

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Северо-Кавказский федеральный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторным работам

по дисциплине «Техническая механика»

для студентов направления подготовки

23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов

(Направленность (профиль) «Автомобили и автомобильное хозяйство»)

Данные методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Техническая механика» предназначены для бакалавров направления подготовки 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов очно-заочной формы обучения.

В методических указаниях определена цель лабораторных работ и приведен теоретический материал, необходимый студентам для выполнения поставленных перед ними задач. Дано описание применяемой аппаратуры и материалов, а также методика и порядок выполнения работ, указания по технике безопасности. Изложены требования к содержанию и форме отчётов. Даны вопросы для защиты лабораторных работ. Приведен список необходимой литературы.

Составитель: к.т.н., доцент. В. Г. Терещенко.

Рецензент: д.т.н., проф. В. Г. Копченков.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Указания по технике безопасности	5
I курс – второй семестр	
Лабораторная работа 1. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД СЛОЖЕНИЯ СИЛ ПЛОСКОЙ СХОДЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ	6
Лабораторная работа 2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОДЫ СЛОЖЕНИЯ СИЛ ПЛОСКОЙ СХОДЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ	21
Лабораторная работа 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТЕЛА	29
Лабораторная работа 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЁРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ	56
Лабораторная работа 5. ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ	67
Лабораторная работа 6. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛ И НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ	75
Лабораторная работа 7. ИСПЫТАНИЕ НА РАСТЯЖЕНИЕ МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ	85
Лабораторная работа 8. ИСПЫТАНИЕ МАТЕРИАЛОВ НА СЖАТИЕ	95
Лабораторная работа 9. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ СТЕРЖНЕЙ	103
II курс – третий семестр	
Лабораторная работа 10. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ	108
Лабораторная работа 11. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ ИЗГИБЕ КОНСОЛЬНЫХ БАЛОК	115
Лабораторная работа 12. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ ИЗГИБЕ ДВУХОПОРНЫХ БАЛОК	127
Лабораторная работа 13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНЫХ СЕЧЕНИЙ	139

Лабораторные работы по «технической механике» проводят в процессе изучения данной дисциплины студентами направления подготовки 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов» очной формы обучения. Количество лабораторных работ и время, отведенное на их выполнение, предусмотрено соответствующей рабочей программой.

Лабораторные работы проводят в специально оборудованных аудиториях. К выполнению работ студенты допускаются при наличии конспекта лекций, чертежных принадлежностей и инженерного калькулятора. По окончании экспериментов студенты выполняют все необходимые расчеты и оформляют отчет к лабораторной работе в соответствии с требованиями, изложенными в данных методических указаниях.

Защита лабораторных работ проводится при наличии правильно оформленного отчета в устной форме или в форме тестирования.

УКАЗАНИЯ ПО ТЕХНИКЕ БЕЗОПАСНОСТИ

Студенты допускаются к выполнению работ только после прохождения инструктажа по технике безопасности, запись о котором производят в журнале по ТБ. Экспериментальная часть лабораторных работ проводится под руководством преподавателя и сотрудника кафедры, ответственного за технику безопасности.

При выполнении лабораторной работы студенты должны соблюдать правила техники безопасности в соответствии с инструктажем на рабочем месте, проводимым ответственным сотрудником кафедры.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД СЛОЖЕНИЯ СИЛ ПЛОСКОЙ СХОДЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ

Цель работы: получение навыков графического сложения векторов и определения неизвестных слагаемых.

Задача: определение неизвестных сил из условия равновесия сходящейся плоской системы сил графическим методом.

Теоретическая часть

Закон параллелограмма сил: две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют *равнодействующую*, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах.

Вектор $\vec{R}$, равный диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 1), называется *геометрической суммой векторов* F_1 и F_2 :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (1)$$

Следовательно, закон параллелограмма сил соответствует правилу сложения векторов, известному из геометрии и векторной алгебры, и его можно еще сформулировать так: две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют *равнодействующую*, равную геометрической (векторной) сумме этих сил и приложенную в той же точке.

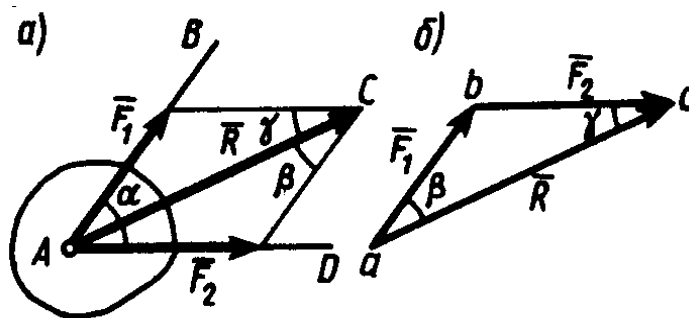


Рисунок 1 – Сложение двух сил: *а* – по правилу параллелограмма; *б* – построением силового треугольника

Систему сил, приложенных к одному твёрдому телу, называют *сходящейся*, если линии действия всех сил пересекаются в одной точке. Перенеся все силы к точке пересечения их линий действия, можно рассматривать такую систему как силы, приложенные к одной точке, или как *пучок сил*. Система сходящихся сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ эквивалентна одной равнодействующей силе $\vec{R}$, которую можно определить построением силового многоугольника

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_k = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad \text{или в упрощённой записи} \quad \vec{R} = \sum \vec{F}_k. \quad (2)$$

Слагаемые являются векторами, и сложение производится геометрически в любой последовательности. Сила $\vec{R}$ приложена в точке пересечения линий действия всех слагаемых сил. Но она может быть перенесена вдоль своей линии действия.

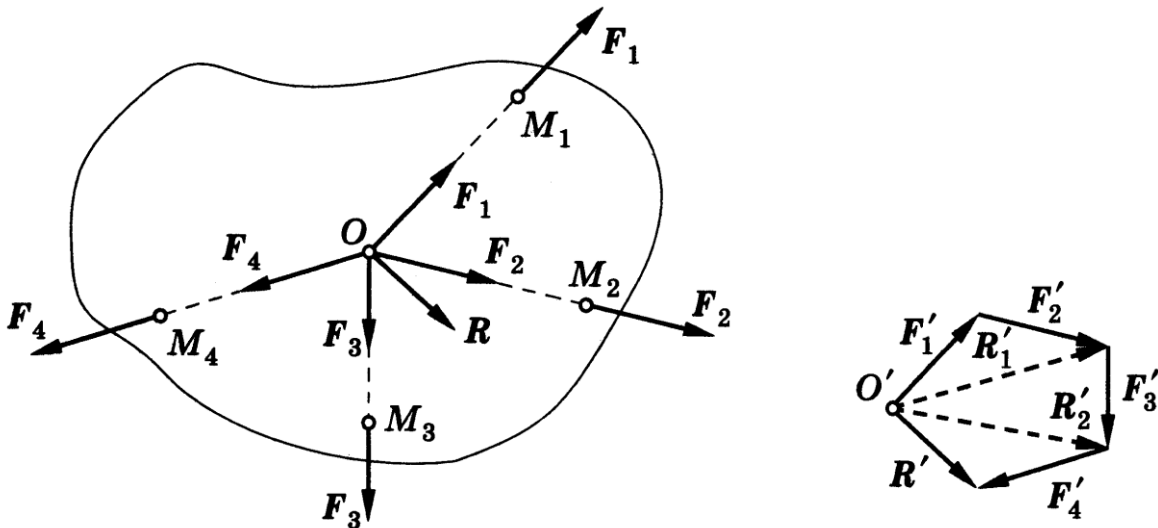


Рисунок 2 – Система сходящихся сил и её геометрическая сумма (главный вектор) $\vec{R}$, являющийся равнодействующей

Для нахождения графическим способом суммы сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 2, а) откладываем от произвольной точки O (рис. 2, б) вектор $\vec{Oa}$, изображающий в выбранном масштабе силу $\vec{F}_1$, от точки a – вектор $\vec{ab}$, изображающий силу $\vec{F}_2$, от точки b – вектор $\vec{bc}$, изображающий силу $\vec{F}_3$, и т.д.; от конца m предпоследнего вектора откладываем вектор $\vec{mn}$, изображающий силу $\vec{F}_n$. Соединяя начало первого вектора с концом последнего, получаем вектор

$\overline{On} = \overline{R}$, изображающий геометрическую сумму или главный вектор слагаемых сил:

Для равновесия системы сходящихся сил, приложенных к твёрдому телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая была равна нулю.

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{k=n} \vec{F}_k = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0. \quad (3)$$

В *геометрической форме* необходимое и достаточное условие равновесия системы сходящихся сил выражается в том, чтобы силовой многоугольник, построенный из этих сил, был замкнутым (рис. 3). В замкнутом многоугольнике сил все силы направлены по контуру многоугольника в одну сторону по обходу многоугольника.

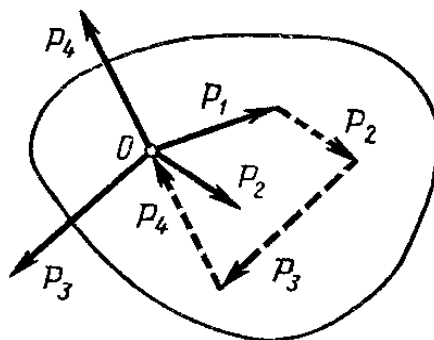


Рисунок 3 – Уравновешенная система сходящихся сил

Из условий равновесия системы сходящихся сил в пространственной задаче можно определить три неизвестных, а в плоской задаче – две неизвестных. В качестве неизвестных в плоской системе сходящихся сил могут выступать:

- а) модуль и направление одной силы;
- б) модуль одной из сил и направление второй;
- в) направления двух сил данной системы;
- г) модули двух сил.

Направление силы на плоскости выражается величиной угла между вектором силы и заданным направлением (другой силы). Точки приложения сил можно переносить вдоль их линий действия, не изменяя условие равновесия, поэтому положение точки приложения силы на линии действия не

определяется. Точкой приложения всех сил системы сходящихся сил можно считать точку пересечения их линий действия.

Можно выделить три метода нахождения неизвестных составляющих векторных величин (три метода решения задач): графический, графоаналитический, аналитический.

Графический метод предполагает изображение многоугольника сил в выбранном масштабе. Неизвестные величины модулей и направлений получают измерением на чертеже. Метод непригоден для пространственной системы сил и имеет невысокую точность, определяемую точностью построений и измерений. Но графический метод – самый наглядный метод.

Задача 1 и её решение

Фонарь весом 90 Н подвешен на кронштейне ВАС (рисунок 4). Определить реакции горизонтального стержня АВ и наклонной тяги АС, если угол ВАС равен $\alpha=30^\circ$, крепления в точках А, В и С шарнирные.

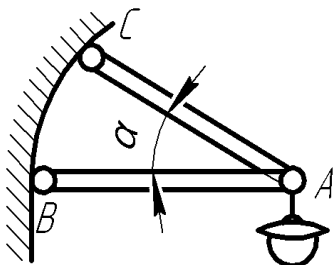


Рисунок 4 – Схема кронштейна

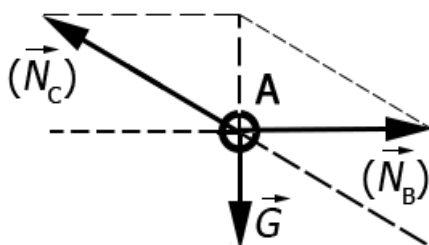


Рисунок 5 – Силы, действующие на шарнир А.

В скобках – те силы, модули которых не известны.

Анализ условий задачи 1.

Линия действия силы $\vec{G}$ – веса фонаря проходит через точку А, в которой фонарь подвешен. Но точка А неподвижна благодаря действию приложенных к ней сил реакции со стороны стержней $\vec{N}_B$ и $\vec{N}_C$. От шарнира к шарниру через стержень любой формы передаётся только сила, линия действия которой проходит через

центры шарниров. Следовательно, линия действия $\vec{N}_B$ – это прямая АВ, линия действия $\vec{N}_C$ – это прямая АС. Точка А находится в равновесии под действием трёх сходящихся сил, расположенных в одной плоскости (рис. 5). Сила $\vec{G}$ известна полностью, у двух других сил известны линии действия, но неизвестны модули. Две неизвестных величины можно определить из одного векторного уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил.

Решение задачи 1 графическим методом

Так как шарнир А под действием трёх сил находится в равновесии, силовой треугольник, составленный из них, должен быть замкнутым. Выбираем произвольную точку D (рисунок 6) и откладываем от неё отрезок DE, изображающий силу $\vec{G}$. Если выбрать длину отрезка DE, например, 22,5 мм, то масштаб изображения сил

$$\mu_{\text{сил}} = \frac{G}{DE} = \frac{90 \text{ Н}}{22,5 \text{ мм}} = 4 \frac{\text{Н}}{\text{мм}}.$$

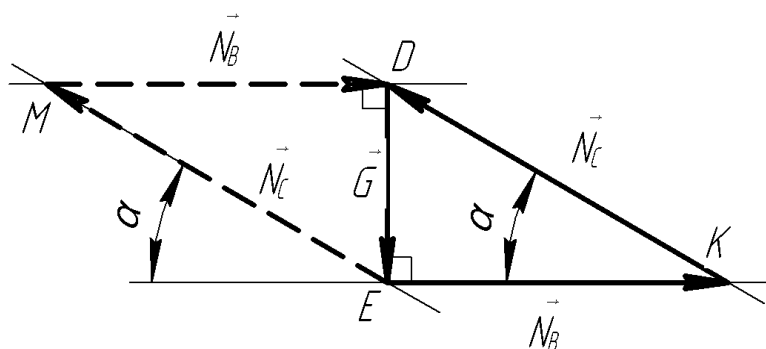


Рисунок 6 – Два варианта построения треугольника сил

Поскольку сила реакции стержня АВ перпендикулярна к $\vec{G}$, то через точку Е (или D) проводим вспомогательную прямую, перпендикулярную к DE. Поскольку сила реакции стержня АС проходит под углом $\alpha=30^\circ$ к АВ, отложенным по часовой стрелке, то через точку D (или E) проводим вспомогательную прямую под углом $\alpha=30^\circ$ к проведённой ранее вспомогательной прямой. Находим точку пересечения вспомогательных прямых К (или М). Полученный треугольник DEК (или DEM) изображает замкнутый многоугольник сил, действующих на точку А. Направления сил на полученных отрезках обозначаем стрелками так, чтобы начало следующего вектора совпало с концом предыдущего. Треугольник DEК соответствует порядку

слагаемых $\vec{G} + \vec{N}_B + \vec{N}_C = 0$ (а треугольник DEM соответствует порядку слагаемых $\vec{G} + \vec{N}_C + \vec{N}_B = 0$). Измеряем на плане сил отрезки $EK=MD=39$ мм, $KD=EM=45$ мм. Следовательно,

$$N_B = \mu_{\text{сил}} \cdot |EK| = 4 \frac{\text{Н}}{\text{мм}} \cdot 39 \text{ мм} = 156 \text{ Н},$$

$$N_C = \mu_{\text{сил}} \cdot |KD| = 4 \frac{\text{Н}}{\text{мм}} \cdot 45 \text{ мм} = 180 \text{ Н}.$$

В рассмотренной задаче была задана одна сила – вес фонаря $\vec{G}$. Если будут заданы несколько сил, можно их сложить как векторы и получить одну силу – равнодействующую заданных сил.

Задача 2 и её решение

Задача 2. Для шарнирно-стержневой конструкции ABC , нагруженной в шарнире B (рисунок 7), определить продольные силы в стержнях BC (1) и BA (2).

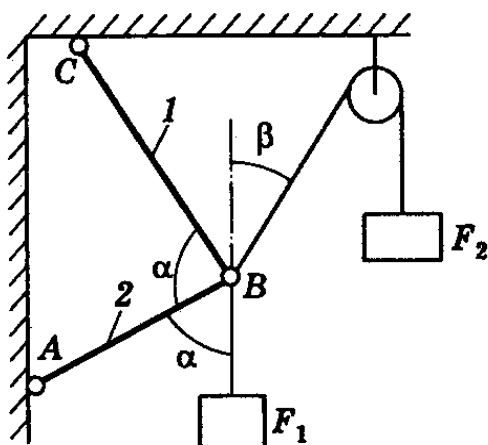


Рисунок 7 – Исходная схема к задаче 2

Значения углов: $\alpha=80^\circ$, $\beta=60^\circ$,

силы натяжения канатов:

$F_1=100$ кН, $F_2=75$ кН.

Собственный вес стержней и канатов, а также трение не учитываем.

Решение задачи 2. Уточнение схемы конструкции.

Так как среди исходных данных есть углы наклона стержней и канатов, то общую схему нужно уточнить, вычертить её в соответствии с заданными углами. На нашей схеме базой отсчёта всех углов служит вертикаль – направление первого каната и силы F_1 . От неё откладываем по часовой стрелке угол $\alpha=80^\circ$ и получаем направление стержня AB и линию действия силы N_A , с которой стержень 2 действует на шарнир B .

От направления силы F_1 откладываем по часовой стрелке угол $2\alpha=160^\circ$ и получаем направление стержня СВ и линию действия силы N_C , с которой стержень 1 действует на шарнир В.

От направления, противоположного силе F_1 , откладываем по часовой стрелке угол 60° и получаем направление второго каната и силы F_2 . (Рисунок 8).

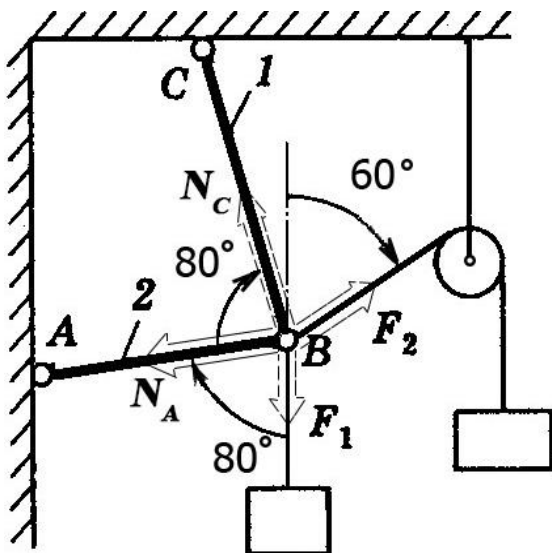


Рисунок 8 – Уточнённая по заданным углам схема конструкции

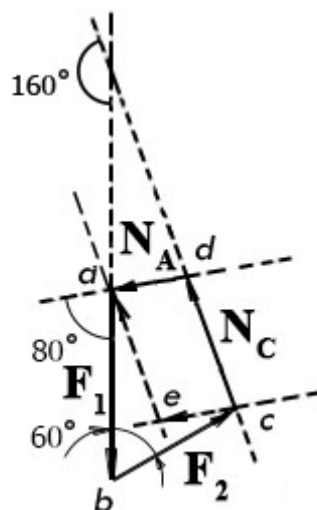


Рисунок 9 – План сил, действующих на шарнир В.

Решение графическим методом

Далее рассмотрим равновесие точки В под действием двух заданных сил F_1 , F_2 и двух сил реакции стержней N_A , N_C . Построим план сил, приложенных к точке В. От произвольной точки a проводим вектор ab произвольной длины, например 50 мм, изображающий силу F_1 . (Рисунок 9). Находим масштаб изображения сил

$$\mu_{\text{сил}} = \frac{F_1}{ab} = \frac{100 \text{ кН}}{50 \text{ мм}} = 2 \frac{\text{кН}}{\text{мм}}.$$

В этом же масштабе, под углом 60° по часовой стрелке к направлению, обратному вектору ab , строим вектор bc , изображающий силу F_2 .

$$bc = \frac{F_2}{\mu_{\text{сил}}} = \frac{75 \text{ кН}}{2 \text{ кН/мм}} = 37,5 \text{ мм}$$

Через точки a и c проводим линии действия неизвестных по модулю сил N_A и N_C под углом 80° и 160° соответственно к вектору ab против часовой стрелки. (Штриховые линии на рисунке 9). Находим точку пересечения линий действия d

(или e). Получили замкнутый многоугольник векторов $abcd$ (или $abce$), который изображает многоугольник сил в масштабе 2 кН/мм. Измеряем линейкой отрезок cd (или ea), получаем $|cd|=|ea|=37$ мм и находим модуль силы N_C .

$$N_C = \mu_{сил} cd = 2 \frac{\text{кН}}{\text{мм}} 37 \text{ мм} = 74 \text{ кН}.$$

Измеряем линейкой отрезок da (или ce), получаем $|da|=|ce|=20$ мм и находим модуль силы N_A .

$$N_A = \mu_{сил} da = 2 \frac{\text{кН}}{\text{мм}} 20 \text{ мм} = 40 \text{ кН}.$$

Стрелки векторов, изображающих неизвестные силы, на плане сил расставляем так, чтобы начало следующего вектора совпадало с концом предыдущего.

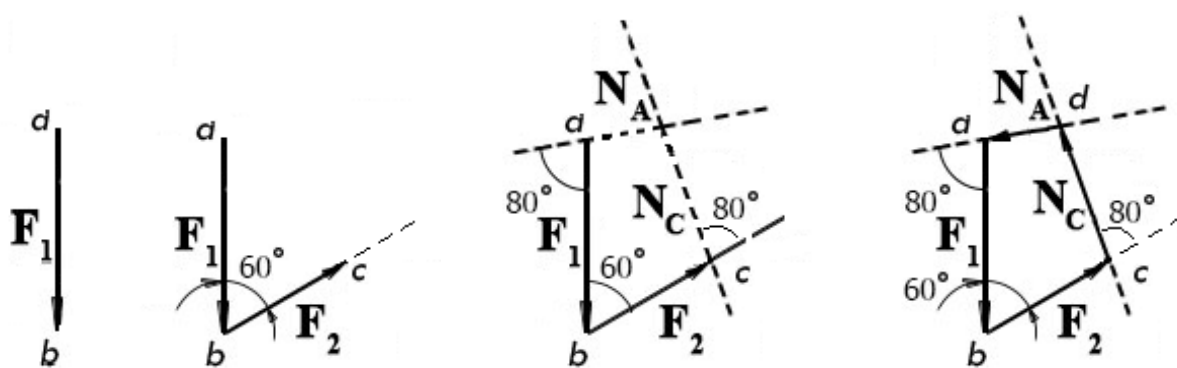


Рисунок 10 – Последовательность выполнения графических построений

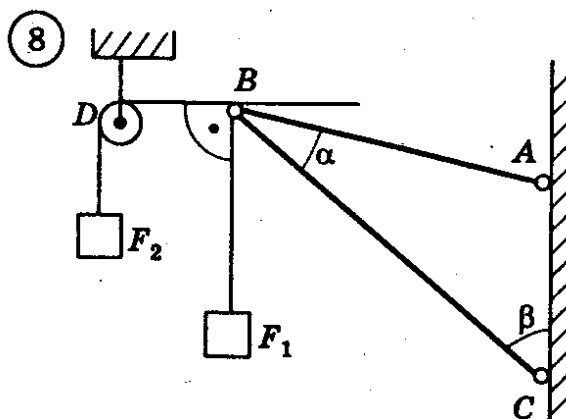
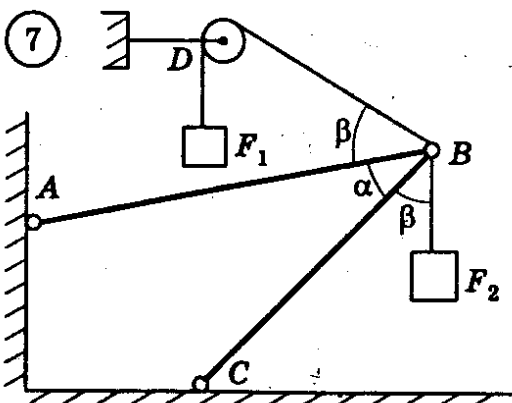
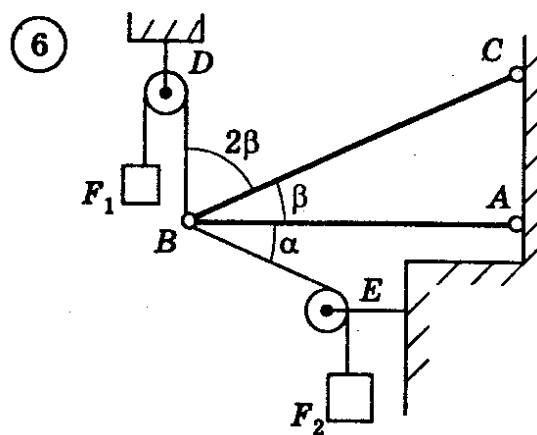
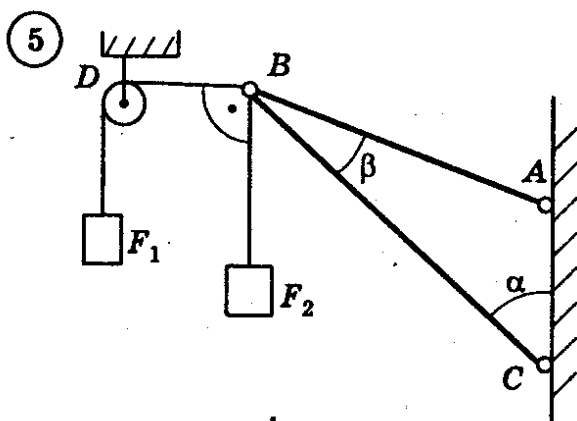
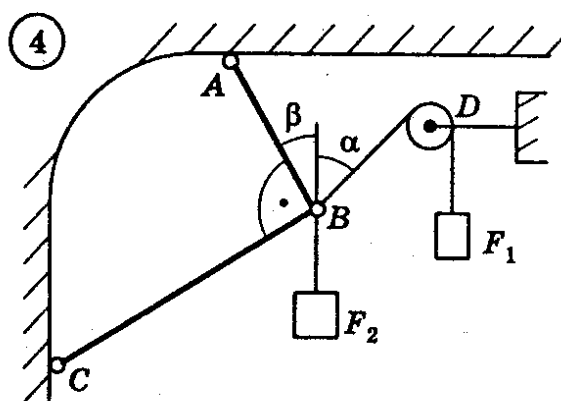
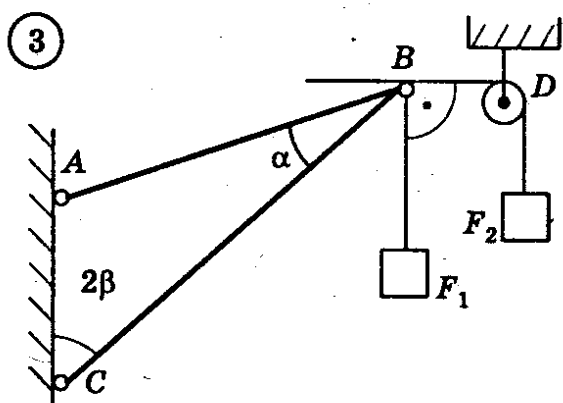
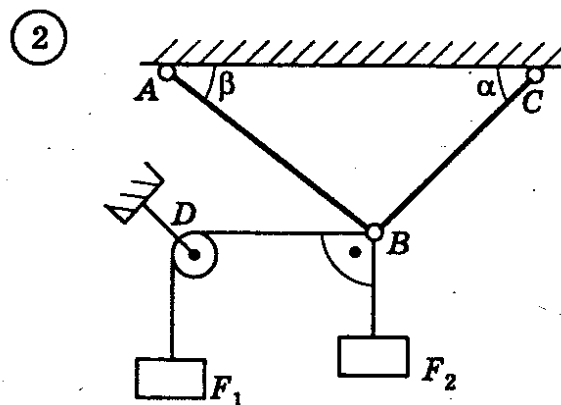
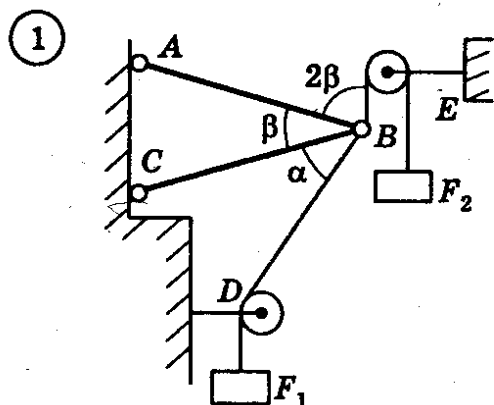
Задание

Для шарнирно-стержневой конструкции ABC , нагруженной в шарнире B , определить продольные силы в стержнях 1 и 2 графическим методом.

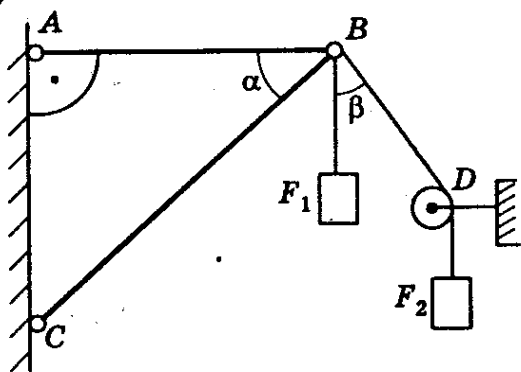
Схемы конструкций приведены в таблице 1. Как правило, номер схемы выбирается по номеру студента в списке группы. Числовые данные приведены в таблице 2. Номер варианта числовых данных, общий для всех студентов группы, назначает преподаватель.

Для каждого варианта в таблице 2 указаны свои значения углов α и β наклона стержней и канатов. Поэтому перечерчивать схему следует не копируя картинку, а соблюдая заданные углы.

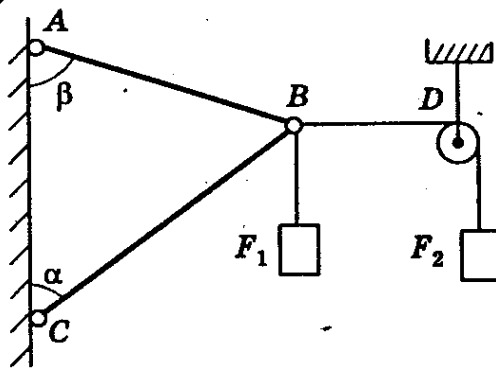
Таблица 1 – Схемы к заданию



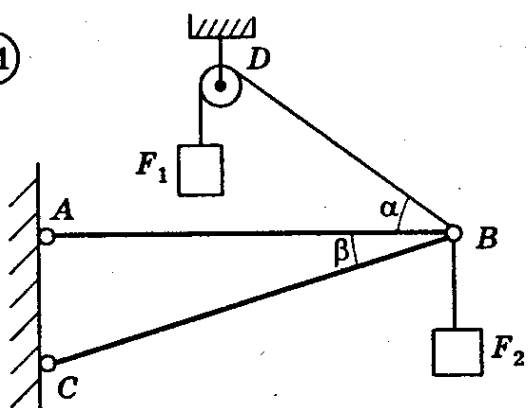
9



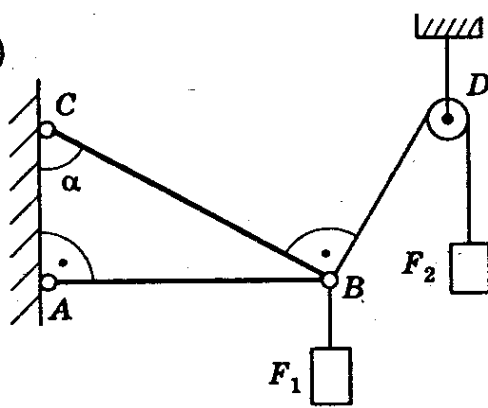
10



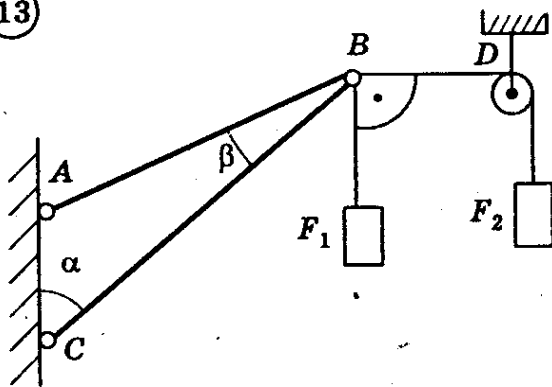
11



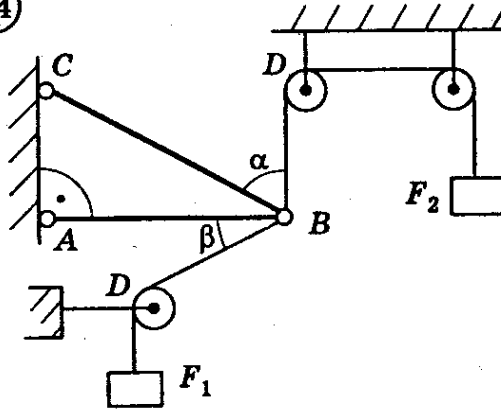
12



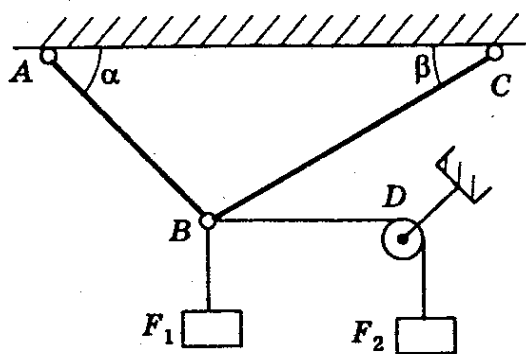
13



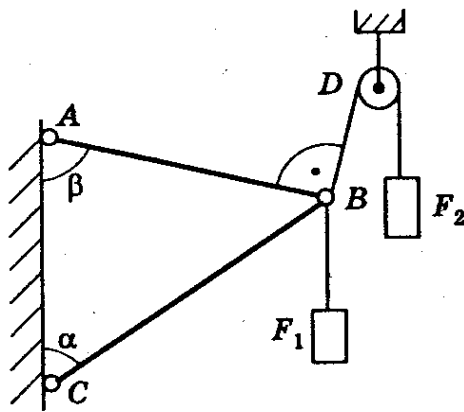
14

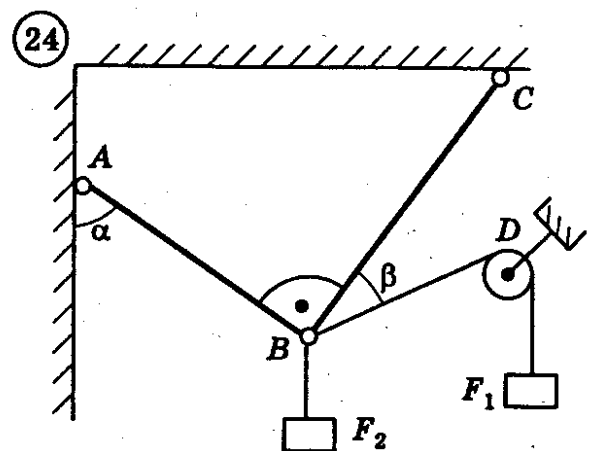
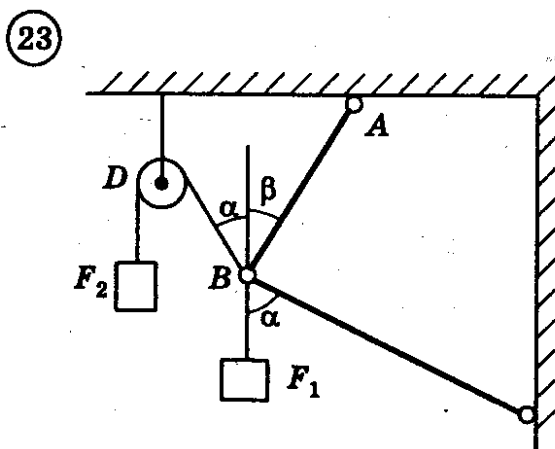
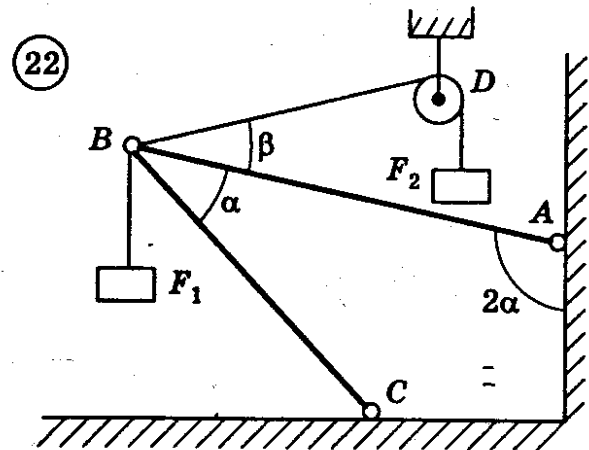
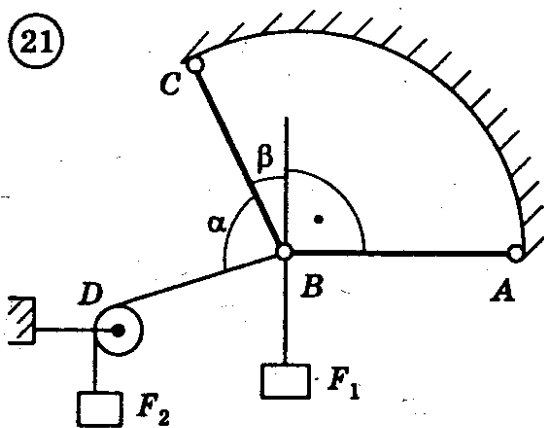
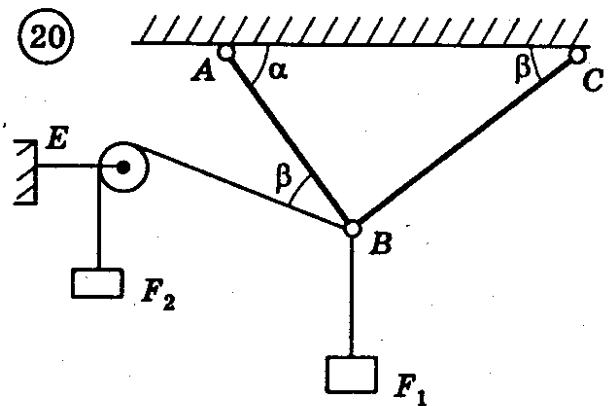
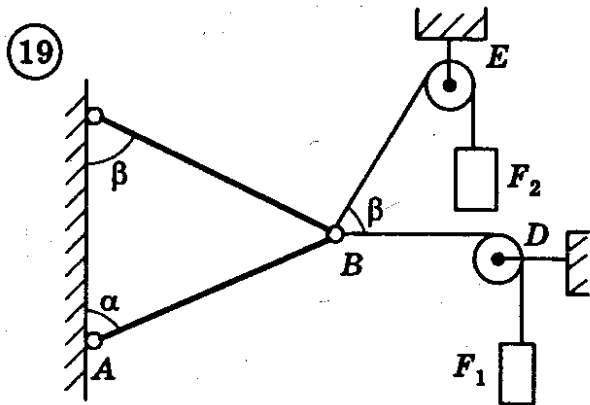
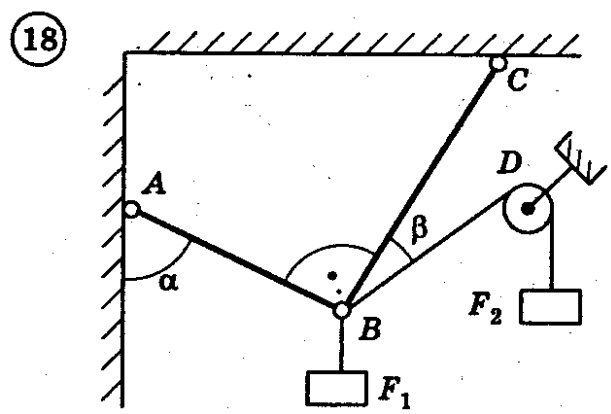
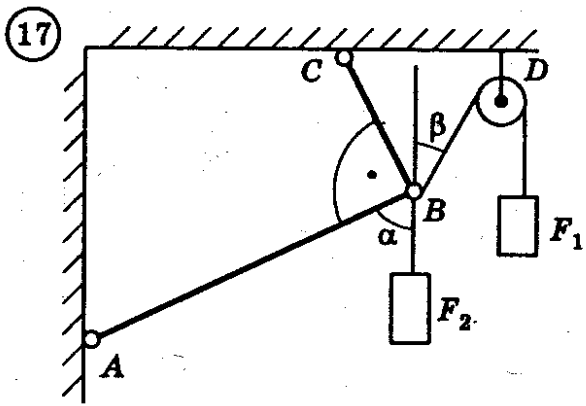


