

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению практических работ
по дисциплине «Математические методы и модели в управлении»
для студентов направления подготовки
38.03.04 «Государственное и муниципальное управление»

Ставрополь, 2026

Методические указания по дисциплине «Математические методы и модели в управлении» содержат задания для студентов, необходимые для проведения практических занятий.

Проработка практических заданий позволит студентам приобрести необходимые знания в области математических методов и моделирования в управлении и систематизировать знания, полученные на лекциях.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Практическое занятие 1 Методы и модели расчетов	5
Практическое занятие 2 Методы и модели расчетов	6
Практическое занятие 3 Линейные математические модели. Линейное программирование в экономике	7
Практическое занятие 4 Линейные математические модели. Линейное программирование в экономике	10
Практическое занятие 5. Методы решения задач линейного программирования	14
Практическое занятие 6. Методы решения задач линейного программирования	
Практическое занятие 7. Решение задач линейного программирования с помощью симплекс-метода	16
Практическое занятие 8. Решение задач линейного программирования с помощью симплекс-метода	17
Практическое занятие 9. Транспортная задача	20
Практическое занятие 10. Транспортная задача	23
Практическое занятие 11. Методы решения задач транспортного типа и их применение	26
Практическое занятие 12. Методы решения задач транспортного типа и их применение	27
Практическое занятие 13. Методы решения задач транспортного типа и их применение	28
Практическое занятие 14. Методы решения задач транспортного типа и их применение	29
Практическое занятие 15. Теория игр	31
Практическое занятие 16. Теория игр	33

Практическое занятие 17. Матричные игры со смешанным расширением.....	35
Практическое занятие 18. Матричные игры со смешанным расширением.....	
Список литературы.....	36

Курс «Математические методы и модели в управлении» содержит теоретические и практические вопросы формирования и функционирования инвестиционной системы регионов России.

Целью изучения дисциплины «Математические методы и модели в управлении» является получение базовых знаний и основных навыков: по построению экономико-математических моделей; по использованию инструментов компьютерного анализа и моделирования; по созданию расчетных моделей.

Основными целями практических занятий является: ознакомление с основами экономико-математического моделирования; определение основных методик целочисленного анализа методов оптимизации, в том числе специальных задач линейного программирования и теории игр.

Практические работы выполняются на основе знаний, полученных при изучении курса на лекционных, индивидуальных и самостоятельных занятиях, а также при изучении смежных дисциплин.

Практическое занятие 1. Методы и модели расчетов

Этапы операционного исследования:

- 1 этап – наблюдение и сбор исходных данных;
- 2 этап – постановка задач;
- 3 этап – построение данной модели;
- 4 этап – проведение расчетов;
- 5 этап – анализ результата расчета (если полученные результаты не удовлетворяют исследователя, то следует, вернуться на этап 3, либо на 2 этап);
- 6 этап – использование результатов исследования.

Модель – это объект, который замещает оригинал и отражает наиболее важные для данного исследования черты и свойства оригинала.

Математическая модель – это модель, представляющая собой совокупность математических соотношений.

Эти модели являются необходимым элементом в современной науке, бизнесе, экономике, статистике, рекламе, сервисе.

Использование моделей позволяет:

- а) формально описать наиболее важные связи различных объектов и переменных;
- б) использовать методы математики и статистики для получения новых знаний об объекте;
- в) излагать точно и компактно на языке математики любую сферу деятельности

Существует 2 особенности в моделировании:

- 1 – в рекламных проектах не возможны модели подобия, которые используются в технике;
- 2 – в рекламных проектах крайне ограничены возможности локальных экспериментов, так как все ее части жестко взаимосвязаны друг с другом.

Следовательно «чистый эксперимент» не возможен.

Данные модели применяются для анализа, прогнозирования, выбора оптимальных решений в различных областях.

Вопросы для контроля

1. Дайте характеристику основных понятий операционного исследования
2. Укажите основные этапы построения моделей

Практическое занятие 2. Методы и модели расчетов

Основные отличительные признаки сложных систем:

Наличие большого количества взаимно связанных и взаимодействующих между собой элементов.

Сложность функции, выполняемой системой и направленной на достижение заданной цели функционирования.

Возможность разбиения системы на подсистемы, цели, функционирования которых подчинены общей цели функционирования всей системы.

Наличие взаимодействия с внешней средой и функционирование в условиях воздействия случайных факторов.

Наличие управления (часто имеющего иерархическую структуру), разветвленной информационной сети и интенсивных потоков информации.

Управление - в широком смысле функция *системы*, ориентированная либо на сохранение основного качества, т.е. совокупности свойств, утрата которых ведет к разрушению системы в условиях изменения *среды*, либо на выполнение некоторой программы, обеспечивающей *устойчивость* функционирования, *гомеостаз*, достижение определенной *цели*.

Понятие *управление* не формализовано настолько, чтобы можно было дать его точное и при этом достаточно полное формальное описание.

Систему, в которой реализуется функция управления, называется, *системой управления* и выделяют в ней две подсистемы: *управляющую* (осуществляющую функцию управления) и *управляемую* (объект управления).

Однако разделение системы на управляющую и управляемую не всегда можно осуществить однозначно. В сложных развивающихся системах эти блоки могут быть совмещены. Такой режим называют *саморегулированием*.

Сложные системы - системы с большим количеством элементов, с разветвленной структурой, в которой можно выделить иерархические уровни.

Динамическая система - система, которая:

- переходит из одного состояния в другое,
- этот переход совершается медленно, а не мгновенно, скачкообразно.

Вопросы для контроля

1. В чём заключается классификация математических моделей?
2. Что можно выделить среди стохастических моделей?
3. Каким образом, происходит построение математической модели?

Практическое занятие 3. Линейные математические модели.

Линейное программирование в экономике

Традиционно оптимальные линейные математические модели называются моделями линейного программирования. Под линейным программированием понимается линейное планирование, т.е. получение оптимального плана – решения в задачах с линейной структурой.

В общем виде задача линейного программирования ставится следующим образом.

Максимизировать (минимизировать) функцию

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad (i = \overline{1, m_1}); \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad (i = \overline{m_1 + 1, m_2}); \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = \overline{m_2 + 1, m}), \end{array} \right. \quad (4)$$

где $x_j, j = \overline{1, n}$ - управляющие переменные или решения задачи (1) – (4);

$b_i, a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ - параметры;

$f(x)$ - целевая функция или критерий эффективности задачи.

Функция (1) – линейная, ограничения (2) – (4) тоже линейные. Задача содержит n переменных и m ограничений.

Решить задачу линейного программирования (ЛП) – это значит найти значения управляющих переменных $x_j, j = \overline{1, n}$, удовлетворяющих ограничениям (2) – (4), при которых целевая функция (1) принимает минимальное или максимальное значение.

Вопросы для контроля

1. Как в общем виде ставится задача линейного программирования?
2. Каким образом строится математическая модель?

Практическое занятие 4. Линейные математические модели.

Линейное программирование в экономике

Для изготовления различных видов изделий используются разные ресурсы. Общие запасы каждого ресурса, количества ресурса каждого типа, затрачиваемого на изготовление одного изделия каждого вида, и прибыль, получаемая от реализации одного изделия каждого вида, заданы. Нужно составить план производства изделий, обеспечивающий максимальную суммарную прибыль от реализации изделий.

Построение математической модели.

Математические модели строим по этапам, сформулированным ранее.

1. Целью является максимизация прибыли.

2. Задача решается в общем виде, поэтому для определения параметров введем условные обозначения:

n - число различных видов изделий;

m - число различных типов ресурсов;

b_i - запас ресурса i -типа, $i = \overline{1, m}$ (множество от 1 до m);

a_{ij} - количество ресурсов i -типа для изготовления одного изделия j -го вида,
 $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$;

p_j - прибыль от реализации одного изделия j -го вида.

3. Управляющие переменные $x_j, j = \overline{1, n}$ - число изделий j -го вида.

