

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению лабораторных работ
по дисциплине
«ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА»
для студентов направления подготовки
44.03.05 - Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность (профиль):
«Информатика и математика»

Ставрополь, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа 1. Основные правила комбинаторики. Метод включения-исключения.	3
Лабораторная работа 2. Комбинаторные конфигурации	6
Лабораторная работа 3. Бином Ньютона. Основные тождества с биномиальными коэффициентами	9
Лабораторная работа 4. Производящие функции и рекуррентные соотношения.	12
Лабораторная работа 5. Основные понятия теории графов	15
Лабораторная работа 6.18.....	23
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	21

СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

Лабораторная работа 1.

Основные правила комбинаторики. Метод включения-исключения.

Цель занятия - сформировать представление об основных правилах комбинаторики, методах включения-исключения, развить навыки решения задач.

Вопросы для освоения:

1. Правило сложения. Правило умножения.
2. Основное правило комбинаторики.
3. Формула включений и исключений - обобщение правила сложения для пересекающихся множеств.
4. Правило объединения двух множеств.
5. Правило объединения для трех пересекающихся множеств. Примеры.
6. Правило объединения для m множеств. Примеры.

Задания для выполнения и методические рекомендации:

Задание 1.

Изучить теоретический материал по теме «Основные правила комбинаторики. Метод включения-исключения»

Задание 2.

Рассмотрите типовые задачи данного раздела, выполните их решение

Пример 1 (правило суммы)

В классе учатся 17 мальчиков и 19 девочек. Сколькими способами можно назначить одного дежурного?

Решение

Дежурным можно назначить либо мальчика, либо девочку. Дежурным может быть назначен либо любой из 17 мальчиков, либо любая из 19 девочек. По правилу суммы получаем, что выбор может быть осуществлен $17 + 19 = 36$ способами.

Пример 2 (правило произведения).

В чемпионате страны по шахматам участвует 17 человек. Разыгрываются медали: золотая, серебряная и бронзовая. Сколькими способами они могут быть распределены?

Решение

Золотая медаль может быть получена любым из 17 участников. Если золотая медаль получена уже каким-либо участником, то на серебряную медаль остается 16 претендентов. Аналогично, если и золотая и серебряная медали уже распределены, то на бронзовую медаль остается 15 претендентов. По правилу произведения получаем, что медали могут быть распределены $17 \cdot 16 \cdot 15 = 4080$ способами.

Пример 3 (правило суммы и правило произведения).

Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу?

Решение

Первую кость можно выбрать 28 способами. При этом в 7 случаях выбранная кость — «дубль»: «0:0», «1:1», «2:2», «3:3», «4:4», «5:5», «6:6», а в 21 случае — кость с разным числом очков.

Если первая кость «дубль», то вторую кость можно выбрать 6 способами. Например, если на первом шаге выбрана кость «1:1», то на втором шаге можно выбрать «0:1», «2:1», «3:1», «4:1», «5:1», «6:1».

Если же первая кость с разным числом очков, то вторую кость можно выбрать 12 способами. Например, если на первом шаге выбрана кость «3:5», то на втором шаге можно выбрать «0:3», «1:3», «2:3», «3:3», «3:4», «3:6», «0:5», «1:5», «2:5», «4:5», «5:5», «5:6».

Разобьем все способы выбора на два класса: если первая кость «дубль», то относим этот способ выбора к первому классу, а если первая кость с разным числом очков, то — ко второму.

По правилу произведения получаем, что в первом классе $7 \cdot 6 = 42$ способа выбора двух костей домино, которые можно приложить друг к другу, а во втором классе — $21 \cdot 12 = 252$. По правилу суммы общее число способов выбора двух костей домино равно сумме способов выбора в обоих классах: $42 + 252 = 294$.

Если не учитывать порядок, в котором выбирались кости, то способов выбора в два раза меньше $294 : 2 = 147$.

Пример 4 (правило включений и исключений)

В спортивном лагере 65% ребят умеют играть в футбол, 70% - в волейбол и 75% - в баскетбол. Каково наименьшее число ребят, умеющих играть и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол?

Решение:

$$n(A)=65, n(B)=70, n(C)=75;$$

$$n(A \cup B)=100, n(A \cup C)=100, n(B \cup C)=100, n(A \cup B \cup C)=100;$$

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B);$$

$$100=65+75-n(A \cap B);$$

$$n(A \cap B)=65+75-100=35 \text{ человек умеют играть и в футбол, и в волейбол.}$$

$$n(A \cap B \cap C)=n(C)+n(A \cap B)-n(A \cup B \cup C)=75+35-100=10 \text{ человек умеют играть и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол.}$$

Ответ: 10.

Пример 5 (правило включений и исключений)

Каждый из учеников класса в зимние каникулы ровно два раза был в театре, при этом спектакли А, В и С видели соответственно 25, 12 и 23 ученика. Сколько учеников в классе? Сколько из них видели спектакли А и В, А и С, В и С?

Решение:

$$1) \quad (25+12+23):2=30 \text{ учеников в классе;}$$

$$2) \quad n(A \cap B \cap C)=n(A \cap B)+n(A \cap C)+n(B \cap C)-30;$$

$$n(A \cap B)+n(A \cap C)=25; n(A \cap B)+n(B \cap C)=12; n(A \cap C)+n(B \cap C)=23;$$

$$25+n(B \cap C)=30; 12+n(A \cap C)=30; 23+n(A \cap B)=30;$$

$$n(B \cap C)=5; n(A \cap C)=18; n(A \cap B)=7.$$

Ответ: 30, 7, 18, 5.

Пример 6 (правило включений и исключений)

В течение недели в кинотеатре демонстрировались фильмы А, В и С. Из 40 школьников, каждый из которых посмотрел либо все три фильма, либо один из трех, фильм А видели 13, фильм В – 16, фильм С – 19. Найти, сколько учеников посмотрели все три фильма.

Решение:

$$n(A \cup B \cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B \cap C) \text{ т.к. } n(A \cap B)=n(B \cap C)=n(C \cap A)=\emptyset;$$

$$n(A \cap B \cap C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cup B \cup C)=13+16+19-40=8.$$

Ответ: 8.

Пример 7 (правило включений и исключений)

В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только пятеро не умеют ни того ни другого. Сколько ребят умеют плавать и играть в шахматы?

Решение:

$$n(A)=30, n(B)=27, n(C)=5, \text{ причем } n(A \cap C)=n(B \cap C)=\emptyset, n(A \cup B \cup C)=40;$$

$$n(A \cup B) = n(A \cup B \cup C) - n(C) = 40 - 5 = 35;$$

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 30 + 27 - 35 = 22.$$

Ответ: 22.

Задание 3.

Выполните решение и предложите методику объяснения следующих задач

1. Сколько существует различных вариантов покупки одной розы, если к продаже предлагаются 3 алые, 2 белые и 4 чайные розы?
2. В авторалли участвуют 5 автомашин «Нива» и 6 автомашин «Лада». Сколько различных вариантов занятия 1-го места в этом ралли?
3. В биологическом кружке 5 девушек и 3 юноши. Нужно направить на летнюю практику в горы двух человек (1 девушку и 1 юношу). Сколько можно составить различных пар? Сколькими различными способами из членов этого кружка можно выбрать 1 человека для участия в экологической конференции?
4. Имеются три волчка с 6, 8 и 10 гранями соответственно. Сколько возможно вариантов их падения? Решить ту же задачу, если известно, что по крайней мере два волчка упали на сторону, помеченную цифрой 1.
5. Сколько различных смешанных пар для игры в теннис можно образовать из 8 юношей и 6 девушек?
6. Чемпионат, в котором участвуют 16 команд, проводится в два круга (т.е. каждая команда дважды встречается с любой другой). Определить, какое количество встреч следует провести.
7. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 2 ладьи так, чтобы она не могла взять другую? (Одна ладья может взять другую, если она находится с ней на одной горизонтали или одной вертикали шахматной доски).
8. Две ладьи различного цвета расположены на шахматной доске так, что каждая может взять другую. Сколько существует таких расположений?
9. В рояле 88 клавиш. Сколькими способами можно последовательно извлечь 6 звуков: а) различных; б) звуки могут повторяться?
10. Из города А в город Б ведут 5 дорог, а из города Б в город В - 3 дороги. Сколько путей, проходящих через Б, ведут из А в В?
11. Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколько существует вариантов этого выбора?
12. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?
13. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слов «камзол»; «здание»?
14. Бросают игральную кость с шестью гранями и запускают волчок, имеющий 8 граней. Сколько возможно способов их падения?
15. В НИИ работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 - немецкий язык и 23 - оба языка. Сколько человек не знают ни английского, ни немецкого языков?
16. В отделе НИИ работают несколько человек, причём каждый из них знает хотя бы один иностранный язык: 6 человек знают английский, 6 - немецкий, 7 - французский, 4 человека знают английский и немецкий, 3 - немецкий и французский. 2 - английский и французский, 1 человек знает все 3 языка. Сколько человек работают в отделе? Сколько из них знают только английский? Сколько только французский?
17. В спортивном магазине, который торгует лыжами, лыжными ботинками и лыжными палками, за месяц было куплено 1000 пар лыж, 500 пар лыжных ботинок, 500 пар палок. При этом 400 пар лыж куплено вместе с ботинками, 300 пар лыж - вместе с палками, 200 пар ботинок - вместе с палками, а 100 пар лыж вместе с ботинками и палками. Сколько покупателей посетили магазин

18. В классе 35 учащихся, из них 20 посещают математический кружок, а 11 - физический, 10 учеников не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают два кружка? Сколько учеников посещают только математический кружок? Ответ: 6, 14.
19. Сколько существует целых чисел от 1 до 1000, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5, ни на 7?

