $y = \sqrt[3]{\frac{x(1+x)^2}{(1-x)^2}}$;
г) $y = (\sin x)^x$; д) $y = \sqrt[3]{x}$.
2. Найдите производные высших порядков для следующих функций:
а) $y = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 1$; $y' = ?$ б) $y = \cos 2x$; $y'' = ?$
3. Для данных неявных функций найдите производные первого порядка $y'(x)$:
а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; б) $y = \operatorname{tg}(x + y)$.
4. Для функций, заданных параметрически, найдите производные первого и второго порядков

$$\text{а) } \begin{cases} |x = t^2, \\ |y = t^3 + 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} |x = e^t \cos t, \\ |y = e^t \sin t. \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные следующих функций:

$$\text{а) } y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}; \quad \text{б) } y = \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{в) } y = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3} \sqrt[3]{(x-3)^7}};$$

$$\text{г) } y = (\cos x)^{\sin 2x}.$$

2. Найдите производные высших порядков для следующих функций:

$$\text{а) } y = 3x^3 - 5x^2 + x; \quad y'' = ? \quad \text{б) } y = e^x + 2x; \quad y^{IV} = ?$$

3. Для данной неявной функции найдите производные первого и второго порядков $e^y \sin x = e^{-x} \cos y$.

4. Для функций, заданных параметрически, найдите производные первого и второго порядков

$$\text{а) } \begin{cases} |x = e^{2t}, \\ |y = e^{3t}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} |x = a \cos^3 t, \\ |y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

Практическое занятие № 8

Тема занятия «Дифференциал функции, применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков»

Цель занятия: Введение понятия дифференциал функции, изучение способа применения дифференциала функции в приближенных вычислениях.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение дифференциала функции.
2. Запишите формулу для вычисления дифференциала первого и последующих порядков.
3. Сформулируйте основные свойства дифференциалов.
4. В чем заключается свойство инвариантности формы дифференциала? Дифференциалы каких порядков обладают указанным свойством?
5. Расскажите о геометрическом смысле дифференциала первого порядка.
6. Как используется дифференциал в приближенных вычислениях?
7. Выведите формулу приближенного вычисления значений функций. Как определить погрешность приближения?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите дифференциалы следующих функций:
а) $y = \frac{x^3}{1-x}$; б) $y = e^{x^2} - 2x + 1$; в) $y = \arccos^2 3x$; г) $y = \frac{2 \sin 2x - 3 \cos 2x}{e^{3x}}$.
2. Вычислите с точностью до 0,01 дифференциал функции
 $y = x + (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x$ при $x = -\frac{\pi}{4}$ и $dx = 0,2$.
3. С помощью дифференциала найдите приближенные значения для данных выражений:
а) $\sqrt[3]{1,02}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{120}$; г) $\sqrt[3]{9}$; д) $\sin 29^\circ$; е) $\operatorname{arctg} 0,98$; е) $\ln 1,01$; ж) $\log_2 1,98$.
4. Для данных функций найдите дифференциалы высших порядков:
а) $y = \ln 2x$; $d^3 x = ?$ б) $y = \sqrt{x}$; $d^4 x = ?$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите дифференциалы следующих функций:
а) $y = \sqrt{3 - x^2}$; б) $y = 3^{2x}$; в) $y = \sin^2 \frac{x}{3}$; г) $y = e^{-x} (2 - 2x - x^2)$.
2. Вычислите с точностью до 0,01 дифференциалы функций:
а) $y = x(1+x)(1-x)$ при $x = 10$ и $dx = 0,1$;
б) $y = x\sqrt{x^2 + 5}$ при $x = -2$ и $dx = \frac{1}{5}$.
3. С помощью дифференциала найдите приближенные значения для данных выражений:

- а) $\sqrt[3]{1,1}$; б) $\sqrt[3]{26,81}$; в) $\sqrt{34}$; г) $\sqrt[4]{17}$; д) $\sqrt[10]{1000}$; е) $\cos 151^\circ$; ж) $\arccos 0,4993$;
з) $\operatorname{tg} 44^\circ 56'$; и) $\lg 11$.

4. Для данной функций найдите дифференциалы высших порядков:

$$y = e^{2x}, d^n y = ?$$

Практическое занятие № 9

Тема занятия «Приложения производной: уравнение касательной и нормали к плоской кривой, правила Лопиталю, формула Тейлора»

Цель занятия: изучение приложений производной функции.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Сформулируйте геометрический смысл производной функции.
2. Выведите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
3. Какая прямая называется нормалью к кривой? Какой вид имеет уравнение нормали?
4. Сформулируйте правило Лопиталю для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов функции.
5. Сформулируйте правило Лопиталю для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов функции.
6. Сколько раз подряд можно применять правило Лопиталю и когда это правило неприменимо?
7. Как можно раскрыть неопределенность вида $0 \cdot \infty$ при вычислении предела функции?
8. Что нужно сделать при вычислении предела функции, если он содержит неопределенность вида $\infty - \infty$?
9. Какой прием применяют для применения правил Лопиталю, если предел функции содержит неопределенность вида 0^0 , или ∞^0 , или 1^∞ ?
10. Расскажите о формуле Тейлора и формуле Маклорена. Для чего эти формулы могут использоваться?
11. Разложите по формуле Тейлора (Маклорена) функции $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Составьте уравнение касательной и нормали
 - а) к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке с абсциссой $x = 1$;
 - б) к кривой $y = \ln x$ в точке с абсциссой $x = 1$.
2. Используя правило Лопиталю, найдите следующие пределы:
 - а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 12x + 16}$;
 - б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$;
 - в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$;
 - г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$;
 - д) $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 \ln x$;
 - е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$;
 - ж) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 5x}$;
 - з) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin x - 1}$;
 - и) $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} \ln x$;

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{x^2 - 1} - \frac{7}{x^3 - 1} \right); \text{ л) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right); \text{ м) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

3. По формуле Тейлора разложите многочлен $P(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$ по степеням $x + 1$.

4. Закон зависимости массы вещества, вступившего в химическую реакцию, в зависимости от времени, выражается формулой: $m = e^{2t-2}(t^2 + 1)$, где t - время в минутах, m - масса в граммах. Сколько вещества вступит в реакцию через 66 секунд?

Задания для самостоятельной работы дома

1. Составьте уравнение касательной и нормали

а) к окружности $x^2 + y^2 = 25$ в точке $A(3; -4)$;

б) к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ в точке $A(1; 1)$.

2. Используя правило Лопиталя, найдите следующие пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}; \text{ б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 11x}; \text{ в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}; \text{ г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1+x)};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}; \text{ е) } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{\ln(e^x - e^2)}{\ln(x - 2)}; \text{ ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 5x}; \text{ з) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x;$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln x + e^x; \text{ к) } \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right|; \text{ л) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + e^{\frac{x}{x}}}; \text{ м) } \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}.$$

3. По формуле Тейлора разложите многочлен:

а) $P(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$ по степеням $x - 2$;

б) $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ по степеням $x - 1$.

Практическое занятие № 10.

Тема занятия «Применение производной к исследованию функций. Построение графиков функций»

Цель занятия: Показать возможность применения аппарата дифференциального исчисления к исследованию функций и построения их графиков.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение возрастающей и убывающей функции на некотором промежутке.
2. Как найти интервалы монотонности функции?
3. Дайте определения экстремумов функции.
4. Определите наибольшее и наименьшее значения функции.
5. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
6. Какие точки называются критическими?
7. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.
8. Как ведется исследование функции на экстремум с помощью второй производной?
9. Укажите порядок исследования функции на возрастание и убывание и экстремумы.
10. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции? Укажите порядок решения этой задачи.
11. Определите понятия выпуклость и вогнутость графика функции.
12. Какую точку называют точкой перегиба?
13. Как найти интервалы выпуклости и вогнутости функции?
14. Как определить точки перегиба?
15. Что называется асимптотой кривой $y = f(x)$?
16. Как найти асимптоту $y = ax + b$ кривой $y = f(x)$, т.е. как найти a и b ?
17. По какой схеме следует проводить исследование функции и построение ее графика?
18. Для решения каких вопросов исследования функции и построения ее графика:
а) не нужны теория пределов и дифференциальное исчисление? б) необходимо уметь вычислять пределы?
в) нужна первая производная?
г) нужна вторая производная?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите интервалы возрастания и убывания следующих функций:
а) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$; б) $y = \frac{2x}{1+x^2}$; в) $y = \cos x - x$.
2. Исследуйте на экстремум следующие функции:

а) $y = x^2(x - 6)$; б) $y = e^x \sin x$; в) $y = \frac{x}{\ln x}$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения следующих функций:

а) $y = x^2 - 4x + 6$ на отрезке $[-3; 10]$;

б) $y = \sqrt{5 - 4x}$ на отрезке $[-1; 1]$.

в) Реакции организма на два лекарства как функции t (время выражается в часах) составляют $r_1(t) = te^{-t}$ и $r_2(t) = t^2 e^{-t}$. У какого из лекарств выше максимальная реакция?

4. Найдите точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости следующих кривых:

а) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$; б) $y = 3 - \sqrt[5]{(x + 2)^7}$; в) $y = 1 - \ln(x^2 - 4)$.

5. Найдите асимптоты следующих функций:

а) $y = \frac{2x}{x - 1}$;

б) $y = \frac{1}{2x^2 + x - 1}$.

6. Исследуйте функции и постройте их графики:

а) $y = \frac{1}{(x + 1)^2}$; б) $y = \frac{1}{(x - 3)\sqrt{x}}$.

7. Закон перехода некоторого вещества в раствор в зависимости от времени t задается формулой: $x(t) = 2(1 - e^{-5t})$. Исследуйте эту функцию и постройте график этой зависимости.

1. Выполните ИДЗ по теме «Исследование функций и построение их графиков».

Исследовать функцию и построить ее график.

Вариант 1 $y = 2 + \frac{12}{x^2 - 4}$	Вариант 2 $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$
Вариант 3 $y = x + \frac{4}{x + 2}$	Вариант 4 $y = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}$
Вариант 5 $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$	Вариант 6 $y = \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4}$
Вариант 7 $y = \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{x^3}$	Вариант 8 $y = \frac{1}{x(2x - 1)}$
Вариант 9 $y = \frac{1}{x(x - 1)}$	Вариант 10 $y = x + \frac{x}{3x - 1}$
Вариант 11 $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$	Вариант 12 $y = \frac{x^3}{2(x + 1)^2}$
Вариант 13 $y = \frac{4}{2 - x} - x$	Вариант 14 $y = 1 + \frac{3}{x^2 - 1}$
Вариант 15 $y = \frac{x^3}{2(x - 1)^2}$	Вариант 16 $y = \frac{3}{4x^2 - 1} - 1$
Вариант 17 $y = \frac{-6x^2}{3x - 1}$	Вариант 18 $y = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$
Вариант 19 $y = -x + \frac{x}{3x + 1}$	Вариант 20 $y = \frac{x^4 + x^3 - 1}{x^3 - 1}$
Вариант 21 $y = \frac{1}{x(x + 1)}$	Вариант 22 $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{4x^3}$
Вариант 23 $y = \frac{x^3}{4x^2 - 1}$	Вариант 24 $y = x + \frac{x}{6x - 1}$
Вариант 25 $y = \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 2}$	Вариант 26 $y = \frac{x^4}{1 - x^3}$

Вариант 27 $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$	Вариант 28 $y = \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^2}$
Вариант 29 $y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1}$	Вариант 30 $y = \frac{x^3}{1 - 4x^2} + 1$

Практическое занятие №11. Итоговое занятие по разделу 1.

Подготовьтесь к коллоквиуму по вопросам приведенным ниже.