15

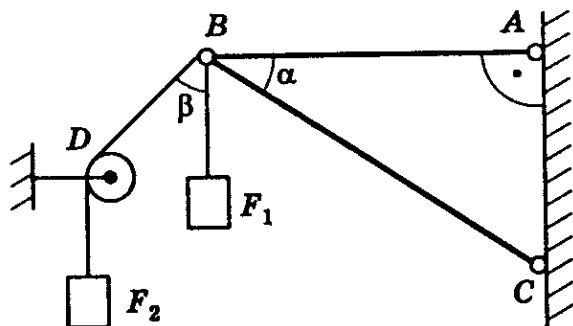


16

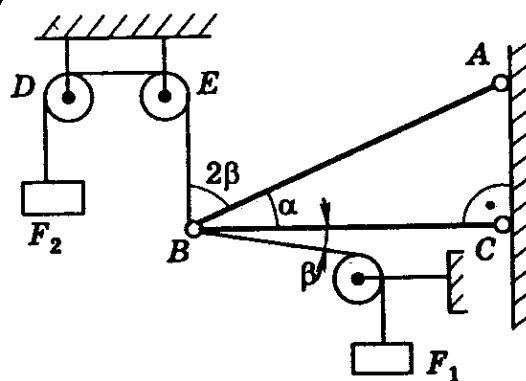




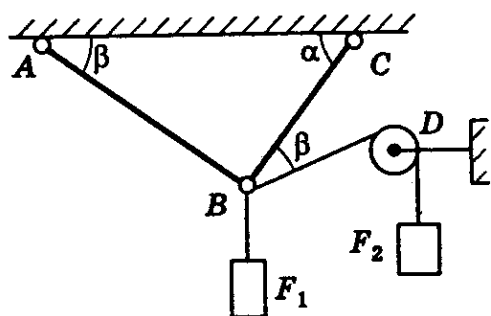
(25)



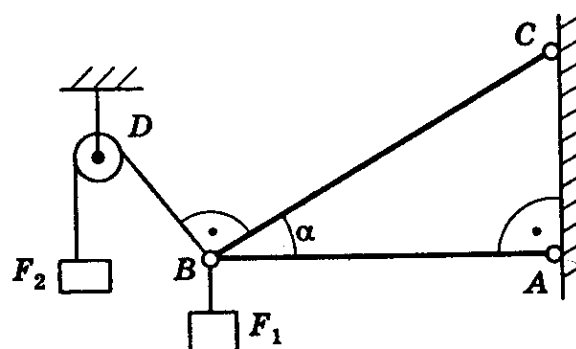
(26)



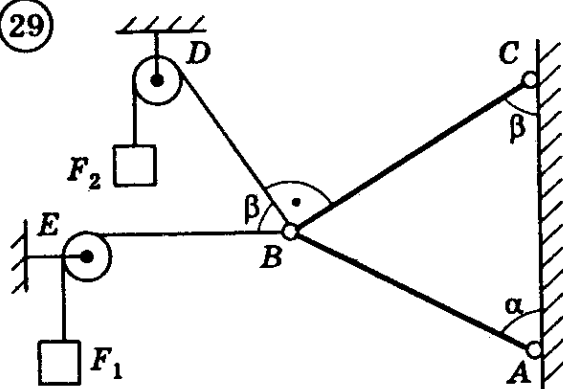
(27)



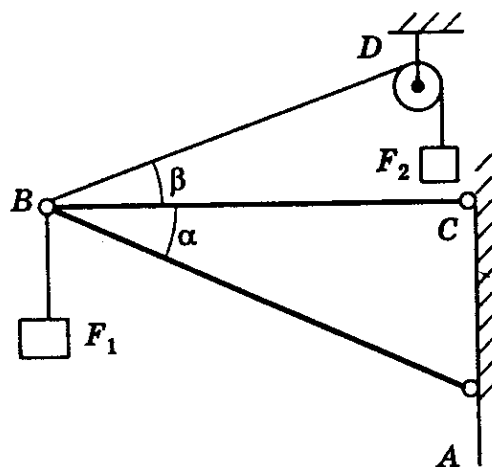
(28)



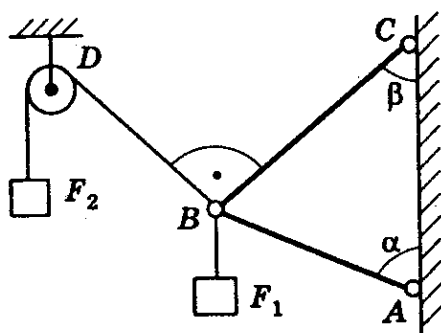
(29)



(30)



(31)



(32)

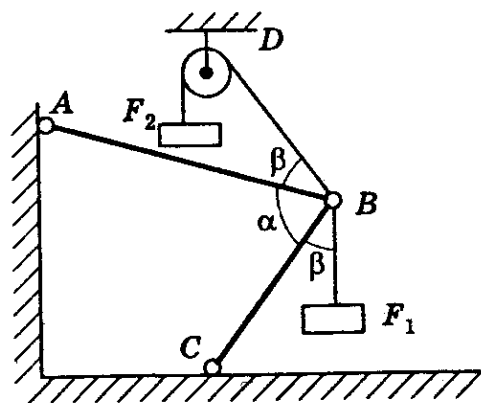


Таблица 2 – Числовые данные для определения сил в стержнях (и проверки стержней на прочность – в одном из следующих занятий)

Номер варианта	Угол наклона, град		Модуль силы, кН		Площадь поперечного сечения стержня, см ²	
	α	β	F_1	F_2	A_1	A_2
1	50	40	100	90	10	16
2	40	30	140	100	12	14
3	50	20	120	100	14	12
4	60	10	100	90	16	10
5	70	10	90	80	18	8
6	80	20	80	120	8	10
7	80	30	100	70	10	12
8	70	40	120	80	12	14
9	60	50	110	90	14	16
10	50	30	140	100	16	18
11	40	30	140	100	18	20
12	40	20	140	90	20	18
13	50	40	120	80	18	16
14	60	50	120	70	16	14

Вопросы для проверки знаний

1. Закон параллелограмма сил.
2. Что называют системой сходящихся сил?
3. В чём выражается геометрическое условие равновесия плоской системы сходящихся сил?
4. Сжимаются или растягиваются стержни АВ, АС в первой задаче?

5. Если фонарь на кронштейне из первой задачи установлен в лифте, как будут изменяться силы в стержнях на стадии разгона, торможения, равномерного движения при подъёме и опускании лифта?
6. Что называют линией действия силы?
7. Как определить направление силы в шарнирно закреплённом стержне графическим методом?
8. Какие неизвестные величины, характеризующие силу, можно определять из условия равновесия сходящейся системы сил?
9. Как должны быть направлены стержни кронштейна, чтобы в них возникали одинаковые по модулю силы?
10. Как изменить наклон стержней, чтобы уменьшить силы в них?

Задание повышенной сложности:

Определить, при каких значениях углов α и β силы в стержнях не превысят 140 кН в каждом. Значения сил натяжения канатов F_1 и F_2 оставить прежними (таблица 2).

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ДАННОЙ ТЕМЕ

- 1 Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).
- 2 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

3 Цыви́льский В. Л. Теоретическая механика. Учеб. для втузов / В. Л. Цыви́льский. – М. : Абрис, 2012. – 368 с.: ил. ISBN 978-5-4372-0079-7 <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=117515>

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОДЫ
СЛОЖЕНИЯ СИЛ ПЛОСКОЙ СХОДЯЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ**

Цель работы: получение навыков вычисления проекций сил, выбора направлений осей, составления уравнений равновесия.

Задача: определение неизвестных сил из условия равновесия сходящейся плоской системы сил аналитическим методом.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Графоаналитический метод использует изображения как иллюстрации. Модули и направления находят, последовательно решая треугольники, которые получаются при сложении и вычитании двух векторов. Если $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, то по теореме косинусов модуль суммы равен

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}, \quad (1)$$

а углы треугольника и модули сил связаны теоремой синусов

$$\frac{R}{\sin(180 - \alpha)} = \frac{F_1}{\sin \beta} = \frac{F_2}{\sin \gamma}, \quad (2)$$

где α – угол между направлениями сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, β – угол между направлениями $\vec{F}_2$ и $\vec{R}$, γ – угол между направлениями $\vec{F}_1$ и $\vec{R}$. Этот метод удобен для задач о равновесии трёх сил.

Аналитический метод (метод проекций) заключается в проецировании векторного уравнения равновесия на оси координат и решении системы полученных уравнений.

Проекция вектора суммы на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на ту же ось.

$$R_x = \sum F_{kx}; \quad R_y = \sum F_{ky}; \quad R_z = \sum F_{kz}. \quad (3)$$

Вектор равен нулю, когда его модуль равен нулю

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0. \quad (4)$$

Для этого одновременно должны выполняться 3 условия

$$R_x = \sum F_{kx} = 0; \quad R_y = \sum F_{ky} = 0; \quad R_z = \sum F_{kz} = 0, \quad (5)$$

которые выражают необходимое и достаточное условие равновесия системы сходящихся сил в *аналитической форме*: для равновесия пространственной системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трёх координатных осей были равны нулю.

Если все действующие на тело сходящиеся силы лежат в одной плоскости, то они образуют плоскую систему сходящихся сил, и остаются два условия равновесия

$$R_x = \sum F_{kx} = 0; \quad R_y = \sum F_{ky} = 0. \quad (6)$$

Знак минус у найденной проекции свидетельствует о её направлении в сторону, противоположную первоначально выбранной. Аналитический метод является универсальным.

ЗАДАЧА 1 И ЕЁ РЕШЕНИЕ

Фонарь весом 90 Н подвешен на кронштейне ВАС (рисунок 1). Определить реакции горизонтального стержня АВ и наклонной тяги АС, если угол ВАС равен $\alpha=30^\circ$, крепления в точках А, В и С шарнирные.

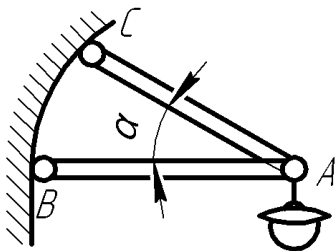


Рисунок 1

Решение графоаналитическим методом.

Изображаем силовой треугольник как в графическом методе, но только для наглядности, без определения масштаба. Т.к. стержень АВ расположен горизонтально, то он и сила $\vec{N}_B$ перпендикулярны направлению силы тяжести фонаря $\vec{G}$. Силовой треугольник является прямоугольным. Тогда

$$N_B = \frac{G}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{90}{\operatorname{tg} 30^\circ} = 155,9 \text{ Н},$$

$$N_C = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{90}{\sin 30^\circ} = 180 \text{ Н}.$$

Решение аналитическим методом.

Выбираем направление осей координат: ось Ox – по горизонтали, ось Oy – по вертикали (рисунок 2). Составляем уравнения проекций сил на оси координат (6).

$$\sum F_{kx} = 0; \quad N_B - N_C \cos \alpha = 0.$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad N_C \sin \alpha - G = 0.$$

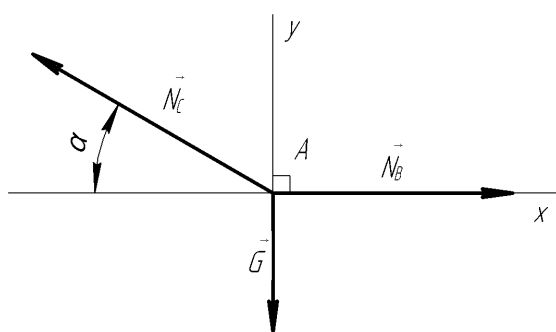


Рисунок 2

Из второго уравнения

$$N_C = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{90}{\sin 30^\circ} = 180 \text{ Н}.$$

Из первого уравнения $N_B = N_C \cos \alpha = 180 \cos 30^\circ = 155,9 \text{ Н}$.

Получение положительного значения силы подтверждает правильность выбора направления вектора силы на её линии действия. (Получение отрицательного значения свидетельствует о противоположном направлении вектора.). Ответы сравниваем с теми, что получены графическим методом решения в предыдущей работе.

В рассмотренной задаче была задана одна сила – вес фонаря $\vec{G}$. Если будут заданы несколько сил, можно сложить их проекции на соответствующие оси и получить проекции равнодействующей заданных сил. Далее решаем аналогично рассмотренной задаче.

Задача 2 и её решение

Задача 2. Шарнирно-стержневая конструкция ABC нагружена в шарнире B заданными силами натяжения канатов F_1 и F_2 (рисунок 3). Определить продольные силы: N_C – в стержне BC (1) и N_A – в стержне BA (2).

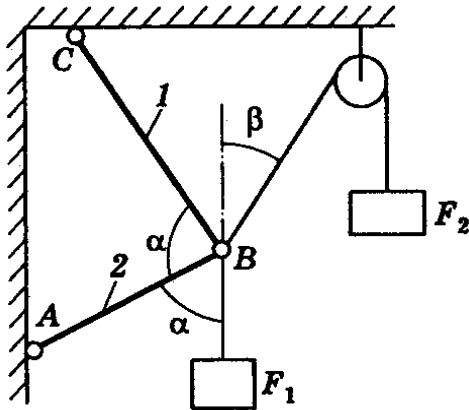


Рисунок 3 – Исходная схема к задаче 2, вычерченная при произвольных значениях углов α и β

Решение задачи 2 аналитическим методом

Заданы значения углов: $\alpha=80^\circ$, $\beta=60^\circ$,

и силы натяжения канатов: $F_1=100$ кН, $F_2=75$ кН.

Вычерчиваем схему в соответствии с заданными углами (рисунок 4).

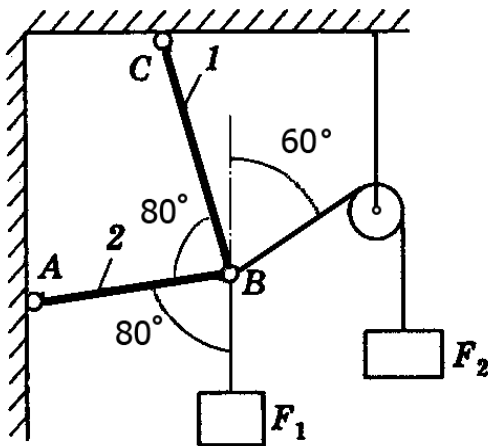


Рисунок 4 – Уточнённая по заданным углам схема конструкции

Вырезаем узел B и изображаем его отдельно с действующими на него силами. Длины векторов сил – произвольные (рисунки 5, 6, 7). Точка B находится в равновесии под действием четырёх сходящихся сил, расположенных в одной плоскости. Канаты тянут точку B в указанных на схеме направлениях с заданными силами F_1 и F_2 . Линия действия силы N_C реакции стержня BC проходит через шарниры B и C . Линия действия силы N_A реакции стержня BA проходят через

шарниры B и A . Векторы N_A и N_C можно предварительно направить от точки B , или к ней. Если решение уравнения даст положительное числовое значение силы – значит направление выбрано верно, если отрицательное – значит реакция направлена в противоположную сторону.

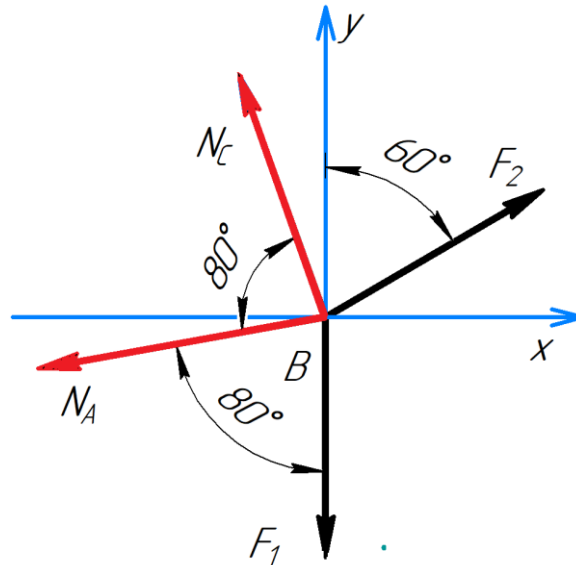


Рисунок 5 – Проецирование сил на оси x и y

Размещаем в точке B начало координат. Для нахождения двух неизвестных величин в плоской системе сил нам понадобятся две оси. Можно привычно направить ось x слева направо и ось y снизу вверх (рис. 5). Потом спроецировать все силы на каждую ось и приравнять эти суммы к нулю (формулы 6). Но в этом случае на каждую ось проецируются две неизвестных N_A и N_C . Придётся решать систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} -N_A \cos 10^\circ - N_C \cos 70^\circ + F_2 \cos 30^\circ + F_1 \cos 90^\circ &= 0 \\ -N_A \cos 80^\circ + N_C \cos 20^\circ + F_2 \cos 60^\circ - F_1 \cos 0^\circ &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Разделить неизвестные в уравнениях равновесия можно не только методами математики, но и методом механики. Воспользуемся тем, что $\cos 90^\circ = 0$. Проведём ось U перпендикулярно к неизвестной силе N_A , (рис. 6) чтобы исключить эту силу из суммы проекций на ось U .

Проведём ось V перпендикулярно к неизвестной силе N_C (рис. 7), чтобы исключить эту силу из суммы проекций на ось V . В таком случае каждое из двух уравнений будет содержать только одну неизвестную величину.

По схеме конструкции вычисляем углы между силами и осями. Обозначаем эти углы на рисунках 6 и 7. Составляем два уравнения равновесия.

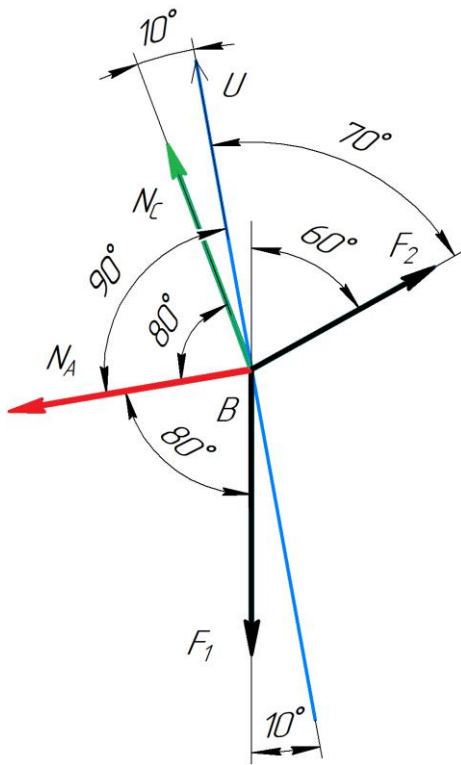


Рис. 6 – Проецирование сил на ось U

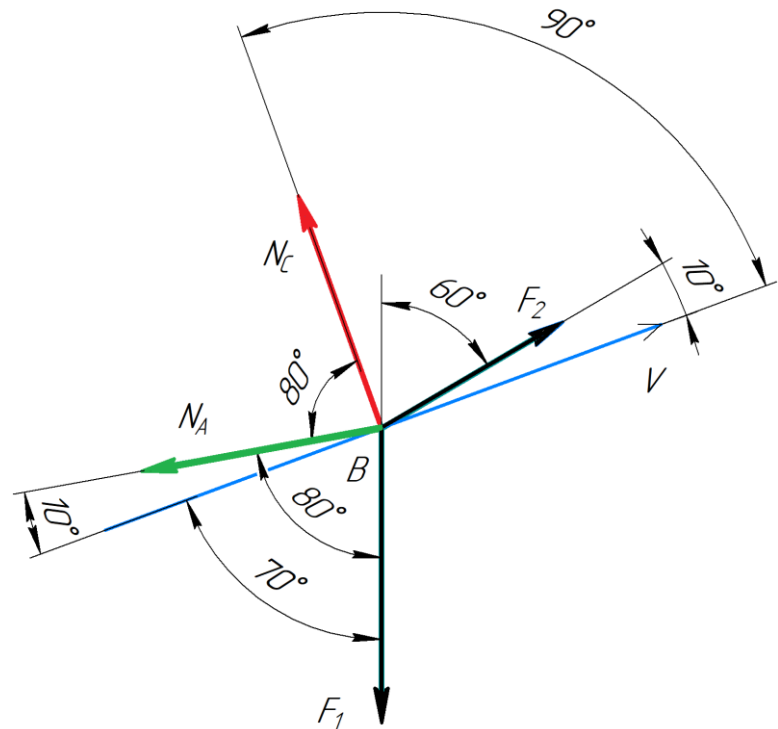


Рис. 7 – Проецирование сил на ось V

$$\sum F_{iU} = 0; \quad N_C \cos 10^\circ + F_2 \cos 70^\circ - F_1 \cos 10^\circ = 0;$$

$$\sum F_{iV} = 0; \quad -N_A \cos 10^\circ + F_2 \cos 10^\circ - F_1 \cos 70^\circ = 0;$$

Из которых находим

$$N_C = \frac{-F_2 \cos 70^\circ + F_1 \cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{-75 \cdot 0,342}{0,9848} + 100 = 73,95 \text{ кН};$$

$$N_A = \frac{F_2 \cos 10^\circ - F_1 \cos 70^\circ}{\cos 10^\circ} = 75 - 100 \frac{0,342}{0,9848} = 40,27 \text{ кН}.$$

Получены положительные числовые значения сил, следовательно, они направлены от точки B , как и предполагалось.

Сравним этот результат с тем, который был получен графическим методом в предыдущей работе. Направления сил совпадают, числовые значения приблизительно совпадают.

Задание

Шарнирно-стержневая конструкция ABC нагружена в шарнире B заданными силами натяжения канатов F_1 и F_2 . Определить продольные силы: N_C – в стержне BC и N_A – в стержне BA .

Варианты заданий следует взять из методических указаний к работе «Графический метод сложения сил плоской сходящейся системы». Схемы конструкций приведены в таблице 1. Как правило, номер схемы выбирается по номеру студента в списке группы. Числовые данные приведены в таблице 2. Номер варианта числовых данных, общий для всех студентов группы, назначает преподаватель.

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ

1. Как производится проецирование вектора силы на ось, на плоскость?
2. Как вычислить модуль проекции?
3. Условия равновесия пространственной системы сходящихся сил в аналитической форме.
4. Условия равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ДАННОЙ ТЕМЕ

1. Соколовская, В.П. Механика. Практикум по решению задач: учеб. пособие / В.П. Соколовская. – Мн.: Новое знание, 2006. – 316 с.
- 2 Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное

государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

3 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гуменова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

4 Цивильский В. Л. Теоретическая механика. Учеб. для втузов / В. Л. Цивильский. – М. : Абрис, 2012. – 368 с.: ил. ISBN 978-5-4372-0079-7
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=117515>

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР ТВЕРДОГО ТЕЛА

Цель работы: изучение условий равновесия твёрдого тела и определение реакций опор при действии на тело произвольной плоской системы сил.

Теоретическая часть

Плоской произвольной системой сил называют систему сил, как угодно расположенных в одной плоскости.

Момент силы относительно точки на плоскости

Для количественного измерения вращательного эффекта силы $\vec{F}$ используется понятие о моменте этой силы относительно некоторой точки O на плоскости. Рассмотрим силу F , приложенную к телу в точке A . Из некоторого центра O опустим перпендикуляр на линию действия силы F ; длину h этого перпендикуляра называют плечом силы F относительно центра O .

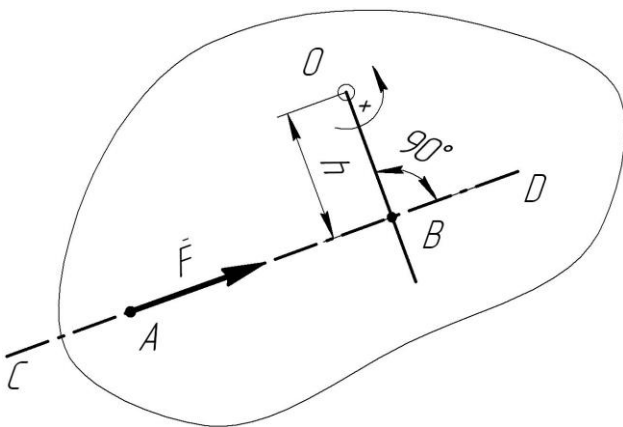
Момент силы относительно некоторой точки O на плоскости равен взятому с соответствующим знаком произведению модуля силы на ее плечо относительно этой точки. При этом будем считать, что момент силы $\vec{F}$ относительно точки O имеет знак «плюс», если эта сила стремится повернуть тело вокруг точки O против хода часовой стрелки, и знак «минус», — если по ходу часовой стрелки.

Момент силы $\vec{F}$ относительно точки O будем обозначать символом $M_O(\vec{F})$.

Следовательно,

$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h. \quad (1.1)$$

Рис. 1 – Определение момента силы $\vec{F}$ относительно точки O



Единица измерения момента силы – Ньютон умноженный на метр (Н·м).

Для определения момента силы относительно точки рекомендуется придерживаться следующего порядка:

1. Прежде всего, нужно научиться «видеть» силу, момент которой определяем, и центр моментов – точку, относительно которой определяем момент (рис. 1 – сила $\vec{F}$ и центр моментов – точка O).
2. Проводим линию действия силы CD , продлевая вектор силы в обе стороны «до бесконечности».
3. Из центра момента O опускаем перпендикуляр на линию действия силы CD . Длина перпендикуляра $h=|OB|$ от центра момента до линии действия силы и есть плечо.
4. Находим знак момента. Если сила стремится повернуть плечо вокруг центра момента против хода часовой стрелки, то считаем момент положительным; если по ходу часовой стрелки, то отрицательным.
5. Находим числовое значение момента силы относительно точки, умножив модуль силы на плечо. Для примера, который представлен на рисунке,

$$M_O(\vec{F}) = +F \cdot |OB|.$$

Свойства момента силы относительно точки:

1. Момент силы относительно точки не изменится при переносе точки приложения силы вдоль ее линии действия, так как при этом не изменяется ни модуль силы, ни длина ее плеча.
2. Момент силы относительно точки равен нулю только в двух случаях: когда модуль силы равен нулю или когда линия действия силы проходит через точку, так как в этом последнем случае длина плеча равна нулю.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей: *момент равнодействующей плоской системы сходящихся сил относительно некоторой точки, лежащей в плоскости сил, равен алгебраической сумме моментов слагаемых сил относительно той же точки.*

Пара сил. Момент пары

*Система двух равных по модулю, параллельных друг другу и направленных в разные стороны сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, линии действия которых не совпадают (рисунок 2), образует так называемую **пару сил**.*

Алгебраическим моментом пары называется скалярная величина, равная взятому с соответствующим знаком произведению модуля одной из сил пары на ее плечо. Будем обозначать момент пары символом m или $m(\bar{F}_1, \bar{F}_2)$. Тогда

$$m = \pm F_1 d = \pm F_2 d. \quad (1.2)$$

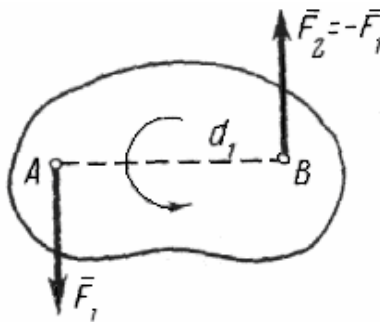


Рисунок 2 – Пара сил

Понятие момента пары не следует смешивать с моментом силы. Понятие момента силы связано с точкой, относительно которой берется этот момент. Момент пары ни с какой точкой плоскости не связан.

Теорема: Действие пары на тело не изменится, если эту пару заменить любой другой парой, лежащей в той же плоскости и имеющей тот же момент.

Направления реакций некоторых видов связей

1. Шарнирная неподвижная опора (цилиндрический шарнир, подшипник). Одно тело может вращаться относительно другого вокруг общей оси, называемой *осью шарнира* (например, как две половины ножниц). Если тело AB прикреплено с помощью такого шарнира к неподвижной опоре D (рис. 3, a), то точка A тела не может при этом переместиться ни по какому направлению, перпендикулярному оси шарнира. Следовательно, реакция $\bar{R}$ цилиндрического шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной оси шарнира, т.е. в плоскости $Axу$. Для силы $\bar{R}$ в этом случае наперёд неизвестны ни её модуль R , ни направление (угол α). Часто

реакцию $\bar{R}$ заменяют её составляющими по осям x и y , как на рис. 3, (б), где шарнир A неподвижно закреплён при помощи двух стержней на шарнирах.

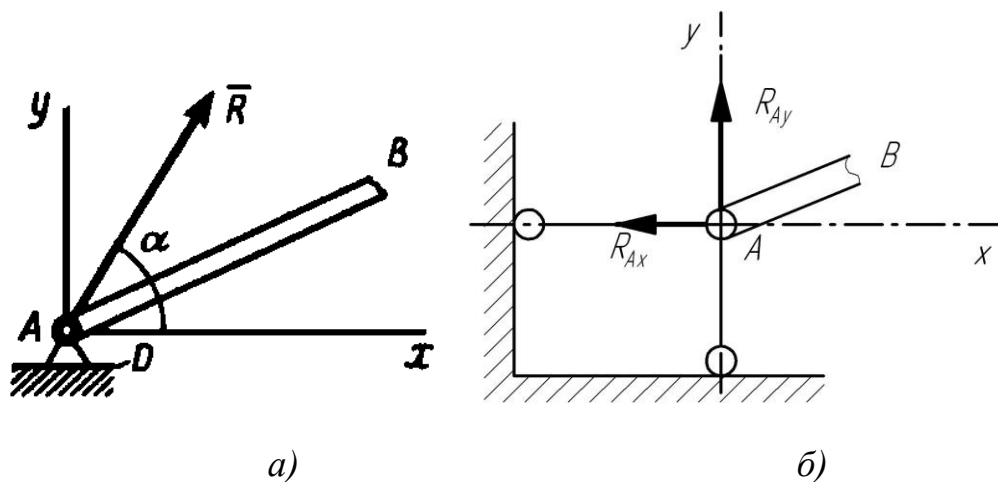


Рисунок 3 – Реакция неподвижного шарнира

2. Подвижный шарнир. Стержень, закреплённый на шарнире, может поворачиваться вокруг шарнира, а точка крепления может перемещаться вдоль направляющей. Реакция подвижного шарнира направлена перпендикулярно опорной поверхности, т.к. не допускается только перемещение поперёк опорной поверхности.

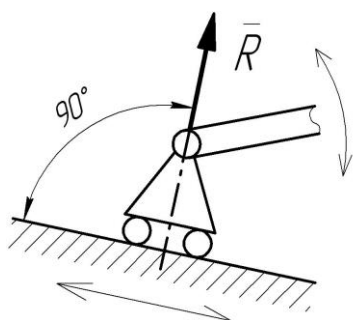


Рис. 4 – Реакция подвижного шарнира

3. Невесомый стержень на двух шарнирах. Невесомым называют такой стержень, весом которого по сравнению с воспринимаемой им нагрузкой, можно пренебречь. Пусть для находящегося в равновесии тела такой стержень, прикрепленный в точках A и B шарнирами, является связью (примеры на рис. 5 а и б). Тогда на стержень будут действовать только две силы, приложенные в точках A и B . При равновесии эти силы должны быть направлены вдоль одной прямой, т.е. вдоль AB . Но тогда согласно закону о

действии и противодействии стержень будет действовать на тело с силой, тоже направленной вдоль AB . Следовательно, *реакция $\bar{N}$ невесомого шарнирно прикреплённого стержня направлена вдоль прямой, соединяющей шарниры*. При этом стержень может быть прямым или кривым, сжатым или растянутым.

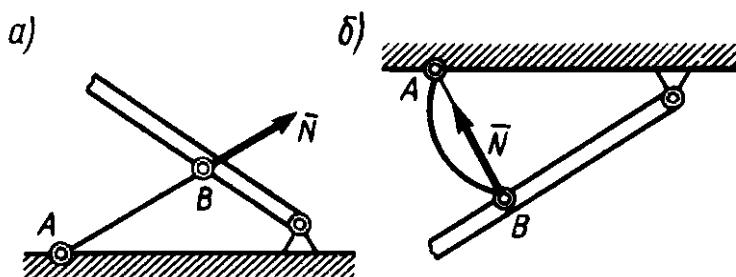


Рисунок 5 – Связи в виде невесомых стержней: прямого растянутого (а) и криволинейного сжатого (б)

4. **Направляющая** позволяет только прямолинейное движение вдоль своей оси. Создаёт силу реакции в направлении, перпендикулярном оси, и момент реакции (в плоской системе сил). (Рис. 6, а.) Если одна направляющая установлена на другой направляющей, то тело может перемещаться в плоскости как угодно, но не может поворачиваться. (Рис. 1.6, б.). В такой опоре имеется реакция в виде момента.

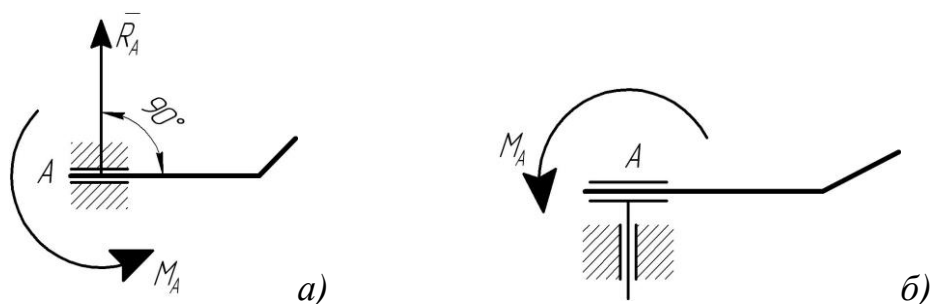


Рисунок 6 – Реакции направляющих: а) – одиночной и б) – сдвоенной

5. **Жёсткая заделка** (рисунок 7, а, б). Даже одна жёсткая заделка обеспечивает равновесие тела при любых видах нагрузок. Сила реакции заделки $\bar{R}$ может иметь любое направление, поэтому обычно определяют

составляющие R_x, R_y, R_z . (на рисунке 7, а они обозначены $\bar{X}_3, \bar{Y}_3$ и $\bar{Z}_3$) Кроме того, жёсткая заделка препятствует повороту тела, поэтому на тело действует момент заделки $\bar{M}_3$. Его, как мы увидим далее, тоже можно представить как сумму моментов M_x, M_y, M_z . В случае действия плоской системы сил возникают две составляющие реакции (на рисунке 7, б они обозначены $\bar{X}_3$ и $\bar{Y}_3$) и момент заделки в плоскости действия сил (на рисунке 7, б он обозначен M_3).

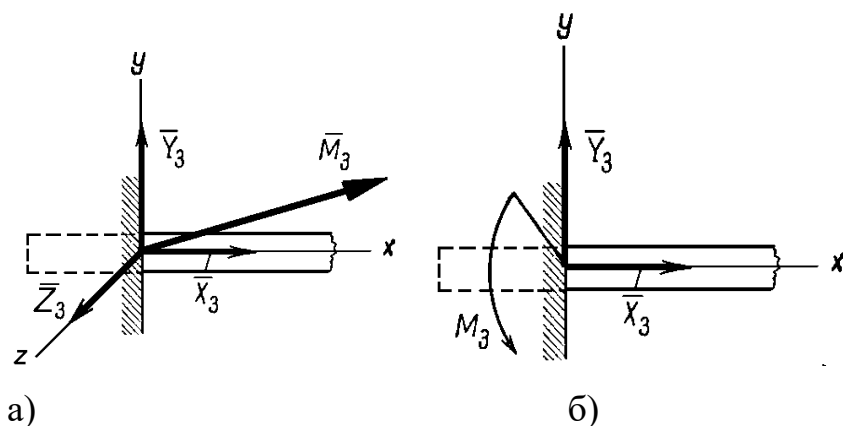


Рисунок 7 – Реакции заделки в пространственной (а) и плоской (б) системе сил

Аксиома связей, или принцип освобождаемости от связей. *Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, если его мысленно освободить от связей, заменив их действие соответствующими силами реакций связей.*

Аксиома связей дает возможность применить к несвободному телу условия равновесия, справедливые для свободного тела. Для этого следует мысленно отбросить связи, наложенные на тело, заменив их действие соответствующими силами реакций связей. Затем нужно рассмотреть равновесие этого несвободного тела как тела свободного под действием активных сил и сил реакций связей.

При замене связей (опор) силами реакций помнить:

- если связь препятствует перемещению тела только в одном каком-нибудь направлении, то направление ее реакции противоположно этому направлению;

- если же связь препятствует перемещению тела по многим направлениям, то силу реакции такой связи изображают ее составляющими, показывая их параллельно выбранным координатным осям X и Y .

Условия равновесия.

Для равновесия любой системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$ этой системы сил и ее главный момент $\vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k)$ относительно любого центра O были равны нулю, то есть чтобы выполнялись условия

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k = 0, \quad \vec{M}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_k) = 0 \quad (1.3)$$

Сумму сил можно спроецировать на любую ось, тогда одним из условий равновесия будет равенство нулю суммы проекций сил на ось.

Решение системы уравнений равновесия будет тем проще, чем меньшее число неизвестных будет входить в каждое уравнение. Поэтому, при составлении уравнений равновесия рекомендуется:

1) выбирать направление оси для проецирования на неё сил так, чтобы она была перпендикулярна к линии действия «лишней» неизвестной силы, в этом случае проекция «лишней» неизвестной силы исключается из соответствующего уравнения равновесия;

2) центром моментов выбирать точку, в которой пересекаются линии действия «лишних» неизвестных сил реакций, тогда моменты этих сил не войдут в уравнение моментов.

Если сила $\vec{F}$ в плоскости XOY имеет две составляющие ее силы $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$, то вместо вычисления момента силы $\vec{F}$ относительно некоторой точки O , может оказаться проще применить теорему Вариньона, вычислив сумму моментов составляющих ее сил относительно этой точки.

Если к телу приложена пара сил, то ее действие учитывается только в уравнении моментов сил.

Количество неизвестных величин, которое можно определить из условий равновесия, соответствует числу независимых уравнений равновесия, а оно

равно числу степеней свободы (см. введение к лекциям, тема «Системы координат»). Прежде, чем составлять уравнения, нужно проверить количество выявленных неизвестных реакций твёрдого тела.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Дано: Три способа закрепления бруса, изогнутого в одной плоскости (рис. 8, а, б, в). Нагрузка, действующая в этой же плоскости $P = 2 \text{ кН}$; $M = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $q = 2 \text{ кН/м}$ и размеры (м) во всех трёх случаях одинаковы.

Определить реакции опор для того способа закрепления, при котором реакция $\bar{Y}_B$ опоры B имеет наименьшее (по модулю) числовое значение.

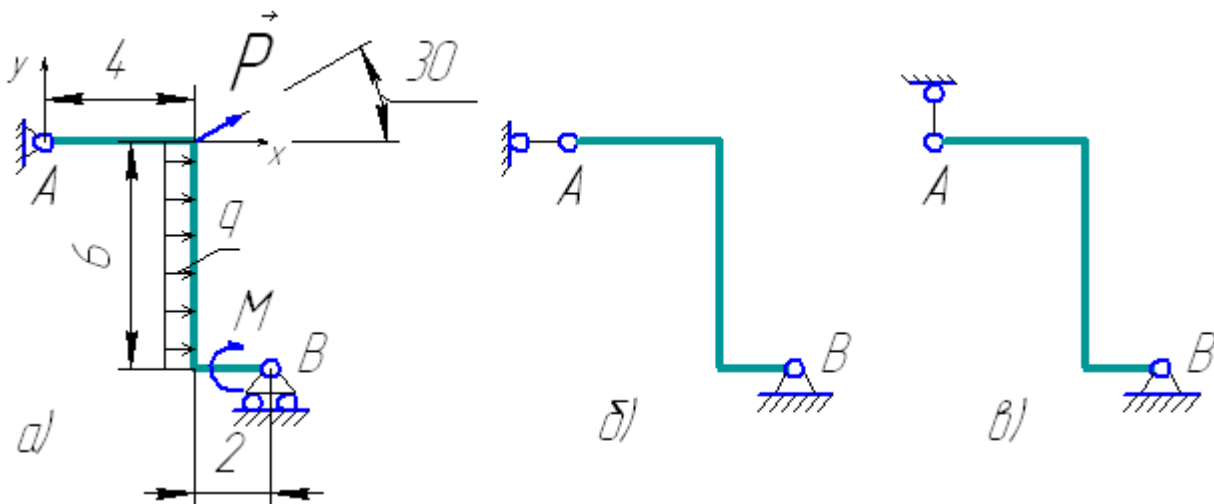


Рисунок 8 – Заданные способы закрепления бруса

Решение:

На брус действуют: *активные силы*, заданные по условию задачи – сосредоточенная сила $\bar{P}$ под углом 30° к горизонтальной оси; пара сил с моментом M ; равномерно распределённая нагрузка интенсивностью q и *реактивные силы* – реакции опор.