Лабораторная работа 2. Комбинаторные конфигурации

Цель занятия - сформировать представление о комбинаторных конфигурациях, развить навыки решения задач.

Вопросы для освоения:

- 1 Комбинаторные конфигурации: перестановки, размещения
- 2 Сочетания, сочетания с повторениями,
- 3 Перестановки с повторениями, размещения с повторениями.

Задания для выполнения и методические рекомендации:

Задание 1.

Изучить теоретический материал по теме «Комбинаторные конфигурации»

Число перестановок на n символах, обозначаемое P_n , - это число способов введения линейного порядка на множестве из n элементов. Можно сказать, что это число способов расставить n человек в очередь. На первое место можно поставить любого из n , на второе – любого из оставшихся $n - 1$ и т.д. пока не дойдем до $n -$ го места, на которое останется единственный представитель. Поэтому

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Запомним, что

$$0! = 1! = 1, 2! = 1 \cdot 2 = 2, 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2! \cdot 3 = 6, n! = (n - 1)! \cdot n.$$

Вот 6 возможных порядков на множестве из 3 элементов $\{1, 2, 3\}$:

$$(1, 2, 3) (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$

Пусть из n элементов требуется выбрать m элементов ($m \leq n$) и линейно их упорядочить. Обозначая число таких упорядоченных выборок через A_n^m и рассуждая, как и прежде, получаем

$$A_n^m = n(n - 1) \dots (n - m + 1) = \frac{n!}{(n - m)!}.$$

Число A_n^m называют числом размещений из n по m .

Пусть теперь из n – элементного множества просто выбирается его m – элементное подмножество без упорядочивания. Число m – элементных подмножеств n – элементного множества обозначается через C_n^m (читается, «це» из n по m) и называется числом сочетаний из n по m . Для нахождения C_n^m заметим, что упорядоченную выборку можно рассматривать как получаемую в два этапа: сначала из n - элементов выбирается неупорядоченное m – элементное подмножество, что можно сделать C_n^m способами, а затем выбранное m – элементное подмножество линейно упорядочивается, что можно сделать $P_m = m!$ способами. Это приводит к соотношению:

$$A_n^m = C_n^m \cdot m!,$$

откуда получаем

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n - m)! \cdot m!}.$$

Заметим, что $C_n^0 = 1, C_n^1 = n, C_n^2 = \frac{n(n - 1)}{2},$

а также $C_n^m = C_n^{n - m}.$

Тренер футбольной команды, желающий сделать одновременную замену 2 из 10 полевых игроков и имеющий 5 футболистов на скамейке запасных, может это сделать

$$C_{10}^2 \cdot C_5^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 450 \text{ способами.}$$

Если футбольный матч закончился в ничью и его судьба решается в серии послематчевых пенальти, то у тренера A_{11}^5 возможностей представить судье список 5 пенальтистов из 11 закончивших матч футболистов, т.к. порядок выполнения футболистами пенальти имеет значение.

Число различных последовательностей длины n , состоящих из m символов a_i , $i = 1, 2, \dots, m$ равно m^n , т.к. на каждое место можно независимо ставить любой из m символов. В частности, число целых неотрицательных не более чем n – значных десятичных чисел равно 10^n . Пусть теперь задано, что символ a_i встречается n_i раз ($i = 1, 2, \dots, m$; $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$). Чему равно число последовательностей из m символов с заданным числом n_i включения каждого символа?

Возьмем n_1 символов a_1, n_2 символов $a_2, \dots, n_m$ символов a_m , всего n символов, и занумеруем их числами от 1 до n . Тогда каждой перестановке из чисел от 1 до n будет соответствовать последовательность, включающая n_1 раз символ a_1, n_2 раз символ a_2 и т.д. Однако перестановки внутри множеств, соответствующих одинаковым символам, приводят к той же самой последовательности. Отсюда получаем, что число последовательностей равно $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_m!}$. В частности, число двоичных последовательностей длины n с m единицами равно $\frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$.

Пусть теперь имеется m различных типов элементов, причем элементы одинакового типа считаются неразличимыми, а запас элементов каждого типа неограничен. Требуется составить m – элементное множество, используя n типов элементов, причем элементов каждого типа может включаться в множество любое число от 0 до m . Число таких множеств называется числом сочетаний с повторениями из n по m и обозначаются $\bar{C}_n^m$. Здесь возможен случай и $m > n$.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу. В магазине имеется 4 сорта роз: красные, желтые, оранжевые, белые. Сколькими способами может быть куплено 5 роз? В наших обозначениях это число равно $\bar{C}_4^5$.

В качестве другого примера рассмотрим целочисленные неотрицательные решения уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$$

связывая с каждой переменной тип элемента, а с её значением – число элементов данного типа, получаем, что число искомых решений равно $\bar{C}_n^m$.

Для того, чтобы найти число $\bar{C}_n^m$, рассмотрим последовательности длины $n + m - 1$ из двух символов «*» и «|», у которых число звездочек равно m , а число черточек $n - 1$. С каждой такой последовательностью можно связать сочетание с повторениями, ставя в каждом из n промежутков между черточками вместо звездочек символы типа, соответствующего номеру промежутка. Этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между m – элементными множествами из n типов элементов и последовательностями из двух символов. Поэтому

$$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Пусть теперь n – элементное множество разбивается на m подмножеств. Причем m_1 подмножеств имеют мощность n_1 , m_2 подмножеств – мощность n_2 и т.д., наконец, m_k подмножеств – мощность n_k ($m_1 + \dots + m_k = m, n_1 + \dots + n_k = n$). Сколько существует таких разбиений?

С каждой перестановкой исходного n -элементного множества можно связать разбиение на подмножества заданной мощности, если в перестановке отсчитывать слева направо m_1 раз по n_1 элементов, m_2 раз по n_2 элементов и т.д. При этом перестановка элементов внутри каждого множества, а также перестановка множеств одинаковой мощности между собой не меняют разбиения. Поэтому число разбиений равно

$$\frac{n!}{(n_1!)^{m_1} \cdot \dots \cdot (n_k!)^{m_k} m_1! \cdot \dots \cdot m_k!}$$

Пусть в турнире участвуют $2n$ команд. Сколькими способами может быть проведен первый круг, т.е. сколькими способами команды могут быть разбиты на пары? В соответствии с полученной формулой это число равно

$$\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

Задание 2.

Рассмотрите типовые задачи данного раздела, выполните их решение

Задание 3.

Выполните решение следующих задач

- Сколькими способами может быть выбрано 5 номеров из 36?
а) A_{36}^5 ; б) C_{36}^5 ; в) 36^5
- Пусть имеется n языков. Сколько нужно издать словарей, чтобы был возможен перевод с любого языка на любой?
а) C_n^2 ; б) A_n^2 ; в) $2n$.
- У мамы 5 яблок, 7 груш и 3 апельсина. Каждый день, в течение 15 дней, она выдает сыну по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?
а) C_{15}^3 ; б) $5 \cdot 7 \cdot 3$; в) $\frac{15!}{5!7!3!}$.

В распоряжении имеются яблоки, груши и апельсины. Сколькими способами может быть составлен подарочный набор из 5 фруктов?

- а) C_5^3 ; б) A_5^3 ; в) $\overline{C}_3^5$.
- Сколькими способами можно разделить яблоко, грушу, апельсин, сливу, лимон и айву между тремя мальчиками так, чтобы каждому досталось по 2 фрукта?
а) C_6^3 ; б) $\frac{6!}{2^3}$; в) 6^3 .
- Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки, если известно, что никто из них не получил неудовлетворительной оценки?
- Сколько всего трехзначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если:
А) цифры могут повторяться,
Б) все цифры разные.
- Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее 2-х женщин. Сколькими способами это можно сделать?
- В группе 7 мальчиков и 4 девочки. Необходимо выбрать 6 человек так, чтобы в числе этих 6 было не менее двух девочек. Сколькими способами это можно сделать?
- На вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами из них можно выбрать четыре пары для танца?
- Из двух математиков и десяти экономистов необходимо составить комиссию из восьми человек. Сколькими способами может быть составлена комиссия, если в неё должен входить хотя бы один математик?

11. Сколькими способами можно выбрать из 20-ти студентов старосту, профорга, культорга?

Лабораторная работа 3.