Коллоквиум

Базовый уровень

Тема. Функции одной переменной и числовые последовательности.

1. Дайте определение функции.
2. Что называется областью определения функции?
3. Что называется областью значений функции?
4. Дайте определение графика функции $y=f(x)$.
5. Дайте определение возрастающей и убывающей функции.
6. Какая функция называется монотонной?
7. Дайте определение четной и нечетной функции.
8. Какая функция называется периодической?
9. Определите нули функции.
10. Что называется промежутком знакопостоянства функции?
11. Какая функция называется ограниченной?
12. Какие Вы знаете способы задания функций?

Тема. Предел функции.

1. Что называется пределом функции в точке?
2. Определите предел функции на бесконечности.
3. Чему равен предел постоянной величины?
4. Чему равен предел: а) суммы; б) разности; в) произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$?
5. Чему равен предел частного функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ($x \rightarrow a$)?
6. Запишите первый замечательный предел и следствия из него.
7. Запишите второй замечательный предел и следствия из него.

Тема. Непрерывность функции.

1. Что называется приращением аргумента?
2. Что называется приращением функции?
3. Какая функция называется непрерывной в точке x_0 ?
4. Какая функция называется непрерывной на интервале?
5. Что называется точкой разрыва функции?

Тема. Производная функции. Правила дифференцирования.

1. Какие задачи, приводящие к понятию производной, Вам известны?
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Опишите порядок вычисления производной функции по определению.
4. Чему равна производная: а) постоянной б) алгебраической суммы дифференцируемых функций; в) произведения двух дифференцируемых функций; г) дроби; д) сложной функции; е) обратной функции?
5. Запишите формулы для нахождения производных основных элементарных функций.

Тема. Дифференциал функции.

1. Дайте определение дифференциала функции.
2. Сформулируйте основные свойства дифференциалов.

Тема. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.

1. Запишите формулу логарифмического дифференцирования. Когда применяется формула логарифмического дифференцирования?
2. Дайте определение неявного задания функции. Приведите примеры. Как от неявного задания перейти к явному заданию функции? Всегда ли это можно сделать. Приведите примеры.
3. Как проводят дифференцирование неявной функции?
4. Дайте определение параметрически заданной функции. Приведите примеры. Расскажите как от параметрического задания функции перейти к явному заданию функции.

Тема. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения.

1. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов функции.
2. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов функции.
3. Расскажите о формуле Тейлора и формуле Маклорена. Для чего эти формулы могут использоваться?

Тема. Приложения производной.

1. Дайте определение возрастающей и убывающей функции на некотором промежутке. Как найти интервалы монотонности функции?
2. Дайте определения экстремумов функции.
3. Определите наибольшее и наименьшее значения функции.
4. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
5. Какие точки называются критическими?
6. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.
7. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции? Укажите порядок решения этой задачи.
8. Определите понятия выпуклость и вогнутость графика функции. Какую точку называют точкой перегиба? Как найти интервалы выпуклости и вогнутости функции? Как определить точки перегиба?

Повышенный уровень

Тема. Функции одной переменной и числовые последовательности.

1. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции.
2. Определите функцию обратную по отношению к функции $y=f(x)$.
3. Определите целую рациональную функцию.

4. Какая функция называется линейной? Что является ее графиком?
5. Какая функция называется квадратичной? Что является ее графиком?
6. Определите дробно-рациональную функцию.
7. Какую функцию называют степенной? Графики каких степенных функций Вы можете построить?
8. Определите показательную функцию. Постройте в тетради графики функций $y = 2^x$, $y = (1/2)^x$.
9. Какую функцию называют логарифмической? Постройте в тетради графики функций $y = \log_2 x$, $y = \lg x$, $y = \log_{1/2} x$.
10. Какие тригонометрические функции Вы знаете? Постройте графики основных тригонометрических функций в тетради.
11. Назовите обратные тригонометрические функции. Постройте их графики.
12. Вспомните основные преобразования графиков функций (параллельный перенос на вектор, растяжение или сжатие от координатных осей), приведите примеры.

Тема. Предел функции.

1. Дайте определение предела функции слева (справа).
2. Может ли функция $f(x)$ иметь два различных предела при $x \rightarrow a$?
3. Как можно избавиться от неопределенности вида $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, если числитель и знаменатель дроби содержат многочлены?
4. Как разложить квадратный трехчлен на линейные множители? Сформулируйте теорему Виета.
5. Как можно избавиться от неопределенности $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, если числитель и (или) знаменатель содержат иррациональные выражения? Запишите формулы сокращенного умножения, помогающие определить сопряженные выражения для данных.
6. Сформулируйте правила вычисления пределов дроби при $x \rightarrow \infty$, если числитель и знаменатель содержат многочлены.
7. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
8. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
9. Какова простейшая связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?
10. Какова простейшая связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой величиной?
11. Что значит сравнить две бесконечно малые величины?
12. Какие две бесконечно малые величины называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных величин.
13. Как эквивалентные бесконечно малые величины могут быть использованы при вычислении пределов функции?

Тема. Непрерывность функции.

1. Предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке. Что можно сказать о непрерывности этой функции в точке x_0 ?
2. Какая точка называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$?
3. Какая точка называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$?
4. Сформулируйте теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями.
5. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции, составленной из непрерывных функций.
6. Сформулируйте теорему о непрерывности основных элементарных функций.
7. Сформулируйте свойства функции, непрерывной на замкнутом интервале.

Тема. Производная функции. Правила дифференцирования.

7. Как найти производную функции $y=f(x)$ по определению?
8. В чем состоит механический смысл производной?
9. Как связаны между собой дифференцируемость функции в некоторой точке с непрерывностью функции в этой точке?
10. Приведите пример непрерывной функции, не имеющей производной в некоторой точке.
11. Дайте определение сложной функции. Приведите примеры.
12. Сформулируйте теорему для нахождения производной сложной функции.
13. Составьте таблицу нахождения производных для функций вида $f(u)$, где f - одна из элементарных функций, $u = u(x)$.

Тема. Дифференциал функции.

1. Запишите формулу для вычисления дифференциала первого и последующих порядков.
2. В чем заключается свойство инвариантности формы дифференциала? Дифференциалы каких порядков обладают указанным свойством?
3. Расскажите о геометрическом смысле дифференциала первого порядка.
4. Как используется дифференциал в приближенных вычислениях?
5. Выведите формулу приближенного вычисления значений функций. Как определить погрешность приближения?
6. Дайте определение производной второго порядка, производной n -го порядка.

Тема. Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций. Логарифмическое дифференцирование.

1. Расскажите о дифференцировании показательной-степенной функции.
2. Расскажите о нахождении производных высших порядков от неявно заданных функций.
3. Запишите формулы для нахождения производных первого и второго порядков от параметрически заданной функции.

Тема. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения.

1. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
2. Теоремы Ферма, Роля.
3. Теоремы Лагранжа, Коши.

Тема. Приложения производной к исследованию функций.

1. Выведите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2. Сколько раз подряд можно применять правило Лопиталя и когда это правило неприменимо?
3. Как можно раскрыть неопределенность вида $0 \cdot \infty$ при вычислении предела функции?
4. Что нужно сделать при вычислении предела функции, если он содержит неопределенность вида $\infty - \infty$?
5. Какой прием применяют для применения правил Лопиталя, если предел функции содержит неопределенность вида 0^0 , или ∞^0 , или 1^∞ ?
6. Разложите по формуле Тейлора (Маклорена) функции $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.
7. Как ведется исследование функции на экстремум с помощью второй производной?
8. Укажите порядок исследования функции на возрастание и убывание и экстремумы.
9. Что называется асимптотой кривой $y = f(x)$?
10. Как найти асимптоту $y = ax + b$ кривой $y = f(x)$, т.е. как найти a и b ?
11. По какой схеме следует проводить исследование функции и построение ее графика?
12. Для решения каких вопросов исследования функции и построения ее графика:
 - а) не нужны теория пределов и дифференциальное исчисление?
 - б) необходимо уметь вычислять пределы?
 - в) нужна первая производная? г) нужна вторая производная

Раздел 2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ
Практическое занятие №12. «Высказывания, логические операции над ними».

Вопросы к занятию

1. Введите понятия высказывания логической операции, какие виды высказываний Вы знаете? Приведите примеры.
2. Дайте определение следующих логических операций: отрицания, дизъюнкции, конъюнкции, импликации, эквиваленции. Приведите их таблицы истинности.
3. Что называется логической формулой? Какие виды логических формул Вы знаете, приведите примеры.
4. Какие логические формулы называют законами логики? Перечислите основные законы логики? Перечислите основные законы логики и докажите их.

Задания, решаемые в аудитории

1. Укажите высказывания и установите, истинны они или ложны
а) $5 \geq 2$; б) число 25 делится на 5; в) $2x^2 - 3x \geq 0$; г) не каждый человек имеет родителей; д) стоп!
2. Сформулируйте отрицание данных высказываний и определите их истинный смысл:
а) я вчера решил заданную на дом задачу; б)
все слова могут быть разделены на слоги; в)
один в поле не воин;
г) четырехугольник ABCD не является ни прямоугольником, ни ромбом.
3. В следующих высказываниях выделите элементарные высказывания и запишите их формулой:
а) 15 кратно 3 и 12 кратно 3;
б) $2 < 3 < 5$;
в) 15 – простое число и 15 не делится на 7; г)
число 157 простое или составное;

- д) число 17 не делится на 5;
- е) если каждое слагаемое делится на 4, то и сумма будет делиться на 4;
- ж) две прямые на плоскости параллельны тогда и только тогда, когда внутренние накрест лежащие углы при этих прямых и секущей равны или сумма внутренних односторонних углов равна 180° .
4. Составьте таблицы истинности для следующих высказываний:
- а) $\neg p \vee q$; б) $\neg(p \vee q)$; в) $p \rightarrow (q \vee \neg r)$; г) $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.
5. Докажите, что следующие формулы являются законами логики
- а) $\neg(p \wedge \neg p)$ (закон непротиворечия); б) $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$; в) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$;
 г) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Укажите высказывания и установите, истинны они или ложны
- а) $\frac{0,6 - 0,25}{\frac{1}{8} + \frac{23}{40}} \geq 3 - 2,5$;
- б) все четные числа делятся на 8;
- в) некоторые числа, делящиеся на 3, четны;
- г) окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром;
- д) некоторые студенты нашей группы не были на лекции; е) ты пойдешь завтра в университет?
2. Сформулируйте отрицание данных высказываний и определите их истинный смысл:
- а) число 15 кратно 3;
- б) существуют параллелограммы, не имеющие осей симметрии;
- в) все четные числа не делятся на 4;
- г) по крайней мере одно из чисел А, В, С. является натуральным; д) если сумма не делится на 11, то ни одно из слагаемых не делится на 11.

3. Пусть p высказывание «сегодня жарко», q высказывание «сегодня идет дождь», r - «сегодня сыро», s - «я пойду гулять», t - «я пойду в кино».

Запишите формулами составные высказывания:

- а) сегодня жарко и не идет дождь; б) сегодня жарко или сыро;
- в) если сегодня идет дождь, то сыро;
- г) если сегодня не идет дождь, то не сыро;
- д) если сегодня не идет дождь, то я пойду гулять;
- е) если сегодня идет дождь или сыро, я не пойду в кино.

4. Составьте таблицы истинности для следующих высказываний:

- а) $(\neg p \wedge q) \rightarrow r$; б) $p \rightarrow (\neg[\vee q] p \rightarrow)$; в) $(\neg p \rightarrow p) \Leftrightarrow p$; г) $\neg(p \wedge (\neg p \wedge q))$.