Равномерно распределённую на длине $b=6 \text{ м}$ нагрузку интенсивностью q заменяем равнодействующей сосредоточенной силой $\bar{Q}$, равной qb и приложенной посередине нагруженного участка.

$$Q = q \cdot b = 2 \cdot 6 = 12 \text{ кН.}$$

Сосредоточенную силу $\bar{P}$ по правилу параллелограмма сил разлагаем на две составляющие по осям X и Y – $\bar{P}_x$ и $\bar{P}_y$. При графическом построении $\bar{P}_x$ и $\bar{P}_y$ (на рис. 10) точка приложения силы должна остаться на конструкции.

Числовые значения $\bar{P}_x$ и $\bar{P}_y$ находим из прямоугольного треугольника:

$$P_x = P \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot (\sqrt{3} / 2) = \sqrt{3} \text{ кН};$$

$$P_y = P \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot (1 / 2) = 1 \text{ кН}.$$

Рассмотрим вариант крепления а).

Заменяем связи их реакциями. На рис. 10 реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя её составляющими $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$; реакцию подвижной шарнирной опоры B изображаем $\bar{Y}_B$ (линия действия шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости). Плоская система сил с тремя неизвестными силами, не пересекающимися в одной точке, является статически определимой.

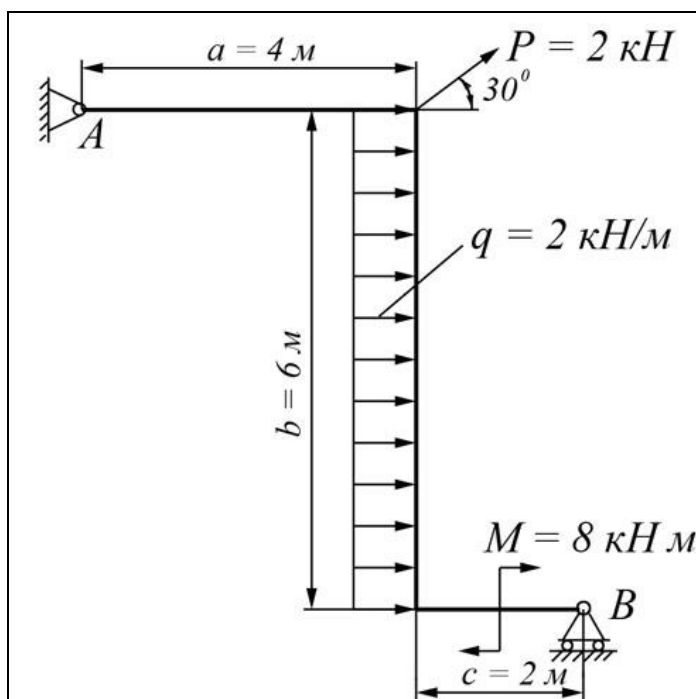


Рисунок 9 – Заданная схема (а)

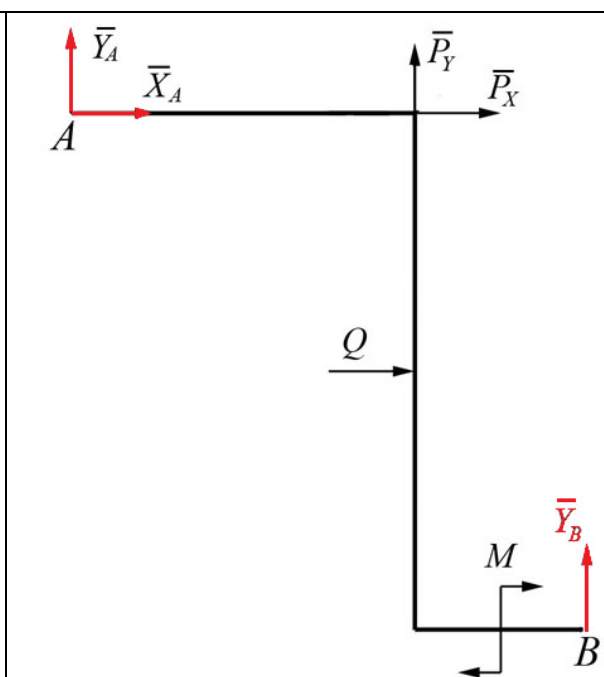


Рисунок 10 – Расчётная схема (а)

Реакцию опоры $\bar{Y}_B$ определим из условий равновесия бруса. Предпочтительно составлять уравнения с одной неизвестной (в данном случае $\bar{Y}_B$). Две лишних неизвестных $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$ направлены не параллельно друг другу, поэтому нет такой оси, на которую они обе спроецировались бы в точку (в ноль). В таком случае, для определения реакции $\bar{Y}_B$ составим уравнение моментов относительно точки A – точки пересечения линий действия двух реакций опор $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$, тогда их моменты будут равны нулю, независимо от величин этих сил.

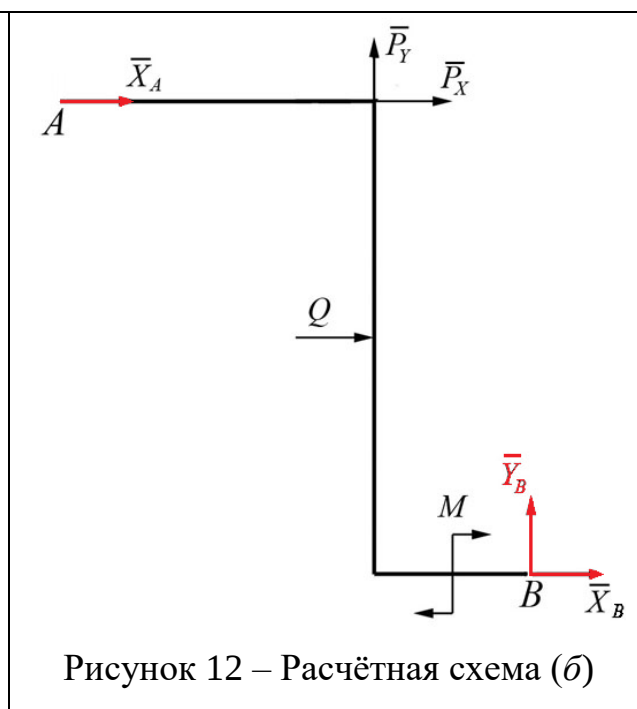
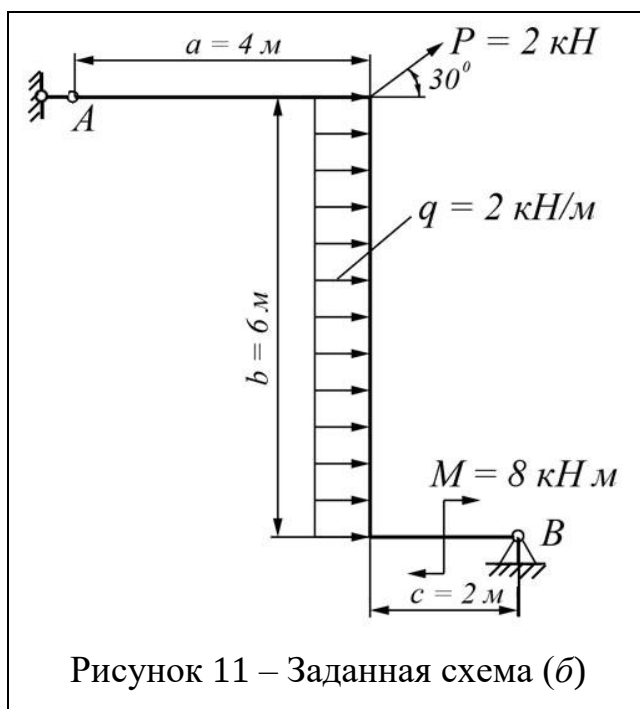
$$\Sigma M_A(\bar{F}_k) = 0; \quad 4P_y + 3Q - M + 6Y_B = 0 \Rightarrow$$

$$Y_B = (M - 3Q - 4P_y) / 6 = (8 - 3 \cdot 12 - 4 \cdot 1) / 6 = -5,33 \text{ кН}.$$

Знак «минус» свидетельствует о том, что реакция направлена в обратную сторону.

Рассмотрим вариант крепления б).

На рис. 12 реакцию $\bar{X}_A$ опоры A (невесомого стержня, прикрепленного к брусу и к неподвижной опоре шарнирами) изображаем вдоль прямой, соединяющей шарниры; реакцию неподвижной шарнирной опоры B изображаем двумя её составляющими $\bar{X}_B$ и $\bar{Y}_B$.



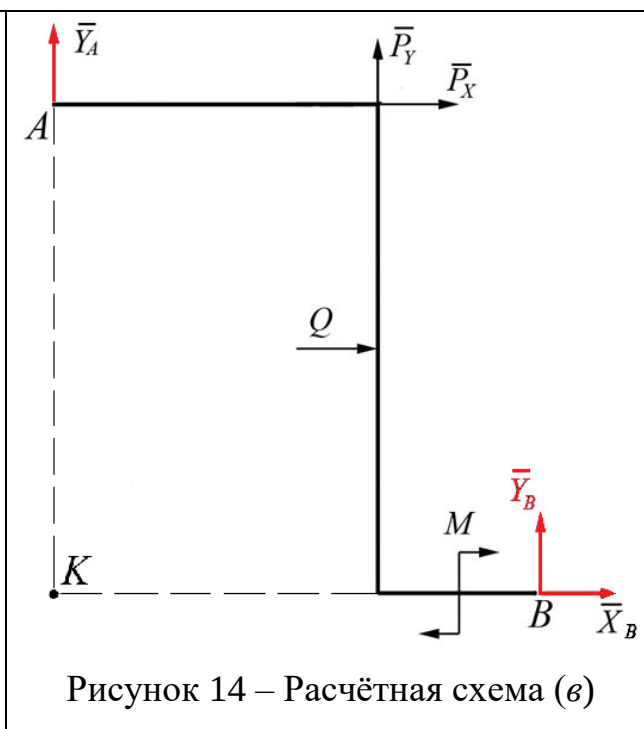
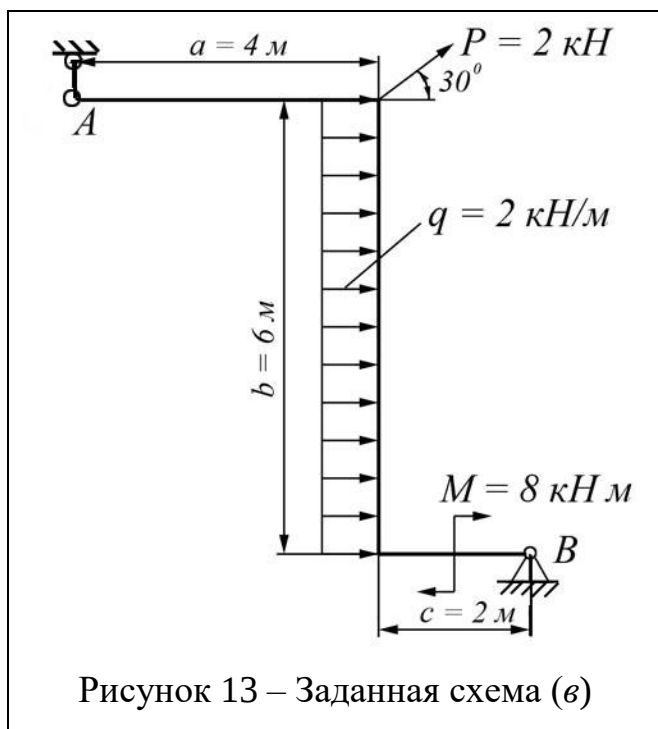
Обе лишние неизвестные $\overline{X}_A$ и $\overline{X}_B$ направлены горизонтально. Для определения исследуемой реакции $\overline{Y}_B$ составим сумму проекций сил на вертикальную ось.

$$\sum F_{ky} = 0; \quad P_y + Y_B = 0; \quad \Rightarrow \quad Y_B = -P_y = -1 \text{ кН.}$$

Знак «-» в значении реакции $\overline{Y}_B$ указывает на то, что истинное направление $\overline{Y}_B$, обеспечивающее равновесие полученной системы сил, противоположно показанному на рис. 12.

Рассмотрим вариант крепления в).

На рис. 14 реакцию $\overline{Y}_A$ опоры A (невесомого стержня на двух шарнирах) изображаем вдоль прямой, соединяющей шарниры; реакцию неподвижной шарнирной опоры B изображаем двумя составляющими $\overline{X}_B$ и $\overline{Y}_B$.



Для определения исследуемой реакции $\overline{Y}_B$ рациональным (в уравнении одна неизвестная) является уравнение алгебраической суммы моментов всех сил относительно точки K – точки пересечения линий действия реакций $\overline{X}_B$ и $\overline{Y}_A$:

$$\sum M_K(\overline{F}_k) = 0; \quad 4P_y - 6P_x - 3Q - M + 6Y_B = 0; \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y_B = (6P_x + 3Q + M - 4P_y) / 6 = (6 \cdot (\sqrt{3}) + 3 \cdot 12 + 8 - 4 \cdot 1) / 6 = 8,397 \text{ кН.}$$

Так как минимальное значение модуля реакции $|\overline{Y_B}| = |-1|$ кН – имеет место при втором способе закрепления (б), следовательно, для этой схемы находим все остальные реакции опор $\overline{X_A}$ и $\overline{X_B}$, и делаем проверку:

$$\Sigma M_B(\overline{F_k}) = 0; \quad -M - 3Q - 6P_x - 2P_y - 6X_A = 0; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_A = (-M - 3Q - 6P_x - 2P_y) / 6 = (-8 - 3 \cdot 12 - 6 \cdot \sqrt{3} - 2 \cdot 1) / 6 = -9,397 \text{ кН.}$$

$$\Sigma F_{kx} = 0; \quad X_A + P_x + Q + X_B = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_B = -X_A - P_x - Q = -(-9,397) - \sqrt{3} - 12 = -4,33 \text{ кН.}$$

Знак «-» в значениях реакции $\overline{X_A}$ и $\overline{X_B}$ указывает на то, что истинное направление этих реактивных сил, обеспечивающее равновесие полученной системы сил, противоположно показанному на рис. 12.

Уравновешенность конструкции бруса (правильность вычисления реакций опор А и В) проверим, выполнив проверку:

$$\Sigma M_D(\overline{F_k}) = 0; \quad -4,5X_A - 4,5P_x - 1,5Q - M + Y_B + 1,5X_B = 0;$$

$$-4,5 \cdot (-9,397) - 4,5 \cdot (\sqrt{3}) - 1,5 \cdot 12 - 8 + 2 \cdot (-1) + 1,5 \cdot (-4,33) = 0;$$

$$42,28 - 7,78 - 18 - 8 - 2 - 6,495 = 0;$$

$$42,28 - 42,28 = 0;$$

$$0=0.$$

Для проверки было составлено уравнение суммы моментов относительно некоторой точки D. Определите самостоятельно, где находится эта точка.

Результаты расчётов сводим в таблицу 1.

Таблица 1

№ рисунка	Исследуемая реакция $\overline{Y_B}$ (кН)	Реакции опор	
		$\overline{X_A}$ (кН)	$\overline{X_B}$ (кН)
Рис. 10	- 5,33	—	—
Рис. 12	- 1	- 9,397	- 4,33
Рис. 14	8,397	—	—

Задание: Определение реакций опор твердого тела, при действии на него плоской произвольной системы сил

На рисунках 15 – 20 показаны три способа (а, б, в) закрепления бруса, ось которого – ломаная линия. Задаваемая нагрузка (табл. 2) и размеры (м) бруса (геометрическая конфигурация) во всех трёх случаях одинаковы.

Определить реакции опор для того способа закрепления бруса, при котором исследуемая реакция, указанная в табл. 2, имеет наименьший модуль.

Таблица 2

Номер варианта (рис. 15–26)	P , кН	M , кН · м	q , кН / м	Исследуемая реакция
1	2	3	4	5
1	12	8	1,5	M_A
2	4	6	2	Y_A
3	3	2	2,5	X_A
4	2	3	2	Y_B
5	10	2	2	X_B
6	4	6	1	M_A
7	2	2	18	X_A
8	3	4	2	R_B
9	4	8	2	M_A
10	2	4	0,5	X_A
11	4	8	2	Y_A
12	8	3	1	Y_B
13	6	5	2	X_A
14	4	3	1	Y_A
15	3	4	2	M_A
16	2	4	3	X_A
17	4	4	2	X_C
18	8	4	2	X_A
19	2	3	1	Y_C
20	3	8	2	Y_B
21	4	4	2	Y_A
22	6	4	2	Y_A
23	4	3	2	X_A
24	5	4	1	M_A
25	4	3	1,5	Y_A
26	3	4	1	X_A
27	2	3	2	X_B

Номер варианта (рис. 15–26)	P , кН	M , кН · м	q , кН / м	Исследуемая реакция
28	4	3	2	Y_A
29	2	4	2	X_B
30	4	5	1	Y_B
31	10	6	2	Y_A
32	20	5	4	M_A
33	15	8	1	Y_B
34	5	2	1	Y_B
35	10	4	-	X_B
36	6	2	1	M_A
37	2	4	2	X_A
38	20	10	4	R_B
39	10	6	-	Y_A
40	2	4	2	X_A
41	4	10	1	R_B
42	10	5	2	Y_A
43	20	12	2	Y_A
44	15	4	3	Y_A
45	10	5	2	X_A
46	12	6	2	M_A
47	20	4	3	Y_A
48	14	4	2	X_A
49	16	6	1	R_B
50	10	-	4	Y_A
51	20	10	2	M_A
52	6	6	1	Y_A
53	10	4	2	M_A
54	4	3	1	Y_A
55	10	10	2	X_A
56	20	5	2	M_A
57	10	6	1	X_A
58	20	10	2	Y_A
59	25	-	1	M_A
60	20	10	2	R_B