Бином Ньютона. Основные тождества с биномиальными коэффициентами

Цель занятия - сформировать представление о Биноме Ньютона и тождествах с биномиальными коэффициентами, развить навыки решения задач.

Вопросы для освоения:

- 1 Бином Ньютона. Основные тождества с биномиальными коэффициентами.
- 2 Треугольник Паскаля.
- 3 Основные свойства разложение бинома.
- 4 Полиномиальная формула

Задания для выполнения и методические рекомендации:

Задание 1.

Изучить теоретический материал по теме «Бином Ньютона. Основные тождества с биномиальными коэффициентами»

Основные тождества для биномиальных коэффициентов

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$;
2. $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$;
3. $\sum_{i=0}^n C_n^i = (1+1)^n = 2^n$;
4. $\sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i = (1-1)^n = 0$;
5. $C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^k C_n^i \cdot C_m^{k-i}$;
6. $C_{2n}^n = \sum_{i=0}^n (C_n^i)^2$.

Задание 2.

Рассмотрите типовые задачи данного раздела, выполните их решение

1. При каких значениях x 5-ый член разложения $(2x+3)^9$ будет больше соседних с ним членов?

Решение:

$$T_5 > T_4; \quad T_5 > T_6.$$

$$\{C_9^5 * (2x)^4 3^5 > C_9^4 * (2x)^5 * 3^4\}$$

$$\{3x^4 > 2x^5\}$$

2. Найдите член разложения $(x + \frac{1}{x})^8$, не содержащий x .

Решение:

$$T_{m+1} = C_n^m \cdot a^{n-m} \cdot b^m ;$$

$$T_{m+1} = C_8^m \cdot a^{8-m} \cdot b^m ;$$

$$T_{m+1} = C_8^m \cdot x^{8-m} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^m ;$$

$$T_{m+1} = C_8^m \cdot x^{8-2m} ;$$

$$8 - 2m = 0 ;$$

$$m = 4$$

$$T_5 = C_8^4 \cdot a^4 \cdot b^4 ;$$

$$T_5 = \frac{8!}{4!4!} \cdot x^4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 ; \text{ но так как } x^4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 = 1, \text{ то}$$

$$T_5 = 70.$$

Ответ: 70.

3. Найдите член разложения $(\sqrt[3]{x^{-2}} + x)^7$, содержащий x^2 .

Решение:

$$T_{m+1} = C_n^m \cdot a^{n-m} \cdot b^m;$$

$$T_{m+1} = C_7^m \cdot \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^{7-m} \cdot x^m;$$

$$T_{m+1} = C_7^m \cdot x^{-\frac{14-2m}{3}} \cdot x^m;$$

$$\frac{-14+2m}{3} + m = 2;$$

$$-14 + 2m + 3m = 6;$$

$$5m = 20;$$

$$m = 4$$

$$T_5 = C_7^4 \cdot a^{7-4} \cdot b^4;$$

$$T_5 = C_7^4 \cdot \left(x^{-\frac{2}{3}}\right)^3 \cdot x^4 = \frac{7!}{4!3!} \cdot x^{-2} \cdot x^4 = 35x^2;$$

Ответ: $T_5 = 35x^2$

4. Найдите член разложения $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$, не содержащий x .

Решение:

$$T_{m+1} = C_n^m \cdot a^{n-m} \cdot b^m;$$

$$T_{m+1} = C_{15}^m \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{15-m} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^m;$$

$$T_{m+1} = C_{15}^m \cdot x^{\frac{15-m}{3}} \cdot x^{-\frac{m}{2}};$$

$$\frac{15-m}{3} - \frac{m}{2} = 0;$$

$$30 - 2m - 3m = 0;$$

$$5m = 30;$$

$$m = 6.$$

$$T_7 = C_{15}^6 \cdot \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^9 \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^6 = \frac{15!}{6!9!} \cdot x^3 \cdot x^{-3} = 5005.$$

Ответ: седьмой член, он равен 5005.

5. В разложении $(a\sqrt{a} + \frac{1}{a^4})^n$ коэффициент второго члена разложения на 44 больше коэффициента первого члена. Найти n .

Решение:

$$C_n^1 - 44 = C_n^0;$$

$$C_n^1 - C_n^0 = 44;$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} - \frac{n!}{n!} = 44;$$

$$\frac{(n-1)!n}{(n-1)!} - 1 = 44;$$

$$n = 45.$$

Ответ: $n=45$.

6. Сумма коэффициентов 3-х первых членов разложения $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^n$ равна 97. Найдите член разложения, содержащий x^4 . Чему он равен?

Решение:

$$\begin{aligned}T_1 &= C_n^0 \cdot x^{2n} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^0 \\T_2 &= C_n^1 \cdot x^{2n-2} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^1 = -2C_n^1 \cdot x^{2n-3} \\T_3 &= C_n^2 \cdot x^{2n-4} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^2 = 4C_n^2 \cdot x^{2n-6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_n^0 - 2C_n^1 + 4C_n^2 &= 97 ; \\ \frac{n!}{n!} - 2 \frac{n!}{(n-1)!} + 4 \frac{n!}{2!(n-2)!} &= 97 ; \\ 1 - 2n + 2n(n-1) &= 97 ; \\ 2n^2 - 4n - 96 &= 0 ; \\ n^2 - 2n - 48 &= 0 ;\end{aligned}$$

$$n_1 = 8; \quad n_2 = -6 (\text{не удовлетворяет условию}).$$

$$\begin{aligned}T_{m+1} &= C_8^m \cdot (x^2)^{8-m} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^m ; \\ 16 - 2m - m &= 4 ; \\ 3m &= 12 ; \\ m &= 4.\end{aligned}$$

$$T_5 = C_8^4 \cdot (x^2)^4 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^4 = \frac{8!}{4!4!} \cdot x^8 \cdot \frac{16}{x^4} = 1120x^4.$$

Ответ: $T_5 = 1120x^4$.

Задание 3.

Выполните решение следующих задач

1. Найдите третий член разложения $\left(z^2 + \frac{1}{z} \cdot \sqrt[3]{z}\right)^n$, если сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2048.

Ответ: $T_3 = 55 \cdot z^{\frac{52}{3}}$.

2. Найдите член разложения $\left(\frac{x\sqrt{x}}{b} + \frac{b}{\sqrt{x^2}}\right)^m$, содержащий $x^{5,5}$, если сумма биномиальных коэффициентов разложения равна 256.

Ответ: $T_4 = 56 \cdot \frac{x^{5,5}}{b^2}$.

3. Найти средний член в разложении бинома $\left(a^{-2}\sqrt{a} - \sqrt{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^n$, если коэффициент 5-го члена разложения относится к коэффициенту 3-го как 14 к 3.

Ответ: 6-ой член, равен 252.

4. Коэффициент при x в третьем члене разложения $\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^n$ равен 31.

Ответ: $n=37$.

5. Найти члены разложения $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9$, являющиеся целыми числами.

Ответ: 4, 10.

6. Найти x , если третий член разложения $\left(2^{\sqrt{x}} + \frac{4}{\sqrt{4x+4}}\right)^6$ равен 240.
Ответ: $x = -1$.

Лабораторная работа 4. Производящие функции и рекуррентные соотношения.

Цель занятия - сформировать представление о производящих функциях и рекуррентных соотношениях, развить навыки решения задач.

Вопросы для освоения:

- 1 Производящие функции - понятие, соответствующие им последовательности.
- 2 Метод рекуррентных соотношений.
- 3 Способы решения рекуррентных соотношений.
- 4 Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.
- 5 Случай равных корней.

Задания для выполнения и методические рекомендации:

Задание 1.

Изучить теоретический материал по теме «Производящие функции и рекуррентные соотношения»

С каждой числовой последовательностью $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ можно связать степенной ряд $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$, который называется производящей функцией для последовательности $\{a_n\}$. Если ряд $A(x)$ сходится в некоторой окрестности нуля, он является рядом Маклорена для функции $A(x)$. Поэтому знание производящей функции позволяет восстановить исходную последовательность $\{a_n\}$:

$$a_n = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n A(x)}{dx^n} \Big|_{x=0}.$$

Полезно знать производящие функции для простейших последовательностей.

Пусть $\{a_n\} = 1, 1, \dots, 1, \dots$

Тогда $A(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$.

Это есть хорошо известная из школьного курса математики формула для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Почленным дифференцированием из нее получаем, что производящая функция для $\{a_n\} = 1, 2, \dots, n, \dots$ есть

$$A(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

С помощью k – кратного дифференцирования можно получить и более общую формулу

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_{k+n-1}^n x^n = \frac{1}{(1-x)^k}.$$

Полезно также следующие непосредственно проверяемое тождество

$$\frac{1-x^n}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}.$$

Чтобы продемонстрировать возможности метода производящих функций для решения задач перечисления, рассмотрим задачу из раздела 1.3., решенную там с помощью формулы включения и исключения, и решим её методом производящих функций.