5. Докажите, что следующие формулы являются законами логики

- а) $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$; б) $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$; в) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$;
- г) $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$.

Практическое занятие №13. «Понятие множества, способы задания множеств. Операции над множествами»

Вопросы к занятию

1. Введите понятия множества, подмножества, равных множеств. Укажите способы задания множеств.
2. Определите основные операции над множествами (объединение, пересечение, разность, симметрическая разность, дополнение) и перечислите их свойства. Проиллюстрируйте введенные операции на диаграммах Эйлера-Венна.
3. Дайте определение прямого (декартова) произведения множеств, декартова квадрата.
4. Определите бинарное соответствие и бинарное отношение, укажите способы их задания.
5. Введите понятие отношения эквивалентности, отношения порядка (строгого и нестрого) функционального отношения и отображения.
6. Сформулируйте определения сюръективного, инъективного и биективного отображений и приведите их примеры.

Задания, решаемые в аудитории

6. Пусть Π – множество простых чисел, 4 – множество четных целых чисел, N – множество нечетных целых чисел. Укажите, каким из этих множеств принадлежат числа 7, 11, 12, 18, 115, 217, 321, 612, 318, 233.
Запишите ответ с помощью символа $\in$
7. Укажите характеристические свойства элементов следующих множеств:
 - а) $\{a; e; 4; 0; y; э; ю; я\}$;
 - б) $\{111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999\}$;
 - в) {существительные, глаголы, прилагательные, наречия; предлоги; союзы; числительные; междометия};
 - г) {Евразия, Северная Америка, Южная Америка, Африка, Австралия, Антарктида}.

8. Изобразите на числовой прямой следующие множества:

а) $\{x / x \in N, x \leq 3\}$;

б) $\{x / x \in Z, -2 \leq x < 2\}$;

в) $\{x / x \in R, x < 4,7\}$;

г) $\{x / x \in R, -4,6 < x \leq 5\}$

9. Для данных множеств A и B найдите $A \cup B$, $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $A \Delta B$:

а) A – множество различных букв в слове «универмаг»;

B – множество различных букв в слове «лекторий»;

б) $A = \left\{ x / x = \frac{1}{n} \wedge n \in N \right\}$, $B = \left\{ x / x = \frac{2}{n} \wedge n \in N \right\}$;

в) $A = \left\{ x / x = 2^n \wedge n \in N \right\}$, $B = \left\{ x / x = 2n \wedge n \in N \right\}$.

г) A – множество параллелограммов.

B – множество прямоугольников.

10. Докажите, что для любых множеств верны следующие соотношения:

а) $(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$; б) $A \Delta \emptyset = A$; в) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

г) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.

11. Из 100 студентов английский язык изучают 28 человек, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 5, все три языка изучают 3 студента. Сколько студентов не изучают ни одного языка? Сколько студентов изучают только один язык? Составьте диаграммы Эйлера-Венна.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Пусть C – множество существительных, Π – множество прилагательных, Γ – множество глаголов, H – множество наречий. Укажите среди следующих записей верные:

а) «стол» $\in \Gamma$; б) «человек» $\in C$; в) «стоять» $\in \Gamma$; г) «мести» $\in H$;

д) «зеленый» $\notin \Pi$; е) «быстро» $\in H$; ж) «стекло» $\notin C$;

з) «стеклянный» $\in \Pi$; и) «течь» $\notin \Gamma$.

2. Укажите и запишите с помощью неравенств характеристическое свойство элементов множества, изображенного на числовой прямой



3. Перечислите элементы следующих множеств:

A – множество нечетных чисел на отрезке $[2; 14]$;

B – множество натуральных чисел, меньших 7;

C – множество натуральных делителей числа 24;

D – множество двузначных чисел, делящихся на 12.

4. Для данных множеств A и B найдите

а) $A = \{8; 10; 12; \dots\}$, $B = \{2; 4; 6; 8; \dots\}$;

б) $A = \{x/x = 2n \wedge n \in N \wedge n < 30\}$, $B = \{x/x = 3n \wedge n \in N \wedge n \leq 20\}$.

в) $A = \left\{x/x = \frac{n}{n+1} \wedge n \leq 20\right\}$, $B = \left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \dots; \frac{20}{21}\right\}$.

г) A – множество равнобедренных треугольников;

B – множество равносторонних треугольников.

5. Доказать, что для любых множеств верны следующие соотношения:

а) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$; б) $((A \cup B) \setminus C) \subset (A \cup (B \setminus C))$;

в) $A \setminus (B \vee C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; г) $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$.

6. Выбрано некоторое множество натуральных чисел. Известно, что среди них имеется 100 чисел, кратных двум; 115 чисел, кратным трем, 120 чисел, кратных пяти; 45 чисел кратных 6; 38 чисел, кратных десяти; 50 чисел кратных пятнадцати; 20 чисел кратных тридцати. Составьте диаграмму Эйлера-Венна и определите, сколько элементов в заданном множестве.

Практическое занятие №14.

Тема занятия «Множество натуральных чисел, аксиомы Пеано, метод математической индукции»

Цель занятия: формирование аксиоматического подхода к определению числовых множеств и умений доказывать утверждения, содержащие натуральные числа.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие способы построения множества натуральных чисел Вы знаете? Дайте аксиоматическое определение множества натуральных чисел. Объясните смысл каждой из аксиом Пеано.

2. Для чего в математике используется метод математической индукции (ММИ)? Перечислите основные этапы – доказательства с помощью ММИ.

3. Какие операции определены на множестве натуральных чисел? Перечислите свойства введенных операций. Какую алгебраическую структуру относительно введенных операций образует множество натуральных чисел?

4. Назовите причины расширения множества натуральных чисел до множества целых чисел. Дайте определение множества целых чисел и укажите основные свойства этого числового множества.

5. Сформулируйте определение множества рациональных чисел и перечислите основные свойства этого множества.

7. Какие Вы знаете способы построения множества действительных чисел? Расскажите об одном из способов построения.

8. В каком отношении находятся рассмотренные выше числовые множества? Каково соотношение между этими числовыми множествами и точками числовой прямой?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. С помощью метода математической индукции докажите равенства

а) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$; б) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$;

в) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$;

г) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

2. Докажите неравенства с помощью метода математической индукции

а) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$;

б) $(1+x)^n > 1+nx$, где $x > -1$, $n \geq 2$. (неравенство Бернулли).

3. Доказать, что для любого натурального n

а) $(11^{n+2} + 12^{2n+1}) : 133$; б) $(4^n + 15n - 1) :$

9; в) $(3^{2n+2} \cdot 5^{2n} - 3^{3n+2} \cdot 2^{2n}) : 1053$.

4. Докажите, что при всех допустимых значениях x и для любого натурального n имеют места тождества

а) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}$, $x \neq 1$.

б) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \dots + \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)^2 = \frac{1}{x^2 - 1} \left(x^{2n+2} - \frac{1}{x^{2n}}\right) - 2n - 1$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. С помощью метода математической индукции докажите равенства:

а) $1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = n \cdot (2n - 1)$;

б) $\frac{1}{1 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(7n-6) \cdot (7n+1)} = \frac{n}{7n+1}$;

в) $-1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + (-1)^n (2n-1) = (-1)^n \cdot n$;

г) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots + \frac{n}{(2n-1) \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)} = \frac{n \cdot (n+1)}{2 \cdot (2n+1) \cdot (2n+3)}$.

2. Докажите неравенства с помощью метода математической индукции

а) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$; б) $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$;
 в) $|\sin nx| \leq n |\sin x|$ для любого x .

3. Доказать, что для любого натурального n

а) $(6^{2n} - 1) : 35$; б) $(6^{2n} + 3^{n+2} + 3^2) : 11$; в) $(n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n) : 24$.

4. Докажите, что при всех допустимых значениях x и для любого натурального n имеют места тождества

а) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, x \neq 1$;

б) $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \dots + \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x - x^{2^n}}{1 - x^{2^n}}, |x| \neq 1$.

5. Докажите, что число диагоналей выпуклого n -угольника равно $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

6. Числовая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ определяется следующими условиями $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n + 1$. Докажите, что $a_n = \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot 3^{n-1} - 1)$.

Практическое занятие №15.

Тема занятия «Комплексные числа, алгебраическая форма записи»

Цель занятия: формирование понятия комплексного числа и умений выполнять действия над ними в алгебраической форме.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие задачи привели к необходимости расширения поля действительных чисел до поля комплексных чисел?
2. Дайте определение поля комплексных чисел.
3. Какие формы записи комплексного числа Вы знаете? Дайте их определения.
4. Определите следующие понятия: действительная и мнимая части комплексного числа, мнимая единица, коэффициент при мнимой части, сопряженное комплексное число, модуль и аргумент комплексного числа.
5. Какие способы геометрической интерпретации комплексных чисел Вы знаете?
6. Как перевести комплексное число из алгебраической формы записи в тригонометрическую форму и обратно?
7. Определите действия сложения, вычитания, умножения и деления над комплексными числами в алгебраической форме. Докажите записанные Вами правила. Какое свойство сопряженных комплексных чисел используется при делении?
8. Определите действия умножения, деления, возведения в целую степень и извлечение корня n -ой степени ($n \in \mathbb{N}$) для комплексных чисел записанных в тригонометрической и показательных формах. Укажите роль корней n -ой степени из единицы и их геометрическую интерпретацию.
9. Докажите формулы для умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Решите уравнения во множестве комплексных чисел:

а) $x^2 + 2x + 10 = 0$ б) $x^2 - x + 3 = 0$.

2. Составьте квадратное уравнение по его корням

а) $x_1 = 3 - i$, $x_2 = 3 + i$, б) $x_1 = \frac{1-3i}{2}$, $x_2 = \frac{1+3i}{2}$.

3. Изобразите комплексные числа

$z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = -3 + 5i$; $z_3 = -4 - i$; $z_4 = -2 + 4i$; $z_5 = -4$.

4. Найдите действительные числа x и y из условия равенства двух

комплексных чисел $5xi - 2 + 4y = 9i + 2x + 3yi$.

5. Вычислить в алгебраической форме

а) $(3 - 5i) + (1 + 2i)$; б) $(1 + 4i) \cdot (1 + 3i)$; в) $(-3 - i) \cdot (-1 + 2i)$; г) $\frac{1 + 2i}{1 - 3i}$;
д) $\frac{-1 + 3i}{-1 - 5i}$; е) $(3 + 2i)^2$; ж) i^{20} ; з) $\frac{i^8 - 3i^{11}}{1 + 2i^{19}}$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Решите уравнения во множестве комплексных чисел:

а) $x^2 - 3x + 5 = 0$; б) $x^2 + 12x + 40 = 0$.

2. Составьте квадратное уравнение по его корням

а) $x_1 = 7 - i$, $x_2 = 7 + i$; б) $x_1 = \frac{-2 - 5i}{4}$, $x_2 = \frac{-2 + 5i}{4}$.

3. Изобразите комплексные числа

$z_1 = 1 - 3i$; $z_2 = 2 + i$; $z_3 = -1 + 4i$; $z_4 = -3 - 3i$; $z_5 = 3$.

4. Найдите действительные числа x и y из условия равенства двух

комплексных чисел $4x + 5y - 9 + 7(3x - y) \cdot i = 10z + 14yi$.