4. Ограничения задачи – это ограничения по ресурсам и условия неотрицательности управляющих переменных. Таким образом, можно построить математическую модель.

$$P = \sum_{j=1}^n p_j x_j \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{2n}x_n \leq b_2; \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{mn}x_n \leq b_m; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (2)$$

Выражения (1) и (2) представляют собой линейную математическую модель поставленной задачи. В результате ее расчета определяют оптимальный план производства, т.е. количество изделий каждого вида, которое надо изготовить так, чтобы при этом была максимальна прибыль (1) и не был превышен запас ресурсов (2).

Вопросы для контроля

1. Укажите принцип формирования минимальной потребительской продовольственной корзины
2. Каким образом происходит расчет оптимальной загрузки оборудования?
3. Как осуществляется составление плана реализации товара?

Практическое занятие 5. Методы решения задач линейного программирования

При условии, что число переменных в задаче линейного программирования (ЛП) равно двум, а ограничениями является система неравенств, то задачу можно решать графическим методом.

Пример №1: При продаже двух видов товара используется 4 типа ресурсов. Норма затрат ресурсов на реализацию единицы товара, общий объем каждого ресурса заданы в таблице 1.

Таблица 1 – Данные для задачи

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на товары		Общее количество ресурсов
	1-го вида	2-го вида	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12

Прибыль от реализации одной единицы товара первого вида составляет 2 усл. ед., второго вида – 3 усл. ед.

Требуется найти оптимальный план реализации товара при $n = 2$, $m = 4$.

Математическая модель имеет вид:

$$P = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

В модели управляющие переменные x_1, x_2 - количество реализуемых изделий первого и второго вида, соответственно, P – прибыль. Система неравенств, включает ограничения по ресурсам. Количество ресурсов на реализацию товаров 1-го и 2-го вида не превышает общего количества ресурсов каждого типа.

Графическое решение

Построим в плоскости $x_1 O x_2$ область допустимых решений. Каждое неравенство системы (2) определяет в плоскости $x_1 O x_2$ полуплоскость, лежащую выше или ниже прямой, определяемой соответствующим уравнением.

Построим прямые:

$$2x_1 + 2x_2 = 12$$

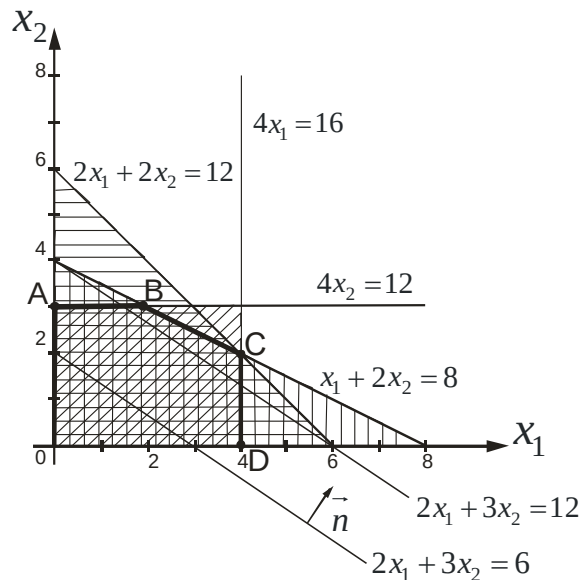
$$x_1 + 2x_2 = 8$$

$$4x_1 = 16$$

$$4x_2 = 12$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$



Рассмотрим точку с координатами $x_1 = 0, x_2 = 0$. Подставив их в 1-е неравенство, получаем $0 \leq 12$ - верно, следовательно, искомая полуплоскость лежит ниже прямой $2x_1 + 2x_2 = 12$. Остальные полуплоскости находятся аналогичным образом.

Область OABCD – область решения задачи.

Чтобы найти максимальное значение P проверим граничные точки из области решений.

Построим, например, две линии уровня:

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$

$$2x_1 + 3x_2 = 12$$

Проведем вектор $\vec{n}$ имеющий координаты $(2; 3)$, т.е. $\vec{n} = (2; 3)$. Функция возрастает в направлении вектора – нормали $\vec{n} = (2; 3)$, следовательно, минимум находится в точке $(0, 0)$. Максимум определяем, передвигая нашу линию уровня в направлении вектора $\vec{n}$ параллельно самой себе до тех пор, пока хотя бы одна ее точка будет принадлежать области допустимых решений.

В нашем случае это точка с координатами $x_1 = 4, x_2 = 2$. При этом мы имеем $P = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$.

Таким образом, для получения максимальной прибыли в размере 14 усл. ед. надо продать 4 изделия первого вида и 2 изделия второго вида.

Изложенный графический метод применим для решения задач линейного программирования следующего вида:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max(\min) \quad (3)$$

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i, & i = \overline{1, m_1}; \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i, & i = \overline{m_1 + 1, m} \end{cases} \quad (4)$$

Алгоритм решения ЗЛП графическим методом состоит в следующем.

1. Записать уравнения прямых, соответствующих ограничениям (4) и построить их в плоскости x_1Ox_2 .

2. Определение области, в которой выполняются ограничения задачи. Для этого надо выбрать произвольную точку на плоскости x_1Ox_2 и подставить ее координаты в левую часть одного из неравенств. Если неравенство верно, то искомая полуплоскость находится с той же стороны от прямой, что и точка; в противном случае искомая полуплоскость лежит с противоположной стороны от прямой. Эти действия последовательно выполняются для всех неравенств (4).

3. Определить область допустимых решений задачи как область пересечения m полуплоскостей, соответствующих m ограничениям задачи.

4. Определить направление возрастания (убывания) целевой функции. Это можно сделать двумя способами. Можно построить вектор – нормаль $\vec{n} = (\overrightarrow{c_1, c_2})$, его направление показывает направление возрастания функции, в противоположном направлении функция убывает. Можно просто построить две линии уровня функции $f = k_1; f = k_2$ (k_1, k_2 – произвольные константы, $k_1 \neq k_2$), и по их расположению определить направление возрастания (убывания) функции.

5. Определить граничную точку (точки) области допустимых решений, в которых целевая функция принимает максимальное или минимальное значение.

6. Вычислить значения найденной, точки решая совместно уравнения, задающие прямые, на пересечении которых находится эта точка, или выявляя уравнение граничной прямой области допустимых решений, с которой совпадает линия уровня целевой функции.

Областью допустимых решений может быть замкнутое множество (многоугольник), открытое множество, пустое множество, единственная точка.

Вопросы для контроля

1. В чём заключается графический метод решения задачи линейного программирования?
2. Что представляет из себя алгоритм решения задачи линейного программирования графическим методом?

Практическое занятие 6. Методы решения задач линейного программирования

Наиболее распространенным методом решения задачи линейного программирования (ЛП) является симплекс-метод. В случае 2-х переменных область допустимых решений, как правило, представляет собой замкнутый многоугольник. Для n переменных областью допустимых решений является многомерный многогранник, подобный симплексу.

Оптимальное решение, как правило, это вершина (граничная точка) такого многогранника. Симплекс-метод заключается в последовательном целенаправленном обходе вершин симплекса. В каждой следующей граничной точке симплекса значение целевой функции, в общем случае, улучшается.

Чтобы решить задачу симплекс-методом запишем ее канонической форме:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (2)$$

(3)

В канонической форме записи все переменные неотрицательны, ограничениями являются уравнения, и требуется найти такие значения $x_j, j = \overline{1, n}$, при которых целевая функция имеет максимум.

Переход к канонической форме записи производится с помощью следующих действий.

1. Если требуется найти максимум $f(x)$, то заменяя $f(x)$ на $-f(x)$, переходят к задаче максимизации, так как $\min f(x) = -\max f(x)$.

2. Если ограничение содержит неравенство со знаком $\leq$, то от него переходят к равенству, добавляя в левую часть ограничение дополнительную неотрицательную переменную.

3. Если ограничение содержит неравенство со знаком $\geq$, то от него переходят к равенству, вычитая из левой части дополнительную неотрицательную переменную.