Пусть требуется найти число целочисленных решений системы

$$\{x_1 + x_2 + x_3 = 40 \mid \{4 \leq x_1 \leq 15 \mid \{9 \leq x_2 \leq 18 \}$$

Легко понять, что искомое число решений есть коэффициент при x^{40} после раскрытия скобок в выражении

$$(x^4 + \dots + x^{15})(x^9 + \dots + x^{18})(x^5 + \dots + x^{16}).$$

Более обще, можно сказать, что выписанное выражение является производящей функцией для числа решений системы

$$\{x_1 + x_2 + x_3 = n \mid \{4 \leq x_1 \leq 15 \mid \{9 \leq x_2 \leq 18 \mid$$

т.к. при любом целом $n \geq 0$ коэффициент при x^n равен числу решений. Найдем коэффициент при x^{40} .

$$\begin{aligned} & (x^4 + \dots + x^{15})(x^9 + \dots + x^{18})(x^5 + \dots + x^{16}) = \\ & = x^4(1 + \dots + x^{11})x^9(1 + \dots + x^9)x^5(1 + \dots + x^{11}) = \\ & \quad x^{18} \cdot \frac{1-x^{12}}{1-x} \cdot \frac{1-x^{10}}{1-x} \cdot \frac{1-x^{12}}{1-x} = \\ & = x^{18} \cdot \frac{1}{(1-x)^3} \cdot (1-x^{10}-2x^{12}+2x^{22}+x^{24}+x^{34}) = \\ & = x^{18} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+2}^i x^i \cdot (1-x^{10}-2x^{12}+2x^{22}+x^{24}+x^{34}). \end{aligned}$$

В коэффициент при x^{40} дают вклад значения $i = 22, 12, 10, 0$. Поэтому число решений равно

$$C_{24}^{22} - C_{14}^{12} - 2C_{12}^{10} + 2C_2^0 = \frac{24 \cdot 23}{2} - \frac{14 \cdot 13}{2} - 2 \frac{12 \cdot 11}{2} + 2 = 55.$$

Теперь рассмотрим более интересный пример. Пусть требуется найти число C_n двоичных последовательностей длины n , не содержащих двух единиц подряд. Имеем $C_1=2$, $C_2=3$. Положим $C_0=1$.

Разобьем искомое множество последовательностей на 2 подмножества: последовательности, начинающиеся с 0, и последовательности, начинающиеся с 1. Последовательности первого типа не имеют каких-либо дополнительных ограничений на последующие $n-1$ символов. Поэтому их C_{n-1} . Последовательности второго типа на второй позиции обязана содержать 0, а на последующие $n-2$ символов нет каких-либо ограничений, поэтому их C_{n-2} . Это приводит к соотношению

$$C_n = C_{n-1} + C_{n-2},$$

которое называется рекуррентным, т.к. выражает n -ый член через значения предыдущих членов. Вместе с начальными данными $C_0 = 1$ и $C_1 = 2$ оно позволяет найти любой член последовательности $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$. Для получения формулы n -го члена в явном виде домножим обе части рекуррентного соотношения на x^n и просуммируем по n от 2 до ∞ .

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} C_{n-2} x^n$$

Это позволяет для производящей функции

$$C(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + \dots$$

получить соотношение

$$C(x) - 1 - 2x = x(C(x) - 1) + x^2 C(x)$$

Разрешая это соотношение относительно $C(x)$ получаем

$$C(x) = -\frac{x+1}{x^2+x-1}$$

Разлагаем данное рациональное выражение на простейшие дроби

$$x^2 + x - 1 = (x - x_1)(x - x_2), \text{ где } x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

$$C(x) = \frac{a}{x-x_1} + \frac{b}{x-x_2} = -\frac{x-1}{(x-x_1)(x-x_2)};$$

$$a(x-x_2) + b(x-x_1) = -x-1$$

Подставляя $x = x_1$, получаем

$$a = -\frac{x_1+1}{x_1-x_2} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Подставляя $x = x_2$, получаем

$$b = -\frac{x_1 + 1}{x_1 - x_2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$C(x) = -\frac{1}{x_1} \cdot \frac{a}{1 - \frac{x}{x_1}} - \frac{1}{x_2} \cdot \frac{b}{1 - \frac{x}{x_2}} = -\frac{a}{x_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_1}\right)^n - \frac{b}{x_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{x_1^{n+1}} + \frac{b}{x_2^{n+1}}\right) x^n$$

Отсюда находим

$$C_n = -\frac{a}{x_1^{n+1}} - \frac{b}{x_2^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^{n+2} + (-1)^{n+1} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^{n+2} \right]$$

Данная последовательность называется последовательностью Фибоначчи, по имени впервые рассмотревшего её итальянского математика 13 века.

Задание 2.

Рассмотрите типовые задачи данного раздела, выполните их решение

1. В разложении бинома $\left(\frac{x\sqrt{x}}{b} + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ найти член, содержащий $x^{5,5}$, если сумма биномиальных коэффициентов равна 256.

Решение.

$$\left(\frac{x\sqrt{x}}{b} + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n = \left(x^{\frac{3}{2}} * b^{-1} + x^{-\frac{2}{3}} * b\right)^n$$

$$2^n = 256; n = 8.$$

$$\begin{aligned} T_{m+1} &= C_8^m * \left(x^{\frac{3}{2}} b^{-1}\right)^{8-m} * \left(b x^{-\frac{2}{3}}\right)^m = C_8^m * x^{\frac{24-3m}{2}} b^{m-8} * x^{-\frac{2m}{3}} b^m \\ &= C_8^m * x^{\frac{24-3m}{2} - \frac{2m}{3}} * b^{2m-8} \\ &\quad x^{\frac{24-3m}{2} - \frac{2m}{3}} = x^{5,5} \end{aligned}$$

$$\frac{24 - 3m}{2} - \frac{2m}{3} = 5,5$$

$$m = 3$$

$$T_4 = C_8^3 * x^{5,5} * b^{-2} = 56 \frac{x^{5,5}}{b^2}$$

Ответ: $T_4 = 56 \frac{x^{5,5}}{b^2}$.

2. Найти a_n , зная Рекуррентное соотношение и начальные члены:

$$a_{n+2} + a_{n+1} - 6a_n = 0; a_1 = 1; a_2 = 211;$$

Решение:

$$\begin{aligned} r^2 + r - 6 &= 0, \\ r_1 &= 2, \quad r_2 = -3; \\ a_n &= C_1 * 2^{n-1} + C_2 * (-3)^{n-1} \\ a_1 &= 1; a_2 = 211; \\ 1 &= C_1 * 2^0 + C_2 * (-3)^0, \\ 211 &= C_1 * 2^1 + C_2 * (-3)^1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2, \\ 211 &= C_1 * 2 + C_2 * (-3); \\ C_1 &= 1 - C_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
211 &= 16C_1 + 81C_2; \\
211 &= 16(1 - C_2) + 81C_2 \\
211 &= 16 - 16C_2 + 81C_2 \\
211 &= 16 + 65C_2 \\
195 &= 65C_2 \\
C_2 &= 3, C_1 = 2
\end{aligned}$$

Ответ. $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 3 \cdot 6^{n-1}$

Задание 3.

Выполните решение следующих задач

1. Найти n -ый член последовательности, заданной рекуррентно $u_{n+2} - 4u_{n+1} + 3u_n = 0$, $u_0 = 8, u_1 = 10$.

а) $7 + 3^n$; б) 8^n ; в) $7 + 2^n$.

2. Найти n -ый член последовательности, заданной рекуррентно $a_{n+1} = a_n + n, a_0 = 1$.

а) n^2 ; б) $1 + \frac{n(n-1)}{2}$; в) 2^n .

3. Найти $a \cdot n$ и $b \cdot n$ из системы рекуррентных соотношений $\{a_{n+1} = 3a_n + b_n \mid a_0 = 14, b_0 = -6\}$

а) $\{a_n = 14 \cdot 2^n \mid$; б) $\{a_n = 13 + 2^n \mid$ в) $\{a_n = 2^{n+1}(2n + 7) \mid$.

Лабораторная работа 5. Основные понятия теории графов

Цель занятия - сформировать представление об основных понятиях теории графов.

Вопросы для освоения:

- 1 Путь в графе и связанные компоненты графа
- 2 Цепи, простые цепи, циклы, простые циклы.
- 3 Операции удаления вершин, удаления ребер, подразбиение ребра.
- 4 Дерево и его особенности

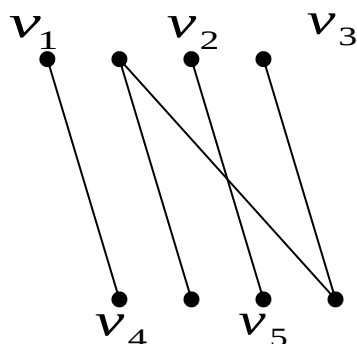
Задания для выполнения и методические рекомендации:

Задание 1.

Изучить теоретический материал по теме «Основные понятия теории графов»

Граф $G = (V, E)$ есть конечное множество V , элементы которого называются вершинами, и множество E его двухэлементных подмножеств, называемых ребрами. Если $v_1, v_2 \in V$ и $(v_1, v_2) \in E$, то вершины v_1, v_2 называются смежными. Поэтому граф можно определить также как симметричное иррефлексивное бинарное отношение смежности на множестве V . Вершины, составляющие ребро, называются инцидентными этому ребру.