5. Вычислить в алгебраической форме

а) $(1 - i) - (3 + 2i)$; б) $(2 - 4i) \cdot (1 + 2i)$; в) $(1 + i) \cdot (4 - 3i)$; г) $\frac{1 - i}{1 + 4i}$; д) $\frac{-5 + 3i}{-2 + 2i}$;

$$6. \text{ e) } (1-3i)^3; \text{ ж) } (-i)^{12}; 3) \frac{i^{4n+3} + i^{15}}{2+i^{17}}.$$

Практическое занятие №16.
Тема занятия «Комплексные числа, тригонометрическая и
показательная форма записи»

Цель занятия: формирование понятия комплексного числа и умений выполнять действия над ними в тригонометрической форме.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие формы записи комплексного числа Вы знаете? Дайте их определения.
2. Определите следующие понятия: модуль и аргумент комплексного числа.
3. Какие способы геометрической интерпретации комплексных чисел Вы знаете?
4. Как перевести комплексное число из алгебраической формы записи в тригонометрическую форму и обратно?
5. Определите действия умножения, деления, возведения в целую степень и извлечение корня n -ой степени ($n \in N$) для комплексных чисел записанных в тригонометрической и показательных формах. Укажите роль корней n -ой степени из единицы и их геометрическую интерпретацию.
6. Докажите формулы для умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Изобразите комплексные числа
 $z_1 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right); \quad z_2 = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right).$
2. Переведите комплексные числа в тригонометрическую форму
а) 10; б) $2i$; в) $1+i$; г) $-\sqrt{3}+i$.
3. Вычислите, предварительно переведя числа в тригонометрическую форму

а) $(1+i) \cdot (2-2i)$; б) $\frac{\sqrt{3-i}}{2+2i}$; в) $(1-i)^{15}$; г) $\sqrt{1-i}$; д) $\sqrt[4]{1}$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = -2i$. Представьте их в показательной форме, найдите частные $\frac{z_1}{z_2}$ и результат представьте в алгебраической форме.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Переведите комплексные числа в тригонометрическую форму

а) -2 ; б) $-3i$; в) $-2-2i$; г) $2-2\sqrt{3}i$.

2. Вычислите, предварительно переводя числа в тригонометрическую форму

а) $(-3 + \sqrt{3}i) \cdot (-4 - 4i)$; б) $\frac{-2\sqrt{3} - 2i}{3 - 3i}$; в) $(-\sqrt{3} + 3i)^{12}$; г) $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$; д) $\sqrt[3]{-i}$.

3. Даны комплексные числа $z_1 = -5 + 5i\sqrt{3}$, $z_2 = 3i$. Представьте их в

показательной форме, найдите частные $\frac{z_2}{z_1}$ и результат представьте в

алгебраической форме.

Практическое занятие №17.

Тема занятия «Матрицы и определители»

Цель занятия: Введение основных понятий линейной алгебры, формирование умений выполнять действия над матрицами.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение матрицы, элементов матрицы; расскажите, как матрицы обозначаются, приведите примеры.
2. Введите понятия квадратной, диагональной, единичной, нулевой, ступенчатой, транспонированной, симметрической матриц, матрицы-строки и матрицы-столбца. Приведите примеры.
3. Когда говорят о размерах, а когда о размерности матрицы? Приведите примеры и введите соответствующие обозначения.
4. Дайте определение суммы двух матриц. Какие матрицы можно складывать? Приведите примеры.
5. Как умножить матрицу на число? Приведите пример.
6. Для каких двух матриц можно определить операцию произведения? Введите эту операцию, проиллюстрируйте ее на примере. Коммутативно ли умножение двух матриц?
7. Приведите пример использования матриц в области Вашей предметной деятельности.
8. Какие задачи приводят к понятиям определителей второго и третьего порядков. Как обозначаются определители?
9. Расскажите о правилах вычисления определителей второго и третьего порядков. Как называют правило вычисления определителей третьего порядков?
10. Введите понятия члена определителя, перестановки, транспозиции. Как определить четность перестановки?
11. Дайте определение определителя n -го порядка? Докажите, что правило «треугольника» является частным случаем этого определения.
12. Сформулируйте основные свойства определителей.

13. Введите понятия минора и алгебраического дополнения элемента определителя.
14. Сформулируйте теорему о вычислении определителя и следствие из нее.

Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями
Задания, решаемые в аудитории

1. Выполните действия над матрицами:

$$\text{а) } 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T ;$$

$$\text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Найдите произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = (1 \ 2 \ 4 \ 5), B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите определители второго порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}; \text{ г) } \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}; \text{ д) } \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}.$$

4. По правилу «треугольника» вычислите определители третьего порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 6 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & -7 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Выполните действия над матрицами:

$$\text{а) } 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}^T + 7 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 \\ 2 & 6 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -4 \end{pmatrix}^2.$$

2. Найдите произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 8 & -2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите определители третьего порядков по правилу «треугольника»:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ 12 & 5 & 2 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}, \text{ где } \varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}.$$

4. Решите неравенство:

$$\begin{vmatrix} x-1 & x & 2 \\ -1 & 1 & -x \\ 2 & 1 & x+1 \end{vmatrix} \leq 2.$$

Практическое занятие №18.

Тема занятия «Метод Гаусса решения систем линейных уравнений»

Цель занятия: Сформировать умения и навыки решения систем линейных уравнений, овладение критериями исследования систем линейных уравнений.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определения системы линейных уравнений, однородной и неоднородной систем, решения системы.
2. Какая система называется совместной, а какая несовместной?
3. Дайте определение определенной и неопределенной систем.
4. Сформулируйте критерий совместности систем линейных уравнений.
5. Расскажите о методе Гаусса. Перечислите элементарные преобразования матрицы.
6. Когда, решая систему методом Гаусса, делаем вывод
 - о несовместности системы;
 - об определенности системы;
 - о неопределенности системы?
7. Как найти общее решение системы, приведенной к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса?
8. В чем особенность применения метода Гаусса при решении однородной системы?

Задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

2. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 13x_3 = 0, \\ x_1 - 6x_2 + 13x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 2, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Исследуйте и решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 7 \end{cases}$$

Выполните ИДЗ по теме «Методы решения систем линейных уравнений»

1. Исследовать систему на совместность и число решений системы.
2. Изменить систему таким образом, чтобы она была совместной (определенной и неопределенной), несовместной.
3. Решить систему методом Гаусса.

Системы к индивидуальным домашним заданиям.

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 18, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 = -10, \\ x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = -48. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 12, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 17, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_3 + 6x_4 = 8, \\ 2x_2 + 5x_4 = 9. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
9. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 5x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \right. & 10. \left\{ \begin{array}{l} 8x_1 - 4x_2 + 12x_3 - 3x_4 = 27, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \right. \\
\left| \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_3 = -4 \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{array} \right. \\
\\
11. \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \right. & 12. \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 7x_2 + 8x_3 + x_4 = 15, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41, \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \right. \\
\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 7. \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 40. \end{array} \right. \\
\\
13. \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 25, \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \right. & 14. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + 10x_3 + 13x_4 = 11, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9, \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \right. \\
\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8. \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} 3x_1 + 14x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 13. \end{array} \right. \\
\\
15. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + 14x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \right. & 16. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 9x_3 - 5x_4 = 9, \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \right. \\
\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6. \end{array} \right. \\
\\
17. \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 3, \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \right. & 18. \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \right. \\
\left| \begin{array}{l} x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 5. \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2. \end{array} \right. \\
\\
19. \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \right. & 20. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 21x_3 + 52x_4 = -8, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \right. \\
\left| \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = -48. \end{array} \right. \\
\\
21. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 265x_4 = -48, \\ 4x_2 + 18x_3 + 48x_4 = -10, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \right. & 22. \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 29, \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + x_4 = 41, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 30, \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \right. \\
\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19. \end{array} \right. \\
\\
23. \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 19, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 29, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 12, \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \right. & 24. \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1, \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \end{array} \right. \\
\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{array} \right. & \left| \begin{array}{l} 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{array} \right.
\end{array}$$

$$25. \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 16, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 11. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 16. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ x_1 - 12x_2 + 15x_3 + 5x_4 = 23, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 25, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 19, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для обучающихся по организации
самостоятельной работы
по дисциплине «**Математика**»

Модуль: Математическая и естественно-научная подготовка (ядро СКФУ
химическая направленность)

Направление подготовки 04.03.01 Химия

Направленность (профиль)

Органическая и медицинская химия

Ставрополь 2026

Общая характеристика самостоятельной работы студента при изучении дисциплины

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

Самостоятельная работа включает в себя:

- подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим занятиям) и выполнение соответствующих заданий;
- самостоятельную работу над отдельными модулями (темами) дисциплины в соответствии с рабочей программой;
- написание рефератов, докладов;
- подготовку к практическим занятиям и выполнение предусмотренных ими заданий;
- подготовку ко всем видам аттестаций;
- подготовку презентаций по темам (части темы).

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать

следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;

б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

Работоспособность - способность человека к труду с высокой степенью напряженности в течение определенного времени. Различают

внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организация рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться информацией;
- величина умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н. Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;
- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп работы;
- привычная последовательность и систематичность деятельности;
- правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменой дела. В течение дня работоспособность изменяется. Наиболее плодотворным является *утреннее время (с 8 до 14 часов)*, причем максимальная работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем *послеобеденное* - (с 16 до 19 часов) и *вечернее* (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1-1,5 часа нужны перерывы по 10 - 15 мин, через 3 - 4 часа работы отдых должен быть продолжительным - около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда.

Физически здоровый молодой человек, обладающий хорошей подготовкой и нормальными способностями, должен, будучи студентом, отдавать *учению 9-10 часов в день* (из них 6 часов в вузе и 3 - 4 часа дома). Любой предмет нельзя изучить за несколько дней перед экзаменом. Если студент в году работает систематически, то он быстро все вспомнит, восстановит забытое. Если же подготовка шла аврально, то у студента не будет даже общего представления о предмете, он забудет все сданное.

Следует взять за правило: *учиться ежедневно, начиная с первого дня семестра.*

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные

внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы – это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

Методические рекомендации по подготовке к занятиям

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

ПЛАН-ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ СТУДЕНТАМИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

№ п/п	Вид деятельности студентов	Сроки выполнения	Количество баллов
1 семестр			
1	Практическое занятие 4	6	15
2	Практическое занятие 8	12	20
3	Практическое занятие 17	17	20
	Итого за 1 семестр:		55
2 семестр			
1	Практическое занятие 12	6	15
2	Практическое занятие 24	12	20
3	Практическое занятие 34	17	20
	Итого за 2 семестр:		55

Вопросы к экзамену

1 семестр

Базовый уровень

Вопросы для проверки уровня обученности

- Знат
- ь
1. Определение и способы задания функции. Область определения, область значения, график функции. Обратная функция. Сложная функция.
 2. Основные элементарные функции, элементарные функции (линейная, квадратичная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические), их свойства, графики.
 3. Предел функции. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы.
 4. Бесконечно малые, бесконечно большие и неограниченные функции.
 5. Непрерывные функции и их свойства. Непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций.
 6. Задачи, приводящие к понятию производной, ее геометрический и механический смысл.
 7. Производная сложной функции. Правила дифференцирования. Таблица основных производных.
 8. Функции заданные неявно и параметрически и их

- дифференцирование.
9. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.
 10. Дифференциал функции. Дифференциалы высших порядков.
 11. Правило Лопиталя.
 12. Возрастание и убывание функции, необходимое и достаточные условия.
 13. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Экстремумы функции, необходимое и достаточные условия существования точек экстремума.
 14. Выпуклость и вогнутость кривой, точки перегиба: определение, необходимые и достаточные условия.
 15. Асимптоты плоских кривых, их виды.
 16. Общая схема исследования функции и построения ее графика.
 17. Матрицы, основные определения.
 18. Действия над матрицами: сумма, произведение матрицы на число, произведение матрицы на матрицу.
 19. Определение определителя квадратной матрицы. Определители второго и третьего порядков.
 20. Скаляры и векторы, основные определения. Линейные действия над векторами: сумма, разность, произведение вектора на число.
 21. Линейная зависимость системы векторов, базис и ранг системы векторов, координаты вектора.
 22. Скалярное произведение двух векторов, длина вектора, угол между векторами, условие ортогональности векторов.
 23. Векторное произведение векторов, его свойства, геометрический смысл и приложения. Нахождение векторного произведения в координатной форме.
 24. Смешанное произведение трех векторов, его свойства, вычисление и приложения.
 25. Системы линейных уравнений. Основные определения.
 26. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
 27. Критерий совместности систем линейных уравнений.
 28. Метод координат. Определение положения точки на прямой. Прямоугольные декартовы координаты на плоскости и в пространстве.
 29. Основные задачи на прямоугольные координаты: расстояние между двумя точками, деление отрезка в данном отношении.
 30. Полярная система координат, ее связь с прямоугольной.