4. Если в задаче какая-либо из переменных произвольна, то от нее избавляются, заменяя ее разностью двух других неотрицательных переменных.

Например, для произвольной переменной $x_k, x_k = x_k^I - x_k^II$, где $x_k^I \geq 0, x_k^II \geq 0$.

Пример №1: Записать в канонической форме задачу

$$f(x) = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 10 \\ x_1 - 8x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ 5x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Задания для контроля

1. При продаже двух видов товара используется 4 типа ресурсов. Норма затрат ресурсов на реализацию единицы товара, общий объем каждого ресурса заданы в таблице 1.

Таблица 1 – Данные для задачи

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на товары		Общее количество ресурсов
	1-го вида	2-го вида	
1	5	0	15
2	3	2	10
3	4	3	12
4	6	1	20

Прибыль от реализации одной единицы товара первого вида составляет 3 усл. ед., второго вида – 2 усл. ед.

Требуется найти оптимальный план реализации товара при $n = 2$, $m = 4$.

Практическое занятие 7. Решение задач линейного программирования с помощью симплекс-метода

Симплекс-метод включает два этапа:

- 1) определение начального решения, удовлетворяющего ограничениям (2), (3);
- 2) последовательное улучшение начального решения и получение оптимального решения задачи (1) – (3).

Любое решение задачи линейного программирования (ЛП) называется опорным планом задачи.

Система (2) содержит m линейно независимых уравнений, и их число меньше числа неизвестных, входящих в систему, следовательно, систему (2) можно разрешить относительно m неизвестных, например $x_1 + x_2 + \dots + x_m$, выразив их через остальные неизвестные

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Замечание. Коэффициенты a_{ij}, b_{ij} , $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ в полученной системе, естественно, отличны от коэффициентов системы (2), но для простоты обозначены той же буквой.

Данный переход осуществляется с помощью элементарных алгебраических преобразований, включающих умножение правой и левой частей уравнений на одно и то же число и их сложение и не влияющих на значение решений системы (2).

После преобразований задача (1) – (3) запишется в следующем виде:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (6)$$

Форма записи (4) – (6) называется стандартной.

Вопросы для контроля

1. Дайте характеристику симплекс-метода решения задач.
2. Какие задачи называются задачами линейного программирования.

Дайте характеристику.

Практическое занятие 8. Решение задач линейного программирования с помощью симплекс-метода

Алгоритм решения системы (4) – (6) симплекс-методом сводится к следующему:

1. Получение начального решения. Выбираются m переменных, называемых базисными и обладающих следующим свойством: они входят с коэффициентом 1 только в одно уравнение и с коэффициентом 0 в остальные уравнения системы (S).

Остальные $n-m$ переменных называют свободными.

Все свободные переменные полагаются равными 0, а базисные переменные – равные правым частям соответствующих ограничений системы (5).

Пусть m базисных переменных – это переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Тогда начальное решение x_0 имеет следующий вид:

$$x_0 = \{x_1 = b_1, x_2 = b_2, x_m = b_m, x_{m+1} = 0, \dots, x_n = 0\}$$

Если все $b_i \geq 0, i = \overline{1, m}$, то начальное решение является допустимым.

Переходят к следующему шагу. В противном случае используют алгоритм нахождения начального решения.

2. Выражение функции $f(x)$ только через свободные переменные.

$$f(x) = \sum_{j=m+1}^n c_j x_j$$

Значения коэффициентов $c_j, j = \overline{m+1, n}$, естественно отличны от значений коэффициентов в формуле (4), но для простоты обозначены той же буквой.

3. Проверка решения на оптимальность. Составляется симплекс-таблица.

Базисные переменные	Коэффициенты при переменных								Свободные члены
	x_1	x_2	$\dots$	x_m	$\dots$	x_p	$\dots$	x_n	
x_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1m}	$\dots$	a_{1p}	$\dots$	a_{1n}	b_1
x_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2m}	$\dots$	a_{2p}	$\dots$	a_{2n}	b_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_q	a_{q1}	a_{q2}	$\dots$	a_{qm}	$\dots$	a_{qp}	$\dots$	a_{qn}	b_q
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mm}	$\dots$	a_{mp}	$\dots$	a_{mn}	b_m
f	$-c_1$	$-c_2$	$\dots$	$-c_m$	$\dots$	$-c_p$	$\dots$	$-c_n$	0

В последней строке (f -строке) стоит коэффициент с противоположным знаком при j -й переменной в целевой функции f . В последнем столбце последней строки стоит значение свободного члена, входящего в целевую функцию.

Для проверки решения на оптимальность просматривается последняя f -строка. Если коэффициенты, стоящие при свободных переменных неотрицательны, то полученное решение оптимально. Полученное решение единственно, если все эти коэффициенты положительны.

Если среди неотрицательных коэффициентов встречается хотя бы один нулевой, то задача имеет бесконечное множество решений. Если в последней строке есть хотя бы один отрицательный коэффициент, а в соответствующем этому коэффициенту столбце нет ни одного положительного элемента, то целевая функция f не ограничена в области допустимых решений.

Если хотя бы один из коэффициентов, стоящих при свободных переменных, отрицательный и в соответствующем ему столбце есть хотя бы один положительный элемент, то полученное решение может быть улучшено.

4. Получение нового решения

4.1 Выбор переменной, вводимой в список базисных переменных.

Просматривается последняя строка симплекс-таблицы. Среди элементов этой строки выбирается максимальный по абсолютной величине отрицательный элемент. Столбец, в котором стоит этот элемент, называется разрешающим. Пусть, например, это p -й столбец. Переменная x_p , стоящая в этом столбце, вводится в список базисных переменных.

4.2 Выбор переменной, выводимой из списка базисных переменных.

Находят отношение элементов столбца свободных членов к элементам разрешающего столбца. При делении на отрицательный элемент и 0 результат полагают равным $+\infty$. Среди этих отношений находят минимальное. Строка, соответствующая минимальному отношению, называется разрешающей. Пусть, например, это q -строка. Базисная переменная x_q , стоящая в этой строке,

выводится из списка базисных переменных. Элемент симплекс-таблицы a_{qp} , стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца, называется разрешающим элементом.

4.3 Выполнение симплекс - преобразования и переход к новой симплекс-таблице.

Элемент a_{ij} новой симплекс-таблицы вычисляется с помощью следующего симплекс – преобразования:

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{a_{qi}}{a_{qp}}, & \text{если } i = q; \\ a_{ij} - a_{ip} \frac{a_{qi}}{a_{qp}}, & \text{если } i \neq q; \\ i = \overline{1, m+1}, j = \overline{1, n+1}; \\ a_{m+1j} = -c_j; \\ a_{in+1} = b_i. \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, при переходе к новой симплекс-таблице все элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент (7), а все остальные элементы симплекс-таблицы, включая коэффициенты целевой функции и свободные члены, пересчитываются по формуле (8).

После построения новой симплекс таблицы следует перейти к пункту 3.

Вопросы для контроля

1. Как определяется метод направленного перебора решений системы?
2. Приведите примеры расчета экономико-математической модели.

Практическое занятие 9. Транспортная задача

Среди множества задач линейной оптимизации выделяется 2 класса задач со специальной структурой: транспортная задача и задача о назначениях. Эти задачи используются для моделирования и оптимизации экономических проблем, связанных с формированием оптимального плана перевозок,

оптимального распределения индивидуальных контрактов на транспортировки, составления оптимального расписания, определение оптимальной специализации предприятия, оптимального назначения кандидатов на работы, оптимального использования торговых агентов.

Критерием эффективности в данных задачах является линейная функция, ограничения также линейны, поэтому для их решения могут применяться методы линейной оптимизации, например симплексный метод. Однако, специальная структура таких задач позволяет разработать более удобные методы их решения.

Построим транспортную модель для конкретной задачи.