Графы с небольшим числом вершин удобно представлять рисунками, на которых вершинам соответствуют точки, а ребрам – соединяющие их линии. Например:



Здесь $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{(v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_3, v_4), (v_2, v_5), (v_3, v_5)\}$

Другой способ задания графа – с помощью симметричной бинарной матрицы $A = \|a_{ij}\|$, где $a_{ij} = a_{ji} = 1$, если $(v_i, v_j) \in E$, и $a_{ij} = a_{ji} = 0$, если $(v_i, v_j) \notin E$. Матрица, соответствующая изображенному на рисунке графу имеет вид

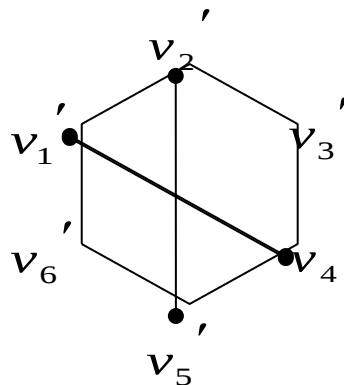
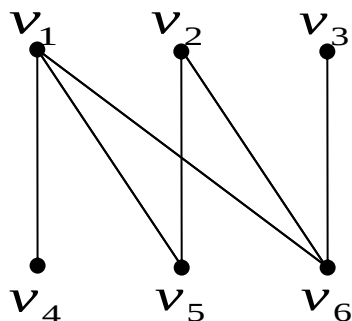
0	0	0	1	0
0	0	0	1	1
0	0	0	1	1
1	1	1	0	0
0	1	1	0	0

Граф на n вершинах называется полным, если у него присутствуют все C_n^2 возможных ребер, и пустым, если он не имеет ни одного ребра. Графы $G = (V, E)$ и $G' = (V, E')$ называются дополнительными друг к другу, если их множества вершин совпадают, а ребро (v_1, v_2) присутствует в одном графе в том и только в том случае, если оно отсутствует в другом графе. Таким образом, пустой и полный графы на одном и том же множестве вершин – это два взаимно дополнительных графа.

Граф $G' = (V', E')$ называется подграфом графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. При этом, если $V' = V$, то граф $G' = (V, E')$ называется остовным подграфом.

Если вершина инцидентна k ребрам, то говорят, что она имеет степень k . Граф называется регулярным степени k , если все его вершины имеют степень k .

На множестве из n вершин существует $2^{C_n^2}$ различных графов. Если два графа имеют одинаковое число вершин и между их вершинами может быть установлено взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность, то графы называются изоморфными. Два графа, изображенных на рисунке, изоморфны



Изоморфизм устанавливается с помощью биекции: $v_1 \leftrightarrow v_1', v_2 \leftrightarrow v_3', v_3 \leftrightarrow v_5', v_4 \leftrightarrow v_2', v_5 \leftrightarrow v_4', v_6 \leftrightarrow v_6'$.

Путем длины k называется последовательность вершин $v_0, v_1, \dots, v_k$, в которой каждые две рядом стоящие вершины смежны, т.е. $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-1}, v_k) \in E$.

Граф называется связным, если между любыми двумя его вершинами существует путь. В противном случае он распадается на компоненты связности.

Путь называется циклом, если его первая и последняя вершины совпадают.

Граф называется эйлеровым, если существует цикл, проходящий один раз через каждое ребро графа. Для того, чтобы граф был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы он был связным и все его вершины имели четные степени.

Граф называется гамильтоновым, если существует цикл, проходящий один раз через каждую вершину графа. Эффективно проверяемого критерия гамильтоновости неизвестно.

Связный граф без циклов называется деревом. Дерево на n вершинах имеет $n - 1$ ребер. Необязательно связный граф без циклов называется лесом.

Граф $G = (V, E)$ называется двудольным, если множество его вершин можно разбить на 2 непересекающихся подмножества так, что каждое ребро имеет одну вершину из одного подмножества, а другую – из другого: $V = V_1 \cup V_2$ и для любого ребра (v_1, v_2) имеем $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Если при этом любая вершина из V_1 соединена ребром с любой вершиной из V_2 , то граф называется полным двудольным. Для двудольности графа необходимо и достаточно, чтобы он не содержал циклов нечетной длины.

В реальных задачах вершинам графа могут соответствовать, например, населенные пункты, а ребрам – связывающие их дороги. Тогда каждому ребру естественно поставить в соответствие длину соответствующей дороги. Вообще, если ребрам графа поставить в соответствие некоторые числа (обычно неотрицательные), то граф называется взвешенным.

Помимо обычных графов часто рассматриваются так называемые ориентированные графы или орграфы.

Орграф – это пара (V, A) , где V , как обычно, множество вершин, а A – множество упорядоченных пар вершин, т.е. ориентированных ребер, которые называются дугами.

Если $a = (v_1, v_2) \in A$, то вершину v_1 называют началом, а v_2 – концом дуги a . На рисунке дуги отмечают стрелками, идущими от начала к концу. Здесь представлен ориентированный граф и задающая его матрица.

v_1

v_2

0	1	1
0	0	1
1	0	0

v_3

Число дуг, входящих в вершину, называется полустепенью захода вершины, а число дуг, выходящих из вершины, – полустепенью исхода вершины. Пусть $v \in V$. Через $\Gamma(v)$ будем обозначать множество таких вершин v' , что $(v, v') \in A$. Через $\Gamma^{-1}(v)$ обозначим множество вершин v'' таких, что $(v'', v) \in A$. Таким образом, полустепени захода и исхода вершины v равны, соответственно $|\Gamma^{-1}(v)|$ и $|\Gamma(v)|$.

Задание 2. Выполните тест.

- Степенью однородного графа называется
 - число его вершин;
 - число его ребер;
 - степень любой его вершины.
- Дерево с n вершинами имеет
 - n ребер;
 - $(n+1)$ ребер;
 - $(n-1)$ ребер.
- Лес с n вершинами и k компонентами связности имеет
 - $(n-1)$ ребер;
 - $(n-k)$ ребер;
 - k ребер.

Лабораторная работа 6. Алгоритмы в дискретной математике

Цель занятия - сформировать представление об основных алгоритмах в дискретной математике.

Вопросы для освоения:

- 1 Условия существования эйлера цикла
- 2 Задача о разбиении графа на минимальное число цепей Гамильтонов цикл и гамильтонов граф.
- 3 Минимальное остовное дерево.

Задания для выполнения и методические рекомендации:

Задание 1.

Изучить теоретический материал по теме «Алгоритмы в дискретной математике»

Конкретная корректно поставленная задача дискретной математики не может встретить принципиальных затруднений в смысле разрешимости. Поставленная на конечном множестве, она всегда может быть решена тривиальным алгоритмом переборного типа. Принципиальным, однако, является число элементарных операций, выполняемых алгоритмом при решении задачи. Каждый класс, рассматриваемых в дискретной математике задач, состоит, как правило, из однотипных задач различной размерности и трудоемкость решения индивидуальной задачи данным алгоритмом в значительной степени определяется её размерностью. Однако, при фиксированной размерности трудоемкость также может колебаться в значительных пределах. Поэтому возможен анализ числа операций как в среднем, так и в наихудшем случае. Анализ в среднем, как правило, более практичен, однако сам процесс усреднения в определенных случаях может быть неоднозначен. Поэтому в теоретических исследованиях чаще используется анализ наихудшего случая.

Если размерность задачи задается числом n (например n чисел или n вершин графа), то будем говорить, что трудоемкость алгоритма есть $O(f(n))$ (O больше от $f(n)$), если число операций не превосходит $c \cdot f(n)$, где c – некоторая константа. Для функции $f(n)$ есть две существенно различные возможности. Либо это степенная функция, т.е. $f(n) = n^k$, где k – константа. Либо это функция, растущая быстрее любой степени n , например, e^n . Алгоритмы, трудоемкость которых есть $O(n^k)$, принято считать эффективными. Большая размерность задач не может служить препятствием для решения их на компьютере. Наоборот, экспоненциально растущее число операций ограничивает размерность решаемых задач даже при использовании самых быстродействующих компьютеров.

Рассмотрим в качестве примера часто встречающуюся на практике задачу линейного упорядочивания массива действительных чисел. Пусть задано n действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, которые будем для простоты считать различными. Требуется переписать массив так, чтобы элементы $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$, были расположены в возрастающем порядке $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_n}$. В качестве элементарной операции алгоритма будем рассматривать операцию сравнения двух элементов массива.

Тривиальный алгоритм решения задачи, состоящий в генерировании всех $n!$ перестановок $(a_{i_1} \dots a_{i_n})$ и проверке условия монотонности, требует $n!(n-1)$ сравнений в наихудшем случае и $\frac{1}{2}n!(n-1)$ сравнений в среднем. Такое число элементарных операций не позволяет осуществить его уже при $n > 20$.