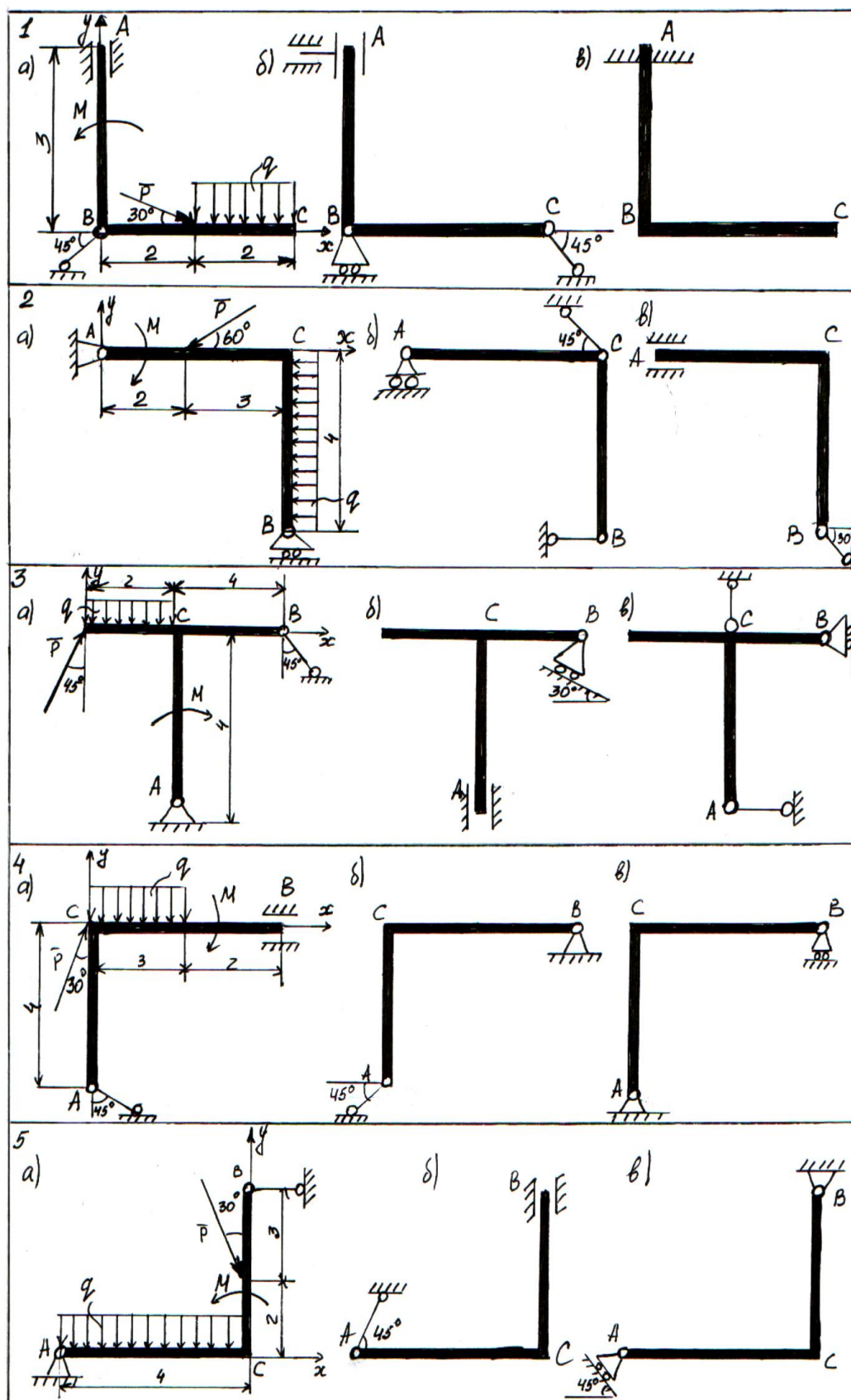


Рисунок 15

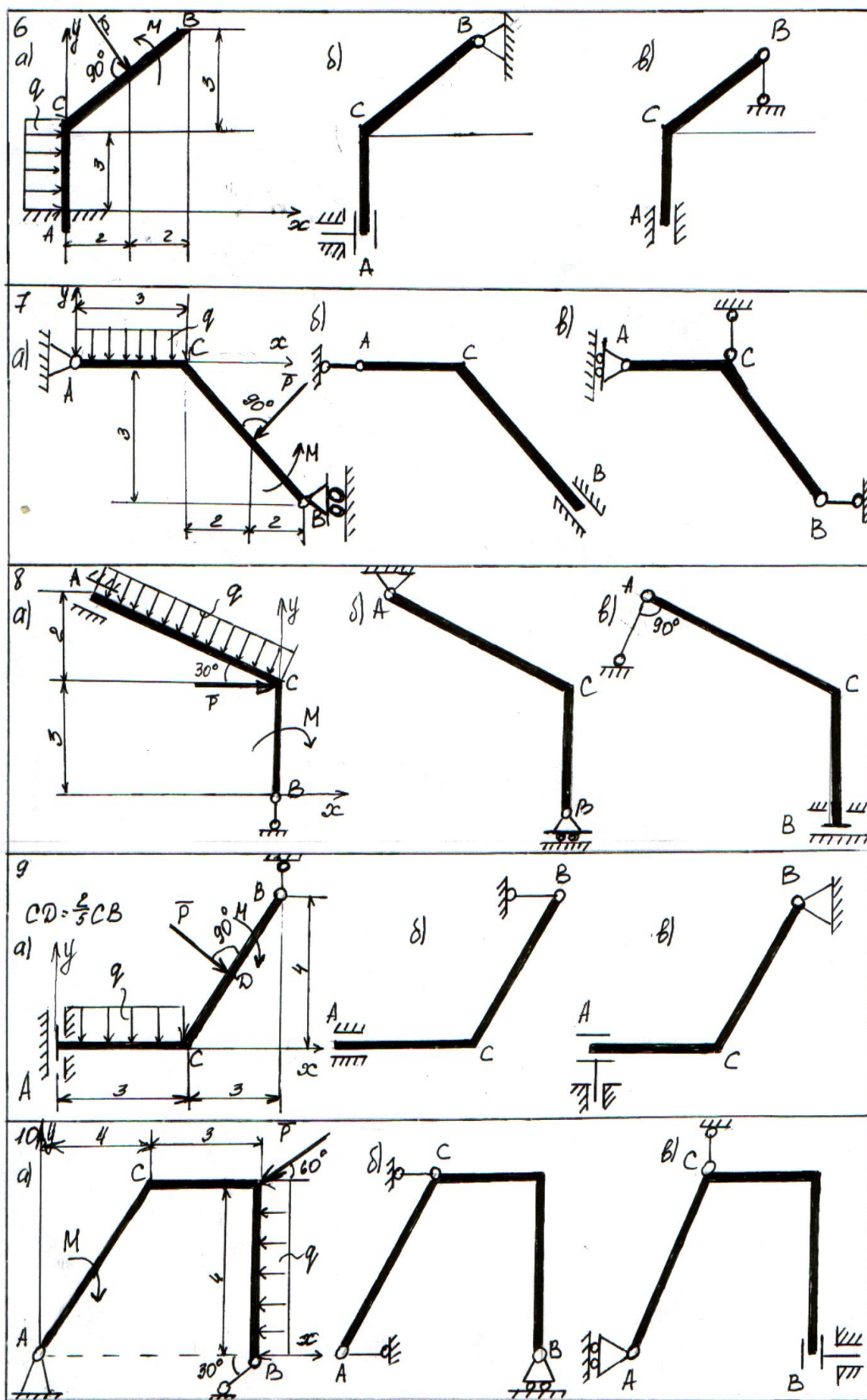


Рисунок 16

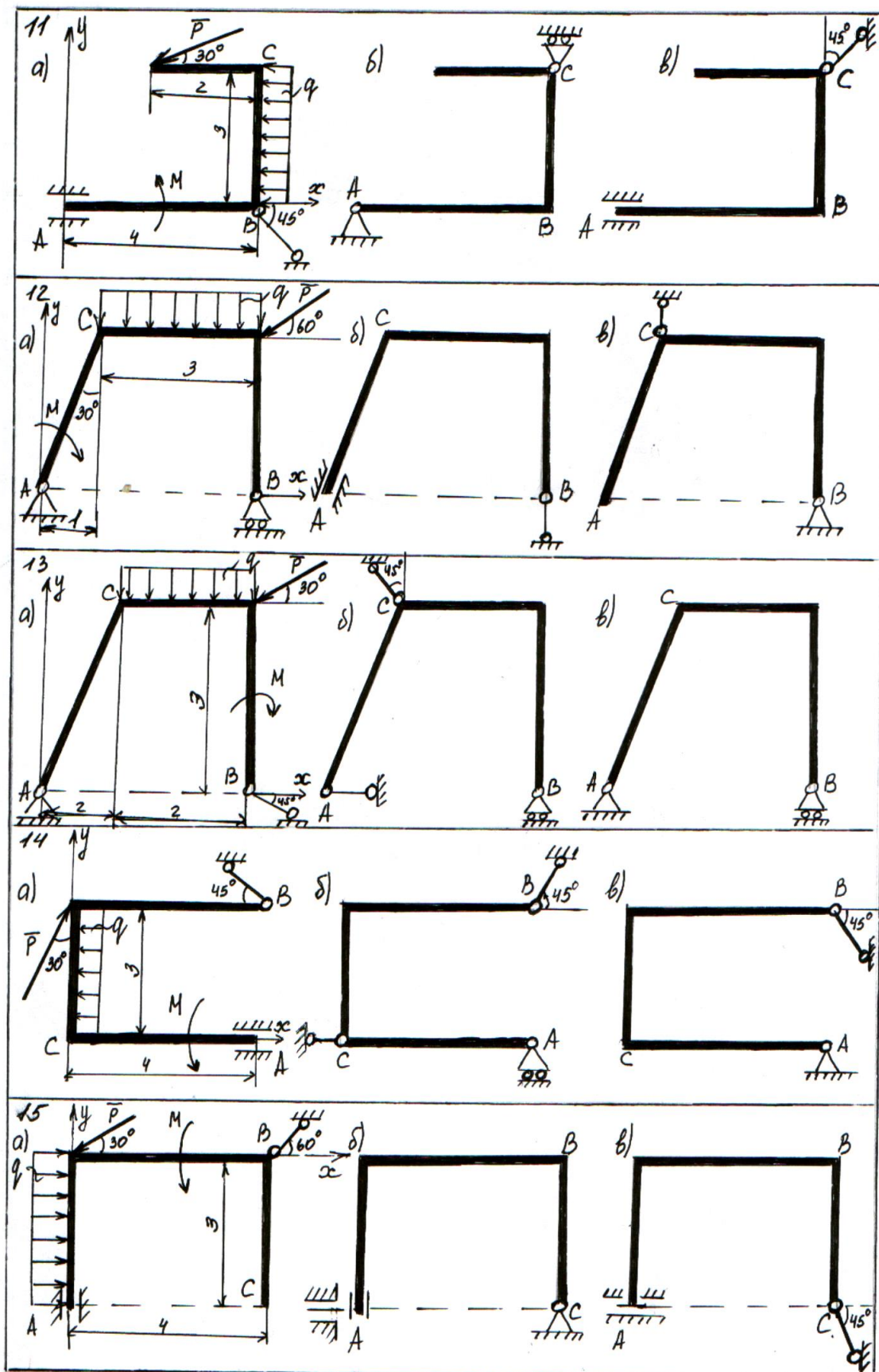


Рисунок 17

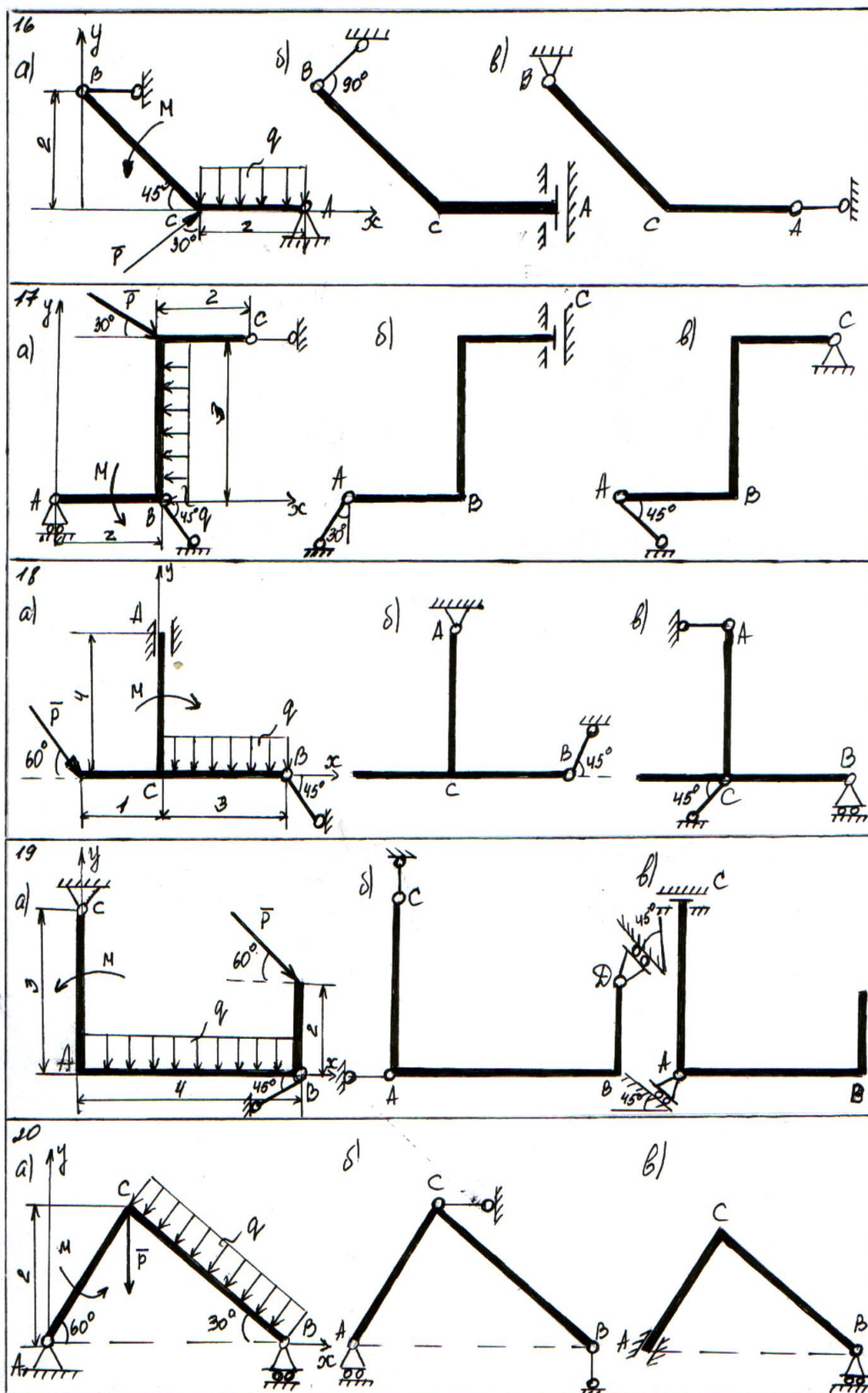


Рисунок 18

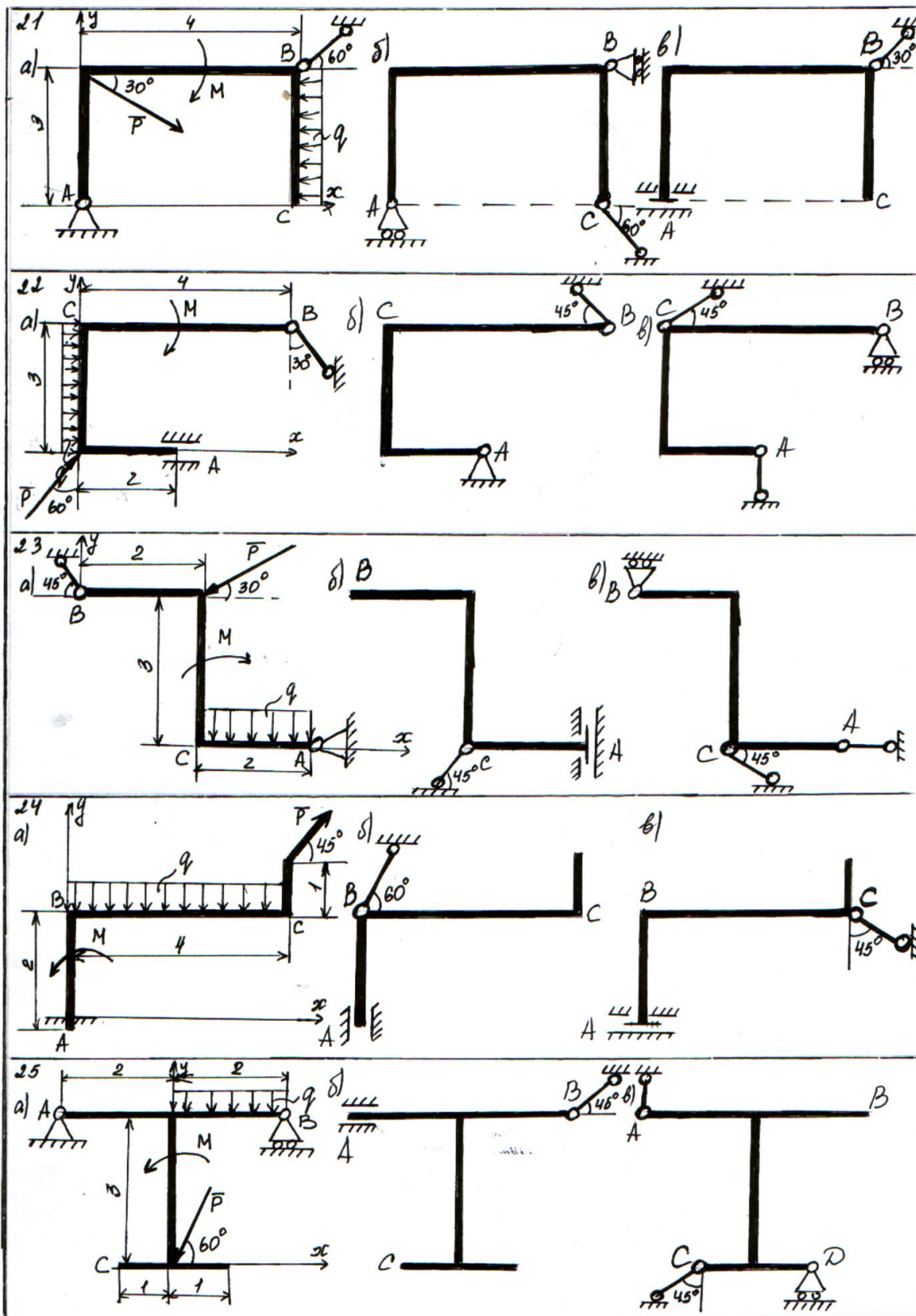


Рисунок 19

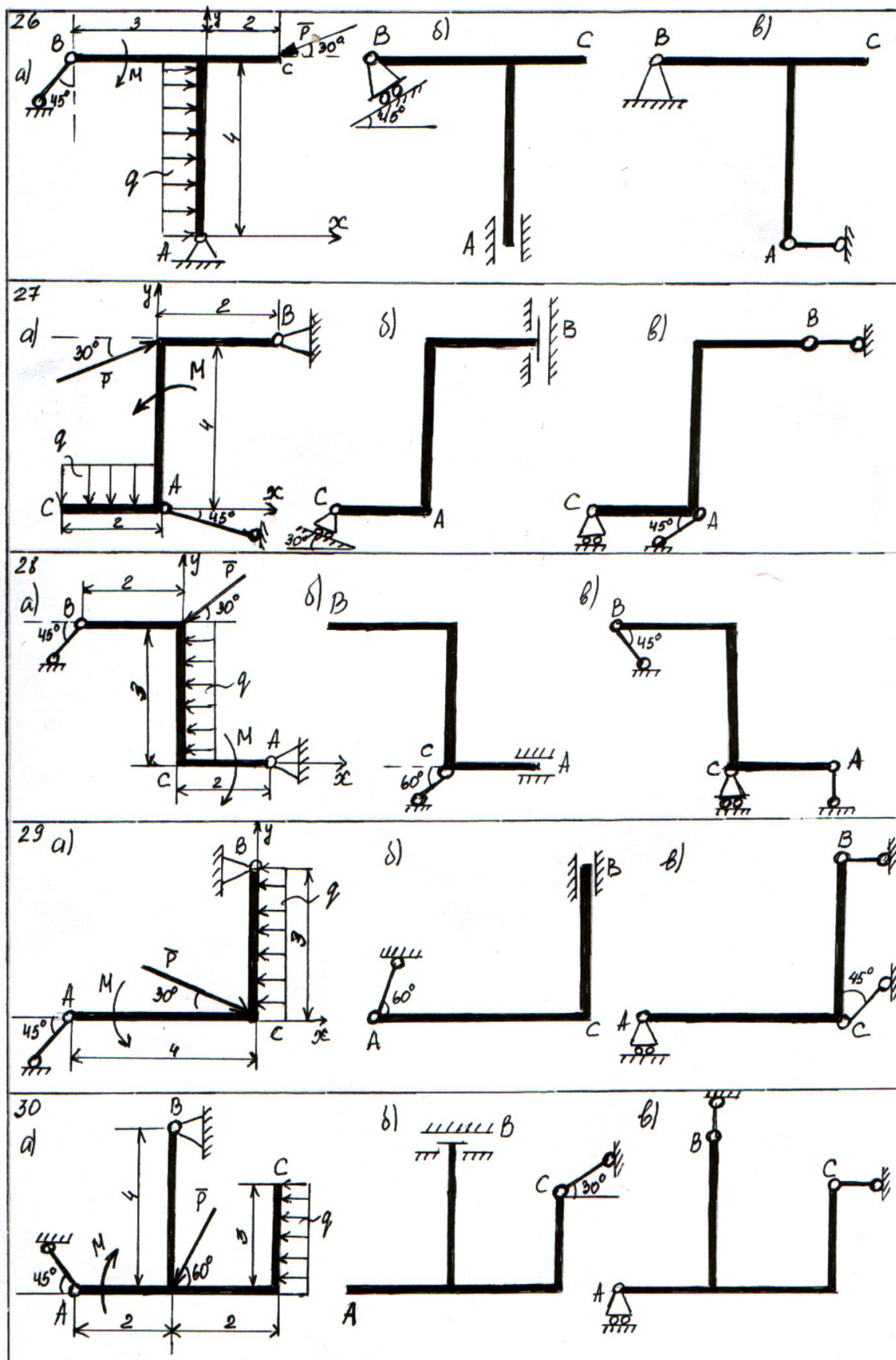


Рисунок 20

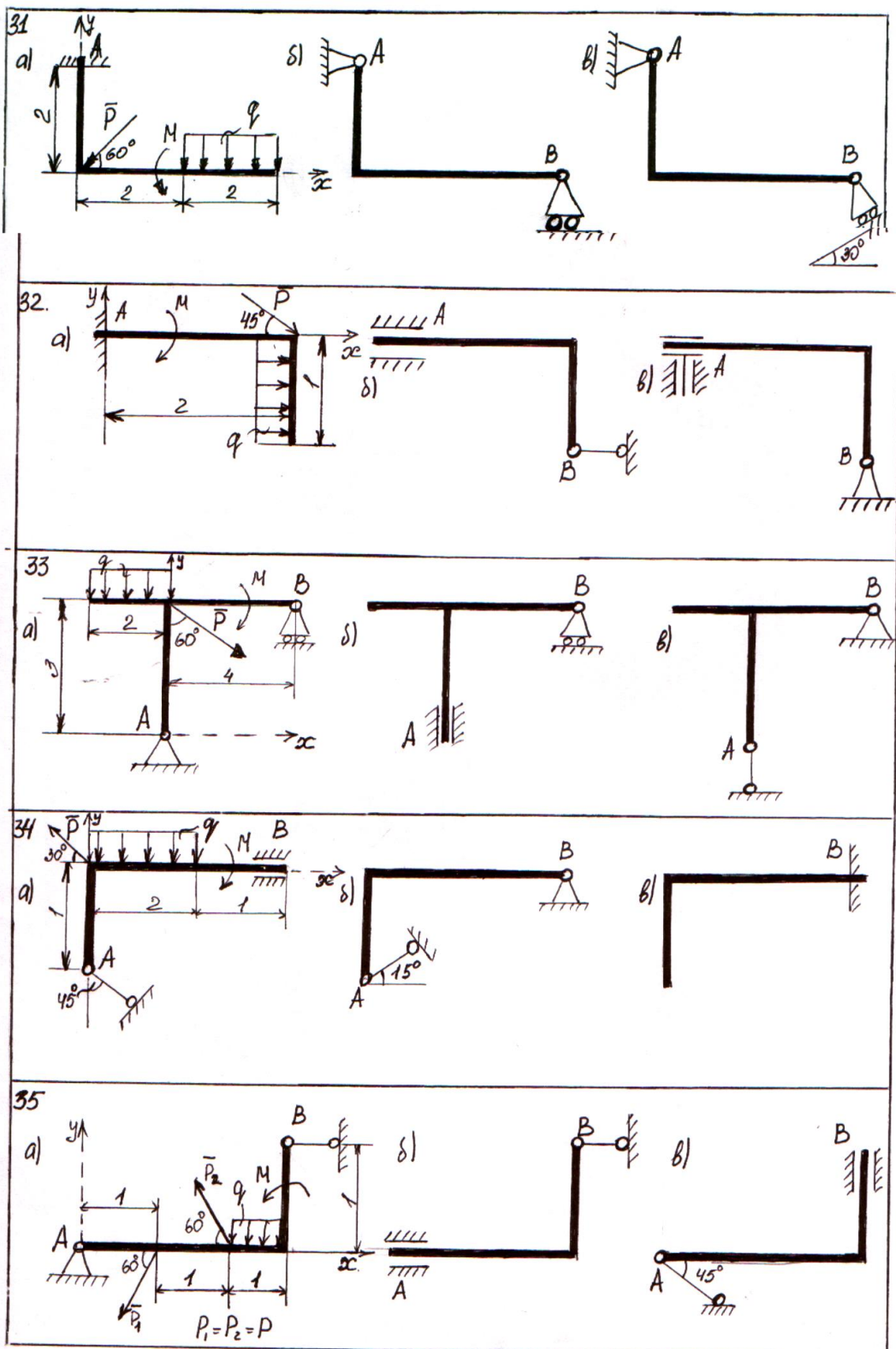


Рисунок 21

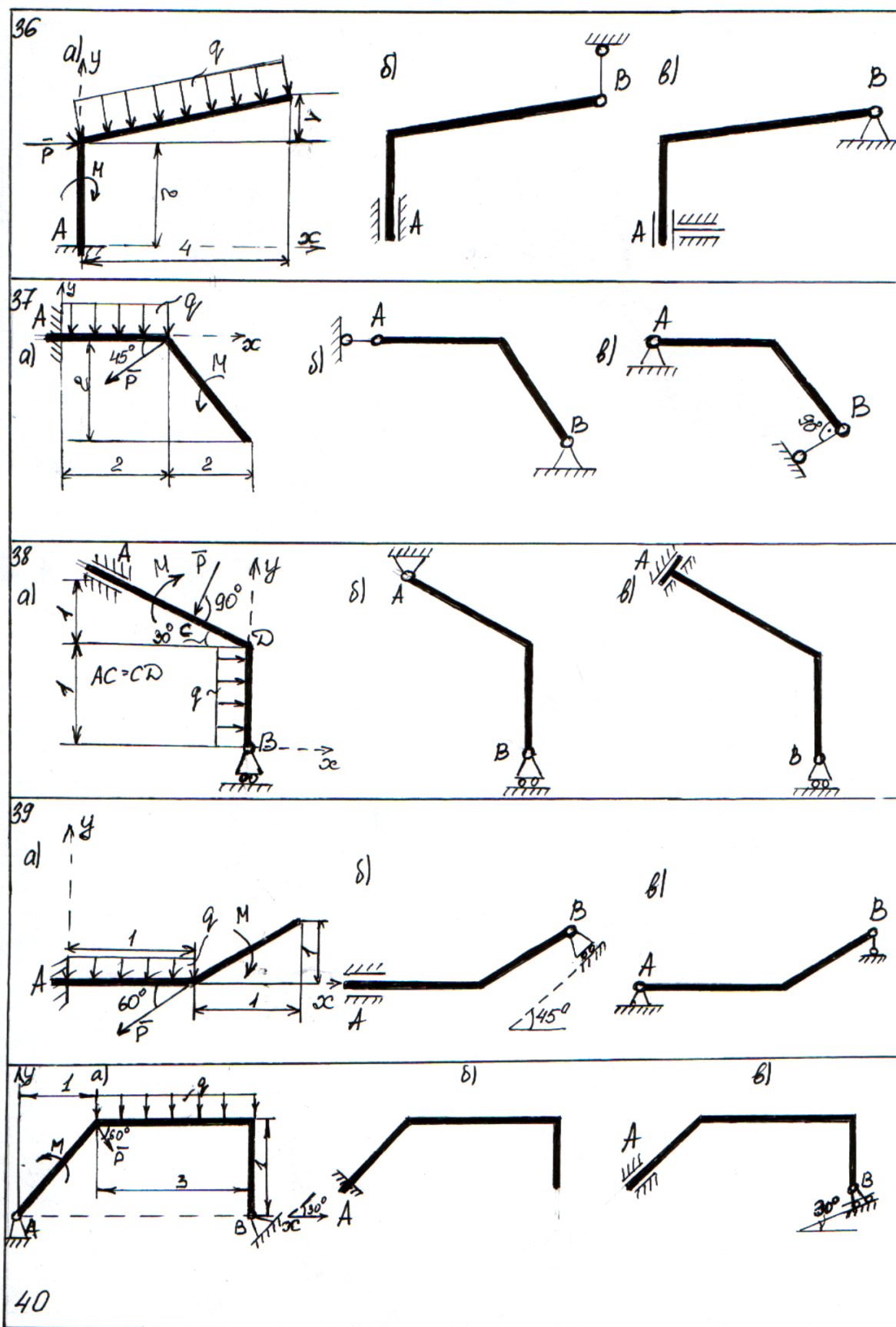


Рисунок 22

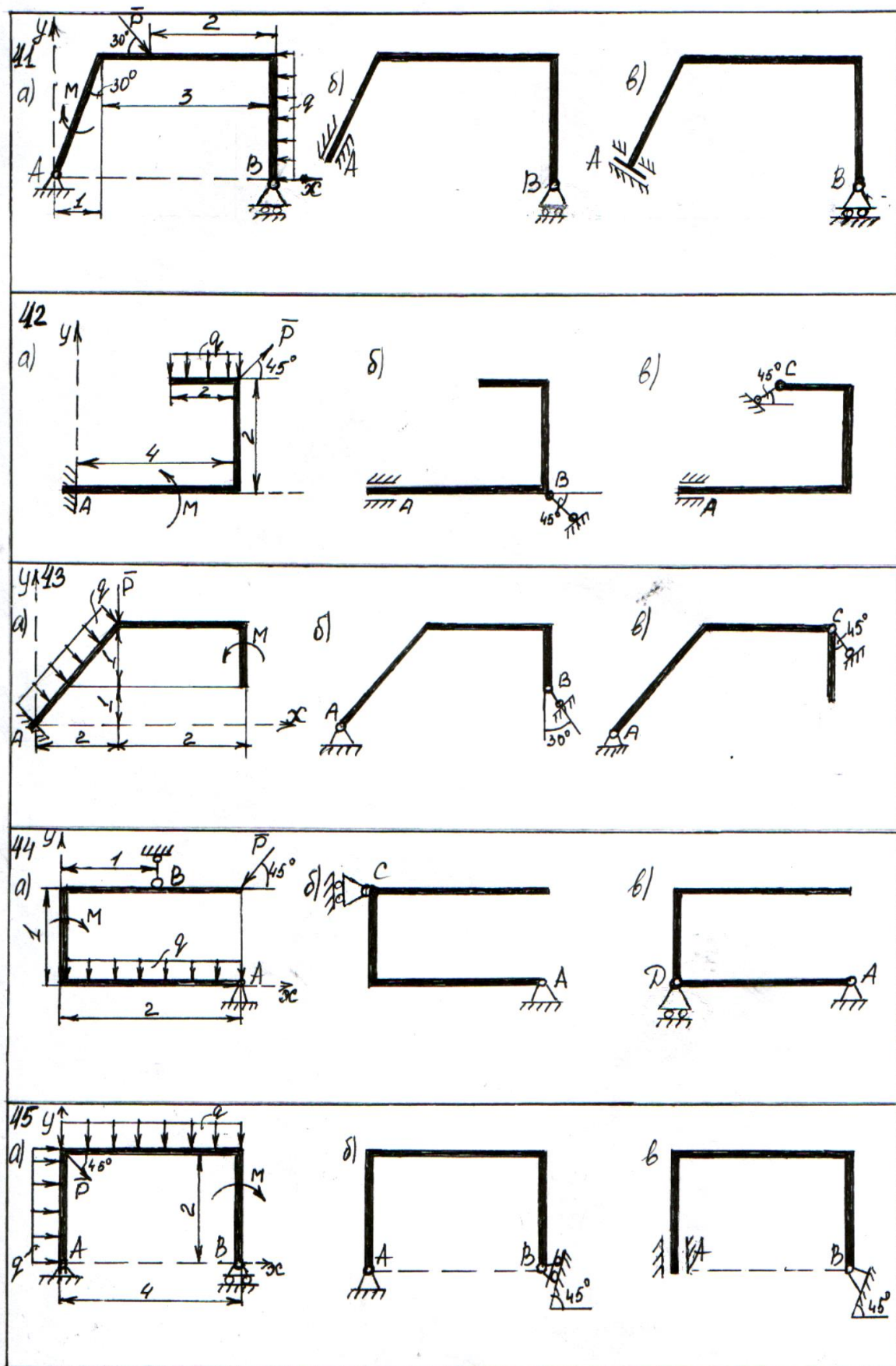


Рисунок 23

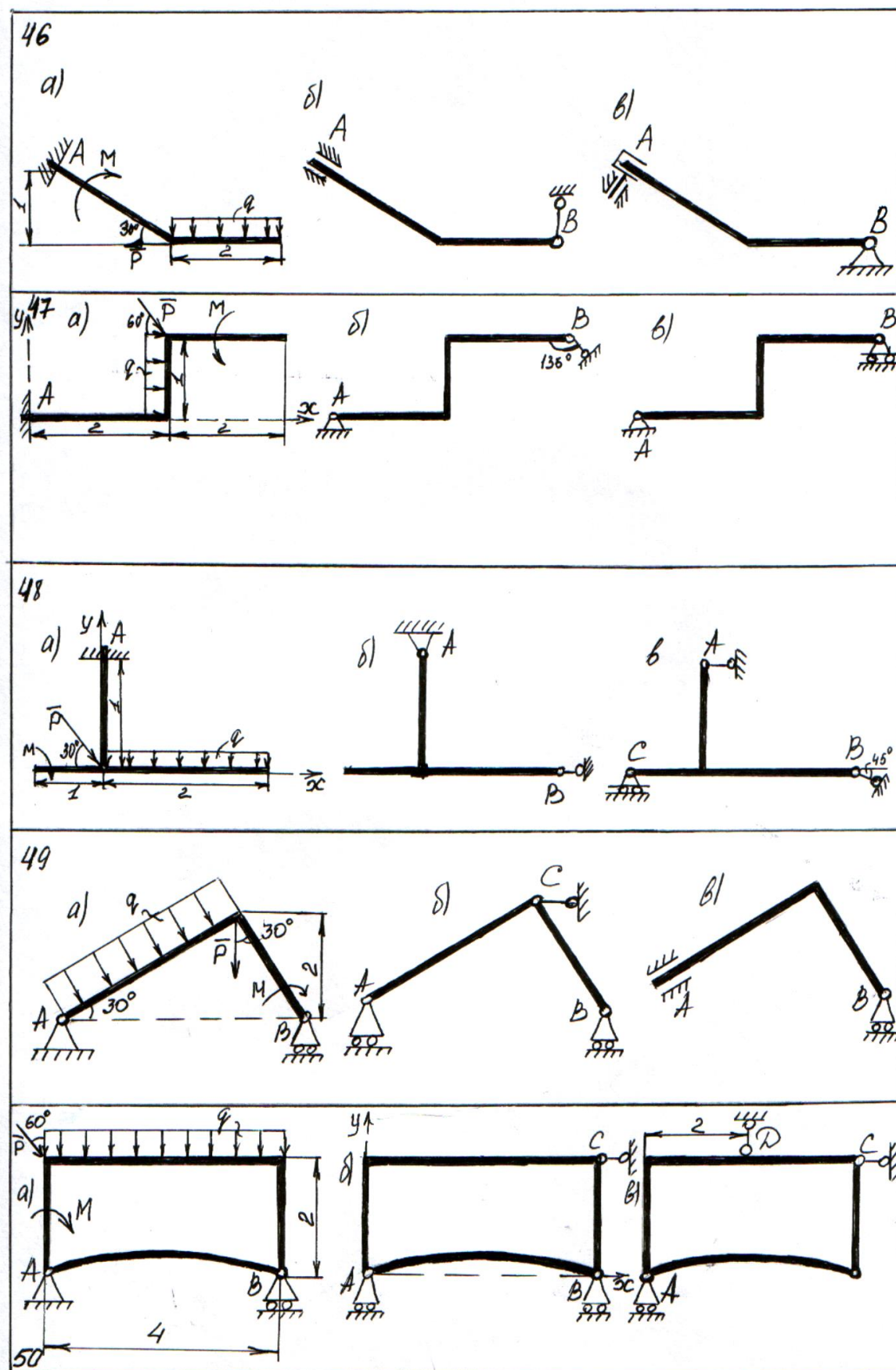


Рисунок 24

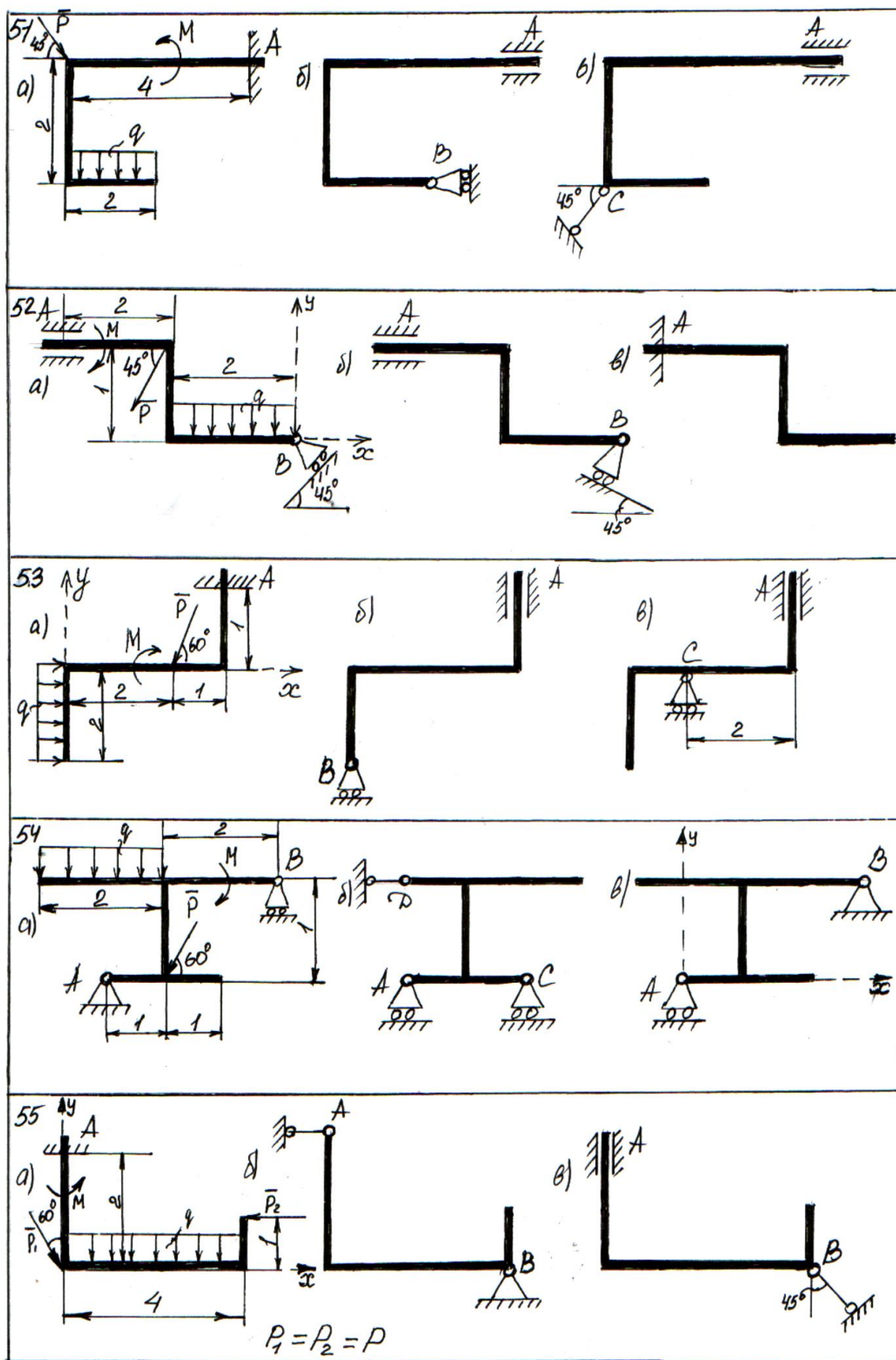


Рисунок 25

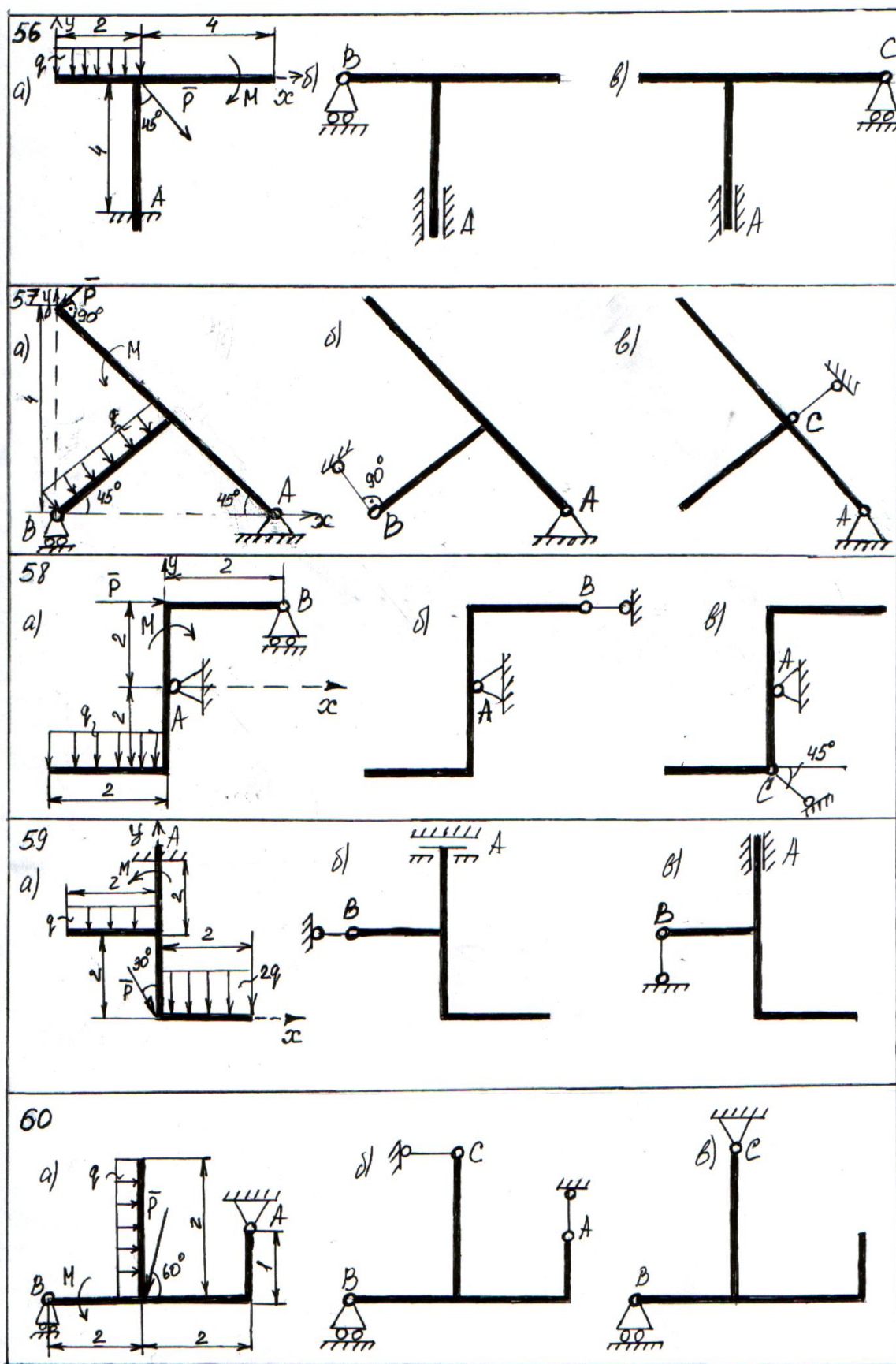


Рисунок 26

Вопросы для защиты работы

1. Что такое сосредоточенная сила?
2. Определение распределённой нагрузки.
3. Равнодействующая сила. Правило параллелограмма сил.
4. Графическое и аналитическое определение проекции силы на ось.
5. Виды связей и их реакции.
6. Уравнения равновесия плоской системы: а) сходящихся сил;
б) параллельных сил; в) произвольной системы сил.
7. Определение пары сил. Свойства пары сил.
8. Определение алгебраического момента силы относительно точки и его свойства.
9. Векторный момент силы относительно точки и его свойства.
10. Что такое сила? Чем характеризуется сила.
11. Что такое: а) свободное тело? б) несвободное тело? Принцип освобожденности от связей.
12. Определение системы сил. Что называется плоской системой:
а) сходящихся сил? б) параллельных сил? в) произвольной системой сил?

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЁРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ

Движение груза 1 должно описываться уравнением

$$x = C_2 t^2 + C_1 t + C_0,$$

где t – время; C_2, C_1, C_0 – некоторые постоянные.

В начальный момент времени ($t = 0$) координата груза должна быть x_0 , а его скорость – V_0 .

Кроме того, необходимо, чтобы координата груза в момент времени $t = t_2$ была равна x_2 .

Определить коэффициенты C_2, C_1, C_0 , при которых осуществляется требуемое движение груза 1 (А). Определить также в момент времени $t = t_1$ скорость и ускорение груза 1 и точки М одного из колёс механизма.

Схемы механизмов показаны на рис. 1 – 5, а необходимые данные приведены в таблице 1.

Таблица 1

№ варианта (рис. 1- 5)	Радиусы, см				Координаты и скорости груза 1			Расчётные моменты времени, с	
	R_2	r_2	R_3	r_3	x_0 , см	V_0 , см/с	x_2 , см	t_2	t_1
1	60	45	36	–	2	12	173	3	2
2	80	–	60	45	5	10	41	2	1
3	100	60	75	–	8	6	40	4	2
4	58	45	60	–	4	4	172	4	3
5	80	–	45	30	3	15	102	3	2
6	100	60	30	–	7	16	215	4	2
7	45	35	105	–	8	5	124	4	3
8	35	10	10	–	6	2	111	3	2
9	40	30	15	–	10	7	48	2	1
10	15	–	40	35	5	3	129	4	3
11	40	25	20	–	9	8	65	2	1
12	20	15	10	–	5	10	179	3	2
13	30	20	40	–	7	0	557	5	2

14	15	10	15	—	6	3	80	2	1
15	15	10	15	—	5	2	189	4	2
16	20	15	15	—	4	6	220	4	3
17	15	10	20	—	8	4	44	2	1
18	20	15	10	—	3	12	211	4	1
19	15	10	20	—	5	10	505	5	3
20	25	15	10	—	10	8	277	3	1
21	20	10	30	10	6	5	356	5	2
22	40	20	35	—	7	6	103	2	1
23	40	30	30	15	5	9	194	3	2
24	30	15	40	20	9	8	105	4	2
25	50	20	60	—	8	4	119	3	2
26	32	16	32	16	6	14	862	4	2
27	40	18	40	18	5	10	193	2	1
28	40	20	40	15	8	5	347	3	2
29	25	20	50	25	4	6	32	2	1
30	30	15	20	—	10	7	128	2	1
31	40	30	30	20	4	12	173	4	2
32	60	30	80	45	5	8	41	2	3
33	60	45	50	30	10	6	50	4	2
34	100	60	50	30	4	3	172	4	2
35	60	40	30	20	4	20	102	3	2
36	60	20	40	30	5	16	215	4	1
37	25	10	20	15	12	6	124	4	3
38	60	20	40	30	6	3	111	3	2
39	60	40	50	20	16	7	48	2	1
40	60	40	30	20	10	6	129	4	3
41	50	25	30	—	9	2	340	4	1
42	30	20	30	—	4	3	134	5	2

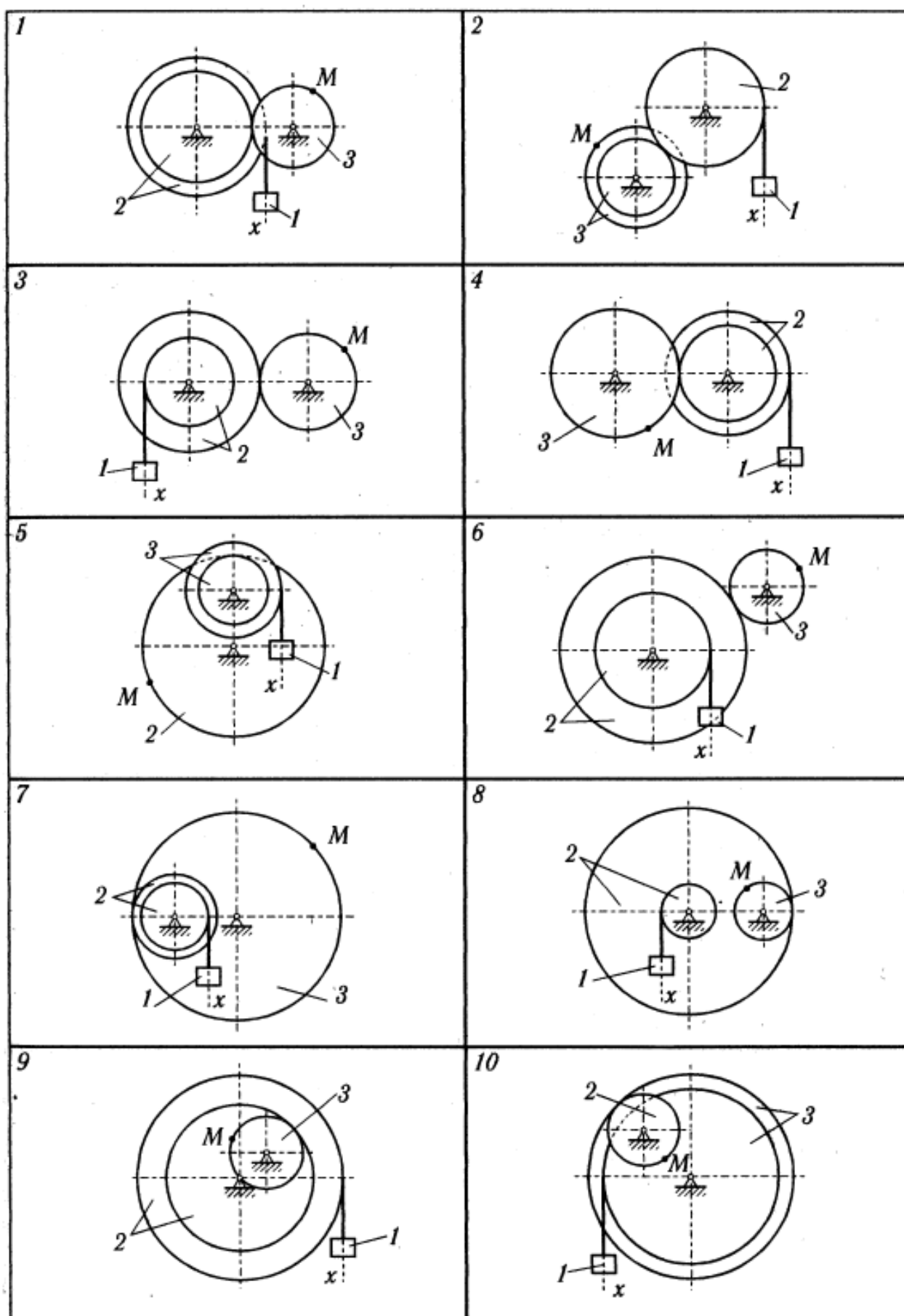


Рисунок 1

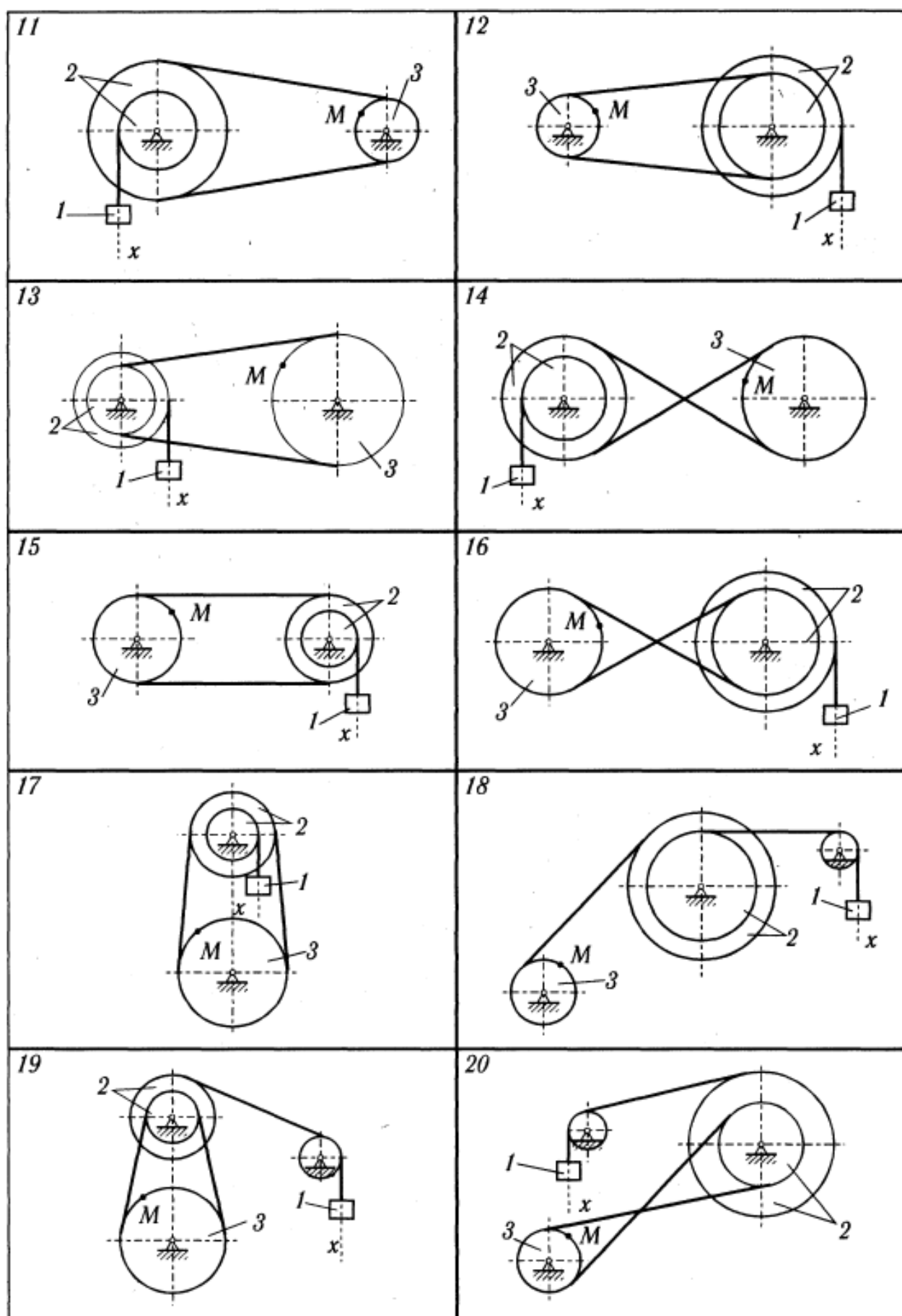


Рисунок 2

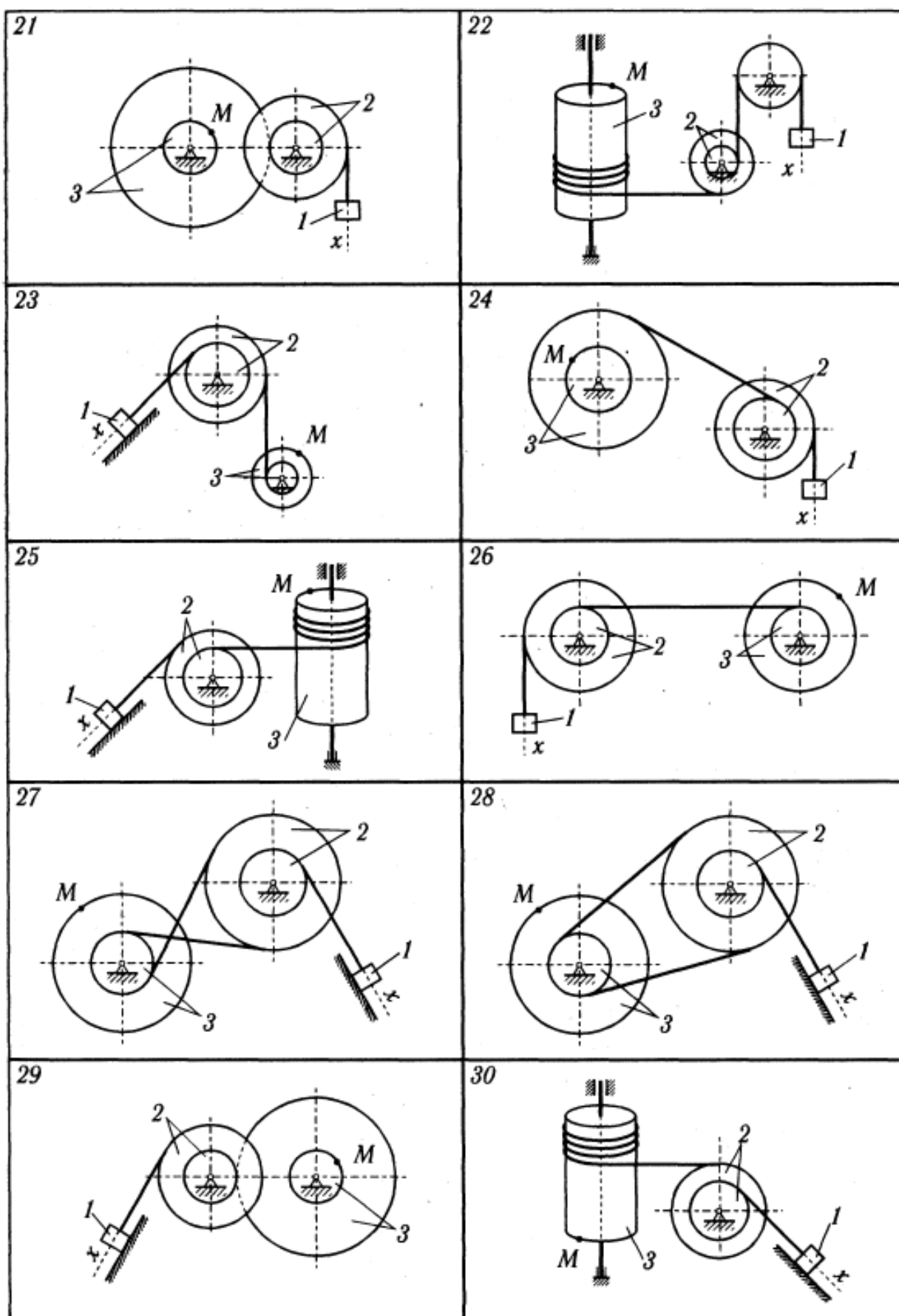


Рисунок 3

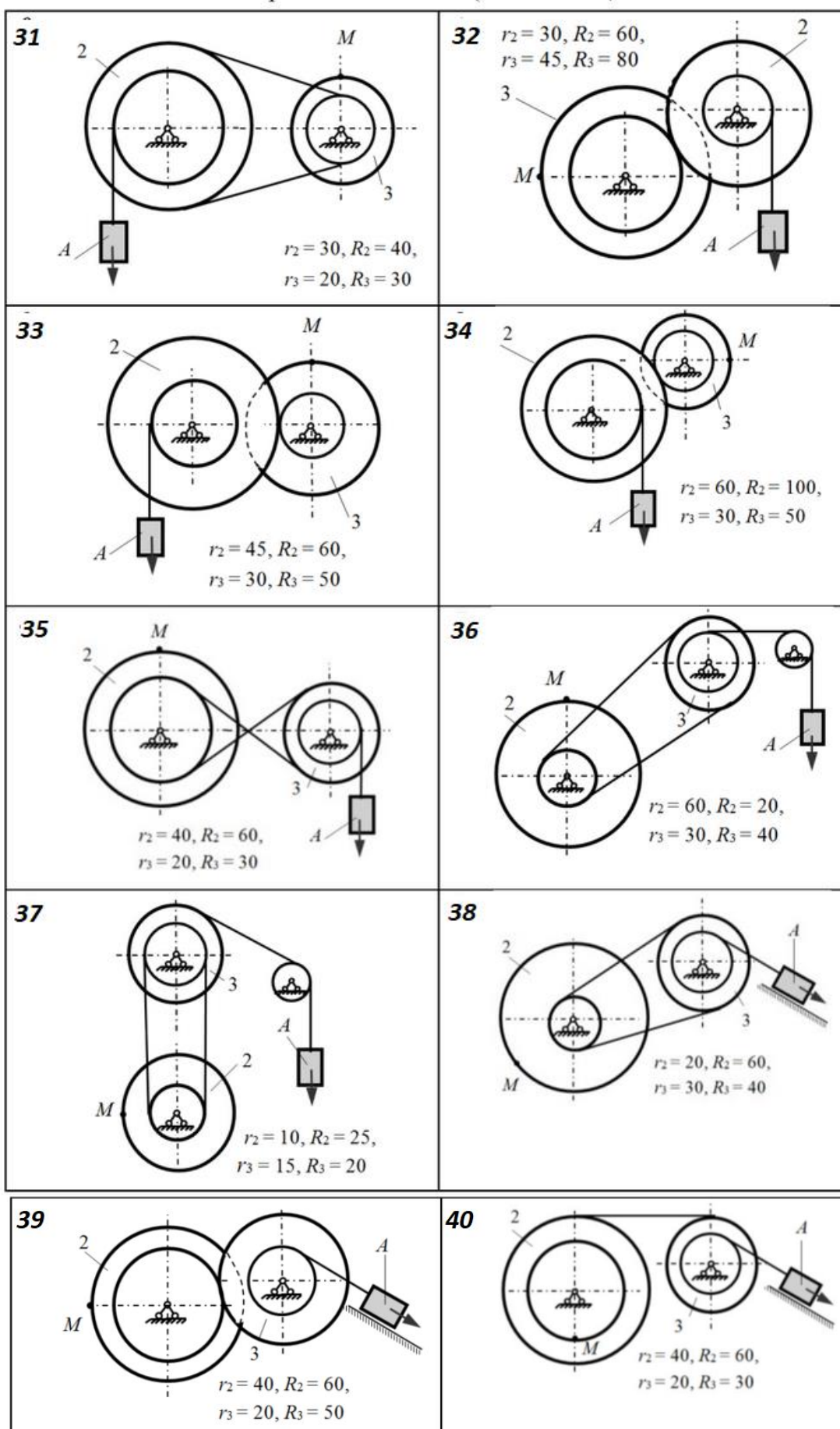


Рисунок 4

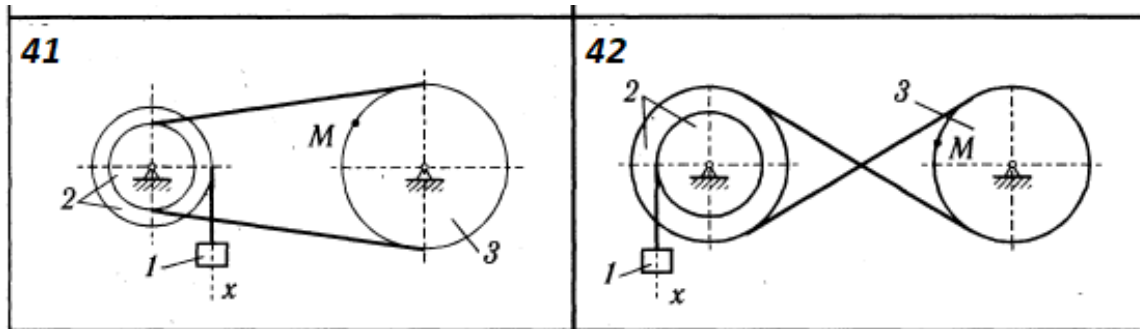


Рисунок 5

Пример

Исходные данные: $r_2 = 10\text{см}$, $R_2 = 15\text{см}$, $R_3 = 15\text{см}$, $x_0 = 5\text{см}$, $x_2 = 189\text{см}$, $V_0 = 2\text{см/с}$, $t_1 = 2\text{с}$, $t_2 = 4\text{с}$.