Пример №1: Четыре предприятия экономического района для производства продукции используют некоторое сырье. Спрос на сырье каждого из предприятий соответственно составляет: 120, 50, 190 и 110 усл.ед. Сырье сосредоточено в 3 – х местах. Предложения поставщиков сырья равны: 160, 140 и 170 усл.ед. На каждое предприятие сырье может завозиться от любого поставщика. Тарифы перевозок известны и задаются матрицей

$$c = \begin{Bmatrix} 7812 \\ 4598 \\ 9236 \end{Bmatrix}$$

В i -й строке j -столбца матрицы C стоит тариф на перевозку сырья от i -го поставщика j -му потребителю, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$. Под тарифом понимается стоимость перевозки единицы сырья. Требуется составить план перевозок, при котором общая стоимость перевозок минимальна.

Под тарифом понимается стоимость перевозки единицы сырья. Требуется составить план перевозок, при котором общая стоимость перевозок минимальна.

Построение математической модели

Цель задачи состоит в минимизации суммарной стоимости на перевозки. Эта цель может быть достигнута с помощью оптимальной организации

перевозок сырья. Следовательно, за неизвестное можно принять количество сырья, перевозимого от каждого поставщика каждому потребителю.

Пусть x_{ij} - количество сырья, перевозимого от i -го поставщика j -му потребителю. Параметры задачи – число поставщиков и потребителей, предложение и спрос сырья в каждом пункте, тарифы на перевозки.

Ограничения задачи – это ограничения на предложение и спрос сырья. Предложения сырья всех поставщиков не должны быть меньше суммарного спроса на него во всех пунктах потребления. В данной задаче имеет место точное равенство между предложением и спросом.

$$120 + 50 + 190 + 110 = 160 + 140 + 170 = 470.$$

Количество сырья, вывозимого от каждого поставщика, должно быть равно наличному количеству сырья. Количество сырья, доставленное каждому потребителю, должно равняться его спросу. Последнее ограничение – условие неотрицательности x_{ij} .

Критерием эффективности (целевой функцией) являются суммарные затраты S на перевозку, равные сумме произведений тарифов на перевозку на количество перевозимого сырья от каждого поставщика каждому потребителю.

Окончательно математическая модель задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} S &= 7x_{11} + 8x_{12} + x_{13} + 2x_{14} + 4x_{21} + 5x_{22} + 9x_{23} + 8x_{24} + 9x_{31} + \\ &+ 2x_{32} + 3x_{33} + 6x_{34} \rightarrow \min \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 160; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 140; \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 170; \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 120; \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 50; \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 190; \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 170; \\ 160 + 140 + 170 &= 120 + 50 + 190 + 170; \\ x_{ij} &\geq 0, i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Целевая функция и ограничения линейны, т.е. данная задача относится к задачам ЛП, однако, благодаря особой структуре, эта задача получила специальное название: транспортная задача или транспортная модель.

Несколько похожий внешний вид имеет математическая модель задачи о назначениях. Эта задача формируется следующим образом.

Имеется n работ и n кандидатов для их выполнения. Затраты i -го кандидата на выполнение j -й работы равны C_{ij} . Каждый кандидат может быть назначен только на одну работу, и каждая работа может быть выполнена только одним кандидатом. Требуется найти назначение кандидатов на работы, при котором суммарные затраты на выполнение работы минимальны.

Вопросы для контроля

1. Что представляет из себя двойственная задача линейного программирования и ее экономическая интерпретация?
2. Дайте характеристику целочисленного программирования и метода Гомори.

Практическое занятие 10. Транспортная задача

Несколько похожий внешний вид имеет математическая модель задачи о назначениях. Эта задача формируется следующим образом.

Имеется n работ и n кандидатов для их выполнения. Затраты i -го кандидата на выполнение j -й работы равны C_{ij} . Каждый кандидат может быть назначен только на одну работу, и каждая работа может быть выполнена только одним кандидатом. Требуется найти назначение кандидатов на работы, при котором суммарные затраты на выполнение работы минимальны.

Формализуем данную задачу

пусть x_{ij} - переменная, значение которой равно 1, если i -й кандидат выполняет j -ю работу, и 0 – в противном случае. Тогда условие того, что каждый кандидат выполняет только одну работу, запишется в виде:

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = \overline{1, n}$$

Условие того, что каждая работа может выполняться одним кандидатом, запишется в виде:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = \overline{1, n}$$

Целевая функция задачи имеет вид:

$$c = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

В функцию входят только те значения C_{ij} , для которых x_{ij} отличны от 0, т.е. входят затраты, соответствующие назначенным работам.

Математическая модель выглядит следующим образом:

$$c = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{ij} \in \{0;1\}; i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (4)$$

Решить задачу о назначениях – значит найти x_{ij} , удовлетворяющие условиям (2) – (4) и обеспечивающие минимум функции (1).

Задача (1) – (4) является, очевидно, задачей линейного программирования (целевая функция линейна, ограничения линейны) и может быть решена симплекс – методом. Также эта задача является транспортной, в которой правые части ограничений равны 1, а переменные могут принимать только два значения.

Задания для контроля

Четыре предприятия экономического района для производства продукции используют некоторое сырье. Спрос на сырье каждого из предприятий соответственно составляет: 100, 70, 170 и 150 усл.ед. Сырье сосредоточено в 3 – х местах. Предложения поставщиков сырья равны: 110, 160 и 190 усл.ед. На каждое предприятие сырье может завозиться от любого поставщика. Тарифы перевозок известны и задаются матрицей

$$c = \begin{Bmatrix} 7812 \\ 4598 \\ 9236 \end{Bmatrix}$$

Цель задачи состоит в минимизации суммарной стоимости на перевозки.

Практическое занятие 11. Методы решения задач транспортного типа и их применение

Для нахождения начального решения транспортной задачи чаще всего используются следующие 3 метода: метод «северо-западного угла», метод минимального элемента и метод Фогеля.

Метод «северо-западного угла» состоит в следующем:

1. Составляется транспортная таблица:

Номер поставщика	Номер потребителя						Предложение
	1	2	...	j	...	n	
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1j}	...	c_{1n}	a_1
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2j}	...	c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...	...	...
i	c_{i1}	c_{i2}	...	c_{ij}	...	c_{in}	a_i
...	...	...	...	...	...	...	...
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mj}	...	c_{mn}	a_m
Спрос	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	

2. Транспортную таблицу начинаем заполнять с левого верхнего (северо-западного) угла. При заполнении двигаются по строке вправо и по столбцу вниз. В клетку, находящуюся на пересечении первой строки и первого столбца,

помещается максимально возможное число единиц продукции, разрешенное ограничениями на предложение и спрос: $x_{11} = \min(a_1, b_1)$.

Если $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$ и предложение первого поставщика полностью исчерпано.

Первая строка вычеркивается, и двигается по столбцу вниз. В клетку, находящуюся на пересечении первого столбца и второй строки, помещается максимально возможное число единиц продукции, разрешенное ограничениями на предложение и спрос:

$$x_{21} = \min(a_2, b_1 - a_1).$$

Если $b_1 - a_1 < a_2$, то $x_{21} = b_1 - a_1$. Спрос первого потребителя удовлетворен. Первый столбец вычеркивают и двигаются по второй строке вправо. Заполнив клетку, стоящую на пересечении второй строки и второго столбца, переходят к заполнению следующей третьей клетки второй строки, либо второго столбца. Процесс продолжают до тех пор, пока не исчерпается предложение и не удовлетворится спрос. Последняя заполненная клетка находится в последнем n -столбце и последней m -строке.

Задание для контроля

1. В чем заключается метод «северо-западного угла»?
2. Определить начальное решение по методу «северо-западного угла» для задачи, имеющей следующую транспортную таблицу:

Номер поставщика	Номер потребителя				Предложение
	1	2	3	4	
1	120 ⁷	40 ⁸	¹	²	160
2	⁴	10 ⁵	130 ⁹	⁸	140
3	⁹	²	60 ³	110 ⁶	170
Спрос	120	50	190	110	

Практическое занятие 12. Методы решения задач транспортного типа и их применение

Метод минимального элемента:

1. Составляется транспортная таблица.
2. Выбирается клетка таблицы, которой соответствует минимальное значение тарифа.