Более разумным представляется нахождение минимального элемента массива и помещение его на первое место, затем нахождение минимального элемента в оставшейся

части массива и помещение его на второе место и т.д. Данный алгоритм требует $(n - 1) + (n - 2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$ сравнений.

Другим разумным подходом является метод вставок. На каждом шаге алгоритма здесь имеется линейно упорядоченное по возрастанию подмножество исходного массива и очередной элемент вставляется в данный линейный порядок. В наихудшем случае данный алгоритм также потребует $1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$ сравнений.

Спрашивается, возможно ли линейное упорядочивание массива за меньшее число сравнений? Ответ положителен. Существуют алгоритмы выполняющие упорядочивание за $O(n \log_2 n)$ сравнений. Одним из них является метод слияния. Пусть имеется два линейно упорядоченных подмножества исходного массива $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ и $a_{i_{k+1}}, \dots, a_{i_l}$. Для нахождения наименьшего элемента в этих двух подмножествах достаточно сравнить a_{i_1} с $a_{i_{k+1}}$. Затем также с помощью одного сравнения находится следующий по порядку элемент и т.д. Этим достигается упорядочивание за $l - 1$ сравнений.

Будем для простоты считать число n степенью двойки $n = 2^m$. Разобьем n элементов на пары и упорядочим каждую пару. Затем сольем пары в четверки и упорядочим каждую четверку. Затем четверки сольем в восьмерки и т.д. На каждом уровне при слиянии всего требуется $O(n)$ сравнений. Умноженное на число уровней $m = \log_2 n$, это дает $O(n \log_2 n)$ сравнений.

Для некоторых экстремальных задач в теории графов известны эффективные алгоритмы решения. К таким задачам относятся, в частности, рассматриваемые ниже задачи о минимальном остовном дереве и о минимальном пути между двумя вершинами. Для ряда других задач, в частности, задачи нахождения гамильтонова цикла минимальной длины (задача коммивояжера) эффективных алгоритмов неизвестно. Широко распространенным является мнение, что широкий класс дискретных экстремальных задач не допускает эффективного решения, хотя это и не удалось доказать. В тех случаях, когда эффективный алгоритм неизвестен, задачи небольшой размерности могут быть решены с помощью метода «ветвей и границ», т.е. сокращенного перебора. Этот метод будет ниже продемонстрирован на примере задачи коммивояжера.

Минимальное остовное дерево.

Возникающая на практике задача связывания множества населенных пунктов коммуникационной сетью минимальной стоимости привела к постановке математической задачи о нахождении минимального остовного дерева (МОД) во взвешенном графе. Пусть задан граф $G = (V, E)$, на ребрах которого заданы веса $\omega(e) \geq 0$. Для графа G требуется найти остовное дерево минимального веса, где под весом понимается сумма весов всех входящих в дерево ребер. Опишем два эффективных алгоритма для решения этой задачи.

Жадный алгоритм построения МОД (Kruskal, 1956). Упорядочим ребра графа в порядке неубывания весов и будем включать в подграф ребра по порядку, начиная с ребра наименьшего веса, следя за тем, чтобы включение очередного ребра не привело к появлению цикла. Если включение данного ребра приводит к появлению цикла, то оно пропускается и переходят к следующему по порядку ребру.

Алгоритм начинает работу с пустого графа на n вершинах и на всех этапах имеет дело с лесом. При включении очередного ребра происходит слияние двух компонент связности и общее число компонент уменьшается на единицу. При включении $(n - 1)$ -го ребра в результате слияния двух компонент леса возникает дерево, имеющее минимально возможный вес. Докажем это. Будем для простоты считать веса всех ребер различными. Пусть с помощью жадного алгоритма были последовательно получены ребра $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{n-1}$. Допустим противное, что имеется минимальное остовное дерево меньшего веса, в которое входят ребра $e_1, \dots, e_k$, а ребро e_{k+1} не входит ($0 \leq k < n - 1$), т.е. множество его ребер имеет вид $\{e_1, \dots, e_k, e'_{k+1}, \dots, e'_{n-1}\}$, где среди ребер $e'_{k+1}, \dots, e'_{n-1}$ нет ребра e_{k+1} . Тогда добавление этого ребра приведет к появлению цикла, в который войдет хотя бы одно из ребер $e'_{k+1}, \dots, e'_{n-1}$.

Имеем $w(e_{k+1}) < w(e'_{k+1}), \dots, w(e'_{n-1})$. Поэтому, удалив одно из ребер $e'_{k+1}, \dots, e'_{n-1}$ из цикла, получим остовное дерево меньшего веса, что противоречит условию минимальности.

Если не принимать во внимание предварительное упорядочивание ребер, то при грамотной реализации данный алгоритм имеет трудоемкость $O(|V|^2)$.

Алгоритм ближайшего соседа для получения МОД (Prim, 1957). Возьмем произвольную вершину, выберем ближайшую к ней и включим обе вершины вместе с соединяющим их ребром в строящееся дерево. Затем найдем вершину, ближайшую к множеству из двух уже взятых вершин, и включим её вместе с соответствующим ребром в строящееся дерево, которое будет содержать уже 3 вершины и два ребра. Продолжаем действовать подобным образом, всякий раз включая ближайшую вершину к уже взятому множеству вершин вместе с соответствующим ребром, пока не получим остовного дерева. Докажем его оптимальность.

Будем для простоты считать веса всех ребер различными. Пусть с помощью алгоритма ближайшего соседа были последовательно получены ребра $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{n-1}$. Допустим противное, что имеется минимальное остовное дерево меньшего веса, в которое входят ребра $e_1, \dots, e_k$, а ребро e_{k+1} не входит ($0 \leq k < n-1$), т.е. множество его ребер имеет вид $\{e_1, \dots, e_k, e'_{k+1}, \dots, e'_{n-1}\}$, где среди ребер $e'_{k+1}, \dots, e'_{n-1}$ нет ребра e_{k+1} . Поэтому добавление этого ребра приведет к появлению цикла. Пусть V' - множество вершин, связанных ребрами $e_1, \dots, e_k$, $V \setminus V'$ - его дополнение. Ребро e_{k+1} связывает множества V' и $V \setminus V'$. Ясно, что в цикле должно присутствовать ещё хотя бы одно ребро, связывающее множества V' и $V \setminus V'$ и имеющее больший вес, чем вес ребра e_{k+1} . Поэтому, удалив его из цикла, получим остовное дерево меньшего веса, что противоречит условию минимальности.

Нахождение вершины, ближайшей к множеству из k вершин, требует $k(n-k)$ элементарных операций, что при k , близком к $n/2$, даст $O(n^2)$ операций. Поэтому $(n-1)$ – кратное повторение данной процедуры, осуществляемое при построении МОД по методу ближайшего соседа займет $O(n^3)$ операций. Эту оценку, однако, можно понизить, если хранить список расстояний до строящегося дерева для всех не входящих в него вершин, а при каждом включении в дерево новой вершины обновлять список, просматривая лишь те не входящие в дерево вершины, которые смежны с вновь включенной. Такой просмотр требует $O(n)$ операций и общая трудоемкость алгоритма становится $O(n^2)$.

Задание 2. Выполните тест.

1. Какое из следующих соотношений имеет место
а) $\log_2 n = O(n)$; б) $n = O(\log_2 n)$; в) ни то, ни другое.
2. Какое из следующим соотношений имеет место
а) $n! = O(2^n)$; б) $n! = O(e^n)$; в) $n! = O(n^n)$.
3. Пусть n - размерность задачи, k - константа. Алгоритм считается эффективным, если его трудоемкость есть
а) $O(e^n)$; б) $O(n^k)$; в) $O(2^n)$.
4. Какие из алгоритмов нахождения МОД являются эффективными?
а) только жадный алгоритм;
б) только алгоритм ближайшего соседа;
в) оба алгоритма.
5. Построение МОД методом ближайшего соседа следует начать
а) с вершины минимальной степени;
б) с вершины, инцидентной ребру минимального веса;
в) можно начать с произвольной вершины.
6. Алгоритм построения МОД методом ближайшего соседа имеет трудоемкость
а) $O(n)$; б) $O(n^2)$; в) $O(n^3)$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература:

1. Зайцева, О.Н. Математические методы в приложениях. Дискретная математика: учебное пособие / О.Н. Зайцева, А.Н. Нуриев, П.В. Малов; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань: Издательство КНИТУ, 2014. - 173 с: табл., ил. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7882-1570-9; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428299>

2. Окулов, С. М. Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике: учебное пособие / Окулов С. М. - 4-е изд. - Москва: Лаборатория знаний, 2020. - 425 с. Систем. требования: Adobe Reader XI; экран 10". (Педагогическое образование) - ISBN 978-5-00101-684-7. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785001016847>.