Найти уравнение движения груза 1, а также скорость и ускорение точки M в момент времени $t = t_1$ (рисунок 4).

Решение:

1. Уравнение движения груза 1 имеет вид

$$x = C_2 \cdot t^2 + C_1 \cdot t + C_0 \quad (1)$$

Коэффициенты C_2 , C_1 , C_0 могут быть определены из заданных граничных условий:

$$\text{при } t=0 \quad x = x_0 = C_0 = 5 \text{ см}; \quad (2)$$

$$V = x' = 2C_2 \cdot t + C_1; \quad \text{при } t_0=0 \quad V_0 = 2C_2 \cdot 0 + C_1; \quad C_1 = V_0 = 2 \text{ см/с}; \quad (3)$$

Подставляя (2), (3) и $t_2 = 4\text{с}$ в (1), находим коэффициент C_2 :

$$x_2 = C_2 \cdot t_2^2 + C_1 \cdot t_2 + C_0; \quad 189 = C_2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 5; \quad C_2 = 11.$$

Таким образом, уравнение движения груза 1 имеет вид:

$$x = 11 \cdot t^2 + 2 \cdot t + 5 \quad (4)$$

1. Скорость груза 1 находим по определению:

$$V = x' = (11 \cdot t^2 + 2 \cdot t + 5)' = 22 \cdot t + 2; \quad \text{при } t_1 = 2\text{с} \quad V_1 = 22 \cdot 2 + 2 = 46 \text{ см/с}; \quad (5)$$

Аналогично находим ускорение груза 1:

$$a = V' = (22 \cdot t + 2)' = 22 \text{ см/с}^2, \quad (6)$$

– величина постоянная, и при $t=t_1$ $a_1 = 22 \text{ см/с}^2$.

3. Для определения скорости и ускорения точки M выполним кинематический анализ преобразования поступательного движения груза 1 во вращательное движение ступенчатого колеса 2 и колеса 3, т. е. запишем уравнения, связывающие скорость груза 1 и угловые скорости ω_2 и ω_3 (рис. 4):

$$V = \omega_2 \cdot r_2; \Rightarrow \omega_2 = V / r_2; \quad \omega_2 \cdot R_2 = \omega_3 \cdot R_3 \Rightarrow \omega_3 = (\omega_2 \cdot R_2) / R_3 =$$

$$= ((V / r_2) \cdot R_2) / R_3 = ((22 \cdot t + 2) / r_2) \cdot R_2 / R_3; \quad (7)$$

$\omega_3(t_1) = ((22 \cdot 2 + 2) / 10) \cdot 15 / 15 = 4,6 \text{ рад/с}$; – угловая скорость колеса 3.

Угловое ускорение колеса 3: $\varepsilon_3 = (\omega_3)' = (((22 \cdot t + 2) / r_2) \cdot R_2 / R_3)' =$
 $= (((22 / r_2) \cdot R_2) / R_3); \quad \varepsilon_3(t_1) = (((22 / 10) \cdot 15) / 15) = 2,2 \text{ рад/с}^2$.

Скорость точки M , её вращательное (касательное), центростремительное (нормальное) ускорения определяются по формулам:

$$V_M = \omega_3 \cdot R_3; \quad V_M(t_1) = \omega_3 \cdot R_3 = 4,6 \cdot 15 = 69 \text{ см/с}; \quad (8)$$

$$a_M^{\tau} = \varepsilon_3 \cdot R_3; \quad (9)$$

$$a_M^{\tau}(t_1) = 2,2 \cdot 15 = 33 \text{ см/с}^2. \quad (10)$$

$$a_M^{\omega} = \omega_3^2 \cdot R_3 = (4,6)^2 \cdot 15 = 317,4 \text{ см/с}^2. \quad (11)$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^{\tau})^2 + (a_M^{\omega})^2} = R_3 \sqrt{\varepsilon_3^2 + \omega_3^4};$$

$$a_M(t_1) = \sqrt{(33)^2 + (317,4)^2} = 319,11 \text{ см/с}^2. \quad (12)$$

Результаты расчётов приведены в таблице 2.

Таблица 2

U_1 см/с	a_1 см/с ²	ω_3 рад/с	ε_3 рад/с ²	U_M см/с	a_M^{τ} см/с ²	a_M^{ω} см/с ²	a_M см/с ²
46	22	4,6	2,2	69	33	317,4	319,11

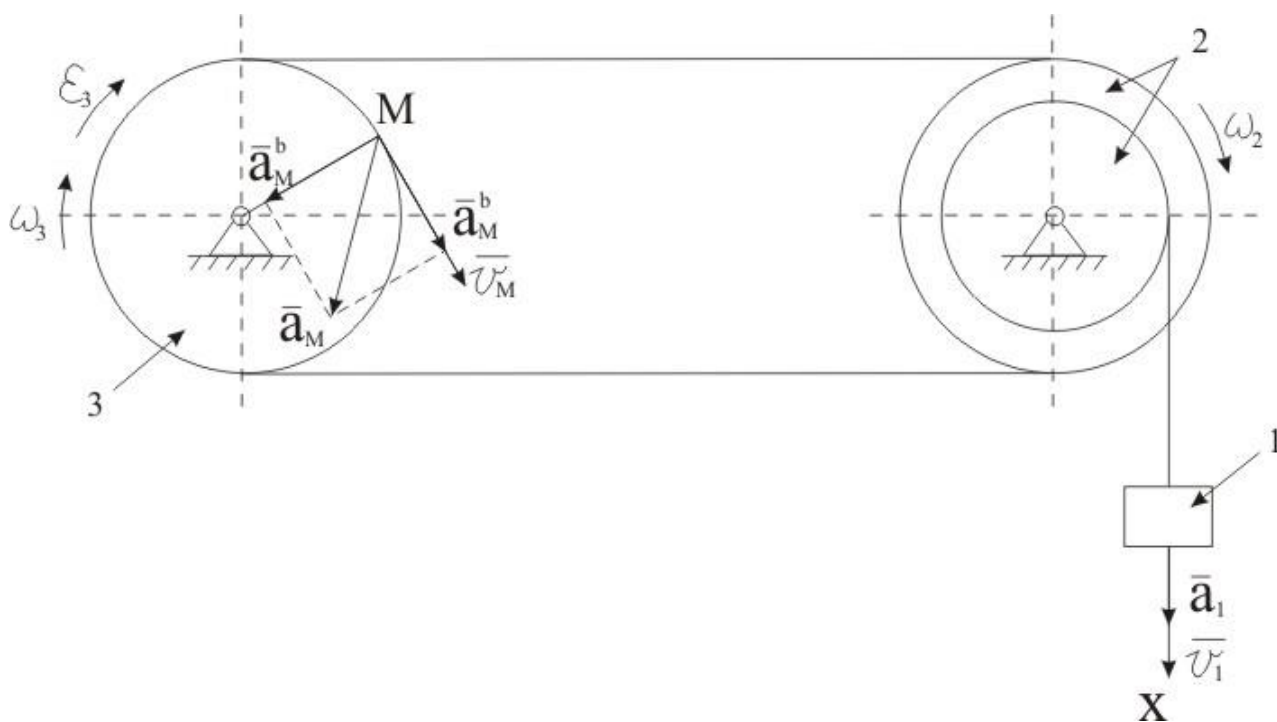


Рисунок 4

Вопросы для самопроверки:

1. Определение поступательного движения тела. Примеры поступательного движения тела.
2. Теорема о траекториях, скоростях и ускорениях точек тела, совершающих поступательное движение.
3. Определение вращательного движения тела. Примеры.
4. Сколько степеней свободы имеет тело, вращающееся вокруг неподвижной оси? Закон или уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.
5. Определение угловой скорости и углового ускорения.
6. Как вычисляются угловая скорость и угловое ускорение?
7. Каким образом вводится понятие о векторах угловой скорости и углового ускорения? Можно ли сказать, что они являются скользящими векторами?
8. Классификация вращений по угловому ускорению тела.
9. Вывод формулы для вычисления линейной (окружной) скорости точек тела,

вращающегося вокруг неподвижной оси.

10. Составляющие ускорения точек тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси. По каким формулам они вычисляются?

11. Формула для вычисления полного ускорения точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

12. Как можно представить скорость, касательное и нормальное ускорение в виде векторных произведений? Соответствующие выражения.

Рекомендуемая литература

1. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика : учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87388.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/87388>
2. Бегун, П. И. Прикладная механика : учебник / П. И. Бегун, О. П. Кормилицын. — 2-е изд. — Санкт-Петербург : Политехника, 2020. — 464 с. — ISBN 978-5-7325-1089-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/94831.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
3. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. - <http://biblioclub.ru/>

4. Красюк, А. М. Теоретическая механика. Конспект лекций : учебное пособие / А. М. Красюк. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2009. — 138 с. — ISBN 978-5-7782-1245-9. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/45438.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5

ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Шарик, принимаемый за материальную точку, движется из положения A внутри трубки, ось которой расположена в вертикальной плоскости (рис. 23 – 25). Найти скорость шарика в положениях B и C и давление шарика на стенку трубки в положении C . Трением на криволинейных участках траектории пренебречь. В вариантах 3, 6, 7, 10, 13, 15, 17, 19, 25, 28, 29 шарик, пройдя путь h_0 , отделяется от пружины.

Таблица 1 – Данные для расчёта

№ варианта	$m, \text{кг}$	$V_a, \text{м/с}$	$\tau, \text{с}$	$R, \text{м}$	f	$\alpha, \text{град}$	$\beta, \text{град}$	$h_0, \text{см}$	$c, \text{Н/см}$	Величины, которые требуется определить дополнительно
1	0,5	20	2,0	2,0	0,20	30	45	–	–	–
2	0,6	16	0,2	4	0,10	45	20	–	–	H
3	0,4	0	2,0	0,2	0,15	30	–	10	1	V_δ
4	0,2	5	0,5	1,0	0,10	45	–	–	–	V_δ
5	0,1	8	1,5	2,0	0,20	30	–	–	–	–
6	0,3	2	2,0	4,0	0,10	30	20	30	2	V_δ
7	0,4	5	1,0	1,0	0,10	30	–	50	5	V_δ
8	0,2	1	0,5	1,5	0,15	30	60	0	4	h
9	0,5	2	1,5	4,0	0,25	20	60	–	–	V_δ
10	0,4	4	0,1	0,5	0,10	30	60	0,2	0,2	V_δ
11	0,2	6	1,0	1,0	0,30	45	–	–	3	V_δ, h
12	0,4	5	0,4	2,0	0,20	30	60	–	–	V_δ
13	0,3	0	0,1	1,0	0,10	30	60	50	10	V_δ
14	0,6	0	2,0	3,0	0,20	60	30	–	–	S
15	0,1	1	0,1	1,0	0,15	60	20	50	0,2	V_δ
16	0,4	2	0,2	2,0	0,40	30	–	–	–	V_δ
17	0,2	0	0,1	1,0	0,20	30	–	40	1,0	V_δ
18	0,3	3	0,4	1,5	0,10	45	–	–	–	–
19	0,1	4	0,1	0,4	0,30	30	60	10	0,5	V_δ
20	0,2	10	1,0	0,5	0,10	60	–	0	1,2	h
21	0,7	3	0,3	0,3	0,20	45	–	–	–	–
22	0,4	1	0,2	0,2	0,40	45	–	0	1,1	V_δ, h
23	0,6	2	0,4	0,2	0,20	45	–	–	–	–
24	0,5	0	0,5	0,6	0,30	60	30	–	–	H
25	0,1	0	0,2	0,5	0,25	–	30	30	0,4	V_δ
26	0,2	2	0,1	0,2	0,20	30	–	–	–	V_δ
27	0,8	3	0,2	0,4	0,15	45	–	–	–	V_δ
28	0,3	4	0,1	0,6	0,35	30	15	60	0,1	V_δ
29	0,5	0	0,2	0,5	0,20	45	30	50	0,8	V_δ
30	0,8	5	0,3	0,6	0,15	30	–	–	–	t_{DE}

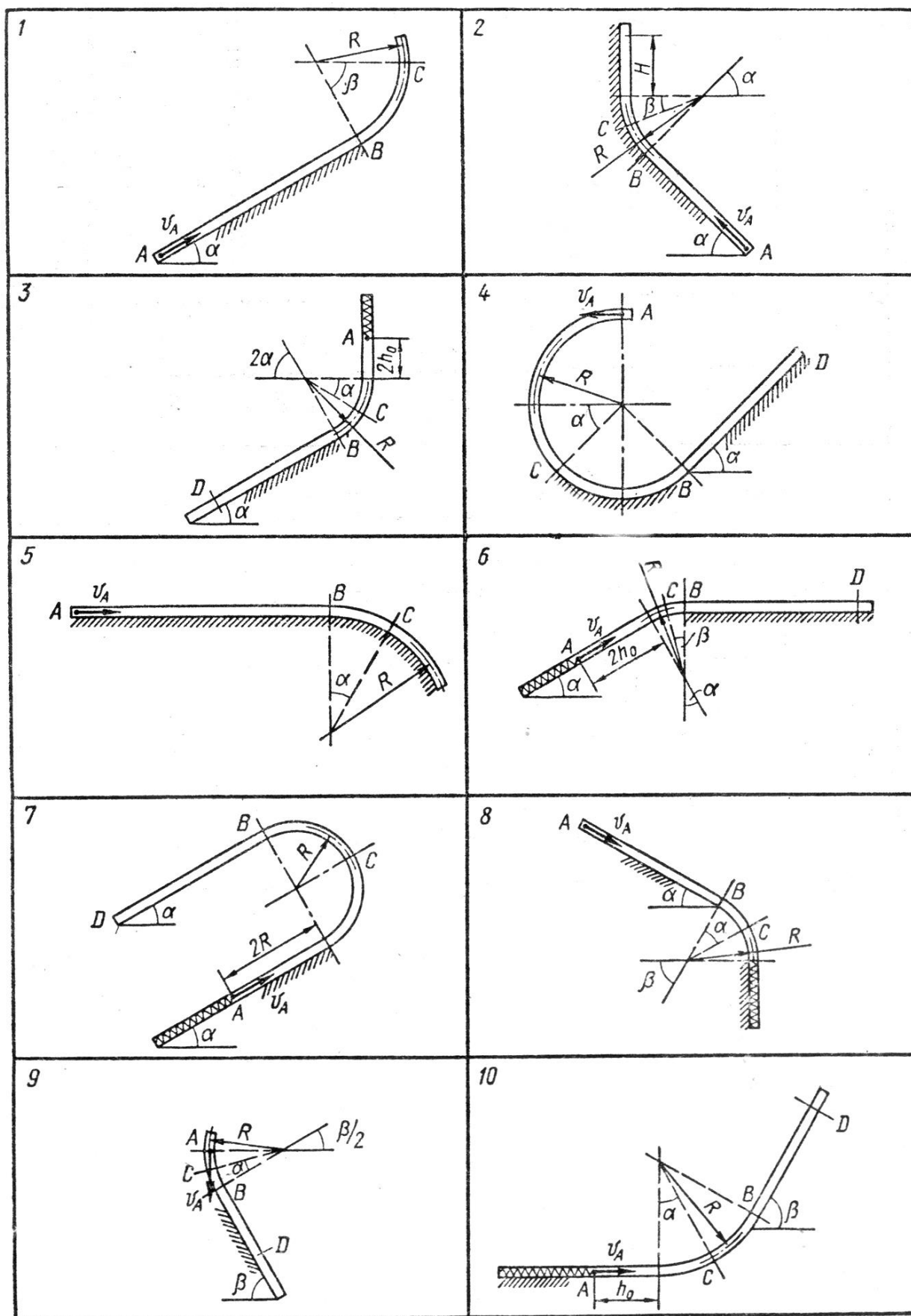


Рисунок 23

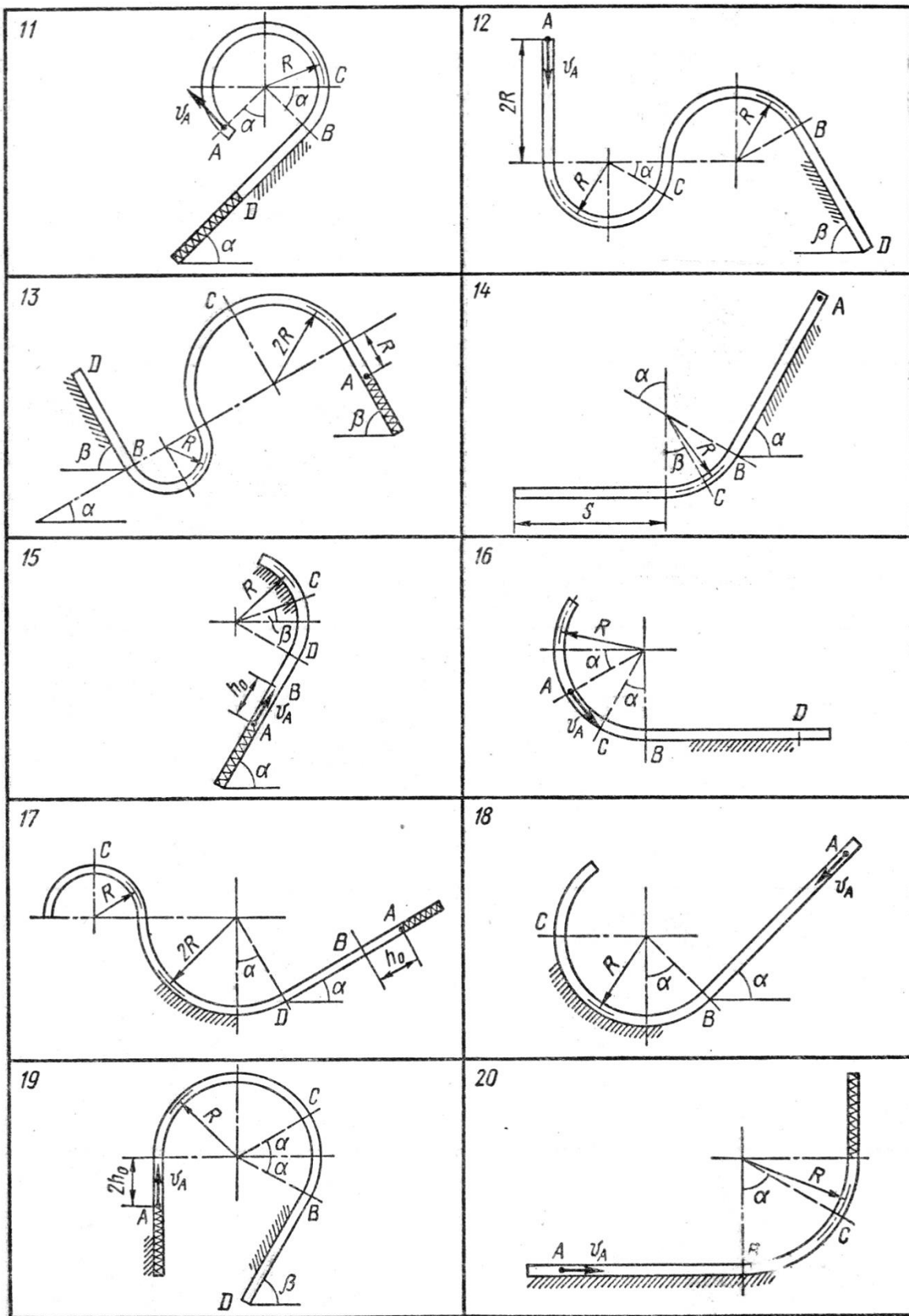


Рисунок 24

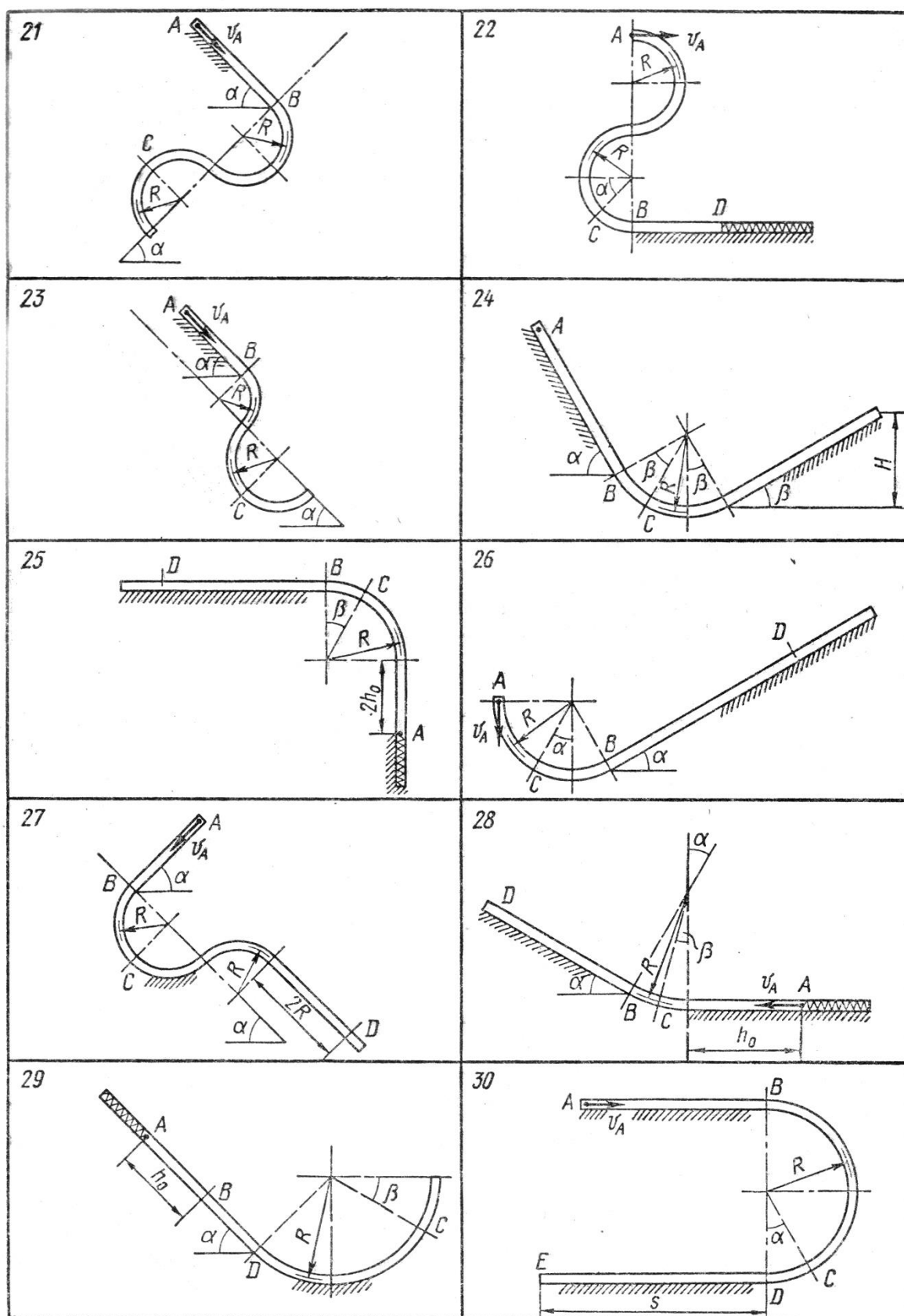


Рисунок 25

В задании приняты следующие обозначения: m – масса шарика; v_A – начальная скорость шарика; τ – время движения шарика на участке AB (в вариантах 1, 2, 5, 8, 14, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 30) или на участке BD (в вариантах 3, 4, 6, 7, 9-13, 15-17, 19, 22, 25, 26, 28, 29); f – коэффициент трения скольжения шарика по стенке трубки; h_0 – начальная деформация пружины; h – наибольшее сжатие пружины; c – коэффициент жесткости пружины; H – наибольшая высота подъема шарика; s – путь, пройденный шариком до остановки.

Пример выполнения задания:

Дано: $m = 0,5$ кг; $v_A = 0,8$ м/с; $\tau = 0,1$ с (время движения на участке BD);
 $R = 0,2$ м; $f = 0,1$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $h_0 = 0$; $c = 10$ Н/см = 1000 Н/м.

Определить v_B, v_C, N_C, v_D, h . (рис. 26).

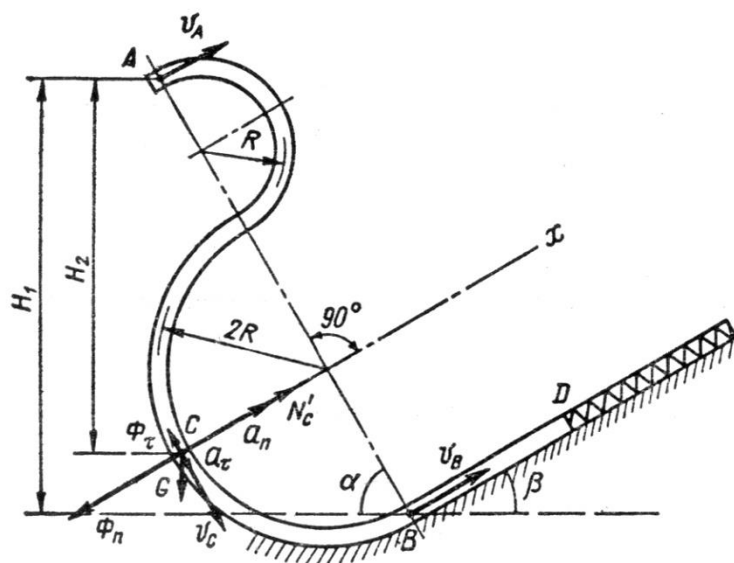


Рисунок 26

Решение:

Для определения v_B и v_C применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки. Движение шарика на участках AC и AB траектории происходит под действием силы тяжести G (силы трения на криволинейных участках не учитываем):

$$mv_B^2/2 - mv_A^2/2 = \sum A_i = GH_1 = mg|AB|\sin\alpha = mg6R\sin\alpha;$$

$$v_B^2 - v_A^2 = 2g6R \sin \alpha;$$

$$v_B = 4,59 \text{ м/с};$$

$$mv_C^2/2 - mv_A^2/2 = \sum A_i = GH_2 = mg(4R \sin \alpha + 2R \cos \alpha);$$

$$v_C^2 - v_A^2 = 4gR(2 \sin \alpha + \cos \alpha);$$

$$v_C = \sqrt{v_A^2 + 4gR(2 \sin \alpha + \cos \alpha)},$$

$$v_C = 4,26 \text{ м/с}.$$

Определяем давление шарика на стенку канала в положении C .

В соответствии с принципом Даламбера для материальной точки геометрическая сумма сил, приложенных к точке, и силы инерции этой точки равны нулю:

$$\vec{G} + \vec{N}'_C + \vec{\Phi} = 0.$$

Силу инерции материальной точки можно разложить на нормальную и касательную составляющие:

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_\tau.$$

Сумма проекций сил $\vec{G}$, N'_C и $\vec{\Phi}$ на ось x должна быть равна нулю:

$$N'_C - G \cos 60^\circ - \Phi_n = 0.$$

Отсюда

$$N'_C - G \cos 60^\circ - \Phi_n = mg \cos 60^\circ + \frac{mv_C^2}{2R},$$

$$N'_C = 25,2 \text{ Н}.$$

Реакцию N'_C можно также определить с помощью естественного уравнения движения:

$$\frac{mv_C^2}{R} = \sum P_i \cos(\vec{P}_i, \vec{n}) = N'_C - G \cos 60^\circ.$$

Отсюда

$$N'_C = G \cos 60^\circ + \frac{mv_C^2}{R}.$$

Искомое давление N_C шарика на стенку трубки по числовому значению равно найденной реакции N'_C и направлено в противоположную сторону.

Скорость шарика в положении D найдем, применив на участке BD теорему об изменении количества движения материальной точки (рис. 27):

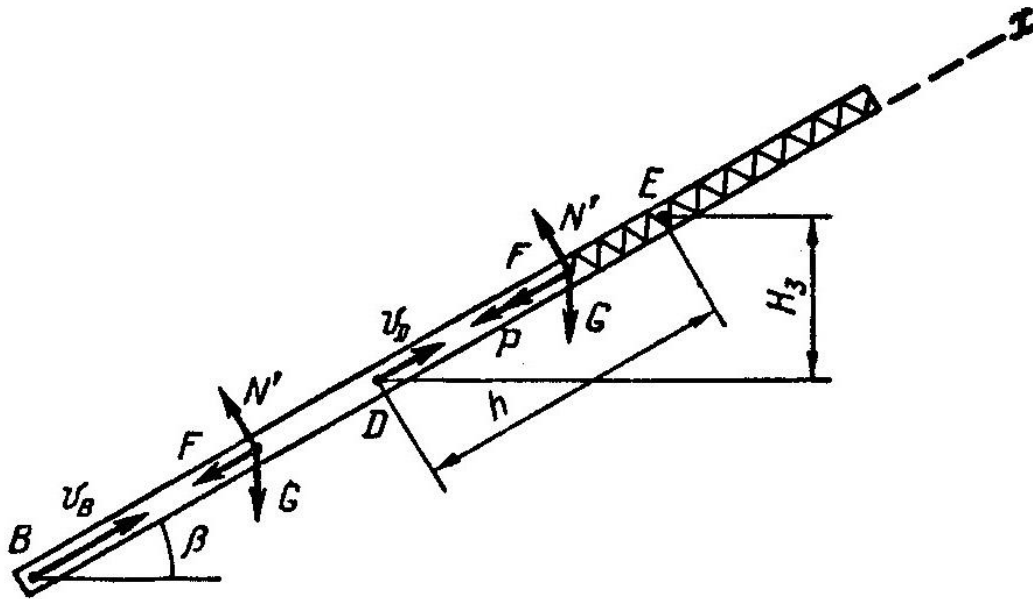


Рисунок 27

$$mv_{Dx} - mv_{Bx} = \sum S_{ix}.$$

К точке приложена сила тяжести $\vec{G}$, реакция стенки трубки $\vec{N}'$ и сила трения $\vec{F}$:

$$F = fN' = fG \cos \beta.$$

Так как

$$v_{Dx} = v_D, v_{Bx} = v_B, \sum S_{ix} = -G \sin \beta \cdot t - Ft = -mg \sin \beta \cdot t - fmg \cos \beta \cdot t,$$

то $mv_D - mv_B = -mg \sin \beta \cdot t - fmg \cos \beta \cdot t,$

Откуда $v_D = 4,01 \text{ м/с}.$

Для определения максимального сжатия h пружины воспользуемся на участке DE теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$mv_E^2/2 - mv_D^2/2 = \sum A_i = -ch^2/2 - CH_3 - Fh.$$

Учитывая, что $v_E = 0$ и $H_3 = h \sin \beta$, получаем

$$ch^2/2 + G(\sin \beta + f \cos \beta) h - mv_D^2/2 = 0,$$

или $h^2 + 2Gh(\sin \beta + \cos \beta)/c - mv_D^2/c = 0.$

Решая полученное квадратное уравнение относительно h , получим

$$h = (-0,003 \pm 0,090) \text{ м.}$$

Принимаем в качестве искомой величины положительный корень квадратного уравнения:

$$h = -0,003 + 0,090 = 0,087 \text{ м.}$$

Вопросы к практическому занятию

1. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.
2. Работа силы тяжести.
3. Принцип Даламбера для материальной точки.
4. Составляющие силы инерции материальной точки.
5. Теорема об изменении количества движения материальной точки.
6. Потенциальная энергия деформации пружины.

Рекомендуемая литература

1. Королев, П. В. Механика, прикладная механика, техническая механика : учебное пособие / П. В. Королев. — Саратов : Ай Пи Ар Медиа, 2020. — 279 с. — ISBN 978-5-4497-0243-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/87388.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/87388>
2. Бегун, П. И. Прикладная механика : учебник / П. И. Бегун, О. П. Кормилицын. — 2-е изд. — Санкт-Петербург : Политехника, 2020. — 464 с. — ISBN 978-5-7325-1089-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/94831.html> (дата обращения: 19.04.2021). — Режим доступа: для авторизир. пользователей

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛ И НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И СЖАТИИ

Теоретическая часть

Растяжением или сжатием называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях нагруженного элемента возникают внутренние усилия, приводимые к равнодействующей, направленной вдоль продольной оси z . Эта равнодействующая называется продольной силой и обозначается N_z . Брус, работающий преимущественно на растяжение или сжатие, принято называть стержнем.

Из условия равновесия отсеченной части бруса следует, что продольная сила N_z в произвольном поперечном сечении численно равна алгебраической сумме проекций на ось бруса z внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Продольную силу, вызывающую растяжение, считают положительной (рисунок 2.1); продольную силу, вызывающую сжатие – отрицательной (рисунок 2.2).

Для определения значений внутренних усилий в поперечных сечениях бруса строят эпюры продольных сил. Эпюра продольных сил N_z представляет собой график, выражающий изменение величины продольной силы N_z по длине стержня.

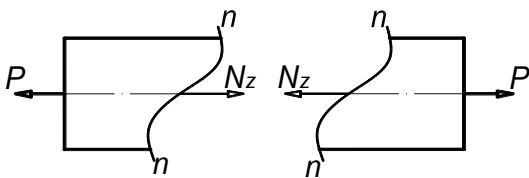


Рисунок 2.1

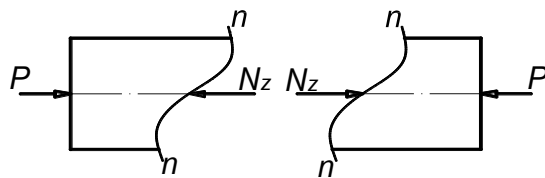


Рисунок 2.2

Для построения эпюр внутренних усилий при растяжении – сжатии используют метод сечений:

1) определяют опорные реакции (для консольной схемы нагружения опорные реакции можно не определять);

2) разбивают стержень на участки нагружения, в пределах которых закон распределения внутренних усилий в поперечном сечении стержня не меняется; границами участков нагружения являются начало и конец стержня, а также сечения, в которых:

- приложены сосредоточенные силы,
- начинается и заканчивается действие распределенной нагрузки,
- изменяется площадь поперечного сечения стержня;

3) рассекают стержень произвольным сечением в пределах первого участка нагружения;

4) отбрасывают часть стержня, содержащую большее количество внешних нагрузок (для консольной схемы нагружения следует отбросить часть стержня, содержащую жесткую заделку, если опорная реакция предварительно не определялась);

5) заменяют действие отброшенной части стержня внутренним усилием – продольной силой N_{zi} (в тех случаях, когда направление силы N_{zi} неизвестно, следует принимать ее положительной, то есть растягивающей, и направлять на схеме вектор N_{zi} от сечения);

6) составляют уравнение равновесия, из которого определяют величину и направление продольной силы N_{zi} (если после решения уравнения сила N_{zi} получилась со знаком плюс, то стержень в данном сечении растянут, со знаком минус – сжат);

7) выполняют пункты 3 – 6 для каждого участка нагружения;

8) по расчетным значениям строят эпюру продольных сил N_z ; для построения эпюры продольных сил проводят прямую, параллельную оси бруса (нулевую или базовую линию), перпендикулярно к которой откладываются ординаты, изображающие в некотором масштабе величины продольных сил в соответствующих сечениях стержня; положительные значения продольной силы откладывают выше, а отрицательные – ниже нулевой линии;

заштриховывают эпюру тонкими вертикальными линиями, а внутри поля эпюры в кружке указывают знак (плюс или минус);

9) определяют значения нормальных напряжений для каждого участка нагружения стержня по формуле

$$\sigma_i = \frac{N_{zi}}{F_i}, \quad (2.1)$$

где σ_i – нормальное напряжение на i -м участке стержня;

N_{zi} – значение продольной силы на i -м участке; в формулу (2.1) значения продольной силы следует подставлять с учетом знака;

F_i – площадь поперечного сечения стержня на рассматриваемом участке стержня;

10) по данным расчетов пункта 9 строят эпюру нормальных напряжений;

11) построенные эпюры продольных сил и нормальных напряжений следует проверить на соответствие следующим правилам:

- в сечениях, где приложены сосредоточенные силы, на эпюре продольных сил возникают «скачки» (мгновенные изменения значения продольной силы), численно равные приложенной силе и направленные вверх, если сила вызывает растяжение и вниз, если приложенная сила вызывает сжатие;

- «скачки» на эпюрах нормальных напряжений возникают в тех же сечениях, что и на эпюрах продольных сил, а также дополнительно в сечениях, где изменяется площадь поперечного сечения стержня;

- если на участке нагружения отсутствует распределенная нагрузка, эпюры продольных сил и нормальных напряжений для данного участка ограничены прямыми, параллельными оси стержня;

- знак нормальных напряжений на каждом участке нагружения соответствует знаку продольной силы для этого участка;

12) из анализа эпюры нормальных напряжений определяют опасное сечение; при растяжении (сжатии) опасным считается сечение или участок

стержня, в котором нормальные напряжения максимальны по абсолютной величине (по модулю).

Пример 2.1

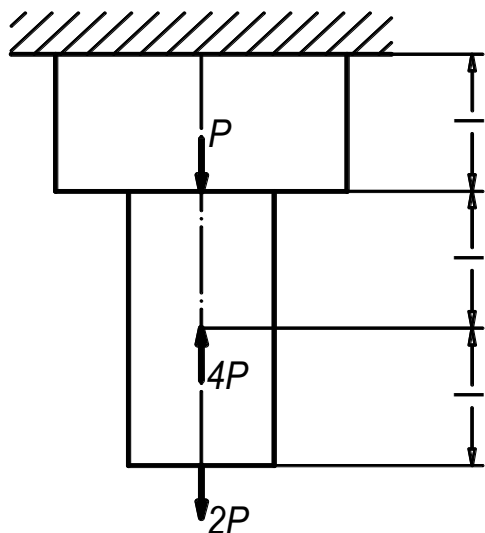


Рисунок 2.3

Для ступенчатого стержня, неподвижно заделанного в одном сечении и нагруженного сосредоточенными силами, как показано на расчетной схеме (рисунок 2.3), требуется построить эпюры продольных сил N_z и нормальных напряжений σ ; определить опасное сечение.