•

Уме
ть,
Владеть

1. Найти область определения функции
 $y = \arcsin(5-x) + \log_2 \frac{1}{x^2 - 4}$.
2. Найти область определения функции
 $y = \sqrt{\frac{2-x}{x^2 - 7x - 8}} + \ln(2-3x)$.
3. Указать область значений функции $y = x^2 - 10x + 16$.
4. Указать область значений функции $y = 3^{1-2x} + 5$.
5. Исследовать функцию на четность $y = x^2 - \sqrt{\frac{1-x^2}{3+2x^2}}$.
6. Исследовать функцию на четность $y = \sqrt{\frac{1+x}{2-x}} - 3\sin 5x$.
7. Найти наименьший положительный период функции
 $y = \cos 6x + 4\sin \frac{2x}{9}$.
8. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + x - 6}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{5}}{\frac{3x^2}{7x-8}}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{9+x}-3}$;
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{3}{2x})^{x+5}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt[3]{8-x} - \sqrt[3]{8+x}}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{7x-8}{7x+2} \right|^{x+1}$.
9. Найти производную по определению $y = \cos 2x$.
10. Найти производную, пользуясь правилами дифференцирования $y = (3-7x) \cdot (1+x)^3$.
11. Найти производную сложной функции $y = \log_2 \frac{e^{2x} - e^{4x}}{xe^{5x}}$.
12. С помощью логарифмического дифференцирования найти производную $y = (1-2x)^5 \cdot (2+x)^6 \cdot \sqrt{2-x}$.
13. Найти производную неявно заданной функции $x \cos 3y - 2x + 3y^2 = 0$.
14. 6. Найти производную параметрически заданной функции
 $\begin{cases} x = t \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$.
15. Найти производную по определению $y = \sqrt{2-3x}$.
16. Найти производную, пользуясь правилами дифференцирования $y = \frac{3-5x}{(1+3x)^2}$.
17. Найти производную сложной функции $y = 4\sqrt{\frac{\sin 3x + \cos 3x}{\operatorname{tg}^2 2x}}$.
18. С помощью логарифмического дифференцирования найти

производную $y = (1-x)^4 \cdot (2-7x)^3 \cdot \sqrt[5]{2+3x}$.

19. Найти производную неявно заданной функции

$$\frac{2-3x}{y \ln(x-y)} = 0.$$

20. Найти производную параметрически заданной функции

$$\begin{cases} |x = -t^2 \cos t \\ |y = \sin 2t \end{cases}.$$

21. Вычислить предел, используя правило Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\ln(x-1) + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}{\operatorname{ctg} \pi x}.$$

22. Вычислите приближенно $\sqrt[3]{7,99}$.

23. Определить точки экстремума функции

$$f(x) = (x-1)^3 \cdot (x+1)^2.$$

24. Найти экстремумы функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

25. Найти точки перегиба графика функции

$$f(x) = (x-4)^5 + 4x + 4.$$

26. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x) = (2-x) \cdot (x+1)^2.$$

27. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ найти

произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют.

28. Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Повышенный уровень

Вопросы для проверки уровня обученности

- Знат
1. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Число e . Натуральные логарифмы.
 2. Односторонние и бесконечные пределы.
 3. Сравнение бесконечно малых функций.
 4. Точки разрыва и их классификация.
 5. Связь дифференцируемости с непрерывностью.
 6. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой.
 7. Инвариантность формы первого дифференциала, применение дифференциала к приближенным
- Б

вычислениям. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.

8. Формула Тейлора.
9. Однородная система линейных уравнений, условие существования ненулевых решений.
10. Алгебра с одной операцией: полугруппа, моноид, группа.
11. Алгебра с двумя операциями: кольцо, поле.

Уме
ть,
Владеть

1. Найти область определения $y = e^x + \ln\left(2 - \sqrt{x-3}\right)$.
2. Вычислить пределы а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^3+x^2} \right)$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{3x-5}$.
3. Найти производную функции $y = \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right)$.
4. Найти производную третьего порядка от функции $y = x^2 \ln x$.
5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $(2; -1)$ и касающейся кривой $y = x^2 - 4$.
6. Из куска проволоки длиной l согнуть прямоугольник, чтобы его площадь была наибольшей.
7. На прямой между двумя источниками света силы F и $8F$ найти наименее освещенную точку, если расстояние между источниками 24 м . Учесть, что освещенность точки обратно пропорциональна расстоянию ее от источника света.
8. Водный канал должен иметь заданную глубину и заданную площадь поперечного сечения. Если поперечное сечение есть равнобокая трапеция, то каким должен быть угол наклона ее боковых сторон, чтобы при движении воды по каналу потери на сопротивление трения были наименьшими. Т.е. чтобы сумма нижнего основания и боковых сторон трапеции была наименьшая?
9. Канал, ширина которого 27 м , под прямым углом впадает в другой канал шириной 64 м . Какова наибольшая длина бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов?
10. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $A(-1; 2; -3)$, $B(3; 4; -6)$, $C(1; 1; -1)$.
11. Компланарны ли векторы $\vec{a} = (1; -1; -3)$, $\vec{b} = (3; 2; 1)$, $\vec{c} = (2; 3; 4)$.
12. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A_1(2; 1; 4)$, $A_2(-1; 5; -2)$, $A_3(-7; -3; 2)$, $A_4(-6; -3; 6)$ и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

13. Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 5 \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3 \end{cases}$$

14. Найти фундаментальную систему решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

2 семестр

Базовый уровень

Вопросы для проверки уровня обученности

Знать

1. Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Вывод уравнения. Геометрический смысл углового коэффициента.
2. Общее уравнение прямой на плоскости. Расположение прямой в зависимости от коэффициентов общего уравнения прямой. Параллельность и перпендикулярность прямой координатным осям.
3. Уравнение прямой в отрезках, его вывод. Геометрический смысл коэффициентов уравнения.
4. Угол между прямыми и его нахождение.
5. Кривые второго порядка. Общее уравнение линии второго порядка, классификация кривых второго порядка.
6. Окружность. Каноническое уравнение окружности, его вывод.
7. Эллипс, его каноническое уравнение (с выводом), способы построения.
8. Гипербола, каноническое уравнение (с выводом), асимптоты гиперболы.
9. Парабола, вывод канонического уравнения.
10. Понятие об уравнении поверхности. Плоскость в пространстве. Различные уравнения плоскости: общее, в отрезках, нормальное. Уравнение плоскости, проходящей через три данных точки.
11. Прямая в пространстве. Прямая как линия пересечения двух плоскостей. Канонические уравнения плоскости. Параметрические уравнения плоскости. Приведение уравнений прямой к каноническим.
12. Угол между двумя плоскостями, между двумя

- прямыми, между прямой и плоскостью и их нахождение.
13. Поверхности второго порядка: сфера, эллипсоид. Исследование их формы и построение.
 14. Однополостный и двуполостный гиперболоиды. Исследование их формы и построение.
 15. Эллиптический и гиперболический параболоиды. Исследование их формы и построение.
 16. Цилиндрические и конические поверхности. Исследование их формы и построение.
 17. Высказывания, логические операции над ними: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция. Таблицы истинности.
 18. Понятие множества, способы задания множеств.
 19. Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность, дополнение. Диаграммы Эйлера-Венна.
 20. Множество натуральных чисел, аксиомы Пеано.
 21. Метод математической индукции и его роль.
 22. Алгебраическая форма записи комплексного числа, действия над комплексными числами в алгебраической форме.
 23. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Геометрическая интерпретация модуля и аргументы комплексного числа.
 24. Перевод комплексных чисел из алгебраической формы записи в тригонометрическую и обратно.
 25. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
 26. Первообразная функция, определение и теоремы.
 27. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица основных интегралов.
 28. Метод непосредственного интегрирования в неопределенном интеграле.
 29. Метод замены переменной в неопределенном интеграле.
 30. Метод интегрирование по частям для неопределенного интеграла. Классы интегралов, берущихся по частям.
 31. Интегрирование рациональных выражений, содержащих квадратный трехчлен.
 32. Интегрирование рациональных функций: разложение дробно-рациональных выражений на простейшие дроби.
 33. Интегрирование простейших рациональных дробей.
 34. Интегрирование иррациональных функций: случаи

сведения к интегрированию рациональных функций.

35. Интегрирование тригонометрических и других трансцендентных функций.

36. Интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях.

37. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл как предел интегральных сумм.

38. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

39. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.

40. Приложения определенного интеграла для вычисления площади, объема.

41. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования, интегралы от неограниченных функций.

42. Функции нескольких переменных, основные определения (область определения, область значения, график функции двух переменных).

43. Частные производные первого и более высоких порядков.

44. Экстремум функции двух переменных: определение, необходимое и достаточное условия экстремума.

45. Полный дифференциал функции двух переменных.

46. Задача, приводящая к понятию двойного интеграла, его определение, свойства, вычисление, приложения.

47. Понятие тройных интегралов, свойства, вычисление, приложения.

48. Криволинейные интегралы по длине дуги, их вычисление и приложения.

49. Криволинейные интегралы по координатам, их вычисление и приложения.

50. Скалярные и векторные поля, их характеристики. Производная по направлению. Градиент скалярного поля. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля. Циркуляция векторного поля.

Уметь,
Владеть

1. Проверить истинность формулы

$$p \wedge q \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)) .$$

2. С помощью метода математической индукции (ММИ) доказать, что для любого натурального n верно

равенство

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

3. Вычислить в алгебраической форме $\frac{(-1-i)^2 \cdot (1+i)}{2+3i}$.
4. Вычислить в тригонометрической форме $(2\sqrt{3}-6i)^8$.
5. Вычислить в тригонометрической форме $(4-4\sqrt{3}i) \cdot (-2-2i)$.
6. Найти все корни уравнения $(-7-7i)z^4 - \sqrt{3} + i = 0$.
7. Вычислить в тригонометрической форме $\frac{-4}{2+2\sqrt{3}i}$.
8. Вычислить в тригонометрической форме $\sqrt[3]{-5-5\sqrt{3}i}$.
9. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(5; -4)$ и составляющей с осью Ox тот же угол, что и прямая $5x + 2y - 3 = 0$.
10. Написать уравнение прямой, параллельной прямой $2x - 3y - 12 = 0$ и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 6.
11. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $6x - 4y + 5 = 0$ и $2x + 5y + 8 = 0$ и параллельной оси Ox .
12. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$ и $8x + 4y + 9 = 0$ и параллельной прямой $x + 3y = 0$.
13. Написать каноническое уравнение параболы, симметричной оси Oy и проходящей через точку $A(-1; -4)$.
14. Написать каноническое уравнение эллипса, если большая полуось равна 8, а эксцентриситет 0,2.
15. Найти асимптоты и эксцентриситет гиперболы $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{81} = 1$.
16. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oy перпендикулярно плоскости $3x - 4y + 5z - 12 = 0$.
17. Найти острый угол между прямыми
18. $\begin{cases} 4x - y - z + 12 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$.
19. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(3; -1; 4)$ и $B(1; 1; 2)$.
20. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $9x + 5y + z - 13 = 0$,

$-5x - y + 3z + 1 = 0$ и через точку $A(1; 2; 0)$.

21. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4; -2; 1)$, $B(2; 4; -3)$, $O(0; 0; 0)$.

22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1; 2; -1)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{4}$.

23. Найти острый угол между прямой $\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x-y+4z+5=0 \end{cases}$ и плоскостью $x+y+3z-1=0$.

24. Найти неопределенные интегралы:
 $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} + 3x + \frac{(x-1)^{3/4}}{\sqrt[6]{x}} \right) dx$; $\int \frac{-3x-3}{\sqrt{x^2+2x-1}} dx$; $\int \frac{x}{4} \operatorname{arccotg} 2x dx$.

Вычислить:

$$\int \frac{(2+3x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$26. \int x 7^x dx;$$

$$27. \int x \arcsin \frac{x}{5} dx;$$

$$28. \int (x^2 + 4x) e^{3x} dx;$$

$$29. \int 3x \sin(x^2 - 1) dx;$$

$$30. \int (x-1) \ln 2x dx;$$

$$31. \int (2x^2 - 3) \cos 3x dx;$$

$$32. \int \sqrt{x+1} dx;$$

$$33. \int \frac{6}{x^2 - 3x + 5} dx.$$

Найти определённые интегралы

$$34. \int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos 2x dx;$$

$$35. \int_{-4}^4 \frac{x-5}{\sqrt{x+5}} dx.$$

36. Функции нескольких переменных: линии и поверхности уровня.

37. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

38. Полный дифференциал и его приложение к приближенным вычислениям.

39. Замена переменных при вычислении двойного

- интеграла.
40. Замена переменных при вычислении тройного интеграла.
 41. Понятие поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Односторонние и двусторонние поверхности.
 42. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы первого и второго рода, их вычисление.
 43. Основные интегральные формулы анализа: формула Грина, формула Остроградского-Гаусса, формула Стокса.

Повышенный уровень

Вопросы для проверки уровня обученности

- | | |
|------|--|
| Знат | 1. Преобразования прямоугольной системы координат: параллельный перенос, поворот и зеркальное отображение осей координат. |
| ь | 2. Пространственные системы координат: прямоугольная, декартова, цилиндрическая, сферическая и связь между ними. |
| | 3. Нормальное уравнение прямой, его вывод. Геометрический смысл параметров уравнения. Нахождение расстояния от точки до прямой. |
| | 4. Уравнение прямой проходящей через две точки. Составление уравнений прямой параллельной данной; перпендикулярной данной. |
| | 5. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. |
| | 6. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. |
| | 7. Полярное уравнение эллипса, гиперболы, параболы. |
| | 8. Условия параллельности двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости. Условия перпендикулярности двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости. |
| | 9. Поверхности вращения второго порядка, их канонические уравнения. |
| | 10. Логические формулы, их виды. Основные законы логики (уметь доказать любой из законов). |
| | 11. Алгебра с одной операцией: полугруппа, моноид, группа. |
| | 12. Алгебра с двумя операциями: кольцо, поле. |
| | 13. Кольцо целых чисел. |
| | 14. Поле рациональных чисел. |
| | 15. Сечения в поле рациональных чисел, определение поля действительных чисел. |
| | 16. Определение поля комплексных чисел. |

17. Показательная форма записи комплексного числа. Действия над комплексными числами в показательной форме.
18. Интегрирование иррациональных выражений, содержащих квадратный трехчлен.
19. Интегрирование рациональных функций: сведение неправильных рациональных дробей к правильным.
20. Применение подстановок Эйлера к интегрированию иррациональных выражений.
21. Приложения определенного интеграла для вычисления длины дуги, площади поверхности вращения.
22. Численное интегрирование. Формула прямоугольников. Формула трапеций. Формула Симпсона.
23. Функции нескольких переменных: линии и поверхности уровня.
24. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.
25. Полный дифференциал и его приложение к приближенным вычислениям.
26. Замена переменных при вычислении двойного интеграла.
27. Замена переменных при вычислении тройного интеграла.
28. Понятие поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Односторонние и двусторонние поверхности.
29. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы первого и второго рода, их вычисление.
30. Основные интегральные формулы анализа: формула Грина, формула Остроградского-Гаусса, формула Стокса.

- | | |
|---------------------------|--|
| Уме
ть,

Владеть | <ol style="list-style-type: none"> 1. Доказать равенство множеств и проиллюстрировать равенство на диаграмме Эйлера-Венна $A/(B \cup C) = A/B \cap C$ 2. Доказать ММИ, что для любого натурального n : $(2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}) \div 17$. 3. Найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, если $A(-1;2;-3)$, $B(3;4;-6)$, $C(1;1;-1)$. 4. Компланарны ли векторы $\overline{a} = (1;-1;-3)$, $\overline{b} = (3;2;1)$, $\overline{c} = (2;3;4)$. 5. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A_1(2;1;4)$, $A_2(-1;5;-2)$, $A_3(-7;-3;2)$, $A_4(-6;-3;6)$ и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. 6. Найти уравнение прямой, которая проходит через точку пересечения прямых $x + y - 1 = 0$ и $x + 2y + 1 = 0$ и отсекает на отрицательной части оси Oy отрезок в 2 единицы. |
|---------------------------|--|

7. Найти угол между плоскостями $3x - y + 2z + 15 = 0$ и $5x + 9y - 3z - 1 = 0$.
8. Определить вид поверхности, заданной уравнением $y^2 = 6x - 4$, и построить схематично ее.
Вычислить неопределённые интегралы
9. $\int \frac{6-4x}{x^2-3x+5} dx$;
10. $\int \frac{x^2-5}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)} dx$;
11. $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x} dx$;
12. $\int \frac{6-4x}{\sqrt{x^2-3x+5}} dx$;
13. $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt[12]{x^5}} dx$;
14. $\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx$;
15. $\int \sin 2x \cdot \sin 6x dx$;
16. $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$;
17. $\int \frac{1+\cos x}{1+\cos x+\sin x} dx$;
18. $\int \frac{5 \operatorname{tg} x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx$.

Исследовать несобственные интегралы

19. $\int_{-\infty}^1 e^x dx$;
20. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

21. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x - 7$ и $y = 3 - x$.

22. Вычислить длину дуги кривой, заданной

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 6 \cos^3 t \\ y = 6 \sin^3 t \end{array} \right., \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$$

23. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = (x-1)^2$ и $y = 1$ вокруг

оси Oy .

24. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi$.
25. Вычислить длину дуги кривой, заданной уравнением в полярных координатах $r = 6 \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$.
26. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
27. Найти радиус сходимости, интервал сходимости и область сходимости ряда $\frac{2x^2}{3} + \frac{4x^3}{8} + \dots + \frac{2^{2n-1}x^4}{n^2-1}$.
28. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x - x^2$ и $y = -x + 2$ вокруг оси Ox .
29. Показать, что функция $z = \frac{x}{y}$ удовлетворяет уравнению $x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
30. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.
31. Вычислить приближенное значение функции Z в точке B , исходя из значения z_0 функции в точке A , если $Z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1$; $A(2;4), B(1,98;3,91)$.
32. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертежи данного тела и его проекции на плоскость xOy .
 $z = 0, 4z = y^2, 2x - y = 0, x + y = 9$.
33. Вычислить криволинейный интеграл $\int_l (x^2 + y)dx - (y^2 + x)dy$ вдоль ломанной $l = ABC$, где $A(1;2), B(1;5), C(3;5)$. Сделать чертеж.

Коллоквиум 1
Базовый уровень
Тема 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ
ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

1. Дайте определение функции.
2. Что называется областью определения функции?
3. Что называется областью значений функции?
4. Дайте определение графика функции $y=f(x)$.
5. Дайте определение возрастающей и убывающей функции.
6. Какая функция называется монотонной?
7. Дайте определение четной и нечетной функции.
8. Какая функция называется периодической?
9. Определите нули функции.
10. Что называется промежутком знакопостоянства функции?
11. Какая функция называется ограниченной?
12. Какие Вы знаете способы задания функций?
13. Что называется пределом функции в точке?
14. Определите предел функции на бесконечности.
15. Чему равен предел постоянной величины?
16. Чему равен предел: а) суммы; б) разности; в) произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$?
17. Чему равен предел частного функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ($x \rightarrow a$)?
18. Запишите первый замечательный предел и следствия из него.
19. Запишите второй замечательный предел и следствия из него.
20. Что называется приращением аргумента?
21. Что называется приращением функции?
22. Какая функция называется непрерывной в точке x_0 ?
23. Какая функция называется непрерывной на интервале?
24. Что называется точкой разрыва функции?
25. Какие задачи, приводящие к понятию производной, Вам известны?
26. Дайте определение производной функции в точке.
27. Опишите порядок вычисления производной функции по определению.
28. Чему равна производная: а) постоянной б) алгебраической суммы дифференцируемых функций; в) произведения двух дифференцируемых функций; г) дроби; д) сложной функции; е) обратной функции?
29. Запишите формулы для нахождения производных основных элементарных функций.
30. Дайте определение дифференциала функции.
31. Сформулируйте основные свойства дифференциалов.
32. Запишите формулу логарифмического дифференцирования. Когда применяется формула логарифмического дифференцирования?

33. Дайте определение неявного задания функции. Приведите примеры. Как от неявного задания перейти к явному заданию функции? Всегда ли это можно сделать. Приведите примеры.
34. Как проводят дифференцирование неявной функции?
35. Дайте определение параметрически заданной функции. Приведите примеры. Расскажите как от параметрического задания функции перейти к явному заданию функции.
36. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов функции.
37. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов функции.
38. Расскажите о формуле Тейлора и формуле Маклорена. Для чего эти формулы могут использоваться?
39. Дайте определение возрастающей и убывающей функции на некотором промежутке. Как найти интервалы монотонности функции?
40. Дайте определения экстремумов функции.
41. Определите наибольшее и наименьшее значения функции.
42. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
43. Какие точки называются критическими?
44. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.
45. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции? Укажите порядок решения этой задачи.
46. Определите понятия выпуклость и вогнутость графика функции. Какую точку называют точкой перегиба? Как найти интервалы выпуклости и вогнутости функции? Как определить точки перегиба?

Повышенный уровень

Тема 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что множество точек координатной плоскости является графиком некоторой функции.
2. Определите функцию обратную по отношению к функции $y=f(x)$.
3. Определите целую рациональную функцию.
4. Какая функция называется линейной? Что является ее графиком?
5. Какая функция называется квадратичной? Что является ее графиком?
6. Определите дробно-рациональную функцию.
7. Какую функцию называют степенной? Графики каких степенных функций Вы можете построить?
8. Определите показательную функцию. Постройте в тетради графики функций $y = 2^x$, $y = (1/2)^x$.