Дополнительная литература:

1. Хаггарт, Р. Дискретная математика для программистов: учебное пособие / Р. Хаггарт ; пер. англ. под ред. С.А. Кулешов ; пер. с англ. А.А. Ковалева, В.А. Головешкина, М.В. Ульянова. - изд. 2-е, испр. - Москва: РИЦ "Техносфера", 2012. - 400 с : табл., схем. - (Мир программирования). - ISBN 978-5-94836-303-5 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=89024>

2. Основы дискретной математики: учебное пособие / Дехтярь М. И. Издатель: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016 - 184 с. ISBN 978-5-8265-1074-2 URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=428981&sr=1

3. Дискретная математика: учебное пособие / Б.М. Веретенников, В.И. Белоусова - Екатеринбург, Изд-во Урал. ун-та, - 2014, Ч.1. - 132с. ISBN 978-5-7996-1199-6 URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=276013

Методическая литература:

1. Методические рекомендации к самостоятельной работе студентов по дисциплине «ИКТ в решении задач дискретной математики»

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.math.ru/lib/book/djvu/kombinatorika.djvu> Комбинаторика
2. <http://www.math.ru/lib/cat/dscr> Дискретная математика
3. <http://www.eurekanet.ru> Инновационная образовательная сеть «Эврика»
4. <http://www.eidos.ru> Центр дистанционного образования «Эйдос»

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине

«ИКТ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ»

для студентов направления подготовки

44.03.05 - Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность (профиль):

«Информатика и математика»

Ставрополь, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения	3
2. Цель и задачи самостоятельной работы	3
3. 4.....	6
3.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой	4
3.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим и лабораторным занятиям	6
3.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний	6
3.4. Методические рекомендации по написанию научных текстов (докладов, рефератов, эссе, научных статей и т.д.)	6
3.5. Методические рекомендации по подготовке к экзаменам и зачетам	9
4. Контроль самостоятельной работы студентов	10
5. Список литературы для выполнения СРС	12

1. Общие положения

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов (СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения.

К основным видам самостоятельной работы студентов относятся:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание докладов;
- подготовка к семинарам, практическим и лабораторным работам, их оформление;
- составление аннотированного списка статей из соответствующих журналов по отраслям знаний (педагогических, психологических, методических и др.);
- выполнение учебно-исследовательских работ, проектная деятельность;
- подготовка практических разработок и рекомендаций по решению проблемной ситуации;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;
- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов;
- выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин;
- выполнение выпускной квалификационной работы и др.

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

2. Цель и задачи самостоятельной работы

При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности. Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности.

Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3. Порядок выполнения самостоятельной работы студентом

3.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют **четыре основные установки в чтении научного текста:**

информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)

усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)

аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)

творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;

Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;

Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;

Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;

Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;

2. Выделите главное, составьте план;

3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;

4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.

5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

3.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим и лабораторным занятиям

Для того чтобы практические и лабораторные занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

3.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, провести самопроверку усвоенных знаний, ответив на контрольные вопросы по изученной теме.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

3.4. Методические рекомендации по написанию научных текстов (докладов, рефератов, эссе, научных статей и т.д.)

Перед тем, как приступить к написанию научного текста, важно разобраться, какова истинная цель вашего научного текста - это поможет вам разумно распределить свои силы и время.

Во-первых, сначала нужно определиться с идеей научного текста, а для этого необходимо научиться либо относиться к разным явлениям и фактам несколько критически (своя идея – как иная точка зрения), либо научиться увлекаться какими-то известными идеями, которые нуждаются в доработке (идея – как оптимистическая позиция и направленность на дальнейшее совершенствование уже известного). Во-вторых, научиться организовывать свое время, ведь, как известно, свободное (от всяких глупостей) время –

важнейшее условие настоящего творчества, для него наконец-то появляется время. Иногда именно на организацию такого времени уходит немалая часть сил и талантов.

Писать следует ясно и понятно, стараясь основные положения формулировать четко и недвусмысленно (чтобы и самому понятно было), а также стремясь структурировать свой текст. Каждый раз надо представлять, что ваш текст будет кто-то читать и ему захочется сориентироваться в нем, быстро находить ответы на интересующие вопросы (заодно представьте себя на месте такого человека). Понятно, что работа, написанная «сплошным текстом» (без заголовков, без выделения крупным шрифтом наиболее важным мест и т. п.), у культурного читателя должна вызывать брезгливость и даже жалость к автору (исключения составляют некоторые древние тексты, когда и жанр был иной и к текстам относились иначе, да и самих текстов было гораздо меньше – не то, что в эпоху «информационного взрыва» и соответствующего «информационного мусора»).

Объем текста и различные оформительские требования во многом зависят от принятых в конкретном учебном заведении порядков.

Реферат (доклад) - это самостоятельное исследование студентом определенной проблемы, комплекса взаимосвязанных вопросов.

Реферат не должна составляться из фрагментов статей, монографий, пособий. Кроме простого изложения фактов и цитат, в реферате должно проявляться авторское видение проблемы и ее решения.

Рассмотрим основные этапы подготовки реферата студентом.

Выполнение реферата начинается с выбора темы.

Затем студент приходит на первую консультацию к руководителю, которая предусматривает:

- обсуждение цели и задач работы, основных моментов избранной темы;
- консультирование по вопросам подбора литературы;
- составление предварительного плана.

Следующим этапом является работа с литературой. Необходимая литература подбирается студентом самостоятельно.

После подбора литературы целесообразно сделать рабочий вариант плана работы. В нем нужно выделить основные вопросы темы и параграфы, раскрывающие их содержание.

Составленный список литературы и предварительный вариант плана уточняются, согласуются на очередной консультации с руководителем.

Затем начинается следующий этап работы - изучение литературы. Только внимательно читая и конспектируя литературу, можно разобраться в основных вопросах темы и подготовиться к самостоятельному (авторскому) изложению содержания реферата. Конспектируя первоисточники, необходимо отразить основную идею автора и его позицию по исследуемому вопросу, выявить проблемы и наметить задачи для дальнейшего изучения данных проблем.

Систематизация и анализ изученной литературы по проблеме исследования позволяют студенту написать работу.

Рабочий вариант текста реферата предоставляется руководителю на проверку. На основе рабочего варианта текста руководитель вместе со студентом обсуждает возможности доработки текста, его оформление. После доработки реферат сдается на кафедру для его оценивания руководителем.

Требования к написанию реферата

Написание 1 реферата является обязательным условием выполнения плана СРС по любой дисциплине профессионального цикла.

Тема реферата может быть выбрана студентом из предложенных в рабочей программе или фонде оценочных средств дисциплины, либо определена самостоятельно, исходя из интересов студента (в рамках изучаемой дисциплины). Выбранную тему необходимо согласовать с преподавателем.

Реферат должен быть написан научным языком.

Объем реферата должен составлять 20-25 стр.

Структура реферата:

- Введение (не более 3-4 страниц). Во введении необходимо обосновать выбор темы, ее актуальность, очертить область исследования, объект исследования, основные цели и задачи исследования.

- Основная часть состоит из 2-3 разделов. В них раскрывается суть исследуемой проблемы, проводится обзор мировой литературы и источников Интернет по предмету исследования, в котором дается характеристика степени разработанности проблемы и авторская аналитическая оценка основных теоретических подходов к ее решению. Изложение материала не должно ограничиваться лишь описательным подходом к раскрытию выбранной темы. Оно также должно содержать собственное видение рассматриваемой проблемы и изложение собственной точки зрения на возможные пути ее решения.

- Заключение (1-2 страницы). В заключении кратко излагаются достигнутые при изучении проблемы цели, перспективы развития исследуемого вопроса

- Список использованной литературы (не меньше 10 источников), в алфавитном порядке, оформленный в соответствии с принятыми правилами. В список использованной литературы рекомендуется включать работы отечественных и зарубежных авторов, в том числе статьи, опубликованные в научных журналах в течение последних 3-х лет и ссылки на ресурсы сети Интернет.

- Приложение (при необходимости).

Требования к оформлению:

- текст с одной стороны листа;
- шрифт Times New Roman;
- кегль шрифта 14;
- межстрочное расстояние 1,5;
- поля: сверху 2,5 см, снизу – 2,5 см, слева - 3 см, справа 1,5 см;
- реферат должен быть представлен в сброшюрованном виде.

Порядок защиты реферата:

Защита реферата проводится на практических занятиях, после окончания работы студента над ним и исправления всех недочетов, выявленных преподавателем в ходе консультаций. На защиту реферата отводится 5-7 минут времени, в ходе которого студент должен показать свободное владение материалом по заявленной теме. При защите реферата приветствуется использование мультимедиа-презентации.

Оценка реферата

Реферат оценивается по следующим критериям:

- соблюдение требований к его оформлению;
- необходимость и достаточность для раскрытия темы приведенной в тексте реферата информации;
- умение студента свободно излагать основные идеи, отраженные в реферате;
- способность студента понять суть задаваемых преподавателем и сокурсниками вопросов и сформулировать точные ответы на них.