Решение

Величину продольной силы N_z определим методом сечений. Для этого разобьем стержень на участки

нагружения, начиная от сечения, максимально удаленного от закрепления. Границами участков нагружения будем считать сечения, в которых приложены внешние силы, а также сечения, в которых изменяются размеры поперечного сечения стержня (на рисунке 2.4 а эти участки отмечены римскими цифрами). Проведем произвольное сечение $I-I$ на участке I и, отбросив верхнюю часть стержня, рассмотрим условие равновесия оставшейся (нижней) части, изображенной отдельно на рисунке 2.4 б). На оставшуюся часть действует сила P_1 и искомое усилие N_{z1} . Направление вектора N_{z1} на схеме выбрано произвольно. Для оставшейся части стержня сумма проекций всех сил на ось z запишется в виде

$$N_{z1} = 2P.$$

Продольная сила N_{z1} получилась со знаком «плюс», значит она действительно направлена от сечения, как и было предварительно принято (рисунок 2.4 б); таким образом, первый участок стержня испытывает растяжение.

Проведем произвольное сечение $II-II$ на участке II , отбросим верхнюю часть стержня и рассмотрим равновесие оставшейся нижней части,

изображенной отдельно на рисунке 2.4 в. На оставшуюся часть действуют силы $2P$ и $4P$ и искомое усилие N_{z2} . Проецируя эти силы на ось z , получаем

$$N_{z_2} = 2P - 4P = -2P.$$

Знак «минус» указывает, что в действительности сила N_{z2} направлена к сечению, а не от сечения, как было предположено ранее (рисунок 2.4 в). Следовательно, участок II испытывает сжатие.

Проведем произвольное сечение $III-III$ на участке III , отбросим верхнюю часть стержня и рассмотрим равновесие оставшейся нижней его части, изображенной отдельно на рисунке 2.4 д. На оставшуюся часть действуют силы $2P$, $4P$ и P и искомое усилие N_{z3} . Проецируя эти силы на ось z , получаем

$$N_{z_3} = -4P + 2P + P = -P.$$

Знак «минус» указывает, что первоначальное предположение о том, что сила N_{z3} направлена от сечения, неверно.

Построим график (эпюру), показывающий, как меняется продольная сила по длине стержня. Проведя ось абсцисс графика параллельно оси стержня, откладываем в произвольно выбранном масштабе найденные значения продольных сил по оси ординат. Положительные значения продольных сил откладывают вправо от оси эпюры, а отрицательные – влево (рисунок 2.4 д).

Эпюру нормальных напряжений получим, разделив значения N_z для каждого участка на величины соответствующих площадей поперечных сечений стержня (рисунок 2.4 е).

$$\text{Для первого участка } \sigma_1 = \frac{N_{z_1}}{F_1} = \frac{2P}{F}.$$

$$\text{Для второго участка } \sigma_{II} = \frac{N_{z_2}}{F_{II}} = -\frac{2P}{F}.$$

$$\text{Для третьего участка } \sigma_{III} = \frac{N_{z_3}}{F_{III}} = -\frac{P}{2F} = -\frac{0,5P}{F}.$$

Построим график (эпюру), показывающий, как меняется нормальное напряжение по длине стержня. Проведя ось абсцисс графика параллельно оси

стержня, откладываем в произвольно выбранном масштабе найденные значения нормальных напряжений по оси ординат. Положительные значения нормальных напряжений откладывают вправо от оси эпюры, а отрицательные – влево (рисунок 2.4 е). Построенные таким образом эпюры заштриховываются тонкими линиями, перпендикулярными оси стержня.

В сечениях, где приложены внешние силы, значения продольной силы на эпюре (рисунок 2.4 д) меняются скачкообразно. На эпюре нормальных напряжений скачкообразное изменение значений наблюдается еще и в сечениях, где изменяется площадь поперечного сечения стержня (рисунок 2.4 е).

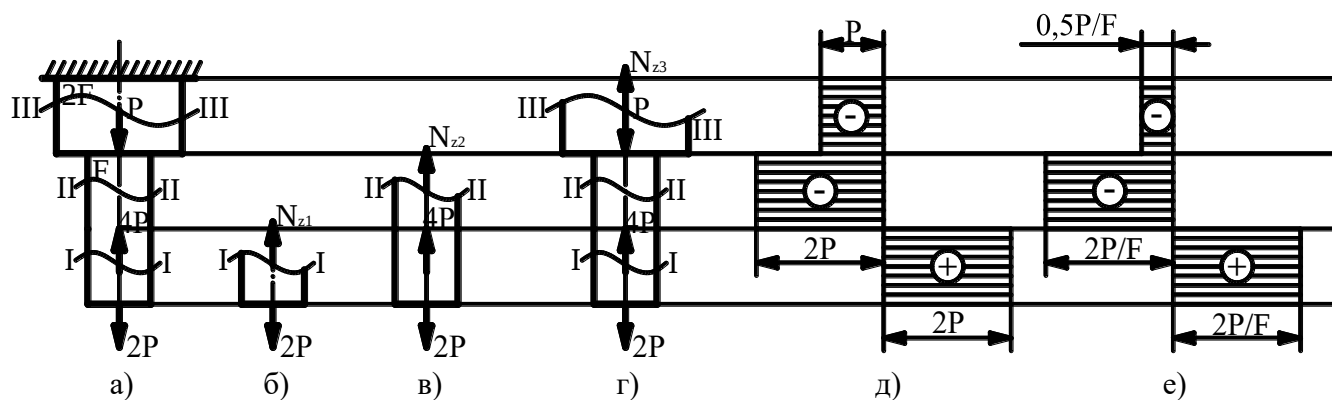


Рисунок 2.4

Задания

Задание 2.1

Для ступенчатого стержня, изображенного на схеме 1 (таблица 2.1), построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений, определить опасное сечение. Каждый студент выбирает задание для самостоятельного выполнения по цифрам индивидуального шифра, выданного преподавателем в начале семестра. Как правило, шифром является номер зачетной книжки. Индивидуальный шифр действует при выборе заданий на всех практических занятиях по сопротивлению материалов.

Задание 2.2

Для ступенчатого стержня, изображенного на расчетной схеме 2 (таблица 2.1), построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений, определить опасное сечение.

Задание 2.3

Для ступенчатого стержня, изображенного на расчетной схеме 3 (таблица 2.1), построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений, определить опасное сечение. Проверить прочность стержня в опасном сечении, если площадь поперечного сечения $F = 20 \text{ см}^2$, усилие $P = 50 \text{ кН}$, допускаемые напряжения для материала стержня $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.

Задание 2.4*

Для ступенчатого стержня, изображенного на расчетной схеме 1 (таблица 2.1), построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений для случая, когда жесткая заделка располагается в верхнем и в нижнем сечениях стержня, определить опасное сечение. Сделать вывод о влиянии условий опирания на распределение усилий в стержне и на положение опасного сечения.

Вопросы к практическому занятию

1. Какой вид деформации называется растяжением (сжатием)?
2. Что называется эпюрой продольных сил? Что называется эпюрой нормальных напряжений?
3. Как определяется знак продольной силы? Как определяется знак нормальных напряжений?
4. Как определить опасное сечение стержня при растяжении (сжатии)?
5. Каким методом пользуются при построении эпюр произвольно нагруженных стержней? Сформулируйте правила проверки правильности построения эпюр продольных сил и нормальных напряжений при растяжении (сжатии).
6. Постройте эпюры продольных сил и нормальных напряжений для стержня, схема нагружения которого задана преподавателем.

Таблица 2.1

Номер схемы	Схема к заданию 2.1	Схема к заданию 2.2	Схема к заданию 2.3
0			
1			
2			
3			

Продолжение таблицы 2.1

4			
5			
6			
7			
8			
9			

Таблица 2.2

Номер варианта	Схема к заданию 2.1 (таблица 2.1)	Схема к заданию 2.2 (таблица 2.1)	Схема к заданию 2.3 (таблица 2.1)
1	1	3	10
2	2	4	9
3	3	5	8
4	4	6	7
5	5	7	6
6	6	8	5
7	7	9	4
8	8	10	3
9	9	1	2
10	10	2	1
11	1	4	9
12	2	5	8
13	3	6	7
14	4	7	6
15	5	8	5
16	6	9	4
17	7	10	3
18	8	3	2
19	9	2	1
20	10	1	10
21	1	2	8
22	2	3	7
23	3	4	6
24	4	5	5
25	5	6	4
26	6	7	3
27	7	8	2
28	8	9	1
29	9	10	8
30	10	5	6
31	1	6	5
32	2	7	4
33	3	8	3
34	4	9	2
35	5	10	1
36	6	1	10

ИСПЫТАНИЕ НА РАСТЯЖЕНИЕ МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ

Цель работы: изучение поведения малоуглеродистой стали в процессе испытания на растяжение.

Задача: определение механических характеристик материала образца по диаграмме испытания.

Теоретическое обоснование

Для решения практических задач необходимо знать числовые характеристики пластических и прочностных свойств материалов, которые обычно называются механическими характеристиками. Существует много методов испытаний материалов, но основным является испытание на растяжение. Опыты проводятся на специальных машинах, рабочее усилие в которых создаётся либо при помощи рычажного устройства (рычажные машины), или с помощью гидравлического давления, передаваемого на поршень (гидравлические машины). При испытаниях на растяжение применяются так называемые нормальные образцы круглого или прямоугольного сечения. Это вызвано тем, что результаты испытаний образцов разной формы, хотя и изготовленных из одного и того же материала, несколько отличаются. Как доказал русский учёный В. В. Кирпичёв, только при употреблении геометрически подобных образцов становится возможным сравнение результатов испытаний.

Полное геометрическое подобие обеспечивается при испытании образцов круглого поперечного сечения с одинаковым отношением длины к диаметру $l_0/d_0 = \text{const}$. Обычно принимается $l_0 = 10d_0$ (иногда используются укороченные образцы с $l_0 = 5d_0$), где l_0 – расчетная длина, т. е. длина участка образца, на которой измеряется его удлинение. Образец (рисунок 1), кроме цилиндрической рабочей части, имеет плавные переходы к цилиндрическим утолщенным головкам, предназначенным для закрепления образцов в машине.

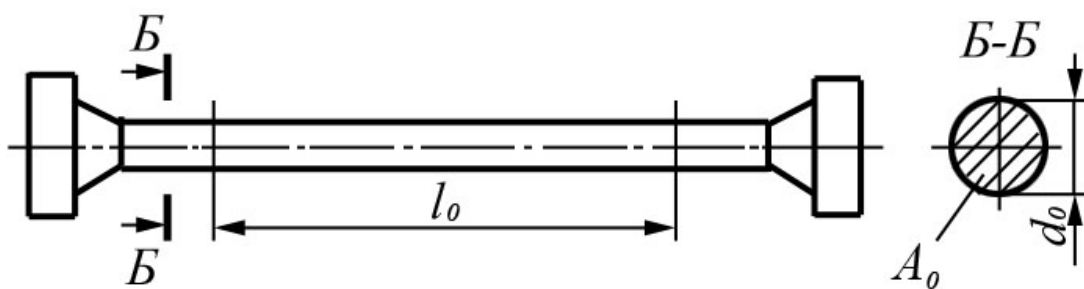


Рисунок 1 – Эскиз образца до испытаний

При испытаниях металлов на растяжение необходимо руководствоваться требованиями ГОСТ 1497-61. Большинство современных испытательных машин снабжены диаграммным аппаратом, который автоматически в процессе испытания вычерчивает график изменения удлинения образца Δl в зависимости от статического увеличения растягивающей силы F – диаграмму растяжения $F=f(\Delta l)$.

На рисунке 2 изображена машинная диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали (типа Ст.3). Приведенная диаграмма, хотя и характеризует поведение материала, но зависит от размеров образца, т. е. если взять образец с другим поперечным сечением, то получим иную диаграмму.

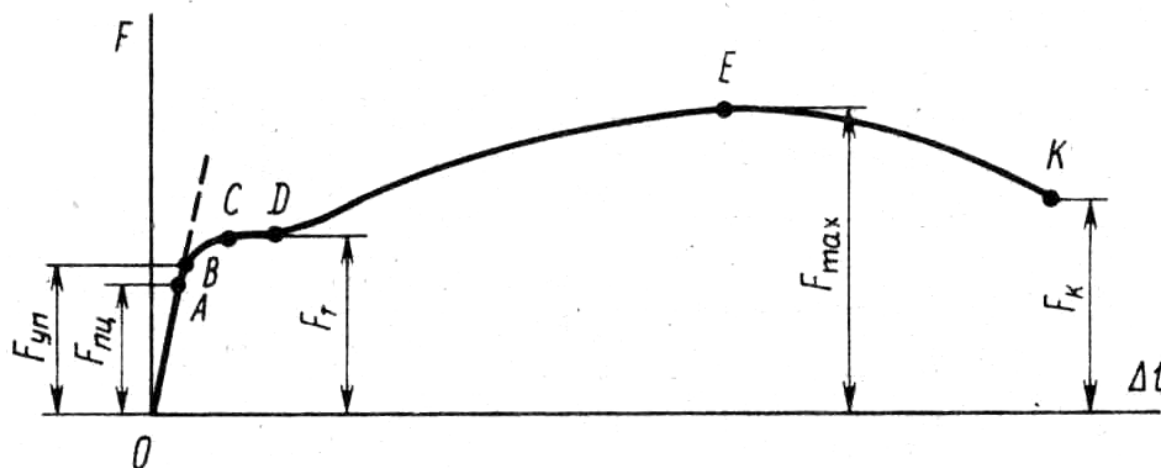


Рисунок 2 – Машинная диаграмма растяжения малоуглеродистой стали

Для исключения влияния поперечных размеров и длины рабочей части образца, удобно перестроить машинную диаграмму растяжения $F=f(\Delta l)$,

разделив силы F на первоначальную площадь сечения образца A_0 , а абсолютное удлинение Δl на расчётную длину l_0 т. е.

$$\sigma = \frac{F}{A_0}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (1)$$

В результате получим условную диаграмму растяжения $\sigma=f(\varepsilon)$ (рисунок 3). Вначале диаграмма имеет прямолинейный участок OA , на котором соблюдается прямая пропорциональная зависимость между напряжением и относительным удлинением, то есть закон Гука.

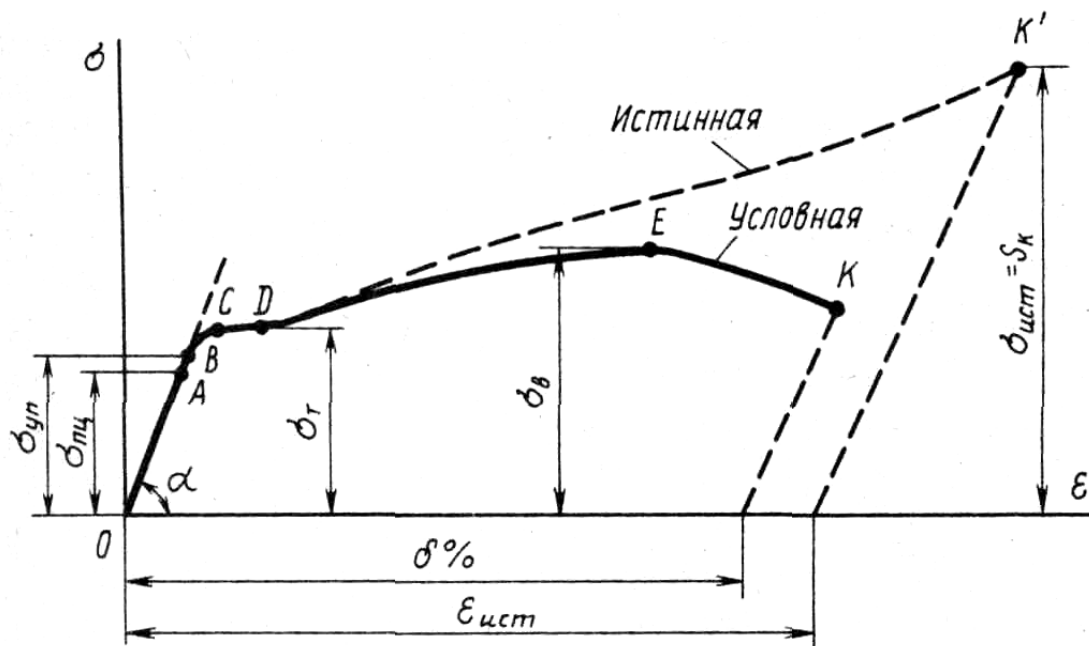


Рисунок 3 – Условная диаграмма растяжения малоуглеродистой стали

Наибольшее напряжение, до которого материал следует закону Гука, называется пределом пропорциональности и обозначается $\sigma_{плц}$ (на диаграмме – точка A):

$$\sigma_{плц} = \frac{F_{плц}}{A_0}, \quad (2)$$

где $F_{плц}$ – нагрузка, соответствующая пределу пропорциональности. Для малоуглеродистой стали $\sigma_{плц} = 2 \cdot 10^8 \text{ Па} = 200 \text{ МПа} = 2000 \text{ кг/см}^2$.

Тангенс угла α наклона участка OA к оси абсцисс пропорционален модулю упругости:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\mu_{\varepsilon}}{\mu_{\sigma}} = E \frac{\mu_{\varepsilon}}{\mu_{\sigma}}, \quad (3)$$

где μ_{ε} , μ_{σ} – масштабные коэффициенты относительного удлинения и напряжения на диаграмме.

Выше точки *A* диаграмма начинает несколько искривляться, и закон Гука нарушается. Можно отметить такое значение напряжения (точка *B* на рисунке 2), до которого в материале имеют место только упругие деформации, полностью исчезающие после снятия нагрузки. Это напряжение называется пределом упругости:

$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_0}, \quad (4)$$

Чтобы найти предел упругости, необходимо после каждого малого приращения нагрузки за пределом пропорциональности образец разгружать и следить, не образовалась ли пластическая деформация, не исчезающая при снятии нагрузки. Так как пластические деформации в отдельных кристаллах появляются уже в самой ранней стадии нагружения, то величина σ_y , как и $\sigma_{\text{пл}}$, будет зависеть от требований точности, которые накладываются на производимые замеры. Обычно остаточную деформацию, соответствующую пределу упругости, принимают в пределах 0,001 – 0,003 %. Соответственно этому допуску предел упругости обозначается через $\sigma_{0,001}$ или $\sigma_{0,003}$. Точки *A* и *B* на диаграмме (рисунок 3) настолько близки друг к другу, что часто предел упругости и предел пропорциональности считают совпавшими, хотя это не совсем верно.

За точкой *B* деформации растут быстрее нагрузки, искривление увеличивается, и в некоторой точке *C* поведение материала резко меняется: деформации возрастают без заметного увеличения нагрузки (или даже при постоянной нагрузке) до точки *D* – материал, как говорят, «течёт» (явление текучести металлов). Горизонтальный (или почти горизонтальный) участок *CD* на диаграмме растяжения называется площадкой текучести, а напряжение, при котором происходит течение материала (увеличение деформаций при

приблизительно постоянной нагрузке), называется пределом текучести и обозначается σ_T , причём

$$\sigma_T = \frac{F_T}{A_0}, \quad (5)$$

где F_T – нагрузка, соответствующая площадке текучести на рисунке 2 (для Ст.3 предел текучести примерно равен $\sigma_T = 2,4 \cdot 10^8 \text{ Па} = 240 \text{ МПа} = 2400 \text{ кг/см}^2$).

Многие пластичные металлы и сплавы (среднеуглеродистые стали, медь, алюминий, дюралюмин и др.) не имеют четко выраженной площадки текучести на диаграмме растяжения (рисунок 4). Для таких материалов определяется условный предел текучести: напряжение, при котором остаточное удлинение составляет 0,2% (иногда 0,5%). Условный предел текучести обозначается $\sigma_{0,2}$ и определяется по формуле:

$$\sigma_{0,2} = \frac{F_{0,2}}{A_0}, \quad (6)$$

где $F_{0,2}$ – нагрузка, соответствующая остаточному удлинению 0,2% от расчётной длины образца. Для ее определения на оси абсцисс диаграммы откладывают величину остаточного удлинения $ON = 0,0002 l_0$ (рисунок 4) в масштабе удлинений и из точки N проводят прямую, параллельную первоначальному прямолинейному участку диаграммы OA . Ордината точки D пересечения ее с диаграммой растяжения и определяет нагрузку $F_{0,2}$, соответствующую условному пределу текучести $\sigma_{0,2}$.

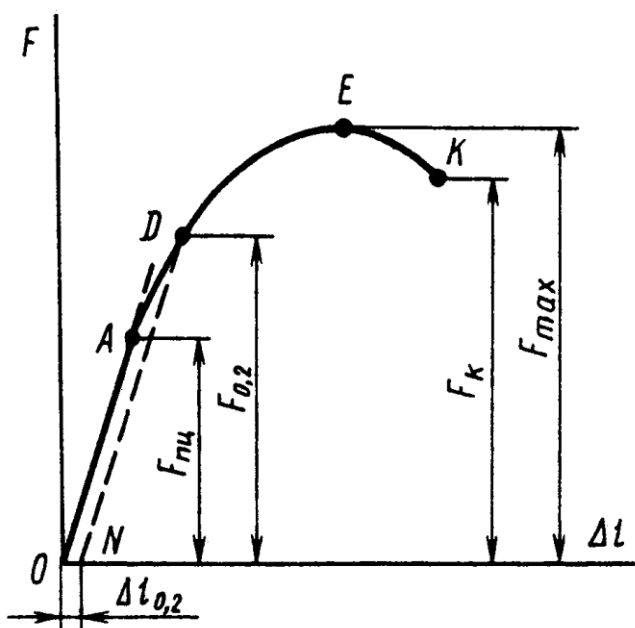


Рисунок 4 – Диаграмма растяжения
низколегированной стали.
Определение условного предела
текучести

При дальнейшем деформировании образца за точкой D напряжения и растягивающее усилие вновь увеличиваются, то есть происходит упрочнение стали, причём этот процесс идёт до момента достижения силой F своего наибольшего значения.

На диаграмме этапу упрочнения отвечает наклоненная кривая DE (рисунок 2), называемая зоной упрочнения. Напряжения, соответствующие наибольшему значению F_{max} , называются временным сопротивлением или пределом прочности σ_B :

$$\sigma_B = \frac{F_{max}}{A_0}, \quad (7)$$

На диаграмме σ_B соответствует точке E (для Ст. 3 $\sigma_{вр} \approx 4000 \text{ кг/см}^2 = 400 \text{ МПа}$). Ввиду того, что временное сопротивление очень просто определяется из опыта (достаточно разорвать образец с известной площадью A_0 сечения на машине и отметить при этом F_{max}), эта характеристика является основной для суждения о прочности металла.

До достижения предела прочности продольные и поперечные деформации равномерно распределяются по расчетной длине образца. В момент достижения предела прочности поведение образца еще раз резко меняется: деформация образца локализуется в одном, наиболее слабом месте (или в месте наличия дефектов-надрезов, царапин и т. д.), вследствие чего наблюдается местное поперечное сужение образца, где и начинает образовываться так называемая шейка (рисунок 5), остальные же сечения остаются практически неизменными.

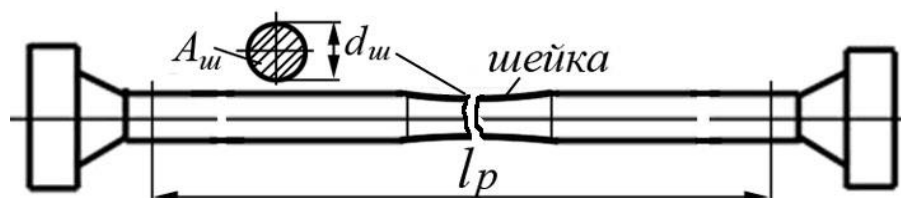


Рисунок 5 – Эскиз образца после испытаний

Вследствие резкого уменьшения поперечного сечения образца для дальнейшего его растяжения нужна все меньшая и меньшая сила и, наконец, в точке K (рисунок 3) происходит разрыв (разрушение) образца. Ниспадающая ветвь EK диаграммы растяжения называется зоной местной текучести.

Рассмотрев характерные ординаты диаграммы растяжения, устанавливают ряд механических характеристик материала: $\sigma_{\text{пл}}$, σ_y , σ_t , σ_b , которые являются характеристиками прочности материала.

Рассмотрим теперь абсциссы диаграммы σ - ε (рисунок 3). Полную деформацию образца при разрыве $\varepsilon_{\text{разр}}$ можно разделить на упругую $\varepsilon_y^{\text{разр}}$, мгновенно исчезающую после разрыва, и пластическую, которая обычно обозначается через δ и называется относительным остаточным удлинением при разрыве:

$$\delta = \frac{l_p - l_0}{l_0} \cdot 100\%, \quad (8)$$

В формуле (8) l_p – длина расчётной части образца после разрыва, измеренная после соединения частей разорванного образца. Величина δ характеризует пластичность материала. Для Ст.3 $\delta = (21 \dots 23)\%$, а для наиболее распространенных сортов стали $\delta = (8 \dots 28)\%$.

Для оценки пластичности материала определяется и другая характеристика – относительное остаточное сужение поперечного сечения в шейке после разрыва:

$$\psi = \frac{A_0 - A_{\text{ш}}}{A_0} \cdot 100\%, \quad (9)$$

где A_0 – первоначальная площадь поперечного сечения образца;

$A_{\text{ш}}$ – площадь поперечного сечения шейки в месте разрыва (в наиболее тонком месте шейки); для Ст.3 $\psi = 55 \dots 70 \%$.

Величина ψ более точно характеризует пластические свойства, т. е. пластическая деформация по длине образца распределяется неравномерно, и величина δ является некоторым средним удлинением. Чем больше δ и ψ , тем

пластичнее материал, поэтому δ и ψ называются механическими характеристиками пластичности материала.

Задание

Получив от преподавателя разорванный образец из низкоуглеродистой стали, машинную диаграмму его испытания и значение максимального усилия испытания $F_{\max}$, определить:

- Масштабный коэффициент сил диаграммы.
- Силы $F_{\text{ПЦ}}$, $F_{\text{Т}}$, $F_{\text{К}}$, напряжения $\sigma_{\text{ПЦ}}$, $\sigma_{\text{Т}}$, $\sigma_{\text{В}}$, $\sigma_{\text{РАЗ}}$.
- Диаметр шейки образца.
- Относительное остаточное удлинение при разрыве.
- Относительное остаточное сужение поперечного сечения в шейке после разрыва.

Вопросы для защиты работы

1. Какие образцы применяют для испытаний?
2. В каких координатах вычерчивается диаграмма растяжения диаграммным аппаратом испытательной машины?
3. Какой вид имеет машинная диаграмма растяжения малоуглеродистой стали?
4. Как строится условная диаграмма растяжения?
5. Какие изменения, происходящие с образцом в процессе растяжения, не учитываются условной диаграммой растяжения?
6. Что называется пределом пропорциональности, пределом упругости, пределом текучести, пределом прочности (или временным сопротивлением разрыву) и как они определяются?
7. Как определить предел пропорциональности по машинной диаграмме растяжения?

8. Какие зоны можно выделить на диаграмме растяжения?
9. Как определить, в какой точке заканчивается зона упругости при испытании на растяжение?
10. По каким участкам образца происходит его растяжение в зоне упрочнения и в зоне местной текучести?
11. Какие деформации называются упругими, а какие пластическими (остаточными)?
12. Почему после нагружения образца выше временного сопротивления нормальное напряжение σ начинает падать?
13. Какие механические характеристики служат для оценки пластичности металлов и как эти характеристики определить?
14. Как определяется предел условной текучести по диаграмме растяжения, не имеющей четко выраженной площадки текучести?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ДАННОЙ ТЕМЕ

1 Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

2 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-

1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. -
URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 8

ИСПЫТАНИЕ МАТЕРИАЛОВ НА СЖАТИЕ

Цель и содержание работы: ознакомление с методикой испытаний и определения механических характеристик при сжатии; сравнительное изучение особенностей разрушения пластичных и хрупких, изотропных и анизотропных материалов при испытаниях на сжатие.

Теоретическое обоснование

Для изучения механических характеристик материалов существенное значение имеют испытания не только на растяжение, но и на сжатие, причём для хрупких материалов испытания на сжатие являются основными.

Многие пластичные материалы совсем не разрушаются при сжатии, или разрушаются только при значительной остаточной деформации.

При испытании пластичных материалов (например, стального образца) диаграмма сжатия вначале аналогична диаграмме растяжения: предел пропорциональности и предел текучести почти совпадают, но площадка текучести не получается столь же ярко выраженной, как при растяжении. Довести до разрушения образец из малоуглеродистой стали практически не удается. Для таких материалов условно принимают предел прочности при сжатии равным пределу прочности при растяжении. Испытание обычно прекращается по достижении нагрузки, в 3 – 5 раз превышающей P_T .

Хрупкие материалы (чугун, камень, бетон и т.п.) разрушаются при сжатии, однако характерным является то, что разрушение происходит при напряжениях, значительно больших, чем при растяжении. При испытании чугунного образца диаграмма сжатия сохраняет качественные особенности диаграммы растяжения, однако сопротивление сжатию значительно выше (в 4 – 5 раз) сопротивления растяжению.

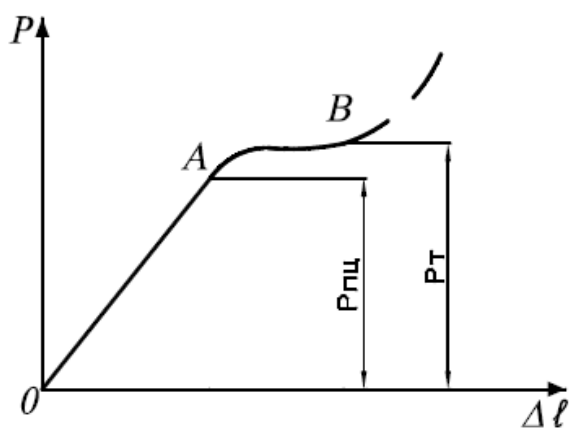


Рисунок 2.1

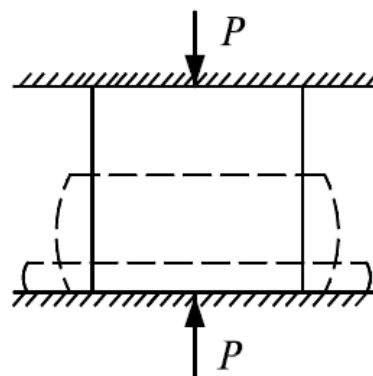


Рисунок 2.2

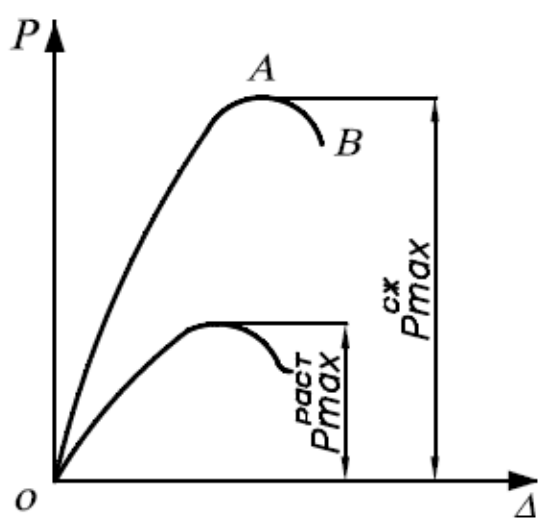


Рисунок 2.3



Рисунок 2.4

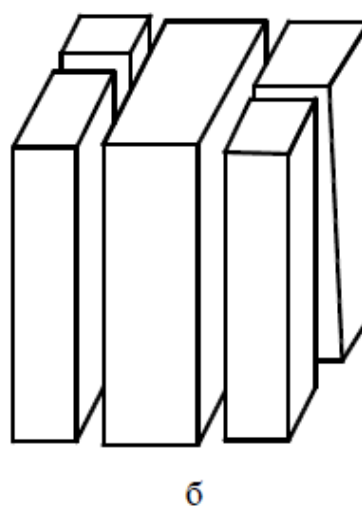
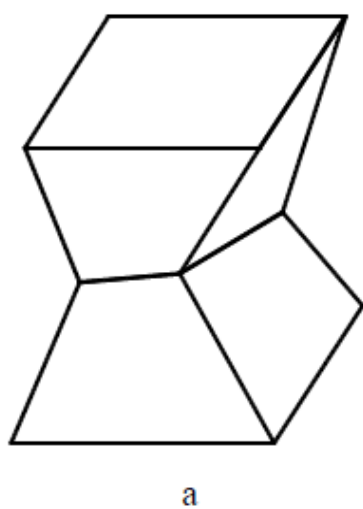


Рисунок 2.5

Все материалы можно условно разделить на два типа: изотропные (имеющие одинаковые механические свойства в разных направлениях) и анизотропные (имеющие различные свойства в разных направлениях).

Древесина является анизотропным материалом и поэтому результаты, полученные при сжатии вдоль и поперек волокон, резко отличны. Характерным для диаграммы сжатия древесины поперек волокон является значение нагрузки, после которой её рост существенно замедляется, а деформация продолжает возрастать. При дальнейшем нагружении древесина не разрушается, а лишь прессуется. За предел прочности в таком случае принимается ордината переломной точки.

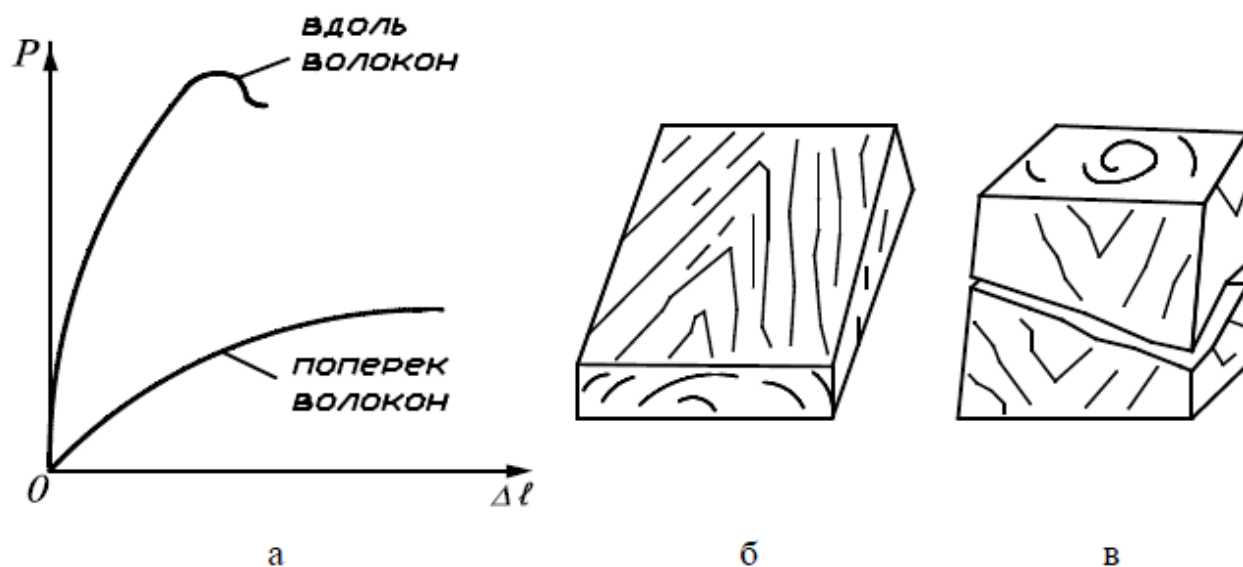


Рисунок 2.6

Для проведения испытаний на сжатие применяется гидравлический пресс П-125 или одна из разрывных машин Р-10, Р-20, Р-50. Разрывные машины снабжены диаграммным аппаратом, автоматически записывающим в процессе испытаний диаграмму сжатия. Для испытания металлов на сжатие используются образцы в виде коротких цилиндров-крешеров, у которых высота равна одному - двум диаметрам. Для других материалов применяются образцы в виде кубиков (стороны кубиков: для дерева 50 мм, для цемента и камня 70 мм, для бетона 200 – 300 мм).

Аппаратура и материалы

Гидравлический пресс П-125, стальной и чугунный цилиндры-крешеры, бетонный кубик, два деревянных кубика, штангенциркуль, тетрадь, ручка, линейка, карандаш, микрокалькулятор для выполнения инженерных расчетов.

Указания по технике безопасности

При работе на гидравлическом прессе П-125 следует соблюдать следующие правила техники безопасности

1. Общие требования по охране труда.

1.1. К работе на прессе П-125 допускаются лица, имеющие допуск только после ознакомления с настоящей инструкцией.

2. Требования безопасности перед началом работы.

2.1. Убедиться в надежности и исправности всех узлов, защитных кожухов, предусмотренных конструкцией.

2.2. Проверить наличие заземления.

2.3. Проверить исправность токоведущих частей пресса.

2.4. Перед пуском пресса убедиться, что его включение никому не угрожает.

3. Требования безопасности во время работы.

3.1. Включение пресса производить только в присутствии преподавателя или учебного мастера.

3.2. Не загружать рабочие поверхности пресса ненужными деталями.

3.3). Не оставлять без контроля пресс, находящийся под напряжением.

3.4. Работать на прессе в спецодежде, не допускающей провисания элементов и задевания рукавами движущейся части машины, под ногами должен быть диэлектрический коврик.

3.5. Запрещается во время работы производить техобслуживание, отвлекаться, убирать руку от штурвала нагружения во избежание перегрузок образца.

4. Требования безопасности в аварийных ситуациях.

4.1. Прекратить работу на прессе и отключить его от сети при нарушении изоляции токоведущих частей и возникновении замыкания в электрической части установки.

4.2. Отключить пресс при перерыве в подаче электроэнергии.

4.3. При возникновении механического шума или вибрации отключить пресс от сети, принять меры к их устранению.

5. Требования безопасности по окончании работ.

5.1. Отключить пресс от сети; привести рабочее место в порядок.

Методика и порядок выполнения работы

1. Изучить теоретические положения к данной лабораторной работе, используя рекомендуемую литературу.

2. Перед началом испытания образцов необходимо измерить образцы, результаты измерений занести в журнал испытаний (таблица 2.1). Измерения стального, чугунного и цементного образцов производятся с точностью до 0,1 мм, а деревянных кубиков с точностью до 1,0 мм ввиду меньшей тщательности их изготовления.

3. Установить образец в машину. При установке следить за тем, чтобы образец был хорошо центрирован по отношению к оси приложения сжимающей силы. Желательно, чтобы одна из плит прессы имела шаровую опору для устранения возможных перекосов и связанного с ними изгиба. После установки образца подвижную плиту плавно подвести к его поверхности.

4. Произвести пуск машины и нагружение образца.

5. После окончания испытания образец разгружается и вынимается из машины. По шкале силоизмерительного устройства фиксируется максимальная нагрузка и записывается в журнал испытаний.

6. Эскиз образца до и после испытания и вид полученной диаграммы зарисовываются в журнал (таблица 2.1).

Содержание отчета и его форма

Отчет по лабораторной работе выполняется в тетради для лабораторных работ и должен содержать следующие разделы:

- название и цель работы;
- краткий конспект основных теоретических положений;
- эскизы всех образцов до и после испытаний;
- диаграммы сжатия (если таковые были вычерчены с помощью диаграммного аппарата испытательной машины);
- подсчёт механических характеристик испытанных материалов;
- результаты испытаний в форме таблицы 2.1.