9. Какую функцию называют логарифмической? Постройте в тетради графики функций $y = \log_2 x$, $y = \lg x$, $y = \log_{1/2} x$.
10. Какие тригонометрические функции Вы знаете? Постройте графики основных тригонометрических функций в тетради.
11. Назовите обратные тригонометрические функции. Постройте их графики.
12. Вспомните основные преобразования графиков функций (параллельный перенос на вектор, растяжение или сжатие от координатных осей), приведите примеры.
13. Дайте определение предела функции слева (справа).
14. Может ли функция $f(x)$ иметь два различных предела при $x \rightarrow a$?
15. Как можно избавиться от неопределенности вида $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, если числитель и знаменатель дроби содержат многочлены?
16. Как разложить квадратный трехчлен на линейные множители? Сформулируйте теорему Виета.
17. Как можно избавиться от неопределенности $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, если числитель и (или) знаменатель содержат иррациональные выражения? Запишите формулы сокращенного умножения, помогающие определить сопряженные выражения для данных.
18. Сформулируйте правила вычисления пределов дроби при $x \rightarrow \infty$, если числитель и знаменатель содержат многочлены.
19. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
20. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
21. Какова простейшая связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?
22. Какова простейшая связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой величиной?
23. Что значит сравнить две бесконечно малые величины?
24. Какие две бесконечно малые величины называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных величин.
25. Как эквивалентные бесконечно малые величины могут быть использованы при вычислении пределов функции?
26. Предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке. Что можно сказать о непрерывности этой функции в точке x_0 ?
27. Какая точка называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$?
28. Какая точка называется точкой разрыва второго рода функции $f(x)$?
29. Сформулируйте теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями.
30. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции, составленной из непрерывных функций.

31. Сформулируйте теорему о непрерывности основных элементарных функций.
32. Сформулируйте свойства функции, непрерывной на замкнутом интервале.
33. Как найти производную функции $y=f(x)$ по определению?
34. В чем состоит механический смысл производной?
35. Как связаны между собой дифференцируемость функции в некоторой точке с непрерывностью функции в этой точке?
36. Приведите пример непрерывной функции, не имеющей производной в некоторой точке.
37. Дайте определение сложной функции. Приведите примеры.
38. Сформулируйте теорему для нахождения производной сложной функции.
39. Составьте таблицу нахождения производных для функций вида $f(u)$, где f - одна из элементарных функций, $u = u(x)$.
40. Запишите формулу для вычисления дифференциала первого и последующих порядков.
41. В чем заключается свойство инвариантности формы дифференциала? Дифференциалы каких порядков обладают указанным свойством?
42. Расскажите о геометрическом смысле дифференциала первого порядка.
43. Как используется дифференциал в приближенных вычислениях?
44. Выведите формулу приближенного вычисления значений функций. Как определить погрешность приближения?
45. Дайте определение производной второго порядка, производной n -го порядка.
46. Расскажите о дифференцировании показательной-степенной функции.
47. Расскажите о нахождении производных высших порядков от неявно заданных функций.
48. Запишите формулы для нахождения производных первого и второго порядков от параметрически заданной функции.
 - а. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
 - б. Теоремы Ферма, Роля.
 - с. Теоремы Лагранжа, Коши.
49. Выведите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
50. Сколько раз подряд можно применять правило Лопиталя и когда это правило неприменимо?
51. Как можно раскрыть неопределенность вида $0 \cdot \infty$ при вычислении предела функции?
52. Что нужно сделать при вычислении предела функции, если он содержит неопределенность вида $\infty - \infty$?
53. Какой прием применяют для применения правил Лопиталя, если предел функции содержит неопределенность вида 0^0 , или ∞^0 , или 1^∞ ?

54. Разложите по формуле Тейлора (Маклорена) функции $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.
55. Как ведется исследование функции на экстремум с помощью второй производной?
56. Укажите порядок исследования функции на возрастание и убывание и экстремумы.
57. Что называется асимптотой кривой $y = f(x)$?
58. Как найти асимптоту $y = ax + b$ кривой $y = f(x)$, т.е. как найти a и b ?
59. По какой схеме следует проводить исследование функции и построение ее графика?
60. Для решения каких вопросов исследования функции и построения ее графика:
 - а) не нужны теория пределов и дифференциальное исчисление?
 - б) необходимо уметь вычислять пределы?
 - в) нужна первая производная? г) нужна вторая производная

Коллоквиум 2

Базовый уровень

Тема 3. ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Высказывания, логические операции над ними.
2. Логические формулы, их виды,
3. Понятие множества, способы задания множеств.
4. Операции над множествами.
5. Множество натуральных чисел, аксиомы Пеано,
6. Метод математической индукции и его роль.
7. Алгебраическая форма записи комплексного числа, действия над комплексными числами в алгебраической форме.
8. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Геометрическая интерпретация модуля и аргументы комплексного числа.
9. Перевод комплексных чисел из алгебраической формы записи в тригонометрическую и обратно.
10. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Тема 4. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Кривые второго порядка. Общее уравнение линии второго порядка, классификация кривых второго порядка.
2. Окружность. Каноническое уравнение окружности, его вывод.
3. Эллипс, его каноническое уравнение (с выводом), способы построения.
4. Гипербола, каноническое уравнение (с выводом), асимптоты гиперболы.
5. Парабола, вывод канонического уравнения.
6. Понятие об уравнении поверхности.
7. Плоскость в пространстве. Различные уравнения плоскости: общее, в отрезках, нормальное.

8. Уравнение плоскости, проходящей через три данных точки.
9. Прямая в пространстве. Прямая как линия пересечения двух плоскостей.
10. Канонические уравнения плоскости.
11. Параметрические уравнения плоскости.
12. Приведение уравнений прямой к каноническим.
13. Угол между двумя плоскостями, между двумя прямыми, между прямой и плоскостью и их нахождение.
14. Условия параллельности двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости. Условия перпендикулярности двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости.
15. Поверхности второго порядка: сфера, эллипсоид. Исследование их формы и построение.

Повышенный уровень

Тема 3. ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Законы логики.
2. Диаграммы Эйлера – Венна.
3. Алгебра с одной операцией: полугруппа, моноид, группа.
4. Алгебра с двумя операциями: кольцо, поле.
5. Кольцо целых чисел.
6. Поле рациональных чисел.
7. Сечения в поле рациональных чисел, определение поля действительных чисел
8. Показательная форма записи комплексного числа. Действия над комплексными числами в показательной форме.
9. Показательная форма записи комплексного числа. Действия над комплексными числами в показательной форме.

Тема 4. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.
2. Полярное уравнение эллипса, гиперболы, параболы.
3. Однополостный и двуполостный гиперболоиды. Исследование их формы и построение.
4. Эллиптический и гиперболический параболоиды. Исследование их формы и построение.
5. Цилиндрические и конические поверхности. Исследование их формы и построение.

Коллоквиум 3

Базовый уровень

Тема 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Дайте определение первообразной функции для данной функции $f(x)$ на данном промежутке. Как связаны между собой две первообразные для функции $f(x)$ в некотором промежутке?

2. Что называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$?
3. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла (правила интегрирования).
4. Составьте таблицу основных интегралов.
5. В чем суть метода непосредственного интегрирования?
6. Запишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле. Когда целесообразно применять замену переменной интегрирования?
7. Запишите формулу интегрирования по частям. Когда целесообразно применение способа интегрирования по частям?
8. Интегралы какого вида можно вычислять с помощью формулы интегрирования по частям?
9. Расскажите о нахождении интегралов вида $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$;
 $\int \frac{(Ax + B)dx}{ax^2 + bx + c}$.
10. Как находится интеграл от целой рациональной функции?
11. Какая рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется правильной?
12. Рациональные дроби, какого вида называются элементарными? Как связана правильная рациональная дробь с элементарными дробями? Расскажите, как составляется схема разложения правильной дроби на основные элементарные дроби.
13. Какой способ применяется для разложения правильной рациональной дроби на сумму элементарных дробей?
14. Интегрирование иррациональных функций, содержащих квадратный трехчлен.
15. Какие подстановки удобно применить для взятия следующих интегралов:

$$\int R \left(x, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{s}{t}} \right) dx; \quad \int R \left(x, (ax + \beta)^{\frac{p}{q}}, \dots, (ax + \beta)^{\frac{s}{t}} \right) dx;$$

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^{\frac{p}{q}}, \dots, \left(\frac{ax + b}{cx + d} \right)^{\frac{s}{t}} \right) dx,$$
где R - рациональная функция,
 $p, q, \dots, s, t$ - целые числа.
16. Расскажите о нахождении интегралов от четной степени синуса или косинуса.
17. Расскажите о нахождении интегралов от нечетной степени синуса или косинуса.
18. Приведите примеры «неберущихся» интегралов.

19. Что называется определенным интегралом от a до b от функции $f(x)$?

20. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
21. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
22. Запишите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.
23. Запишите формулу замены переменной в определенном интеграле.
24. Что называется площадью плоской фигуры? Как найти площадь плоской фигуры с помощью определенного интеграла?
25. Что называется объемом тела? Как найти объем тела вращения?
26. Что называется длиной дуги? Как найти длину дуги: если функция задана в декартовых координатах?
27. Какие еще приложения определенных интегралов Вы знаете?
28. Несобственные интегралы с бесконечным верхним, бесконечным нижним пределами интегрирования, с бесконечными пределами интегрирования.
29. Несобственные интегралы от разрывных функций.

Повышенный уровень

Тема 5.ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Сформулируйте теорему об инвариантности формул интегрирования.
2. Расскажите, как применяется формула замены переменной в неопределенном интеграле. Что необходимо сделать после сведения интеграла к табличному?
3. Что принимается за u для интегралов вида $\int P(x)e^{ax}dx$, $\int P(x)\sin axdx$, $\int P(x)\cos axdx$ ($P(x)$ - многочлен)?
4. Что принимается за u для интегралов вида $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arctgxdx$, $\int P(x)\operatorname{arccot}gxdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$ ($P(x)$ - многочлен)?
5. Как вычисляются интегралы $\int a^{kx} \sin nxdx$ и $\int a^{kx} \cos nxdx$?
6. Как интегрируются правильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от правильной рациональной дроби.
7. Как интегрируются неправильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от неправильной рациональной дроби.
8. Всегда ли можно найти интеграл от рациональной функции?
9. Вычисление интегралов $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$.
10. Интегралы от дифференциального бинома $\int x^m(a + bx^n)^p dx$, случаи интегрирования в элементарных функциях.

11. Сформулируйте порядок отыскания интеграла от функции, содержащей квадратный корень из квадратного трехчлена в знаменателе дроби и линейную функцию в числителе.
12. Какие способы нахождения интеграла вида $\int R(x)\sqrt{ax^2 + bx + c}dx$ можете указать?
13. Расскажите о применении подстановок Эйлера при вычислении интегралов $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$. Сколько существует подстановок Эйлера? В каком случае может применяться каждая из них? Без какой из подстановок можно было бы обойтись? Объясните почему?
14. Какие формулы применяются для вычисления следующих интегралов:
 - а) $\int \sin ax \cos bxdx, \int \cos ax \cos bxdx, \int \sin ax \sin bxdx$, где $a \neq b$.
 - б) $\int \sin^m x dx, \int \cos^n x dx$, где m и n положительные целые числа.
 - в) Какие случаи необходимо рассмотреть при нахождении интегралов вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$.
15. Какую замену следует сделать при нахождении интегралов вида $\int tg^n x dx, \int ctg^n x dx$?
16. Какой способ нахождения интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx, \int R(tgx)dx, \int R(e^x)dx$ Вы можете предложить? К какому типу интегралов они сводятся?
17. Какие подстановки удобно применить для взятия следующих интегралов:
 - а) $\int f(\sin x) \cos x dx$;
 - б) $\int f(\cos x) \sin x dx$;
 - в) $\int f(tgx) \frac{dx}{\cos^2 x}$ или $\int f(tgx) dx$;
 - г) $\int f(ctgx) \frac{dx}{\sin^2 x}$ или $\int f(ctgx) dx$;
 - д) $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R - рациональная функция.
18. На что следует обращать внимание при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной по сравнению с неопределенным интегралом?
19. Определите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования. Когда несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся (расходящимся)?
20. Для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
21. Определите несобственный интеграл от разрывной функции. Для несобственного интеграла от разрывной функции запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.