Критерии оценки:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если в докладе студент исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает материал; свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний; использует для написания доклада современные научные материалы; анализирует полученную информацию; проявляет самостоятельность при написании доклада.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если качество выполнения доклада достаточно высокое. Студент твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопросы по теме доклада.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если материал доклада излагается частично, но пробелы не носят существенного характера, студент допускает неточности и ошибки при защите доклада, дает недостаточно правильные формулировки, наблюдаются нарушения логической последовательности в изложении материала.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он не подготовил доклад или допустил существенные ошибки. Студент неуверенно излагает материал доклада, не отвечает на вопросы преподавателя.

Описание шкалы оценивания

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным 55. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

Темы докладов

Базовый уровень

1. Раскрашиваемость вершин планарного графа пятью красками.
2. Раскраска вершин и ребер графа.
3. Деревья. Ориентированные деревья.
4. Определение связности графа методом поиска в глубину.
5. Определение связности графа методом поиска в ширину.
6. Метод построения дерева путей.
7. Определение кратчайших путей в графе методом Форда-Беллмана.
8. Определение кратчайших путей в графе методом Дейкстры.
9. Определение кратчайших путей в графе методом Флойда-Уоршолла.

Повышенный уровень

1. Условия существования эйлера цикла
2. Задача о разбиении графа на минимальное число цепей.
3. Взвешенный граф.
4. Кратчайшие пути во взвешенном графе и алгоритм Форда построения кратчайших маршрутов.
5. Построение кратчайшего пути во взвешенном графе.
6. Алгоритм Краскала.

3.5. Методические рекомендации по подготовке к экзаменам и зачетам

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин завершается экзаменом. Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент

демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

Экзаменационная сессия - это серия экзаменов, установленных учебным планом. Между экзаменами интервал 3-4 дня. Не следует думать, что 3-4 дня достаточно для успешной подготовки к экзаменам.

В эти 3-4 дня нужно систематизировать уже имеющиеся знания. На консультации перед экзаменом студентов познакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

Требования к организации подготовки к экзаменам те же, что и при занятиях в течение семестра, но соблюдаться они должны более строго. Во-первых, очень важно соблюдение режима дня; сон не менее 8 часов в сутки, занятия заканчиваются не позднее, чем за 2-3 часа до сна. Оптимальное время занятий, особенно по математике - утренние и дневные часы. В перерывах между занятиями рекомендуются прогулки на свежем воздухе, неустойчивые занятия спортом. Во-вторых, наличие хороших собственных конспектов лекций. Даже в том случае, если была пропущена какая-либо лекция, необходимо во время ее восстановить (переписать ее на кафедре), обдумать, снять возникшие вопросы для того, чтобы запоминание материала было осознанным. В-третьих, при подготовке к экзаменам у студента должен быть хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Здесь можно эффективно использовать листы опорных сигналов.

Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Правила подготовки к зачетам и экзаменам:

- Лучше сразу сориентироваться во всем материале и обязательно расположить весь материал согласно экзаменационным вопросам (или вопросам, обсуждаемым на семинарах), эта работа может занять много времени, но все остальное – это уже технические детали (главное – это ориентировка в материале!).

- Сама подготовка связана не только с «запоминанием». Подготовка также предполагает и переосмысление материала, и даже рассмотрение альтернативных идей.

- Готовить «шпаргалки» полезно, но пользоваться ими рискованно. Главный смысл подготовки «шпаргалок» – это систематизация и оптимизация знаний по данному предмету, что само по себе прекрасно – это очень сложная и важная для студента работа, более сложная и важная, чем простое поглощение массы учебной информации. Если студент самостоятельно подготовил такие «шпаргалки», то, скорее всего, он и экзамены сдавать будет более уверенно, так как у него уже сформирована общая ориентировка в сложном материале.

- Как это ни парадоксально, но использование «шпаргалок» часто позволяет отвечающему студенту лучше демонстрировать свои познания (точнее – ориентировку в знаниях, что намного важнее знания «запомненного» и «тут же забытого» после сдачи экзамена).

- Сначала студент должен продемонстрировать, что он «усвоил» все, что требуется по программе обучения (или по программе данного преподавателя), и лишь после этого он вправе высказать иные, желательные аргументированные точки зрения.

Вопросы для собеседования

1. Способы задания множеств

2. Операции над множествами (объединение и пересечением элементов двух множеств)
3. Операции над множествами (разность, дизъюнктивная сумма, декартово произведение элементов двух множеств).
4. Свойства множеств.
5. Круги Эйлера и диаграммы Венна.
6. Симметрическая разность.
7. Формула включений и исключений для двух пересекающихся множеств.
8. Формула включений и исключений для трех пересекающихся множеств.
9. Формула включений и исключений для n пересекающихся множеств.
10. Основные правила комбинаторики.
11. Комбинаторные конфигурации: перестановки.
12. Комбинаторные конфигурации: размещения.
13. Комбинаторные конфигурации: сочетания.
14. Комбинаторные конфигурации: сочетания с повторениями.
15. Комбинаторные конфигурации: перестановки с повторениями.
16. Комбинаторные конфигурации: размещения с повторениями.
17. Бином Ньютона.
18. Биномиальные коэффициенты.
19. Основные тождества с биномиальными коэффициентами.
20. Полиномиальная формула.
21. Рекуррентные соотношения.
22. Способы решения рекуррентных соотношений.
23. Понятие о производящих функциях.
24. Целочисленные функции.
25. Основные понятия и определения теории графов (граф, виды графов)
26. Простой граф.
27. Подграф графа. Степень вершины графа.
28. Матрица смежности.
29. Матрица инцидентности.
30. Способы представления графов в ЭВМ.
31. Маршруты и связность.
32. Гамильтонов граф.
33. Граф Эйлера.
34. Длина маршрута.
35. Ориентированный маршрут.
36. Деревья. Ориентированные деревья.
37. Способы задания графов.
38. Определение связности графа методом поиска в глубину.
39. Определение связности графа методом поиска в ширину.
40. Метод построения дерева путей.

Повышенный уровень

41. Определение связности графа методом поиска в глубину.
42. Определение связности графа методом поиска в ширину.
43. Метод построения дерева путей.
44. Определение кратчайших путей в графе методом Форда-Беллмана.
45. Определение кратчайших путей в графе методом Дейкстры.
46. Определение кратчайших путей в графе методом Флойда-Уоршола.

47. Максимальный поток в сети.
48. Алгоритм наращивания потока в сети.
49. Раскраска вершин и ребер графа.
50. Теорема о не планарности графов K_5 и K_3 .
51. Двудольные графы.
52. Теорема Кенига.
53. Раскрашиваемость вершин планарного графа пятью красками.
54. Гипотеза четырех красок.

4.Контроль самостоятельной работы студентов

Контроль самостоятельной работы проводится преподавателем в аудитории.

Предусмотрены следующие виды контроля: собеседование, оценка реферата, оценка презентации, оценка участия в круглом столе, оценка выполнения проекта.

Подробные критерии оценивания компетенций приведены в Фонде оценочных средств для проведения текущей и промежуточной аттестации.

5.Список литературы для выполнения СРС

Основная литература:

1.Ковалева, Л.Ф. Дискретная математика в задачах : учебное пособие / Л.Ф. Ковалева. - Москва : Евразийский открытый институт, 2011. - 142 с. - ISBN 978-5-374-00514-1 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=93273>

2.Балюкевич, Э.Л. Дискретная математика : учебно-практическое пособие / Э.Л. Балюкевич, Л.Ф. Ковалева, А.Н. Романников. - Москва : Евразийский открытый институт, 2012. - 173 с. - ISBN 978-5-374-00334-5; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=93277>

Дополнительная литература:

1. Дискретная математика: Учебно-практическое пособие - Балюкевич Э.Л., Ковалева Л.Ф., Романников А.Н. - М.: Издательский центр ЕАОИ, 2012. - 176с. ISBN 978-5-374-00334-5 URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=93277

2. Дискретная математика: учебное пособие/ Ю.Ю. Громов, О.Г. Иванова, Ю.В. Кулаков, В.А. Гриднев, В.Г. Однолько - Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО ТГТУ, 2012. - 128с. ISBN 978-5-8265-1074-2 URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=437081

3. Основы дискретной математики:учебное пособие/Дехтярь М. И.Издатель: Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016 - 184 с.ISBN 978-5-8265-1074-2 URL:https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=428981&sr=1

4. Дискретная математика: учебное пособие / Б.М. Веретенников, В.И. Белоусова - Екатеринбург, Изд-во Урал. ун-та, - 2014, Ч.1. - 132с. ISBN 978-5-7996-1199-6 URL:http://biblioclub.ru/index.php?page=book_view_red&book_id=276013

Методическая литература:

1. Судоплатов С. В. Элементы дискретной математики / М-во образования Российской Федерации, Новосибирский гос. техн. ун-т. - М. : ИНФРА-М ; Новосибирск : Изд-во НГТУ, 20013. - 281 с.

Интернет-ресурсы:

5. <http://www.math.ru/lib/book/djvu/kombinatorika.djvu> Комбинаторика

6. <http://www.math.ru/lib/cat/dscr> Дискретная математика
7. <http://www.eurekanet.ru> Инновационная образовательная сеть «Эврика»
8. <http://www.eidos.ru> Центр дистанционного образования «Эйдос»