Таблица 2.1 – Журнал испытаний на сжатие

	Материалы				
	Сталь	Чугун	Цемент	Дерево	
				вдоль волокон	поперек волокон
Эскиз образца до испытаний					
Размеры поперечного сечения					
Эскиз образца после испытаний					
Площадь поперечного сечения $F_0, \text{см}^2$					
$P_{\max}$, КГ					
$\sigma_{\text{вр}}$, КГ/см ²					

Вопросы для защиты работы

1. Какова цель работы?
2. Какие образцы используются при испытаниях на сжатие?
3. Чем обусловлено определенное соотношение высоты и поперечных размеров образцов при сжатии?
4. Какой вид имеет диаграмма сжатия малоуглеродистой стали?
5. Какие механические характеристики можно определить при испытании пластичной стали на сжатие?
6. Можно ли довести до разрушения образец из пластичной стали при сжатии?
7. Какой вид имеет диаграмма сжатия для чугунного образца? Её отличие от диаграммы растяжения.
8. Порядок определения механических характеристик при испытаниях чугунного образца на сжатие?
9. Каков характер разрушения чугунного образца при сжатии? Чем объясняется приобретение образцом бочкообразной формы?
10. Какие механические характеристики можно определить при испытании цементного кубика на сжатие?
11. Каков характер разрушения при сжатии цементного кубика при наличии и отсутствии сил трения?
12. Какой вид имеют диаграммы для деревянных образцов, испытанных на сжатие вдоль и поперек волокон? В чем различия этих диаграмм?
13. Можно ли довести до разрушения деревянный образец при сжатии поперек волокон?
14. Каков характер разрушения деревянного образца при испытании на сжатие вдоль волокон?
15. Каков порядок проведения испытаний на сжатие и обработки результатов испытаний?

Литература

1. Щербакова, Ю. В. Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебное пособие / Ю. В. Щербакова. - Сопротивление материалов, 2020-02-05. - Саратов : Научная книга, 2019. - 159 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-9758-1776-1

2. Коргин, А. В Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебно-методическое пособие к выполнению практических работ для обучающихся по направлению подготовки 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, профиль «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные средства и оборудование» / А. В. Коргин, В. А. Ермаков, В. А. Романец. - Москва : МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 186 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-7264-1842

3. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - <http://biblioclub.ru/>. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 9

ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ СТЕРЖНЕЙ

Цель работы: получение навыков прочностного расчёта при растяжении и сжатии.

Задача: проверка стержней кронштейна на прочность.

Теоретическая часть

Условие прочности при действии продольной внутренней силы N приведём в российских и международных обозначениях.

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma] \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm}$$

где σ – наибольшее нормальное напряжение, возникающее в рассчитываемом элементе при рабочей нагрузке;

$[\sigma] = \sigma_{adm}$ – допускаемое нормальное напряжение (*admissible* – допустимый);

N – внутренняя продольная сила;

A – площадь поперечного сечения стержня.

Допускаемое нормальное напряжение определяют по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[s]} \quad \text{или} \quad \sigma_{adm} = \frac{\sigma_{dan}}{S_{adm}},$$

где $\sigma_{пред} = \sigma_{dan}$ – предельное (опасное) напряжение, при котором в материале появляются признаки разрушения или заметные остаточные деформации (*dangerous* – опасный).

$[s] = s_{adm}$ – допускаемый коэффициент запаса прочности. При статическом приложении нагрузки принимают: для пластичных материалов, например, сталей $1,4 \leq [s] \leq 2,5$, для хрупких материалов $2,5 \leq [s] \leq 3$.

Опасным напряжением при статической нагрузке является: для пластичных материалов $\sigma_T = \sigma_y$ – предел текучести материала (индекс y от английского *yield* – текучесть); для хрупких материалов $\sigma_B = \sigma_u$ – предел прочности материала (индекс u от английского *ultimate* – предел). Поскольку

хрупкие материалы неодинаково сопротивляются растяжению и сжатию, для них определяют два допускаемых напряжения. При растяжении $[\sigma_p] = \sigma_{t adm}$ (t – от английского *tension* – растяжение), при сжатии $[\sigma_c] = \sigma_{c adm}$ (c – от английского *compression* – сжатие).

Имея запись условия прочности, можно решать задачи трёх типов:

1) Подставить известные значения N , A , σ в неравенство $\frac{N}{A} \leq [\sigma]$ и

проверить его выполнение, т.е. выполнить проверочный расчёт.

2) Найти минимально необходимую площадь поперечного сечения

$A \geq \frac{N}{[\sigma]}$ – проектный расчёт.

3) Определить допускаемую нагрузку $N \leq [\sigma]A$.

Как правило, при изготовлении стержней со стандартными или нормализованными профилями, полученную из проектного расчёта площадь нужно округлить до одного из стандартных значений. При этом действительный коэффициент запаса прочности $s = \frac{[\sigma]}{\sigma} \geq [s]$ может быть меньше допускаемого только на величину погрешности расчётов (не более 3%). Значительное превышение значения s по сравнению с $[s]$, когда можно выбрать меньшее стандартное значение площади, ведёт к неоправданному удорожанию и утяжелению конструкции.

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Используя значения продольных сил в стержнях ВА и ВС, которые были найдены аналитическим методом:

1) Проверить прочность стержней, если они выполнены из стали Ст5, имеющей предел текучести $\sigma_t = \sigma_y = 200$ Мпа. Допускаемый коэффициент запаса прочности принять $[s] = s_{adm} = 2$. Площади сечений $A_{BC} = 700$ мм², $A_{BA} = 1000$ мм².

2) Если расчётное напряжение больше допускаемого более чем на 3 процента, или если расчётное напряжение меньше допускаемого более чем на 15 процентов – выбрать для данного стержня другую площадь поперечного

сечения при том же материале. Площадь округлять до целого числа сотен квадратных миллиметров.

Решение

Для стали Ст5, имеющей предел текучести $\sigma_T = \sigma_y = 200$ МПа, при коэффициенте запаса прочности $[s] = s_{adm} = 2$, допускаемое напряжение

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[s]} = \frac{200}{2} = 100 \text{ МПа}.$$

Определяем расчётные нормальные напряжения в стержнях при расчётных значениях сил $N_C = 73,95$ кН, $N_A = 40,3$ кН и заданных площадях поперечных сечений $A_{BC} = 700$ мм², $A_{BA} = 1000$ мм²:

$$\sigma_{BC} = \frac{N_C}{A_{BC}} = \frac{73,95 \cdot 10^3}{7 \cdot 10^2} = 105,6 \text{ МПа} > 100 \text{ МПа} - \text{условие прочности не выполняется};$$

$$\sigma_{BA} = \frac{N_A}{A_{BA}} = \frac{40,3 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^2} = 40,3 \text{ МПа} < 100 \text{ МПа} - \text{условие прочности выполняется}.$$

$$\text{Перегрузка стержня ВС составляет } \delta_{BC} = \frac{105,6 - 100}{100} = \frac{5,6}{100}, \text{ т.е. больше } 3\%.$$

Площадь его сечения нужно увеличить, как минимум, до

$$A_{BC} \geq \frac{N_C}{[\sigma]} = \frac{73,95 \cdot 10^3}{100} = 739,5 \text{ мм}^2. \text{ Но стержня с такой площадью сечения у}$$

нас нет, а есть с площадью 700 мм² и 800 мм². При площади 700 мм² условие прочности не выполняется и перегрузка больше 3% (см. выше). Если возьмём площадь 800 мм², то

$$\sigma_{BC} = \frac{N_C}{A_{BC}} = \frac{73,95 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^2} = 92 \text{ МПа} < 100 \text{ МПа} - \text{условие прочности выполняется и}$$

$$\text{недогрузка стержня ВС составляет } \Delta_{BC} = \frac{100 - 92}{100} = \frac{8}{100}, \text{ т.е. меньше } 15\%.$$

Поэтому для стержня ВС принимаем окончательно площадь $A_{BC} = 8$ см².

$$\text{Недогрузка стержня ВА составляет } \Delta_{BA} = \frac{100 - 43}{100} = \frac{57}{100}, \text{ т.е. больше } 15\%.$$

Площадь его сечения можно уменьшить до

$$A_{BA} \geq \frac{N_A}{[\sigma]} = \frac{40,3 \cdot 10^3}{100} = 403 \text{ мм}^2.$$

Если округлить площадь до 400 мм², то расчётное напряжение будет

$$\sigma_{BA} = \frac{N_A}{A_{BA}} = \frac{40,3 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^2} = 100,75 \text{ МПа}$$

и перегрузка составит $\delta_{BA} = \frac{100,75 - 100}{100} = \frac{0,75}{100}$, т.е. меньше 3%, что допустимо.

Поэтому для стержня ВА принимаем окончательно площадь $A_{BA} = 4 \text{ см}^2$.

Задание

Используя значения продольных сил в стержнях ВА и ВС, которые были найдены в работе «Аналитический и графоаналитический методы сложения сил плоской сходящейся системы»:

1) Проверить прочность стержней, если они выполнены из стали Ст5, имеющей предел текучести $\sigma_T = \sigma_y = 200 \text{ МПа}$. Допускаемый коэффициент запаса прочности принять $[s] = s_{adm} = 2$. Площади сечений A_{BC} и A_{BA} указаны в таблице данных для расчёта (таблица 1).

2) Если расчётное напряжение больше допускаемого более чем на 3 процента, или если расчётное напряжение меньше допускаемого более чем на 15 процентов – выбрать для данного стержня другую площадь поперечного сечения при том же материале. Площадь округлять до целого числа квадратных сантиметров.

Вопросы по прочности стержней

1. Как направлены внутренние силы при растяжении или сжатии?
2. Как определяют механическое напряжение при растяжении или сжатии?
3. Какие значения напряжений выбирают в качестве предельных для пластичных материалов?

4. Какие значения напряжений выбирают в качестве предельных для хрупких материалов?
5. Коэффициент запаса прочности расчётный и допускаемый.
6. Три формы записи условия прочности.

Литература

1. Прикладная механика / Х.С. Гумерова. - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. - ISBN 978-5-7882-1571-6; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=428011&sr=1
2. [Бегун П. И.](#) , [Кормилицын О. П.](#) Прикладная механика. Учебник/ П.И. Бегун, О.П. Кормилицын. – [2-е изд., перераб. и доп.](#) – СПб: Политехника, 2012. – 467 с. ISBN 5-7325-0859-7
<http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=124008>

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 10

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ

Теоретическая часть

Под кручением понимается такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только крутящий момент. Кручение прямого бруса происходит при нагружении его внешними скручивающими моментами, действующими в плоскости поперечного сечения бруса. Брус, работающий в основном на кручение, называется валом.

Знак крутящего момента не имеет физического смысла, и общепринятого правила знаков не существует. При построении эпюр крутящих моментов для удобства построения условимся считать, что внешние скручивающие моменты, действующие на оставшуюся часть вала против часовой стрелки, если смотреть со стороны сечения (разреза), вызывают в этом сечении положительный крутящий момент, а действующие по часовой стрелке – отрицательный.

Для построения эпюры крутящих моментов используют метод сечений, считая крутящий момент в произвольном сечении численно равным алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных по одну сторону от сечения. Для построения эпюр крутящих моментов произвольно нагруженного вала:

1) определяют опорные реакции (для консольной схемы нагружения опорные реакции можно не определять);

2) разбивают вал на участки нагружения, в пределах которых закон распределения внутренних усилий в поперечном сечении вала не меняется; границами участков нагружения являются начало и конец вала, а также сечения, в которых:

- приложены внешние скручивающие моменты,
- начинается и заканчивается действие распределенной нагрузки,
- изменяется форма и размеры поперечного сечения вала;

3) рассекают вал произвольным сечением в пределах первого участка нагружения;

4) отбрасывают часть вала, содержащую большее количество внешних нагрузок (для консольной схемы следует отбросить часть вала, содержащую жесткую заделку, если опорная реакция предварительно не определялась);

5) заменяют действие отброшенной части стержня внутренним усилием – крутящим моментом M_{zi} (в тех случаях, когда направление M_{zi} неизвестно, следует принимать его положительным);

6) составляют уравнение равновесия, из которого определяют величину и направление крутящего момента M_{zi} (если после решения уравнения M_{zi} получился со знаком плюс, то знак крутящего момента совпадает с первоначально выбранным на схеме, со знаком минус – знак крутящего момента противоположен первоначально выбранному на схеме);

7) выполняют пункты 3 – 6 для каждого участка нагружения;

8) по полученным значениям строят эпюру крутящих моментов M_z : для построения эпюры крутящих моментов проводят прямую, параллельную оси вала (нулевую или базовую линию), перпендикулярно к которой откладываются ординаты, изображающие в некотором масштабе величины крутящих моментов в соответствующих сечениях вала; положительные значения крутящего момента откладывают выше, а отрицательные – ниже нулевой линии; заштриховывают эпюру тонкими спиральными линиями, а внутри поля эпюры в кружке указывают знак (плюс или минус);

9) после построения эпюры следует проверить построения по следующим правилам:

- в сечениях, где приложены сосредоточенные внешние скручивающие моменты, на эпюре крутящих моментов возникают «скачки» (мгновенные изменения значения), численно равные приложенной паре сил и направленные в сторону ее действия;

- если на участке нагружения отсутствует распределенная нагрузка, эпюры крутящих моментов для данного участка ограничены прямыми, параллельными оси вала. Положительные значения момента откладываются выше, отрицательные – ниже «нулевой линии»;

10) из эпюры крутящих моментов определяют опасное сечение; при кручении вала постоянной жесткости опасным считается сечение или участок вала, в котором крутящий момент максимален по абсолютной величине (по модулю).

Пример 3.1

Построить эпюру крутящих моментов для вала, жестко закрепленного в сечении C (рисунок 3.2 а) и нагруженного скручивающими моментами $M_1=5ql^2$, $M_2=3ql^2$, $M_3=4ql^2$.

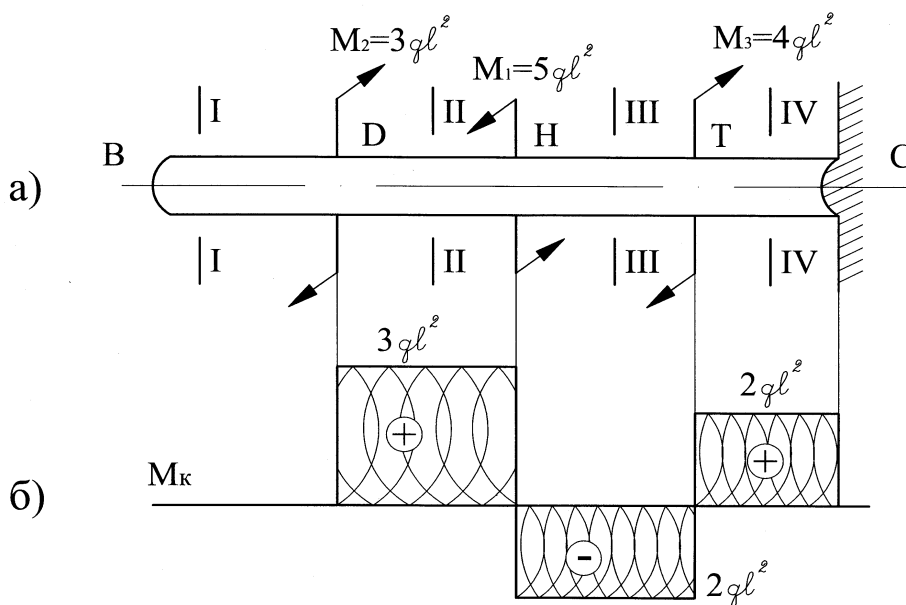


Рисунок 3.2

Решение

Вал разбивается на четыре участка нагружения: BD , DH , HT , TC .

1-й участок

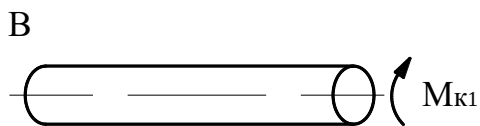


Рисунок 3.3

$$0 \leq Z_1 \leq \ell_1$$

$$M_{z1} = 0.$$

2-й участок

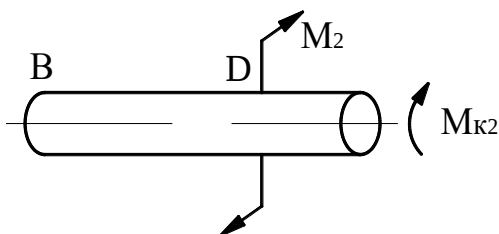


Рисунок 3.4

$$0 \leq Z_2 \leq \ell_2$$

$$M_{z2} = M_2 = 3q\ell^2$$

3-й участок

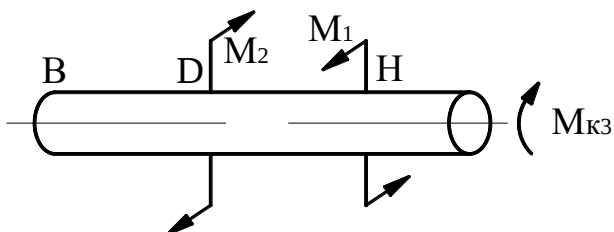


Рисунок 3.5

$$0 \leq Z_3 \leq \ell_3$$

$$M_{z3} = -M_1 + M_2 = -5q\ell^2 + 3q\ell^2 = -2q\ell^2.$$

4-й участок

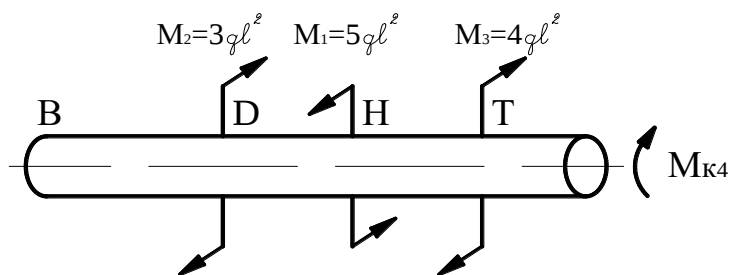


Рисунок 3.6

$$0 \leq Z_4 \leq \ell_4$$

$$M_{z3} = -M_1 + M_2 + M_3 = -5q\ell^2 + 3q\ell^2 + 4q\ell^2 = 2q\ell^2.$$

Из анализа эпюры крутящих моментов следует, что опасным сечением является участок вала DH : $M_{\max} = |M_{z1}| = 3q\ell^2$.

Задание 3.1

Для консольного вала, (расчетная схема приведена в таблице 3.1), построить эпюры крутящих моментов и определить опасное сечение.

Таблица 3.1

Номер схемы	Расчетная схема	Номер схемы	Расчетная схема
1		6	
2		7	
3		8	
4		9	
5		10	

Таблица 3.2

Номер варианта	Расчетная схема	Моменты, $q\ell^2$			
		M_1	M_2	M_3	M_4
1	1	1	2	3	10
2	2	2	3	4	9
3	3	3	4	5	8
4	4	4	5	6	7
5	5	5	6	7	6
6	6	6	7	8	5
7	7	7	8	9	4
8	8	8	9	10	3
9	9	9	10	1	2
10	10	10	1	2	1
11	1	1	3	4	9
12	2	2	4	5	8
13	3	3	5	6	7
14	4	4	6	7	6
15	5	5	7	8	5
16	6	6	8	9	4
17	7	7	9	10	3
18	8	8	10	3	2
19	9	9	3	2	1
20	10	10	4	1	10
21	1	1	5	2	8
22	2	2	6	3	7
23	3	3	7	4	6
24	4	4	8	5	5
25	5	5	9	6	4
26	6	6	10	7	3
27	7	7	3	8	2
28	8	8	4	9	1
29	9	9	5	10	8
30	10	10	6	5	6
31	1	1	7	6	5
32	2	2	8	7	4
33	3	3	9	8	3
34	4	4	10	9	2
35	5	5	3	10	1

Вопросы для защиты работы

1. Какой вид деформации называется кручением?
2. Что называется эпюрой крутящих моментов? Как определяется знак крутящего момента?

3. Как определить опасное сечение вала постоянного сечения при кручении?

4. Каким методом пользуются при построении эпюр произвольно нагруженных валов?

5. Сформулируйте правила проверки правильности построения эпюр крутящих моментов.

6. Постройте эпюры продольных сил и нормальных напряжений для вала, схема нагружения которого задана преподавателем.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 11

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ ИЗГИБЕ КОНСОЛЬНЫХ БАЛОК

Цель работы: Изучение методики построения эпюр внутренних усилий при изгибе консольных балок.

Задача: построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил для консольно закреплённой балки.

Теоретическое обоснование

Изгиб – это такой вид нагружения, при котором к брусу приложены в плоскостях, проходящих через его ось, пары сил или силы, перпендикулярные к оси. Продольная ось стержня искривляется, а в произвольном сечении возникает изгибающий момент M и, возможно, поперечная сила Q . Брус, работающий на изгиб называют балкой.

В сопротивлении материалов термин «балка» значительно шире, чем в обычном употреблении этого слова: с точки зрения расчета на прочность, жесткость и устойчивость балкой является не только строительная балка, но также и вал, болт, оси железнодорожного вагона, зуб шестерни и т.д.

Ограничимся построением эпюр для простейшего случая изгиба балок, при котором все заданные нагрузки лежат в одной плоскости, причем эта плоскость совпадает с одной из главных плоскостей балки. Такой случай называют прямым изгибом.

На расчетной схеме балку принято заменять ее осью. При этом все нагрузки должны быть приведены к оси балки и силовая плоскость будет совпадать с плоскостью чертежа.

Балки имеют те или иные опорные устройства – опоры. Конструкционные формы опор весьма разнообразны. Для расчета же их схематизируют в виде трех основных типов опор:

а) *шарнирно-подвижная опора* (рисунок 1), в которой может возникнуть только одна составляющая реакций - R_A , направленная вдоль опорного стержня;

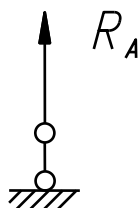


Рисунок 1 – Шарнирно-подвижная опора

б) *шарнирно-неподвижная опора* (рисунок 2), в которой могут возникнуть две составляющие – вертикальная реакция R_A и горизонтальная реакция H_A ;

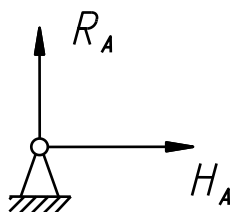


Рисунок 2 – Шарнирно-неподвижная опора

в) *защемление* (иначе *жесткое защемление* или *заделка*), где могут быть три составляющие - вертикальная реакция R_A и горизонтальная H_A реакции и опорный момент M_A (рисунок 3).

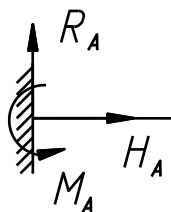


Рисунок 3 – Защемление

Все реакции и моменты считаются приложенными в точке А – в центре тяжести опорного сечения.

Статически определимая балка при действии плоской системы сил должна иметь три независимых реакции. Поэтому статически определимые балки могут быть установлены: 1) на одной жёсткой заделке, 2) на одной шарнирно-неподвижной и другой шарнирно-подвижной опорах. Здесь рассмотрим первый случай, который называют консольным закреплением балки.

Внутренняя сила Q в произвольном сечении равна алгебраической сумме всех внешних поперечных сил, взятых по одну сторону от сечения с учетом правила знаков. Поперечные силы считаются положительными, если они стремятся повернуть элемент балки по часовой стрелке (рисунок 4, а).

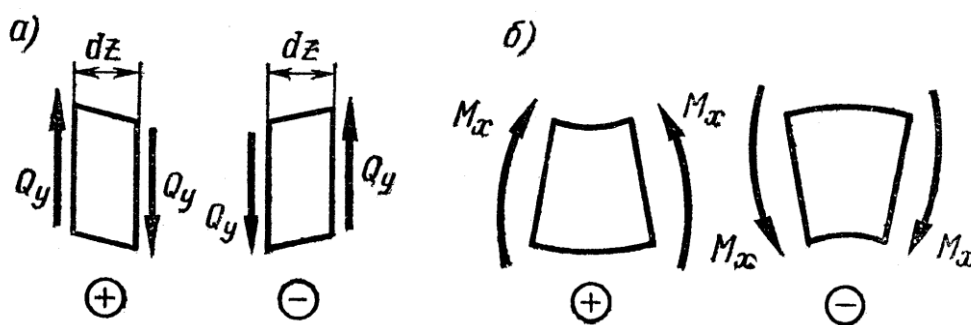


Рисунок 4 – Правила знаков для внутренней поперечной силы – а), и внутреннего изгибающего момента – б)

Внутренний момент M в произвольном сечении равен алгебраической сумме моментов от всех внешних сил, взятых по одну сторону от сечения относительно центра тяжести сечения с учетом правила знаков. Изгибающий момент считается положительным, если элемент бруса изгибается выпуклостью вниз (рисунок 4, б), т.е. таким образом, что его сжатые волокна находятся в верхней части.

Строить эпюры поперечных сил $Q(z)$ и изгибающих моментов $M(z)$ можно различными способами, например, аналитическим. При этом способе построения эпюр составляют аналитические уравнения $Q(z)$ и $M(z)$ для каждого

участка нагружения балки; решая полученные уравнения для граничных точек участков нагружения, строят графики зависимостей $Q(z)$ и $M(z)$ по участкам.

Эпюры изгибающих моментов следует строить на растянутых волокнах, то есть положительные значения откладываются ниже, отрицательные – выше базовой (нулевой) линии. Эпюры заштриховываются прямыми линиями, перпендикулярными оси балки, в кружках внутри поля эпюр указываются знаки внутренних усилий.

Построенные эпюры проверяются на соответствие правилам, основанным на дифференциальных зависимостях между поперечной силой, изгибающим моментом и интенсивностью распределенной нагрузки

$$q = \frac{dQ(z)}{dz}; \quad Q = \frac{dM(z)}{dz}. \quad (4.1)$$

1) на участках балки, где отсутствует распределенная нагрузка q , эпюра поперечных сил $Q(z)$ ограничена прямой, параллельной оси балки (поперечная сила $Q(z)$ имеет постоянное значение), а эпюра изгибающих моментов $M(z)$ ограничена наклонной прямой (изгибающий момент $M(z)$ меняется по линейному закону);

2) на участках балки, где приложена равномерно распределенная нагрузка q , эпюра поперечных сил $Q(z)$ ограничена наклонной прямой (поперечная сила $Q(z)$ меняется по линейному закону), а эпюра изгибающих моментов $M(z)$ – квадратной параболой, обращенной выпуклостью в сторону действия нагрузки (изгибающий момент $M(z)$ меняется по закону квадратной параболы);

3) в точке приложения сосредоточенной силы P на эпюре поперечных сил $Q(z)$ имеется скачок (уступ), равный по величине приложенной в этой точке силе P , а на эпюре изгибающих моментов $M(z)$ – точка перегиба (излом) в сторону действия силы;

4) в точке приложения сосредоточенного момента M на эпюре изгибающих моментов $M(z)$ имеется скачок (уступ), равный по величине приложенному в этой точке моменту M . Сосредоточенный момент $M(z)$,

приложенный в любом сечении балки, на эпюре поперечных сил $Q(z)$ не отражается;

5) если в пределах одного участка нагружения знак поперечной силы $Q(z)$ меняется в направлении слева направо с (+) на (–), то в сечении, где $Q(z)=0$, на эпюре изгибающих моментов $M(z)$ для этого участка будет экстремальное значение (точка максимума);

6) если в пределах одного участка нагружения знак поперечной силы $Q(z)$ меняется в направлении слева направо с (–) на (+), то в сечении, где $Q(z)=0$, на эпюре изгибающих моментов $M(z)$ для этого участка будет экстремальное значение (точка минимума);

7) тангенс угла наклона к оси абсцисс (оси балки) касательной к кривой изгибающего момента в любом сечении балки численно равен ординате поперечной силы в рассматриваемом сечении, поэтому:

- если на протяжении какого-либо участка балки поперечная сила положительна $Q(z)>0$, то изгибающий момент на этом участке (в направлении слева направо) будет алгебраически возрастать;

- если на протяжении какого-либо участка балки поперечная сила отрицательна $Q(z)<0$, то изгибающий момент на этом участке (в направлении слева направо) будет алгебраически убывать;

- если на протяжении какого-либо участка балки поперечная сила равна нулю $Q(z)=0$, то изгибающий момент на этом участке не будет меняться (имеет постоянное значение);

8) для линейных участков эпюры изгибающих моментов рекомендуется выполнить дифференциальную, а для нелинейных участков – интегральную проверку. При выполнении дифференциальной и интегральной проверок начало и конец участка выбираются в направлении слева направо. Дифференциальная проверка выполняется по формуле

$$Q = \frac{dM(z)}{dz} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (4.2)$$

где $tg\alpha$ – тангенс угла наклона эпюры изгибающих моментов к продольной оси балки z . Положительный знак $Q(z)$ определяется совмещением оси балки с эпюрой $M(z)$ поворотом по часовой стрелке, отрицательный знак $Q(z)$ определяется совмещением оси балки с эпюрой $M(z)$ поворотом против часовой стрелки. Интегральная проверка выполняется по формуле

$$M_K - M_H = \int_H^K Q(z) dz = \Omega_Q^{HK}, \quad (4.3)$$

где Ω_Q^{HK} – площадь эпюры поперечных сил на рассматриваемом участке;

M_K – значение изгибающего момента в конечной точке участка;

M_H – значение изгибающего момента в начальной точке участка.

В общем случае задача по построению эпюр внутренних усилий при изгибе решается в следующей последовательности.

1) Определяются опорные реакции.

2) Балка разбивается на участки нагружения, границами которых являются сечения:

- начала и конца балки;
- в которых приложены сосредоточенные (активные и реактивные) внешние силы;
- в которых приложены внешние моменты (активные и реактивные);
- в которых начинается и заканчивается действие распределенной нагрузки.

3) Строятся эпюры поперечных сил $Q(z)$ и изгибающих моментов $M(z)$.

4) Проверяется построение эпюр $Q(z)$ и $M(z)$ по правилам 1 – 8.

5) Определяется опасное сечение.

Пример

Построить эпюры внутренних усилий для балки, схема которой приведена на рисунке 5.

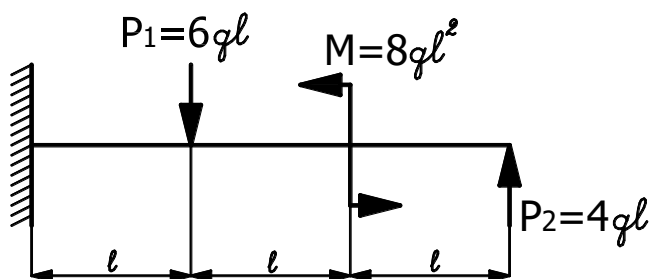


Рисунок 5

Решение

Используя правила, разобьем балку на три участка нагружения, пронумеровав их в соответствии с планом решения задачи. Из каждого сечения, обозначенного как граница участка нагружения, проводим тонкую

вертикальную прямую.

1 – й участок

$$0 \leq z_1 \leq \ell_1 = \ell$$

$$в(\cdot)A \quad в(\cdot)B$$

$$M(z_1) = P_2 \cdot z_1 = 4ql \cdot z_1:$$

в точке A:

$$z_1=0; \quad M(z_1=0) = P_2 \cdot z_1 = 4ql \cdot 0 = 0;$$

в точке B:

$$z_1=\ell; \quad M(z_1=\ell) = 4ql \cdot \ell = 4ql^2.$$

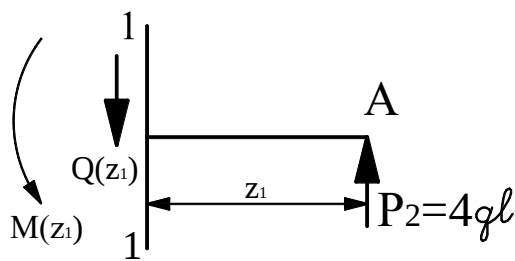


Рисунок 6

$$Q(z_1) = -P_2 = -4ql = const. \quad \text{По}$$

полученным данным строим эпюры $Q(z_1)$ и $M(z_1)$. Эпюру изгибающего момента строим на растянутых волокнах. Проводим две линии, параллельные оси балки – нулевые (базовые) линии эпюр изгибающих моментов и поперечных сил, рядом с которыми записываем величины ql^2 на эпюре $M(z)$ и ql на эпюре $Q(z)$. Откладываем значения изгибающего момента, записав лишь цифры «0» и «4» на растянутых волокнах в начале и в конце первого участка. Знак на эпюре $M(z)$ опускаем; соединяем точки «0» и «4» прямой, так как выражение момента есть функция первой степени от текущей координаты z_1 . Эпюра моментов заштриховывается перпендикулярно оси балки, и каждая ордината покажет величину изгибающего момента в любой интересующей нас точке рассматриваемого участка.

На эпюре $Q(z)$ величина поперечной силы постоянна, то есть эпюра представляет собой прямоугольник; отложив «4» ниже оси балки так как $Q(z) < 0$, заканчиваем эпюру штриховкой перпендикулярно оси балки. Внутри поля эпюры в кружке необходимо проставить знак поперечной силы.

Ввиду линейности эпюры $M(z)$ выполним дифференциальную проверку по формуле (4.2):

$$Q(z_1) = \frac{dM(z_1)}{dz_1} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{0 - 4q\ell^2}{\ell} = -4q\ell.$$

2 – й участок

$$0 \leq z_2 \leq \ell_2 = \ell$$

$\epsilon(\cdot)B$ $\epsilon(\cdot)C$.

$$M(z_2) = P_2(\ell + z_2) + M = 4q\ell(\ell + z_2) + 8q\ell^2:$$

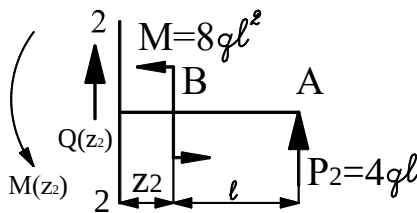


Рисунок 7

при $z_2 = 0$

$$M(z_2) = P_2(\ell + 0) + M = 4q\ell(\ell + 0) + 8q\ell^2 = 12q\ell^2;$$

при $z_2 = \ell$

$$M(z_2) = P_2(\ell + \ell) + M = 4q\ell \cdot 2\ell + 8q\ell^2 = 16q\ell^2.$$

$$Q(z_2) = -P_2 = -4q\ell = \text{const.} \quad \text{В выражение}$$

поперечной силы на втором участке внешний момент M не вошел, так как проекция пары сил всегда равна нулю.

По полученным данным строим эпюры $Q(z_2)$ и $M(z_2)$ и выполняем дифференциальную проверку:

$$Q(z_2) = \frac{dM(z_2)}{dz_2} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{12q\ell^2 - 16q\ell^2}{\ell} = -4q\ell.$$

3 – й участок

$$0 \leq z_3 \leq \ell_3 = 2\ell$$

$\epsilon(\cdot)C$ $\epsilon(\cdot)D$.

$$M(z_3) = P_2(2\ell + z_3) + M - P_1 \cdot z_3 = 4q\ell(2\ell + z_3) + 8q\ell^2 - 6q\ell \cdot z_3:$$

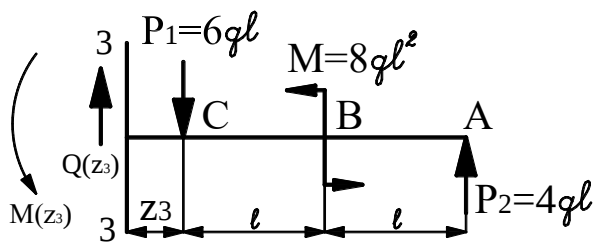


Рисунок 8

при $z_3=0$;

$$M(z_3) = 4ql(2l + 0) + 8ql^2 - 6ql \cdot 0 = 16ql^2;$$

при $z_3=2l$;

$$M(z_3) = 4ql(2l + l) + 8ql^2 - 6ql \cdot l = 14ql^2;$$

$$Q(z_3) = -P_2 + P_1 = -4ql + 6ql = 2ql = \text{const}.$$

По полученным данным строим эпюры $Q(z_3)$ и $M(z_3)$ (рисунок 4.13) и выполняем дифференциальную проверку:

$$Q(z_3) = \frac{dM(z_3)}{dz_3} = \text{tg} \alpha = \frac{16ql^2 - 14ql^2}{2l} = ql.$$

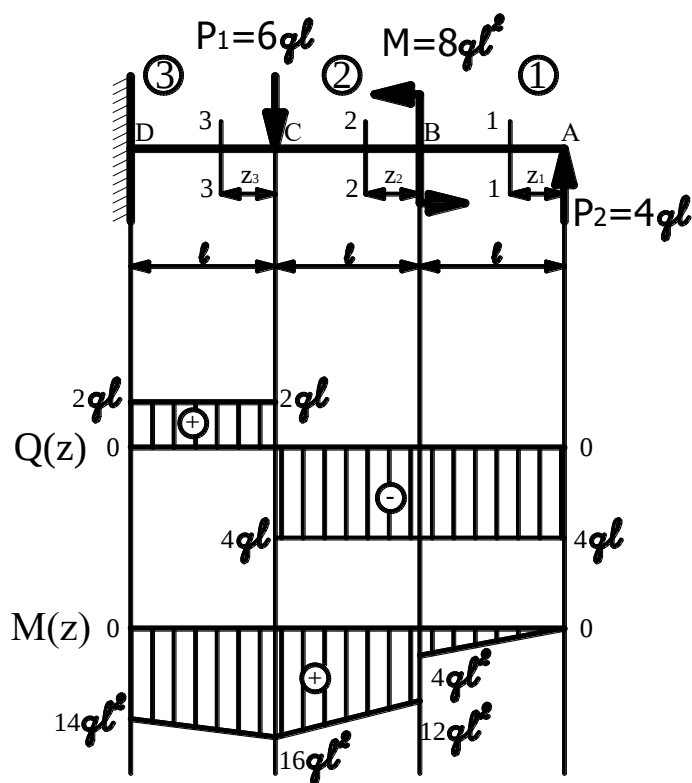


Рисунок 9

Задание

Для консольной балки, схема нагружения которой представлена на рисунке 10, исходные значения по таблице 1, построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

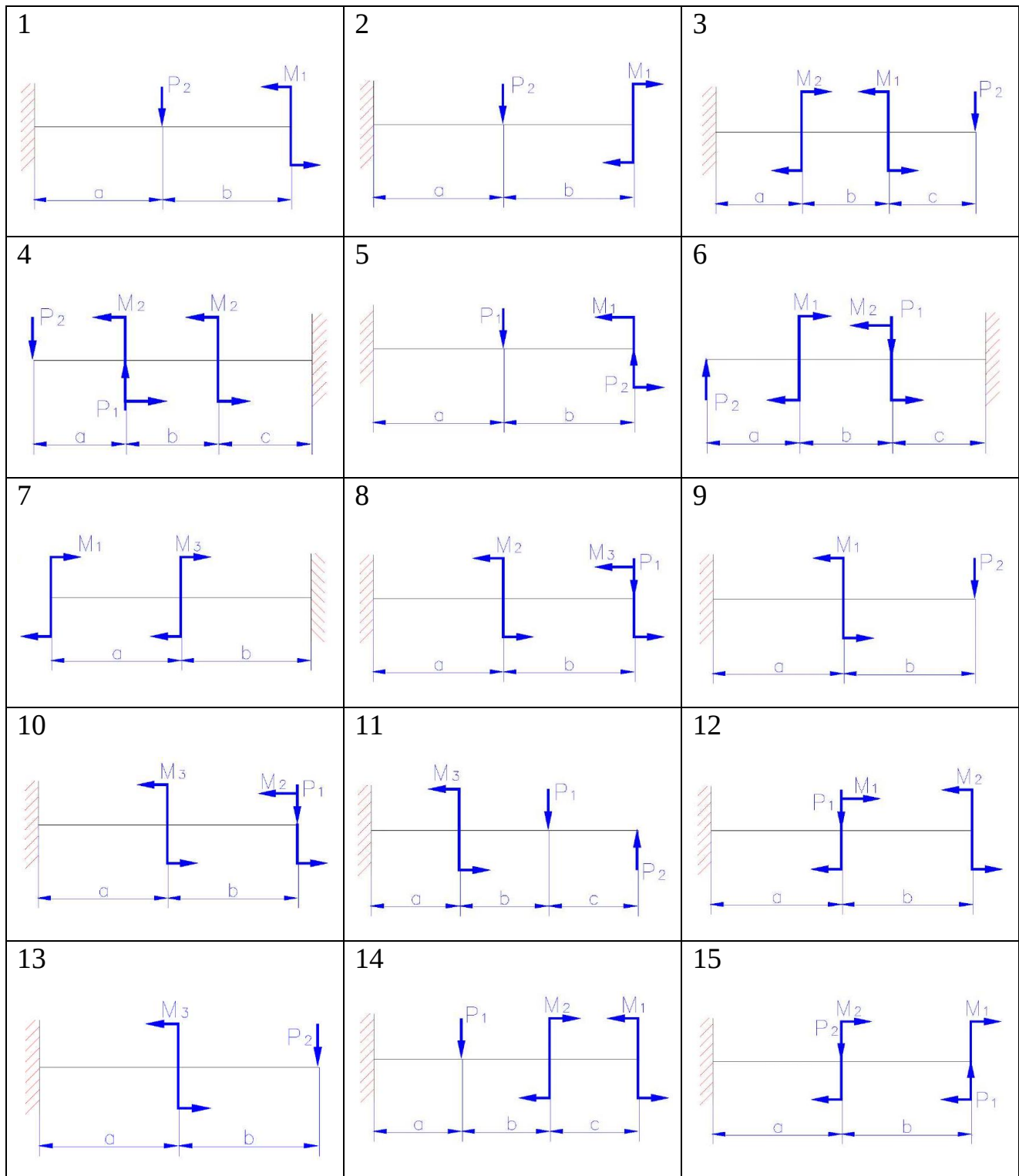


Рисунок 10 – Схемы нагружения консольных балок

Таблица 1 – Числовые значения

подгруппа	P_1 , кН	P_2 , кН	M_1 , кН·м	M_2 , кН·м	M_3 , кН·м	a , м	b , м	c , м
А	10	22	8	4	3	0,2	0,2	0,2
Б	16	8	6	3	4	0,3	0,2	0,4
В	24	5	4	7	5	0,4	0,3	0,2

Вопросы для защиты работы

1. Обязательно ли определять опорные реакции для построения эпюр внутренних усилий в консольных балках?
2. Какие сечения являются границами участков нагружения балок?
3. Постройте эпюры внутренних усилий для консольных балок, схемы которых предложены преподавателем.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ДАННОЙ ТЕМЕ

1 Щербакова, Ю. В. Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебное пособие / Ю. В. Щербакова. - Сопротивление материалов, 2020-02-05. - Саратов : Научная книга, 2019. - 159 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-9758-1776-1

2. Коргин, А. В Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебно-методическое пособие к выполнению практических работ для обучающихся по направлению подготовки 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, профиль «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные средства и оборудование» / А. В. Коргин, В. А. Ермаков, В. А. Романец. - Москва : МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 186 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-7264-1842

3. Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

2 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 12
ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ ПРИ
ИЗГИБЕ ДВУХОПОРНЫХ БАЛОК

Теоретическая часть

Правила построения и проверки эпюр внутренних усилий при изгибе изложены в теоретической части к практическому занятию 4.