3. В выбранную клетку аналогично методу «северо-западного» угла помещают максимально возможное число единиц продукции, разрешенное ограничениями на предложение и спрос. После этого, если предложение производителя исчерпано, вычеркивают соответствующую строку; если спрос удовлетворен, вычеркивается соответствующий столбец.

Если все клетки заполнены или вычеркнуты, то план перевозок построен. В противном случае переходят к пункту 2 без учета заполненных и вычеркнутых клеток.

Задание для контроля

1. Принцип метода минимального элемента.
2. Определить начальное решение по методу «минимального элемента» для задачи, имеющей следующую транспортную таблицу:

Номер поставщика	Номер потребителя				Предложение
	1	2	3	4	
1	120 ⁷	40 ⁸	¹	²	160
2	⁴	10 ⁵	130 ⁹	⁸	140
3	⁹	²	60 ³	110 ⁶	170
Спрос	120	50	190	110	

Практическое занятие 13. Методы решения задач транспортного типа и их применение

Метод Фогеля:

1. Составляется транспортная таблица.

2. Для каждой строки и каждого столбца транспортной таблицы определяют разность между наименьшим тарифом и ближайшим к нему значением.

3. В строке или в столбце, которым соответствует наибольшая разность, выбирают клетку с наименьшим тарифом.

4. В выбранную клетку, аналогично предыдущим методам, записывают максимально возможное число единиц продукции, которое разрешается ограничениями на предложение и спрос. После этого вычеркивают либо строку, если предложение поставщика исчерпано, либо столбец, если спрос потребителя удовлетворен.

Если все клетки таблицы заполнены или вычеркнуты, то план перевозок построен. В противном случае переходят к пункту 2 без учета вычеркнутых и заполненных клеток.

В методе Фогеля используются штрафы, взимание за неудачный выбор маршрута. Рассчитанные в пункте 2 разности между двумя уровнями затрат на перевозку являются штрафами за неверно выбранный маршрут перевозки.

Задание для контроля

1. Характеристика метода Фогеля.
2. Определить начальное решение по методу Фогеля для задачи, имеющей следующую транспортную таблицу:

Номер поставщика	Номер потребителя				Предложение
	1	2	3	4	
1	120 ⁷	40 ⁸	¹	²	160
2	⁴	10 ⁵	130 ⁹	⁸	140
3	⁹	²	60 ³	110 ⁶	170
Спрос	120	50	190	110	

Практическое занятие 14. Методы решения задач транспортного типа и их применение

Метод потенциалов:

Если при решении транспортной задачи число заполненных клеток транспортной таблицы равно $m + n - 1$, где m -число производителей, n -число потребителей, то план перевозок невырожденный.

Если число заполненных клеток транспортной таблицы меньше $m + n - 1$, то план перевозок вырожденный.

Вырожденный план перевозок получится, если на каком-то шаге одновременно удовлетворяется спрос потребителя и исчерпывается предложение соответствующего поставщика, т.е. одновременно вычеркиваются строка и столбец.

Для нахождения оптимального плана перевозок необходимо уметь оценивать полученный план на оптимальность. Для нахождения оптимального плана перевозок служит ряд методов, один из которых – метод потенциалов.

Получение оптимального плана транспортной задачи с использованием метода потенциалов осуществляется в следующем порядке.

1. Получение оптимального плана перевозок по методу «северо-западного» угла, минимального элемента, Фогеля или любым другим методом.

2. Проверка плана на невырожденность. Если полученный план вырожденный, формально заполняют нулями некоторые из свободных клеток так, чтобы общее число заполненных клеток было равно $m + n - 1$. Нули надо расставлять так, чтобы не образовался замкнутый цикл из занятых клеток.

3. Проверка плана на оптимальность.

3.1. Определение потенциалов производителей и потребителей. Составляют систему уравнений для заполненных клеток транспортной таблицы: $U_i + V_j = C_{ij}$, где ij - номера строк и столбцов на пересечении которых стоят заполненные клетки, U_i -потенциал i -го поставщика, V_j -потенциал j -го потребителя, C_{ij} -тариф на перевозку из пункта i в пункт j . Число уравнений в системе равно $m + n - 1$, а число неизвестных U_i и V_j равно $m + n$. Для решения

данной системы одно из неизвестных выбирают произвольно. Обычно полагают $U_i = 0$. Решая систему уравнений, находят значения потенциалов U_i и V_j , $i = 1, \bar{m}$; $j = 1, \bar{n}$.

3.2. Определение суммы потенциалов (косвенных тарифов) для свободных клеток: $C_{1qp} = U_q + V_p$, где q и p - номера строк и столбцов на пересечении которых стоит свободная клетка, U_q - потенциал q-го поставщика, V_p - потенциал p-го потребителя, C_{1qp} - косвенные тарифы.

Задание для контроля

1. Как осуществляется оптимизация плана транспортной задачи?
2. Дайте характеристику метода потенциалов.
3. Определить начальное решение по методу потенциалов для задачи, имеющей следующую транспортную таблицу:

Номер поставщика	Номер потребителя				Предложение
	1	2	3	4	
1	120 ⁷	40 ⁸	1 ¹	2 ²	160
2	4 ⁴	10 ⁵	130 ⁹	8 ⁸	140
3	9 ⁹	2 ²	60 ³	110 ⁶	170
Спрос	120	50	190	110	

Практическое занятие 15. Теория игр

Игра (в математике) - это идеализированная математическая модель коллективного поведения: несколько игроков влияют на исход игры, причем их интересы различны.

Регулярное действие, выполняемое игроком во время игры, называется ходом. Совокупность ходов игрока, совершаемых им для достижения цели игры, называется стратегией.

Классификацию игр можно проводить: по количеству игроков, количеству стратегий, характеру взаимодействия игроков, характеру выигрыша, количеству ходов, состоянию информации и т.д. [2, 7, 8].

В зависимости от количества игроков различают игры двух и n игроков. Первые из них наиболее изучены. Игры трёх и более игроков менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения.

По количеству стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Если в игре все игроки имеют конечное число возможных стратегий, то она называется конечной. Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий, игра называется бесконечной.

По характеру взаимодействия игры делятся на бескоалиционные: игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции; коалиционные (кооперативные) – могут вступать в коалиции.

В кооперативных играх коалиции заранее определены.

По характеру выигрышей игры делятся на: игры с нулевой суммой (общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками; сумма выигрышей всех игроков равна нулю) и игры с ненулевой суммой.

По виду функций выигрыша игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые и др.

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаётся выигрыш игрока 1 в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока 1, столбец – номеру применяемой стратегии игрока 2; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш игрока 1, соответствующий применяемым стратегиям).

Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение и оно может быть легко найдено путём сведения игры к задаче линейного программирования.

Биматричная игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии игрока 1, столбец – стратегии игрока 2, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш игрока 1, во второй матрице – выигрыш игрока 2.)

Непрерывной считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной. Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется выпуклой. Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскании чистой оптимальной стратегии (определённого числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых оптимальных стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

Вопросы для контроля

1. Что такое игра.
2. На основе каких принципов производится классификация игр.
3. Что такое платёжная матрица.

Практическое занятие 16. Теория игр

Матричные игры в виде платёжной матрицы

В общем виде матричная игра может быть записана следующей платёжной матрицей (рисунок 8.1),

	В 1	В 2	...	В n
А 1	A_{11}	A_{12}	...	A_{1n}
А 2	A_{21}	A_{22}	...	A_{2n}

...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Рисунок 8.1 – Общий вид платёжной матрицы матричной игры

где A_i – названия стратегий игрока 1, B_j – названия стратегий игрока 2, a_{ij} – значения выигрышей игрока 1 при выборе им i – й стратегии, а игроком 2 – j – й стратегии. Поскольку данная игра является игрой с нулевой суммой, значение выигрыша для игрока 2 является величиной, противоположенной по знаку значению выигрыша игрока 1.