22. Сформулируйте теорему сравнения для несобственных интегралов.
23. Дайте определение абсолютно сходящегося интеграла.
24. На что следует обращать внимание при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной по сравнению с неопределенным интегралом?
25. Определите несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования.
26. Когда несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся (расходящимся)?
27. Для сходящегося несобственного интеграла с бесконечным верхним пределом интегрирования запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
28. Определите несобственный интеграл от разрывной функции.
29. Когда несобственный интеграл от разрывной функции называется сходящимся (расходящимся)?
30. Для несобственного интеграла от разрывной функции запишите обобщенную формулу Ньютона-Лейбница.
31. Сформулируйте теорему сравнения для несобственных интегралов.
32. Дайте определение абсолютно сходящегося интеграла. Дайте определение полярной системы координат. Установите формулы, связывающие полярные и прямоугольные координаты точки.
33. Запишите формулу для вычисления площади плоской фигуры в полярных координатах. Как найти длину дуги: если функция задана в полярных координатах; параметрически?
34. Признаки сравнения.

Коллоквиум 4

Базовый уровень

Тема 7.ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Функции нескольких переменных. Основные определения.
2. Область определения и область значений функции двух переменных.
3. График функции двух переменных.
4. Частные производные функции нескольких переменных. Определение, правила вычисления.
5. Смешанные производные.
6. Теорема о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования.
7. Полный дифференциал.
8. Дифференциал сложной функции.
9. Дифференциалы высших порядков.
10. Экстремум функции двух переменных.
11. Необходимое условие экстремума для функции двух переменных.
12. Достаточное условие экстремума для функции двух переменных.

Повышенный уровень

Тема 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Линии уровня.
2. Поверхности уровня.
3. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
4. Свойства непрерывных функций двух переменных.
5. Производные сложной функции.
6. Неявные функции и их дифференцирование.
7. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.
8. Условный экстремум, метод множителей Лагранжа.
9. Вывод метода наименьших квадратов с помощью решения задачи на нахождение экстремума функции нескольких переменных.

Коллоквиум 5

Базовый уровень

Тема 8.ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Определение двойного интеграла.
2. Свойства двойного интеграла.
3. Сведение двойного интеграла к повторным интегралам.
4. Приложения двойного интеграла.
5. Определение тройного интеграла.
6. Свойства тройного интеграла.
7. Сведение тройного интеграла к повторным интегралам.
8. Приложения тройного интеграла.
9. Криволинейные интегралы по длине дуги, их определение и вычисление.
10. Криволинейные интегралы по координатам, их определение и вычисление.
11. Понятие поверхности.
12. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
13. Односторонние и двусторонние поверхности.
14. Площадь поверхности.
15. Поверхностные интегралы первого рода, их вычисление.

Тема 9.ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Скалярные поля, определение, описание.
2. Производная по направлению.
3. Определение векторного поля.
4. Дивергенция, ротор и производная по направлению векторного поля.

Повышенный уровень

Тема 8.ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
2. Замена переменных при вычислении двойного интеграла.
3. Переход к полярной системе координат при вычислении двойного интеграла.

4. Задачи, приводящие к понятию тройного интеграла.
5. Замена переменных при вычислении тройного интеграла.
6. Переход к цилиндрической и сферической системам координат при вычислении тройного интеграла.
7. Приближённое вычисление кратных интегралов. Аналог формул прямоугольников, трапеций, Симпсона, касательных.
8. Сравнительный анализ свойств криволинейных интегралов первого и второго рода.
9. Приложения криволинейных интегралов первого рода.
10. Приложения криволинейных интегралов второго рода.
11. Поверхностные интегралы второго рода

Тема 9. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Градиент скалярного поля.
2. Циркуляция векторного поля.
3. Формула Грина, её применение.
4. Формула Остроградского-Гаусса.
5. Формула Стокса.
6. **Критерии оценивания компетенций**

Оценка "*отлично*" выставляется, если студент при ответе на вопросы как базового так и повышенного уровня показывает глубокое и всестороннее знание предмета, обязательной и дополнительной литературы, аргументировано и логически стройно излагает материал, пользуясь математической символикой, может применять знания для анализа конкретных ситуаций, свободно ориентируется в межпредметных связях.

Оценка «*хорошо*» ставится, если при ответе на вопросы базовой части студент показывает знание предмета, обязательной литературы, знакомстве с дополнительной литературой, аргументировано излагает материал, умеет применять знания для анализа конкретных ситуаций, однако незначительно нарушает последовательность изложения материала, дает недостаточно полное, хотя и верное определение понятий.

Оценка «*удовлетворительно*» ставится, если студент при ответе на вопросы базовой части показал, что он в основном знает предмет, обязательную литературу, может практически применять свои знания, но программный материал излагает фрагментарно и непоследовательно, допускает отдельные ошибки и погрешности при применении математической символики и понятий, слабо ориентируется в межпредметных связях;.

Оценка «*неудовлетворительно*» ставится, если студент не отвечает на предлагаемые ему вопросы базовой или его ответ показывает, что не усвоено основное содержание предмета, обнаруживается незнание большей части учебного материала, допускаются грубые ошибки при формулировке теорем, определении основных понятий, неправильно используется математическая символика.

7. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя устный опрос студентов в форме индивидуального собеседования на вопросы коллоквиума. Каждому студенту предлагается по одному вопросу из каждой темы. Сначала студент отвечает на вопросы базового уровня. При успешном ответе ему предлагается один-два вопроса из вопросов повышенного уровня, что позволяет преподавателю определить уровень владения материалом.

Предлагаемые студенту задания позволяют проверить компетенции УК-1, ОПК-3. Для подготовки к данному оценочному мероприятию необходимо прочитать лекционный материал, найти ответы на поставленные вопросы, изучить дополнительную литературу, установить взаимосвязи между изучаемыми понятиями, запомнить основные определения, свойства, теоремы, продумать, где они могут применяться. Рекомендуется готовиться к данному контрольному мероприятию в течение семестра, разбирая теоретические задания для оценки сформированности компетенций к каждому практическому занятию. Эти задания предлагаются в УМК дисциплины «Математика», представленном на кафедре высшей математики.

При подготовке к ответу студенту не разрешается пользоваться никакими справочными материалами. Для подготовки к ответу даётся время на подготовку до 10-15 минут, в течение которого студент может записать план своего ответа, основные формулы, план доказательства теорем. Для подготовки к ответу на вопросы повышенного уровня предлагается дополнительное время.

Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой дисциплины. При проверке усвоения этого материала производится выявление полноты, прочности усвоения студентами теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

При оценке в первую очередь учитываются показанные студентами знания и умения (их полноту, глубину, прочность, использование). Оценка также зависит от наличия и характера погрешностей. Среди погрешностей выделяют ошибки и недочеты. Погрешность считается ошибкой, если она свидетельствует о том, что студент не овладел основными знаниями, умениями, указанными в программе.

К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или о отсутствии знаний не считающихся основными в соответствии с программой. Недочетами также являются: погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного студентом задания или способа его выполнения, неаккуратная запись, небрежное выполнение чертежа, графика.

Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература

1. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд., испр. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2015. - 816 с. : ил., табл. - Прил.: с. 809-815. - ISBN 978-5-17-083948-3. - ISBN 978-5-94666-735-7
2. Высшая математика в упражнениях и задачах : [учеб. пособие] : В 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко, Ч. 1. - 7-е изд., испр. - М. : Мир и Образование, 2015. - 308 с. : ил., рис. - ISBN 978-5-94666-566-7
3. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. - 12-е изд. - Москва : Юрайт, 2016. - 480 с. : ил. - (Бакалавр). - Гриф: Рек. УМО и МО. - Предм. указ.: с. 474-479. - ISBN 978-5-9916-6110-2
4. Ильин, В. А. Высшая математика : учебник для студентов вузов / В. А. Ильин, А. В. Куркина ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - 3-е изд., перераб. и доп. - Москва : Проспект : МГУ, 2016. - 593 с. : ил. - (Классический университетский учебник). - Гриф: Рек. МО. - Алф.-предм. указатель: с. 577-584. - ISBN 978-5-392-18988-5
5. Шипачев, В. С. Высшая математика. Полный курс : учебник для академического бакалавриата : для студентов высших учебных заведений, обучающихся по всем направлениям и специальностям / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова. - 4-е изд., испр. и доп. - Москва : Юрайт, 2015. - 608 с. : ил., табл. - (Бакалавр. Академический курс). - Гриф: Рек. УМО. - ISBN 978-5-9916-4358-0

Дополнительная литература

- 1 Бугров, Я. С. Высшая математика : [Учебник для студ. вузов*] : В 3 т. / Под ред. В.А. Садовниченко, Т. 2, Дифференциальное и интегральное исчисление. - Изд. 5-е, стер. - М. : Дрофа, 2003. - 512 с. : ил. - (Высшее образование Современный учебник). - Предм. указат.: с. 502-509. - ISBN 5-7107-6555-4. - 5-7107-6557-0
- 2 Бугров, Я. С. Высшая математика : Учебник для студентов вузов* : В 3 т. / Под ред. В.А. Садовниченко, Т.1, Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. - Изд. 5-е стер. - М. : Дрофа, 2003. - 288 с.: ил. - (Высшее образование Современный учебник). - ISBN 5-7107-6554-6. - 5-7107-6557-0
- 3 Бугров, Я. С. Высшая математика : Учебник для студентов вузов* : В 3 т. / Под ред. В.А. Садовниченко, Т.3, Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. - 5-е изд., стер. - М. : Дрофа, 2003. - 512 с.: ил. - (Высшее образование Современный учебник). - ISBN 5-7107-6556-2. - 5-7107-6557-0
- 4 Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие для прикладного бакалавриата : для студентов вузов / В. Е. Гмурман. - 11-е изд., перераб. и доп. - Москва : Юрайт, 2014. - 405 с. : ил., табл. - (Бакалавр. Прикладной курс). - Прил.: с. 388-404. - Гриф: Рек. МО. - ISBN 978-5-9916-3625-4
- 5 Дюженкова, Л. И. Практикум по высшей математике : учеб. пособие : в 2 ч. / Л. И. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. А. Михалин, Ч. 1. - М. : Бином. Лаборатория знаний, 2009. - 448 с. : ил. - Библиогр.: с. 441. - Предм. указ.: с. 442-448. - ISBN 978-5-94774-998-4. - ISBN 978-5-94774-335-7
- 6 Дюженкова, Л. И. Практикум по высшей математике : учеб. пособие : в 2 ч. / Л. И. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. А. Михалин, Ч. 2. - М. : Бином. Лаборатория знаний, 2009. - 469 с. : ил. - Библиогр.: с. 462. - Предм. указ.: с. 463-468. - ISBN 978-5-94774-999-1. - ISBN 978-5-94774-335-7
- 7 Каплан, И. А. Практикум по высшей математике : в 2 т. : учеб. пособие / И. А. Каплан, В. И. Пустынников, Т. 1. - Изд. 6-е, испр. и доп. - М. : ЭКСМО, 2008. - 576 с. : ил. - (Образовательный стандарт XXI). - ISBN 978-5-699-17447-8
- 8 Каплан, И. А. Практикум по высшей математике : в 2 т. : учеб. пособие / И. А. Каплан, В. И. Пустынников, Т.2. - Изд. 6-е, испр. и доп. - М. : ЭКСМО, 2008. - 512 с. : ил. - (Образовательный стандарт XXI). - ISBN 978-5-699-17451-5
- 9 Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике : учебное пособие : для студентов высших учебных заведений / В. С. Шипачев. - 10-е изд., стер. - Москва : ИНФРА-М, 2015. - 304 с. : ил. - (Высшее образование). - Гриф Доп. МО. - ISBN 978-5-16-010071-5