Каждый из игроков стремится максимизировать свой выигрыш с учётом поведения противодействующего ему игрока. Поэтому для игрока 1 необходимо определить минимальные значения выигрышей в каждой из стратегий, а затем найти максимум из этих значений, то есть определить величину

$$V_n = \max_i \min_j a_{ij} ,$$

или найти минимальные значения по каждой из строк платёжной матрицы, а затем определить максимальное из этих значений. Величина V_n называется максимином матрицы или нижней ценой игры.

Величина выигрыша игрока 1 равна, по определению матричной игры, величине проигрыша игрока 2. Поэтому для игрока 2 необходимо определить значение

$$V_v = \min_j \max_i a_{ij} .$$

Или найти максимальные значения по каждому из столбцов платёжной матрицы, а затем определить минимальное из этих значений. Величина V_v называется минимаксом матрицы или верхней ценой игры.

В случае, если значения V_n и V_v не совпадают, при сохранении правил игры (коэффициентов a_{ij}) в длительной перспективе, выбор стратегий каждым из игроков оказывается неустойчивым. Устойчивость он приобретает лишь при равенстве $V_n = V_v = V$. В этом случае говорят, что игра имеет решение в чистых стратегиях, а стратегии, в которых достигается V – оптимальными чистыми стратегиями. Величина V называется чистой ценой игры.

Например, в матрице (рисунок 8.2)

	В 1	В 2	В 3	В 4	Min _j
А 1	7	6	5	4	4
А 2	1	8	2	3	1
А 3	8	1	3	2	1
Max _i	8	8	5	4	

Рисунок 8.2 – Платёжная матрица, в которой существует решение в чистых стратегиях

существует решение в чистых стратегиях

При этом для игрока 1 оптимальной чистой стратегией будет стратегия А1, а для игрока 2 – стратегия В4.

Вопросы для контроля

1. Как решать матричные игры в чистых стратегиях.
2. Как уменьшить порядок платёжной матрицы.
3. Как формулировать и решать матричные игры в чистых стратегиях для экономических задач.

Практическое занятие 17. Матричные игры со смешанным расширением

Исследование в матричных играх начинается с нахождения её чистой цены. Если матричная игра имеет решение в чистых стратегиях, то нахождением чистой цены заканчивается исследование игры. Если же в игре нет решения в чистых стратегиях, то можно найти нижнюю и верхнюю цены этой игры, которые указывают, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры. Улучшение решений матричных игр следует искать в

использовании секретности применения чистых стратегий и возможности многократного повторения игр в виде партии. Этот результат достигается путём применения чистых стратегий случайно, с определённой вероятностью.

О п р е д е л е н и е . Смешанной стратегией игрока называется полный набор чистых стратегий, применённых в соответствии с установленным распределением вероятностей. Матричная игра, решаемая с использованием смешанных стратегий, называется игрой со смешанным расширением.

Стратегии, применённые с вероятностью, отличной от нуля, называются активными стратегиями.

Доказано, что для всех игр со смешанным расширением существует оптимальная смешанная стратегия, значение выигрыша при выборе которой находится в интервале между нижней и верхней ценой игры:

$$V_{\text{н}} \leq V \leq V_{\text{в}} .$$

При этом условии величина V называется ценой игры.

Кроме того, доказано, что, если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остаётся неизменным и равным цене игры V , независимо от того, каких стратегий придерживается другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий. Поэтому, для достижения наибольшего гарантированного выигрыша второму игроку также необходимо придерживаться своей оптимальной смешанной стратегии.

Решение матричной игры со смешанным расширением – это определение оптимальных смешанных стратегий, то есть нахождение таких значений вероятностей выбора чистых стратегий для обоих игроков, при которых они достигают наибольшего выигрыша.

Вопросы для контроля

1. Существует ли решение матричной игры, нижняя цена которой не равна верхней? Как называется такая игра?
2. Что такое смешанная стратегия игрока?

3. Что такое активная стратегия?

4. Что такое цена матричной игры со смешанным расширением?

Практическое занятие 18. Матричные игры со смешанным расширением

Для матричной игры, платёжная матрица которой показана на рис. 1.1, $V_n \neq V_v$, определим такие значения вероятностей выбора стратегий для игрока 1 ($p_1, p_2, \dots, p_m$) и для игрока 2 ($q_1, q_2, \dots, q_n$), при которых игроки достигали бы своего максимально гарантированного выигрыша.

Если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то, по условию задачи, его выигрыш не может быть меньше цены игры V . Поэтому данная задача может быть представлена для игроков в виде следующих систем линейных неравенств:

Для первого игрока:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \geq V \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \geq V \\ \dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \geq V \\ p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1 \\ p_1 \geq 0 : p_2 \geq 0 \dots p_m \geq 0 \end{cases}$$

Для второго игрока:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n \leq V \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n \leq V \\ \dots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \dots + a_{mn}q_n \leq V \\ q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1 \\ q_1 \geq 0 : q_2 \geq 0 \dots q_n \geq 0 \end{cases}$$

Чтобы определить значение V , разделим обе части каждого из уравнений на V . Величину p_i/V обозначим через x_i , а q_j/V – через y_j .

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq 1 \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq 1 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1/v \\ x_1 \geq 0 : x_2 \geq 0 \dots x_m \geq 0 \end{cases}$$

Для игрока 1 получим следующую систему неравенств, из которой найдём значение $1/v$:

Для игрока 1 необходимо найти максимальную цену игры (V).

Следовательно, значение $1/V$ должно стремиться к минимуму.

Целевая функция задачи будет иметь следующий вид:

$$\min Z = \min 1/V = \min (x_1 + x_2 + \dots + x_m)$$

Для игрока 2 получим следующую систему неравенств, из которой найдём значение $1/v$:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \leq 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \leq 1 \\ \dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \leq 1 \\ y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1/V \\ y_1 \geq 0 : y_2 \geq 0 \dots y_n \geq 0 \end{cases}$$

Для игрока 2 необходимо найти минимальную цену игры (V).

Следовательно, значение $1/V$ должно стремиться к максимуму.

Целевая функция задачи будет иметь следующий вид:

$$\max Z = \max 1/V = \max (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

Все переменные в данных системах линейных неравенств должны быть неотрицательными: $x_i = p_i/V$, а $y_j = q_j/V$. Значения p_i и q_j не могут быть отрицательными, так как являются значениями вероятностей выбора стратегий игроков. Поэтому необходимо, чтобы значение цены игры V не было отрицательным. Цена игры вычисляется на основе коэффициентов выигрышей платёжной матрицы. Поэтому, для того, чтобы гарантировать условие неотрицательности для всех переменных, необходимо, чтобы все коэффициенты матрицы были неотрицательными. Этого можно добиться, прибавив перед

началом решения задачи к каждому коэффициенту матрицы число K , соответствующее модулю наименьшего отрицательного коэффициента матрицы. Тогда в ходе решения задачи будет определена не цена игры, а величина $V^* = V + K$.

Для решения задач линейного программирования используется симплекс-метод. [1, 5].

В результате решения определяются значения целевых функций (для обоих игроков эти значения совпадают), а также значения переменных x_i и y_j .

Величина V^* определяется по формуле: $V^* = 1/z$

Значения вероятностей выбора стратегий определяются: для игрока 1: $P_i = x_i \cdot V^*$; для игрока 2: $q_i = y_i \cdot V^*$.

Для определения цены игры V из величины V^* необходимо вычесть число K .

Вопросы для контроля

1. В каком интервале находится цена матричной игры со смешанным расширением?
2. Каким будет значение выигрыша в матричной игре, если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии?
3. Что такое решение матричной игры со смешанным расширением?
4. Какими методами решается матричная игра со смешанным расширением?
5. Сформулируйте математическую запись задачи определения оптимальной смешанной стратегии в матричной игре для каждого игрока.
6. Какое преобразование коэффициентов платёжной матрицы необходимо произвести перед началом решения матричной игры со смешанным расширением? Каков смысл этого преобразования?
7. Как определить значение цены игры и вероятности выбора стратегий игроков по результатам решения задачи?

8. Приведите примеры решения матричных игр со смешанным расширением в задачах реальной экономики.

Список рекомендованной литературы

1. Перечень основной литературы:

- 1 Наумов, И.В.; Эконометрика. Экономическое моделирование социально-экономических процессов в территориальных системах: учебное пособие / И. В. Наумов, Н. Л. Никулина. - Эконометрика. Экономическое моделирование социально-экономических процессов в территориальных системах, Весь срок охраны авторского права. - Электрон. дан. (1 файл). - Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2021. - 127 с. - электронный. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-4497-1408-4,
- 2 Орлов, А. И. Эконометрика : учебное пособие / А. И. Орлов. - Эконометрика, 2021-12-05. - Электрон. дан. (1 файл). - Москва, Саратов : Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Ай Пи Ар Медиа, 2020. - 676 с. - электронный. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-4497-0362-0

2. Перечень дополнительной литературы:

- [illegible]

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «Математические методы и модели в управлении»
для студентов направления подготовки
38.03.04 «Государственное и муниципальное управление»

Ставрополь, 2026

Методические указания по дисциплине «Математические методы и модели в управлении» содержат задания для самостоятельной работы студентов.

Проработка предложенных вопросов позволит студентам приобрести необходимые знания в области математического моделирования.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Общая характеристика самостоятельной работы
2. Методические рекомендации по изучению теоретического материала, собеседование, комплект задач.
3. Список рекомендуемой литературы

Введение

Основными способами самостоятельной работы по изучению дисциплины «Математические методы и модели в управлении» являются:

- чтение и конспектирование первоисточников - произведений классиков эконометрической науки;
- изучение учебников, учебно-методических пособий и другой учебной литературы;
- систематическая работа над конспектами лекций, их дополнение материалом из учебников (учебных пособий);
- подготовка докладов, научных сообщений и выступление с ними на практических занятиях;
- выполнение рефератов и эссе по темам, изучаемым в рамках дисциплины «Математические методы и модели в управлении»;
- постановка и решение задач, выполнение заданий, рекомендованных (заданных) преподавателем;
- формулировка развернутых ответов на вопросы для подготовки к практическим занятиям;
- подготовка к экзамену.

Самостоятельная работа помогает студентам:

- 1) приобрести знания и навыки:
 - работы с научными материалами (первоисточники, дополнительная научная и учебная, специальная литература и т.д.);
 - составления логических конспектов, графических изображений структуры конспектов, составление блок-схем и т.д.;
 - работы со справочным материалом;
 - изучения и работы с нормативными и правовыми документами, нормативно-правовыми поисковыми системами Гарант, Консультант Плюс;
 - учебно-методической и научно-исследовательской работы;

- использования компьютерной техники и Интернета и др.;

2) закрепить и систематизировать знания через:

- работу с конспектом лекции;
- обработку текста, повторную работу над материалом учебника, первоисточников, дополнительной литературы;
- подготовку ответов на контрольные вопросы;
- аналитическую обработку текста;
- подготовку рефератов и эссе;
- тестирование и др.;

3) сформировать умения:

- решать ситуационные задачи и упражнения по образцу;
- готовиться к контрольным и проверочным работам, к тестированию;
- принимать участие в практических занятиях в интерактивных формах.

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Цель самостоятельной работы студента - научиться осмысленно и самостоятельно работать с учебным материалом и научной информацией, овладеть фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, сформировать основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свою профессиональную квалификацию.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений бакалавров;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам.

В этой связи важнейшая задача учебного процесса - научить студентов мыслить и усваивать знания. Учащимся необходимо превратиться из пассивных потребителей знаний в активных их творцов, умеющих грамотно сформулировать проблему, проанализировать пути ее решения, найти оптимальный результат и доказать его правильность.

Все ранее перечисленное предполагает ориентацию на активные методы овладения знаниями, развитие творческих способностей студентов,

переход от поточного обучения к индивидуализированному, с учетом потребностей и возможностей личности. Поэтому формы учебного процесса и все методики обучения совершенствуются с целью активизации самостоятельной работы студентов (СРС).

Под самостоятельной работой студентов понимается совокупность всей самостоятельной деятельности студентов как в учебной аудитории, так и за ее пределами, в контакте с преподавателем и в его отсутствие.

Направления реализации самостоятельной работы:

1. В рамках аудиторных занятий - на лекциях, практических занятиях и в ходе выполнения контрольно-самостоятельных работ.
2. Через контакт с преподавателем вне расписания - консультации по учебным вопросам, творческие контакты, ликвидации задолженностей, отчет студента о ходе выполнения учебных и творческих задач.
3. В рамках работы с электронными библиотечными системами (ЭБС типа znanium.com или e.lanbook.com).

Самостоятельная работа по дисциплине «Математические методы и модели в управлении» выполняется с целью получения и закрепления знаний, приобретенных при изучении теоретического материала.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА, СОБЕСЕДОВАНИЕ, КОМПЛЕКТ ЗАДАЧ

Изучение любого раздела или темы следует начинать с ознакомления с вопросами плана изучения темы. Теоретический материал представляет собой конспект лекций, содержащий необходимый набор утверждений и формул (без детальных подробностей), но с подробным обоснованием их использования при решении конкретных экономических задач. При изучении материала необходимо помимо лекционных материалов использовать

рекомендуемую основную и дополнительную литературу для лучшего усвоения материала.

Осваивать теорию следует в соответствии с той последовательностью, которая представлена в плане лекции. Методика работы с литературой предусматривает ведение записи прочитанного в виде плана - конспекта, опорного конспекта. Это позволит сделать знания системными, зафиксировать и закрепить их в памяти.

Для успешного освоения дисциплины, необходимо самостоятельно детально изучить представленные темы по рекомендуемым источникам информации:

Этапы собеседования

Собеседование можно условно подразделить на два этапа:

Подготовительный этап, включающий подготовку студента к собеседованию путем изучения предмета исследования и выбор вопроса (проблемы);

Основной этап, включающий изложение результатов изученного материала в виде связного текста и ответы на встречные вопросы преподавателя.

Подготовка студента к собеседованию начинается с выбора вопроса (проблемы) для изучения. Вопрос (проблема) для собеседования распределяется преподавателем или выбирается студентами из предлагаемой примерной тематики, которая соответствует рабочей программе дисциплины. Вместе с тем студенту предоставляется право взять иной вопрос, который является начальным этапом или продолжением его практической научно-исследовательской работы, учитывает его личные интересы и склонности, способности, а также уровень теоретических знаний и профессиональной практической подготовки и дает возможность творчески подойти к его разработке.

Поиск источников. Грамотно сформулированной темой фиксируется предмет изучения; задача студента - найти информацию, относящуюся к

данному предмету и разрешить поставленную проблему. Выполнение этой задачи начинается с поиска источников. На этом этапе необходимо вспомнить, как работать с энциклопедиями и энциклопедическими словарями (обращать особое внимание на список литературы, приведенный в конце тематической статьи); как работать с систематическими и алфавитными каталогами библиотек; как оформлять список литературы (выписывая выходные данные книги и отмечая библиотечный шифр).

Работа с источниками. Работу с источниками надо начинать с ознакомительного чтения, т.е. просмотреть текст, выделяя его структурные единицы. При ознакомительном чтении закладками отмечаются те страницы, которые требуют более внимательного изучения.

В зависимости от результатов ознакомительного чтения выбирается дальнейший способ работы с источником. Если для разрешения поставленной задачи требуется изучение некоторых фрагментов текста, то используется метод выборочного чтения. Если источник не содержит подробного оглавления, следует обратить внимание на предметные и именные указатели.

Избранные фрагменты или весь текст (если он целиком имеет отношение к теме) требуют вдумчивого, неторопливого чтения с «мысленной проработкой» материала. Такое чтение предполагает выделение: главного в тексте; основных аргументов; выводов. Особое внимание следует обратить на то, вытекает тезис из аргументов или нет.

Необходимо также проанализировать, какие из утверждений автора носят проблематичный, гипотетический характер и уловить скрытые вопросы.

Понятно, что умение таким образом работать с текстом приходит далеко не сразу. Наилучший способ научиться выделять главное в тексте, улавливать проблематичный характер утверждений, давать оценку авторской позиции — это сравнительное чтение, в ходе которого студент знакомится с различными мнениями по одному и тому же вопросу, сравнивает весомость и

доказательность аргументов сторон и делает вывод о наибольшей убедительности той или иной позиции.

Создание вспомогательных конспектов к собеседованию. Подготовительный этап работы может завершаться созданием конспектов, фиксирующих основные тезисы и аргументы, статистическую или ссылочную информацию. Написание вспомогательных конспектов не является обязанностью студента при подготовке к собеседованию, и никак не регулируется оформление таких конспектов.

Основной этап. Студент должен излагать известный материал грамотно, логично, с использованием научных терминов и научного стиля изложения. Студенту не следует отклоняться от установленного предмета изучения и отходить от круга изученных им вопросов в ходе подготовки к собеседованию. Преподавателем могут задаваться вопросы по существу излагаемого материала, а студент должен своевременно, полно и правильно на них отвечать.

Критерии оценки знаний

Дата, время и место собеседования назначаются преподавателем.

Оценка знаний студентов по конкретному вопросу в ходе собеседования производится следующим образом:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если материал по существу вопроса (проблемы) изложен верно, выводы по результатам самостоятельного изучения студентом сделаны верные, студент использовал требуемый стиль изложения, ответил на все вопросы преподавателя верно.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если материал по существу вопроса (проблемы) изложен верно и/или не полностью, выводы по результатам самостоятельного изучения студентом сделаны верные, студент не использовал требуемый стиль изложения, ответил не на все вопросы преподавателя верно.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если материал по существу вопроса (проблемы) изложен с ошибками и не полностью, выводы

по результатам самостоятельного изучения студентом сделаны неверные или не сделаны, студент не использовал требуемый стиль изложения, не ответил верно на большую часть вопросов преподавателя.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если материал по существу вопроса (проблемы) изложен неверно либо не изложен, студент не использовал требуемый стиль изложения, не ответил верно на большую часть вопросов преподавателя.

1. Как в общем виде ставится задача линейного программирования?
2. Каким образом строится математическая модель?
3. Укажите принцип формирования минимальной потребительской продовольственной корзины
4. Каким образом происходит расчет оптимальной загрузки оборудования?
5. Как осуществляется составление плана реализации товара?
6. В чём заключается графический метод решения задачи линейного программирования?
7. Что представляет из себя алгоритм решения задачи линейного программирования графическим методом?
8. Дайте характеристику симплекс-метода решения задач.
9. Как определяется метод направленного перебора решений системы?
10. Приведите примеры расчета экономико-математической модели.
11. Что представляет из себя двойственная задача линейного программирования и ее экономическая интерпретация?
12. В чём заключается принцип решения транспортной задачи?
13. Как определяется задача о назначениях?
14. Что представляют из себя сбалансированные и несбалансированные транспортные модели?
15. В чем заключается метод «северо-западного угла»?
16. Принцип метода минимального элемента.
17. Характеристика метода Фогеля.
18. Как осуществляется оптимизация плана транспортной задачи?
19. Дайте характеристику метода потенциалов.

КОМПЛЕКТ ЗАДАЧ

Задача 1

При продаже двух видов товара используется 4 типа ресурсов. Норма затрат ресурсов на реализацию единицы товара, общий объем каждого ресурса заданы в таблице 1.

Таблица 1 – Данные для задачи

Ресурсы	Норма затрат ресурсов на товары		Общее количество ресурсов
	1-го вида	2-го вида	
1	2	2	12
2	1	2	8

3	4	0	16
4	0	4	12

Прибыль от реализации одной единицы товара первого вида составляет 2 усл. ед., второго вида – 3 усл. ед.

Требуется найти оптимальный план реализации товара при $n = 2$, $m = 4$.

Задача 2

Определить начальное решение транспортной задачи и определить оптимальный размер поставок:

Номер поставщика	Номер потребителя				Предложение
	1	2	3	4	
1	7	8	8	2	160
2	4	5	9	8	140
3	9	2	3	6	170
Спрос	120	50	190	110	

Задача 3

Два предприятия производят продукцию и поставляют её на рынок региона. Они являются единственными поставщиками продукции в регион, поэтому полностью определяют рынок данной продукции в регионе.

Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию с применением одной из трёх различных технологий. В зависимости от качества продукции, произведённой по каждой технологии, предприятия могут установить цену единицы продукции на уровне 10, 6 и 2 денежных единиц соответственно. При этом предприятия имеют различные затраты на производство единицы продукции. (табл. 1.1.).

Таблица 1.1

Затраты на единицу продукции, произведенной на предприятиях региона (д.е.).

Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.	
		Предприятие 1	Предприятие 2
I	10	5	8
II	6	3	4
III	2	1.5	1

В результате маркетингового исследования рынка продукции региона была определена функция спроса на продукцию:

$$Y = 6 - 0.5 \cdot X,$$

где Y – количество продукции, которое приобретёт население региона (тыс. ед.), а X – средняя цена продукции предприятий, д.е.

Данные о спросе на продукцию в зависимости от цен реализации приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Спрос на продукцию в регионе, тыс. ед.

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.	Средняя цена	Спрос на
---------------------------------------	--------------	----------

Предприятие 1	Предприятие 2	реализации 1 ед. продукции, д.е.	продукцию, тыс. ед.
10	10	10	1
10	6	8	2
10	2	6	3
6	10	8	2
6	6	6	3
6	2	4	4
2	10	6	3
2	6	4	4
2	2	2	5

Значения Долей продукции предприятия 1, приобретенной населением, зависят от соотношения цен на продукцию предприятия 1 и предприятия 2. В результате маркетингового исследования эта зависимость установлена и значения вычислены (табл. 1.3.).

Таблица 1.3

Доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношения цен на продукцию

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Доля продукции предприятия 1, купленной населением
Предприятие 1	Предприятие 2	
10	10	0,31
10	6	0,33
10	2	0,18
6	10	0,7
6	6	0,3
6	2	0,2
2	10	0,92
2	6	0,85
2	2	0,72

По условию задачи на рынке региона действует только 2 предприятия. Поэтому долю продукции второго предприятия, приобретённой населением, в зависимости от соотношения цен на продукцию можно определить как единица минус доля первого предприятия.

Стратегиями предприятий в данной задаче являются их решения относительно технологий производства продукции. Эти решения определяют себестоимость и цену реализации единицы продукции. В задаче необходимо определить:

1. Существует ли в данной задаче ситуация равновесия при выборе технологий производства продукции обоими предприятиями?
2. Существуют ли технологии, которые предприятия заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?
3. Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия? Какое предприятие окажется в выигрышном положении?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перечень основной литературы:

- 1 Наумов, И.В.; Эконометрика. Экономическое моделирование социально-экономических процессов в территориальных системах: учебное пособие / И. В. Наумов, Н. Л. Никулина. - Эконометрика. Экономическое моделирование социально-экономических процессов в территориальных системах, Весь срок охраны авторского права. - Электрон. дан. (1 файл). - Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2021. - 127 с. - электронный. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-4497-1408-4,
- 2 Орлов, А. И. Эконометрика : учебное пособие / А. И. Орлов. - Эконометрика, 2021-12-05. - Электрон. дан. (1 файл). - Москва, Саратов : Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Ай Пи Ар Медиа, 2020. - 676 с. - электронный. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-4497-0362-0

2. Перечень дополнительной литературы:

- [illegible]