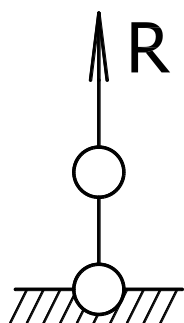


Рисунок 5.1

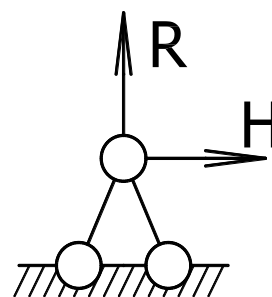


Рисунок 5.2

При конструировании двухопорных балок, как правило, используют два основных типа опорных закреплений. В шарнирно-подвижной опоре (рисунок 5.1) направление реакции R совпадает с направлением связи. В шарнирно-неподвижной опоре (рисунок 5.2) направление реакции неизвестно, поэтому пользуются двумя составляющими – вертикальной R и горизонтальной H , совпадающих с направлением связей. В частных случаях некоторые опорные реакции могут быть равны нулю; например, если балка нагружена только вертикальными усилиями, то горизонтальная составляющая опорной реакции равна нулю.

Пример 5.1

Построить эпюры внутренних усилий для двухопорной балки, нагруженной по всему пролету равномерно распределенной нагрузкой q (рисунок 5.3).

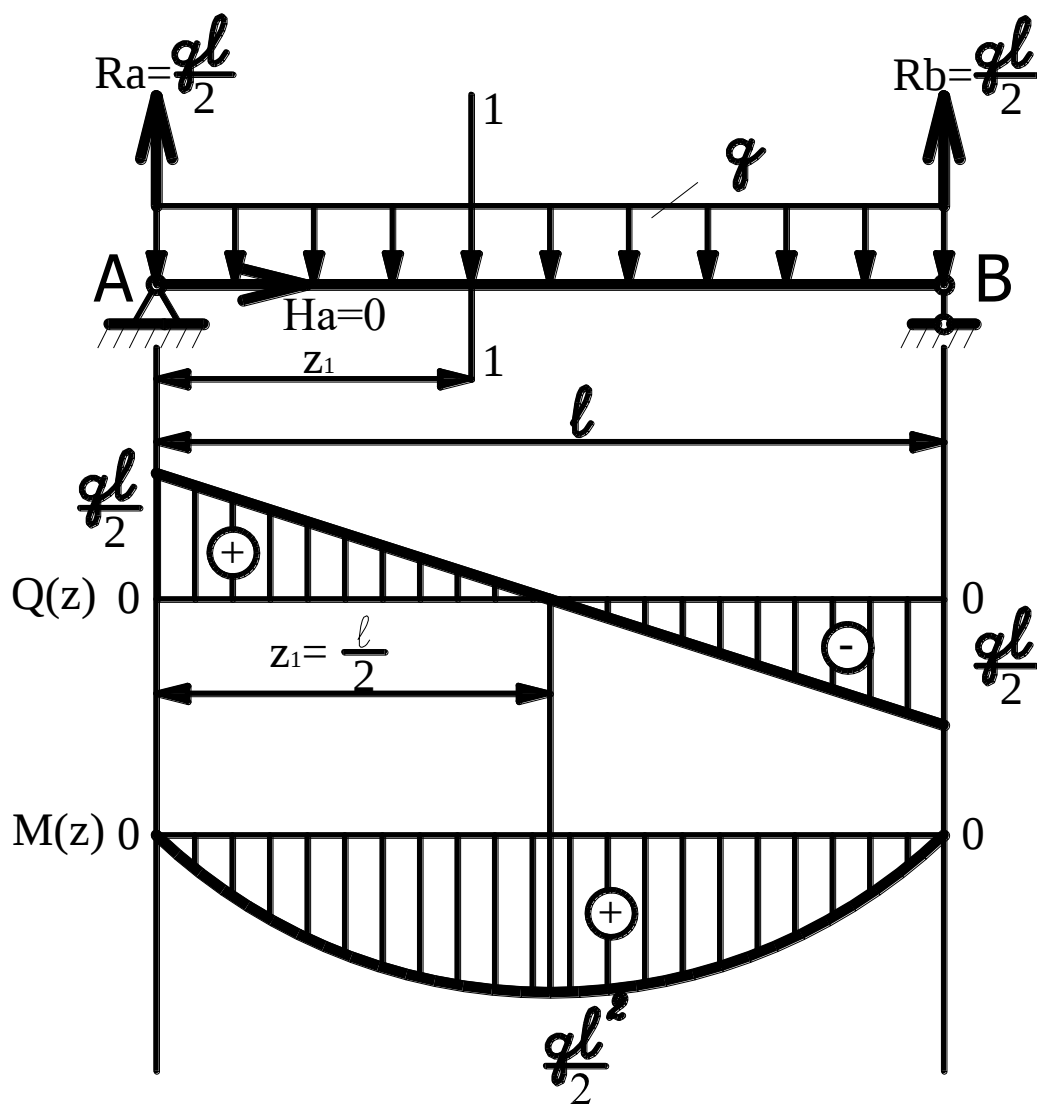


Рисунок 5.3

Решение

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0, \quad -q\ell \cdot \frac{\ell}{2} + R_B \cdot \ell = 0; \quad R_B = \frac{q\ell^2}{2\ell} = \frac{q\ell}{2},$$

$$\sum M_B = 0, \quad q\ell \cdot \frac{\ell}{2} - R_A \cdot \ell = 0; \quad R_A = \frac{q\ell^2}{2\ell} = \frac{q\ell}{2}.$$

Проверка:

$$\sum y = 0, \quad R_A + R_B - q\ell = 0, \quad \frac{q\ell}{2} + \frac{q\ell}{2} - P = 0, \quad 0 \equiv 0.$$

Балка имеет один участок нагружения, для которого определяем внутренние усилия.

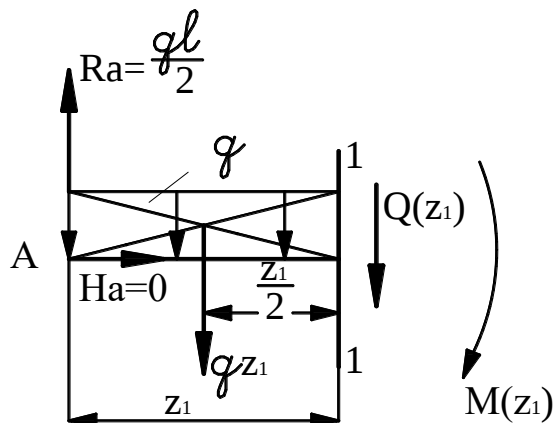


Рисунок 5.4

1-й участок

$$0 \leq z_1 \leq l_1 = l$$

$\sigma(\cdot)A$

$\sigma(\cdot)B$

$$M(z_1) = R_A \cdot z_1 - qz_1 \frac{z_1}{2} = \frac{ql}{2} z_1 - \frac{qz_1^2}{2}:$$

$$\text{в точке } A: z_1=0; \quad M(z_1) = -R_A \cdot 0 = 0;$$

$$\text{в точке } B: z_1=l; \quad M(z_1) = \frac{ql}{2} l - \frac{ql^2}{2} = 0.$$

$$Q(z_1) = R_A - qz_1 = \frac{ql}{2} - qz_1:$$

$$\text{в точке } A: z_1=0; \quad Q(z_1) = \frac{ql}{2} - 0 = \frac{ql}{2};$$

$$\text{в точке } B: z_1=l; \quad Q(z_1) = \frac{ql}{2} - ql = -\frac{ql}{2}.$$

Поскольку поперечная сила в пределах одного участка нагружения меняет знак с плюса на минус, то на эпюре изгибающих моментов в сечении, где поперечная сила равна нулю, будет экстремум (точка максимума). Определим, при каком значении координаты z_1 поперечная сила $Q(z_1)$ обращается в ноль. Для этого приравняем к нулю уравнение поперечной силы $Q(z_1)=0$ для рассматриваемого участка:

$$Q(z_1) = R_A - qz_1 = \frac{ql}{2} - qz_1 = 0; \quad \frac{ql}{2} = qz_1; \quad z_1 = \frac{l}{2}.$$

Определим значение изгибающего момента $M(z_1)$ при $z_1=l/2$:

$$M(z_1) = \frac{ql}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2}{8}.$$

По полученным данным строим эпюры $Q(z_1)$ и $M(z_1)$. Эпюру изгибающего момента строим на растянутых волокнах.

Ввиду нелинейности эпюры $M(z)$ выполним интегральную проверку по формуле (4.2):

$$\Omega_Q^{AB} = M_B - M_A; \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{q\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{q\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} = 0 - 0; \quad 0 \equiv 0,$$

где Ω_Q^{AB} – площадь эпюры поперечных сил на рассматриваемом участке AB ; поскольку на рассматриваемом участке часть эпюры лежит ниже базовой линии, ее площадь полагаем отрицательной, а площадь части эпюры, расположенной выше базовой линии – положительной;

M_B – значение изгибающего момента в точке B – конечной точке рассматриваемого участка;

M_A – значение изгибающего момента в точке A – начальной точке рассматриваемого участка.

Для середины участка нагружения сечения C , где $z_1 = \ell/2$, интегральная проверка выполняется по тем же правилам:

$$\Omega_Q^{AC} = M_C - M_A; \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{q\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{2} - 0 = \frac{q\ell^2}{8} - 0; \quad \frac{q\ell^2}{8} = \frac{q\ell^2}{8}; \quad 0 \equiv 0.$$

Пример 5.2

Построить эпюры внутренних усилий для двухопорной балки, нагруженной как показано на рисунке 5.5.

Решение

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_A = 0,$$

$$R_B \cdot 6\ell - 6q\ell^2 + 2q \cdot 2\ell \cdot \ell - 6q\ell \cdot 2\ell - 2q \cdot 2\ell \cdot \ell = 0; \quad R_B = \frac{q\ell^2}{6\ell} (6 + 12) = 3q\ell;$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-R_A \cdot 6\ell - 6q\ell^2 + 2q \cdot 4\ell \cdot 6\ell + 6q\ell \cdot 4\ell = 0; \quad R_A = \frac{q\ell^2}{6\ell} (48 + 24 - 6) = 11q\ell.$$

Проверка:

$$\sum y = 0, \quad R_A + R_B - 6q\ell - 2q \cdot 4\ell = 0, \quad 11q\ell + 3q\ell - 6q\ell - 2q \cdot 4\ell = 0, \quad 0 \equiv 0.$$

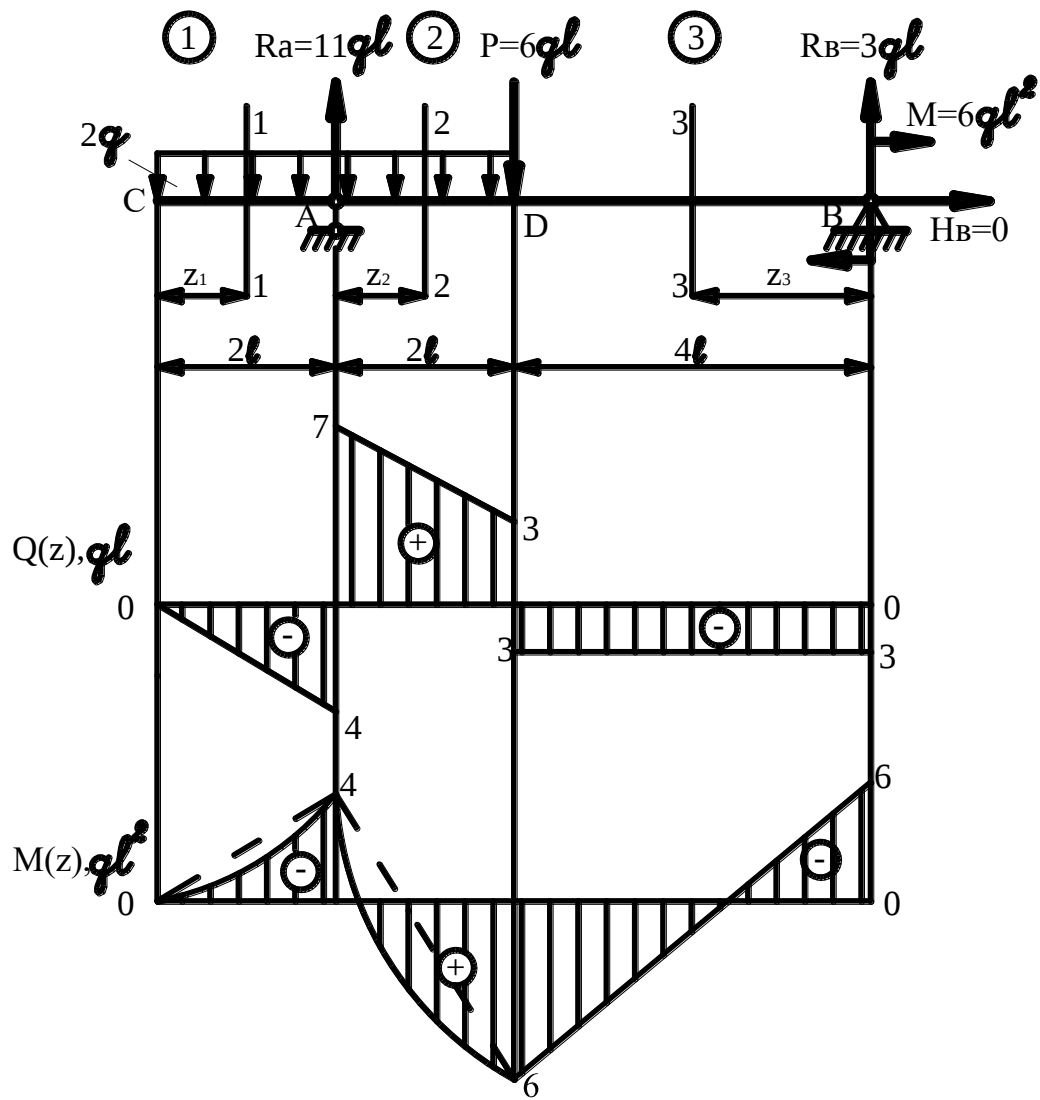


Рисунок 5.5

1 – й участок

$$0 \leq z_1 \leq 2\ell$$

$v(\cdot)C$ $v(\cdot)A$

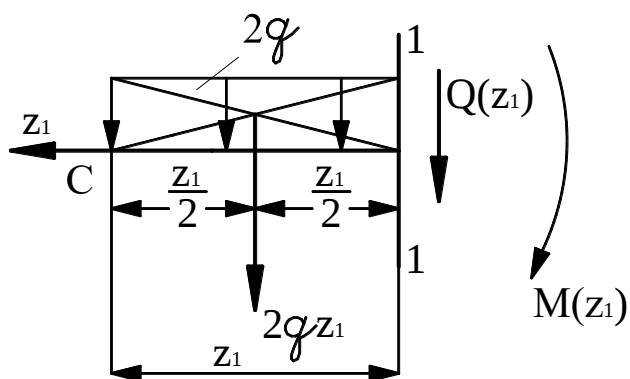


Рисунок 5.6

$$M(z_1) = -2qz_1 \frac{z_1}{2} = -qz_1^2 :$$

в точке C: $z_1=0$; $M(z_1)=0$;

в точке A: $z_1=2\ell$; $M(z_1)=-4q\ell^2$.

$$Q(z_1) = -2qz_1 :$$

в точке C: $z_1=0$; $Q(z_1)=0$;

в точке A: $z_1=4\ell$; $Q(z_1)=-4q\ell$.

2 – й участок

$$0 \leq z_2 \leq 2\ell$$

$\epsilon(\cdot)A$ $\epsilon(\cdot)D$

$$M(z_2) = -2q(2\ell + z_2) \frac{2\ell + z_2}{2} + R_A \cdot z_2 :$$

в точке A: $z_2=0$; $M(z_2)=-4q\ell^2$;

в точке D: $z_2=2\ell$; $M(z_2)=6q\ell^2$.

$$Q(z_1) = -2q(2\ell + z_2) + R_A :$$

в точке A: $z_1=0$; $Q(z_1)=7q\ell$;

в точке B: $z_1=4\ell$; $Q(z_1)=3q\ell$.

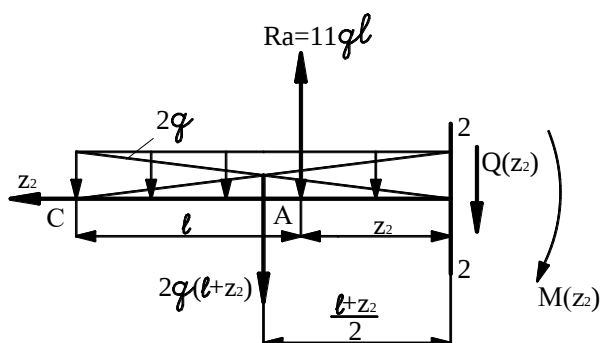


Рисунок 5.7

3 – й участок

$$0 \leq z_3 \leq 4\ell$$

$\epsilon(\cdot)B$ $\epsilon(\cdot)D$

$$M(z_3) = -6q\ell^2 + R_B \cdot z_3 :$$

в точке B: $z_3=0$; $M(z_3)=-6q\ell^2$;

в точке D: $z_3=4\ell$; $M(z_3)=6q\ell^2$.

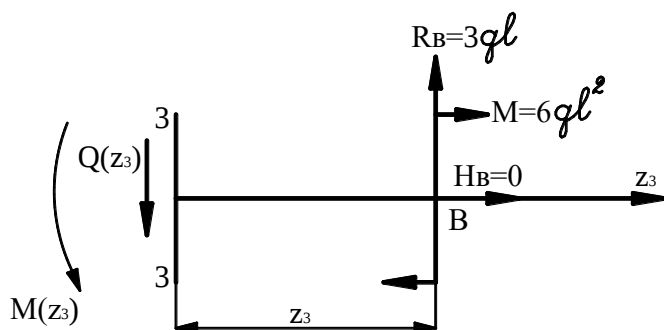


Рисунок 5.8

$$Q(z_1) = -R_B = -3q\ell = \text{const.}$$

Задание 5.1

Для двухопорной балки, схема нагружения которой представлена на рисунке 5.9, построить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил, выполнить проверки и определить положение опасного сечения. Значения нагрузок и размеры элементов балки принять по таблице 5.1.

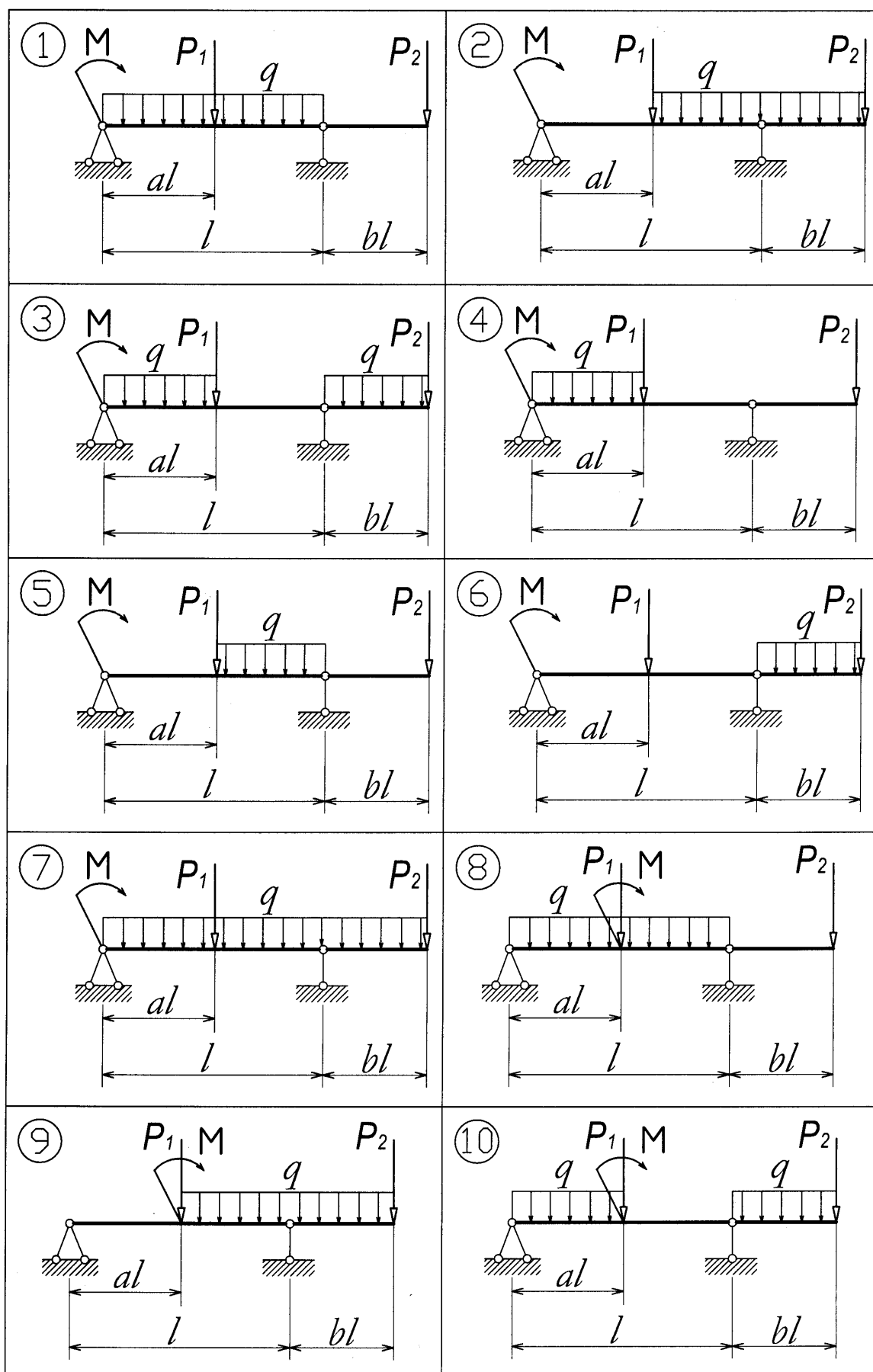
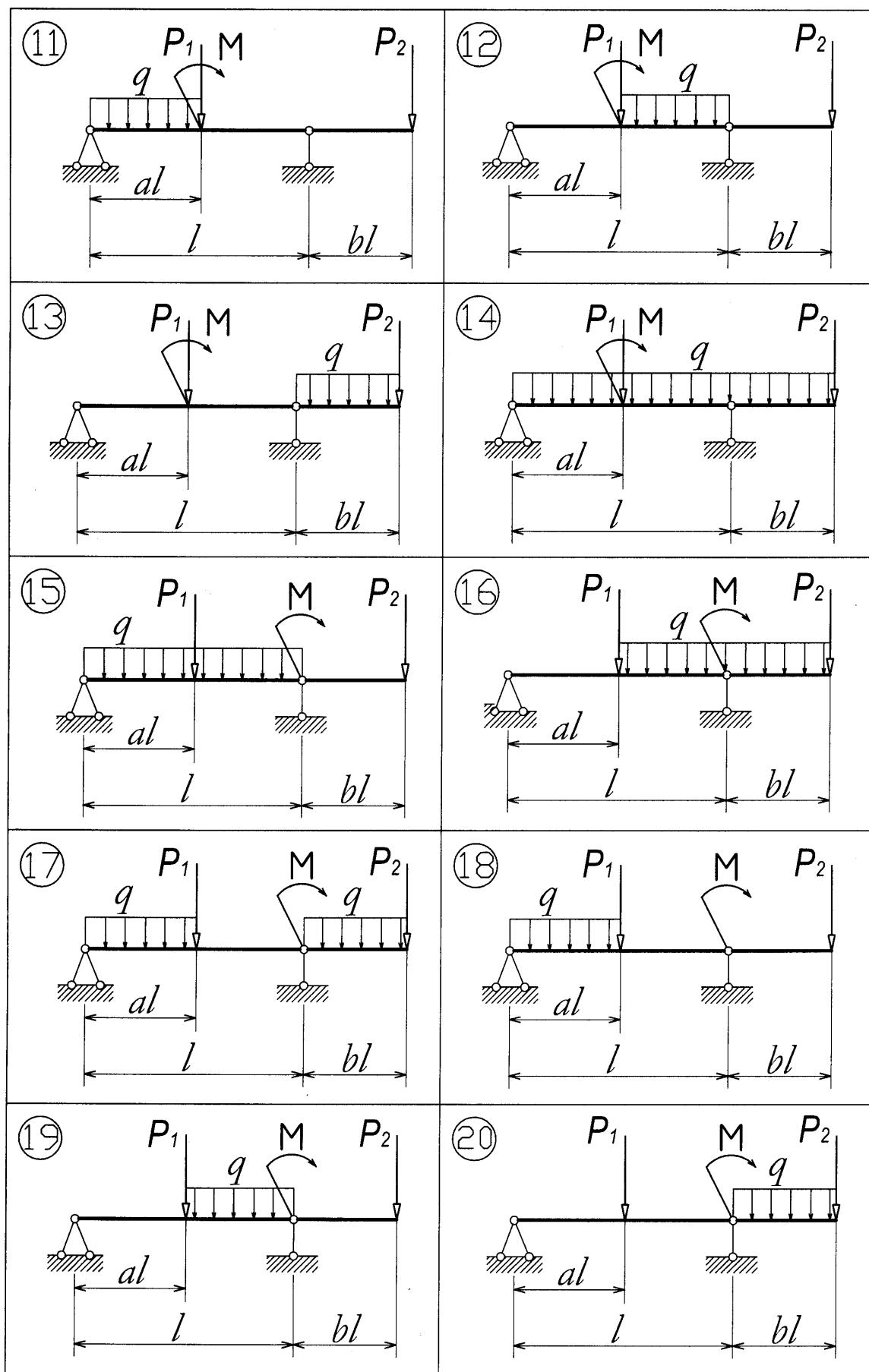
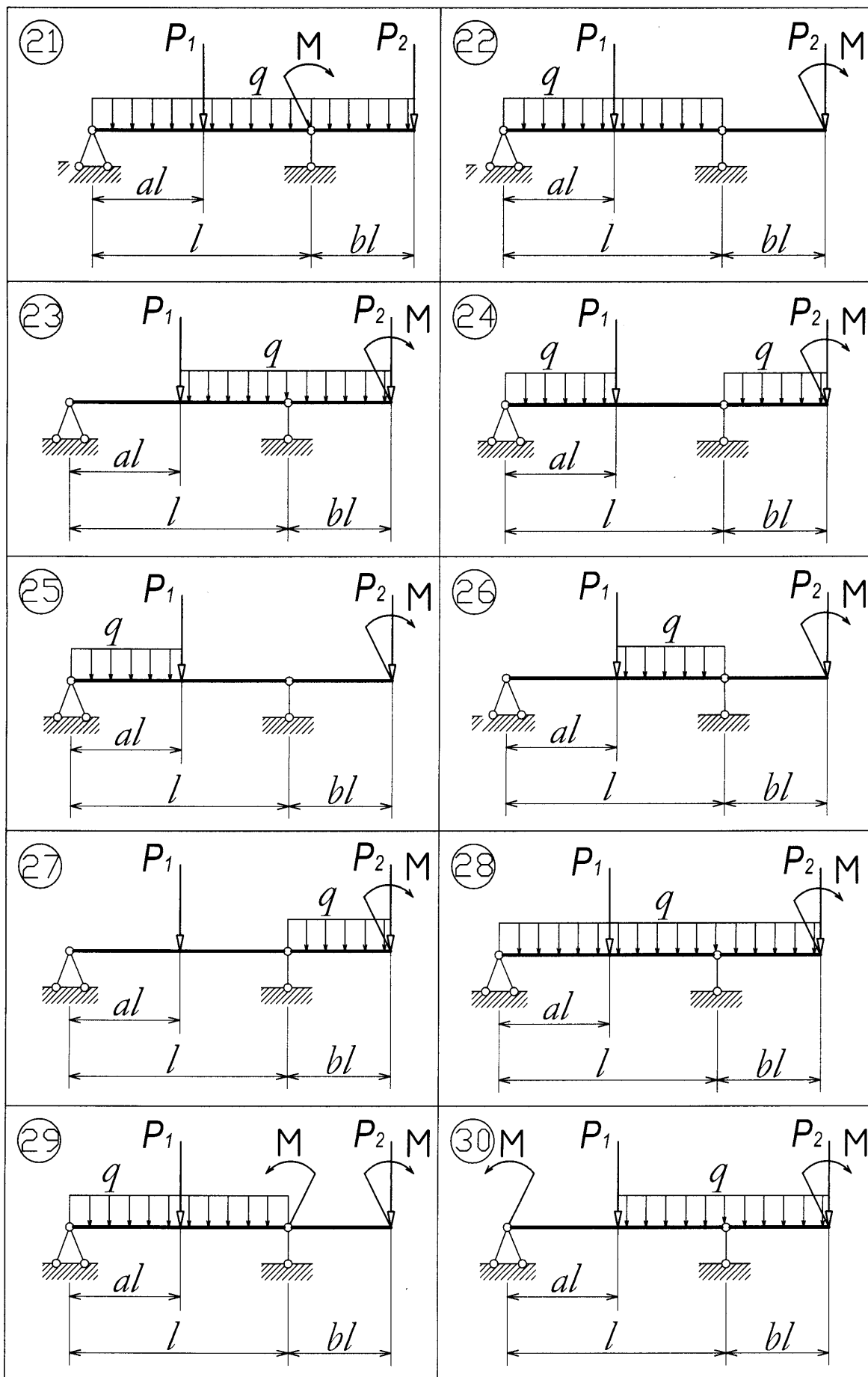


Рисунок 5.9



Продолжение рисунка 5.9



Продолжение рисунка 5.9

Таблица 5.1

№ строки	P ₁	P ₂	M	a	b	№ строки	P ₁	P ₂	M	a	b
1	qℓ	0,5qℓ	qℓ ²	0,5	1	16	0,5qℓ	0,5qℓ	qℓ ²	0,5	2,5
2	qℓ	qℓ	qℓ ²	0,2	1	17	0,5qℓ	qℓ	qℓ ²	0,2	2,5
3	qℓ	1,5qℓ	qℓ ²	0,3	1	18	0,5qℓ	1,5qℓ	qℓ ²	0,3	2,5
4	qℓ	2qℓ	qℓ ²	0,4	1	19	0,5qℓ	2qℓ	qℓ ²	0,4	2,5
5	qℓ	2,5qℓ	qℓ ²	0,6	1	20	0,5qℓ	2,5qℓ	qℓ ²	0,6	2,5
6	2qℓ	0,5qℓ	qℓ ²	0,5	1,5	21	1,5qℓ	0,5qℓ	qℓ ²	0,5	3
7	2qℓ	qℓ	qℓ ²	0,2	1,5	22	1,5qℓ	qℓ	qℓ ²	0,2	3
8	2qℓ	1,5qℓ	qℓ ²	0,3	1,5	23	1,5qℓ	1,5qℓ	qℓ ²	0,3	3
9	2qℓ	2qℓ	qℓ ²	0,4	1,5	24	1,5qℓ	2qℓ	qℓ ²	0,4	3
10	2qℓ	2,5qℓ	qℓ ²	0,6	1,5	25	1,5qℓ	2,5qℓ	qℓ ²	0,6	3
11	3qℓ	0,5qℓ	qℓ ²	0,5	2	26	2,5qℓ	0,5qℓ	qℓ ²	0,5	0,5
12	3qℓ	qℓ	qℓ ²	0,2	2	27	2,5qℓ	qℓ	qℓ ²	0,2	0,5
13	3qℓ	1,5qℓ	qℓ ²	0,3	2	28	2,5qℓ	1,5qℓ	qℓ ²	0,3	0,5
14	3qℓ	2qℓ	qℓ ²	0,4	2	29	2,5qℓ	2qℓ	qℓ ²	0,4	0,5
15	3qℓ	2,5qℓ	qℓ ²	0,6	2	30	2,5qℓ	2,5qℓ	qℓ ²	0,6	0,5

Вопросы для защиты работы

1. Сформулируйте правила проверки правильности построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.
2. Объясните дифференциальные и интегральные зависимости, используемые для проверки правильности построения эпюр внутренних усилий при изгибе.
3. Какие сечения являются границами участков нагружения балок?
4. Обязательно ли определять опорные реакции для построения эпюр внутренних усилий в двухопорных балках?
5. Постройте эпюры внутренних усилий для двухопорных балок, схемы которых предложены преподавателем.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ДАННОЙ ТЕМЕ

- 1 Щербакова, Ю. В. Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебное пособие / Ю. В. Щербакова. - Сопротивление материалов, 2020-02-05. -

Саратов : Научная книга, 2019. - 159 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-9758-1776-1

2. Коргин, А. В Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебно-методическое пособие к выполнению практических работ для обучающихся по направлению подготовки 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, профиль «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные средства и оборудование» / А. В. Коргин, В. А. Ермаков, В. А. Романец. - Москва : МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 186 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-7264-1842

3. Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

2 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЖНЫХ СЕЧЕНИЙ

Цель и содержание работы: изучение геометрических характеристик сложных симметричных сечений, составленных из нескольких простейших геометрических фигур.

Теоретическая часть

Основными геометрическими характеристиками поперечных сечений, определяющими сопротивление различным вида деформаций, являются: площади поперечных сечений, статические моменты, моменты инерции и моменты сопротивления.

Площадь сложной фигуры равна сумме площадей её частей. В сечении выделим элементарную площадь dF (рисунок 9.1). В общем случае площадь сложной фигуры вычисляется путём интегрирования по области сечения

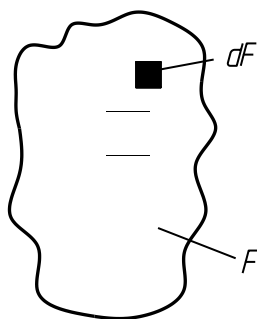


Рисунок 9.1 – Определение площади

$$F = \int_F dF \quad (1)$$

Данный интеграл инвариантен (независим) от выбора системы осей координат. Размерность площади – длина в квадрате $\dim F = L^2$, единицы измерения $m^2, mm^2 \dots$

Статическим моментом сечения относительно некоторой оси называется взятая по всей площади F сумма произведений площадей элементарных площадок dF на их расстояния до этой оси

$$S_x = \int_F y dF \quad (2)$$

$$S_y = \int_F x dF \quad (3)$$

В зависимости от положения оси, относительно которой вычисляется статический момент, он может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Размерность статического момента – длина в третьей степени $\dim S_x = L^3$, единицы измерения $m^3, mm^3 \dots$

Рассмотрим сечение произвольной формы площадью F . Выделим элементарную площадку dF с координатами x и y в данной системе координат XU . Параллельно осям XU введем новую систему координат X_1Y_1 на расстоянии a и b между осями.

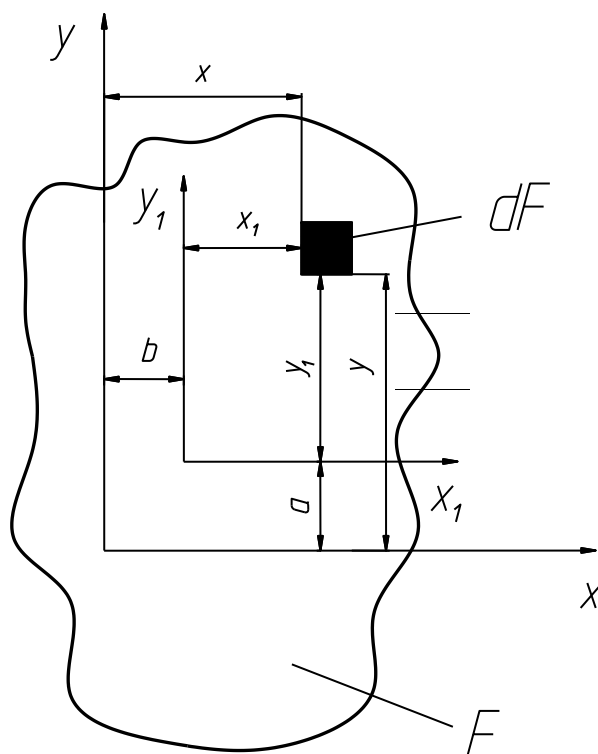


Рисунок 9.2 – Определение координат центра тяжести сечения

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x - b \\ y_1 &= y - a \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

По аналогии с формулами (2) и (3) можно записать:

$$S_{x_1} = \int y_1 dF = \int (y - a) dF = \int y dF - a \int dF = S_x - aF \quad (5)$$

$$S_{y_1} = \int x_1 dF = \int x dF - b \int dF = S_y - bF \quad (6)$$

Центральными называются оси, относительно которых статические моменты равны 0. Точку пересечения центральных осей называют центром тяжести сечения.

Пусть оси X_1Y_1 – центральные, следовательно, уравнения (5) и (6) имеют вид:

$$0 = S_x - aF;$$

$$0 = S_y - bF;$$

Выполним подстановку: $a = y_c$, $b = x_c$, следовательно:

$$\left. \begin{aligned} y_c &= \frac{S_x}{F} \\ x_c &= \frac{S_y}{F} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где x_c и y_c – координаты центра тяжести относительно произвольной системы координат XU . Из (7) следует, что статический момент можно определить, как произведение площади фигуры на расстояние её центра тяжести до оси координат.

$$S_x = Fy_c, \quad S_y = Fx_c \quad (7 \text{ а})$$

Для теоретического определения положения центра тяжести сложного сечения его разбивают на простые фигуры (прямоугольник, треугольник, круг, полукруг). Координаты центра тяжести определяются по известным из теоретической механики зависимостям

$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{yi}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$ $y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{xi}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}$	(8)
---	-----

где x_c, y_c – координаты центра тяжести сложного сечения; x_i, y_i – координаты центров тяжести простейших фигур, на которые разбито сечение, подставляются в выражения (8) с учетом знаков. В формулах (8) координаты x_i, y_i и площади F_i могут иметь положительный и отрицательный знак. При наличии отверстий или вырезов в сечениях значения площадей подставляются с отрицательным знаком.

Для экспериментального определения положения центра тяжести сечения нужно подвесить плоский образец сечения в произвольной точке, с помощью отвеса отбить вертикальную линию; изменить точку подвеса, вновь отбить отвесом вертикальную прямую; на пересечении отбитых линий отметить центр тяжести сечения.

Осевым моментом инерции плоского сечения относительно некоторой оси называют взятую по всей площади F сумму произведений площадей элементарных площадок dF на квадраты их расстояний до этой оси.

$$I_x = \int_F y^2 dF \quad (9)$$

$$I_y = \int_F x^2 dF \quad (10)$$

Осевой (его иногда называют экваториальным) момент инерции является величиной существенно положительной, т.к. координата возведена в квадрат.

Полярным моментом инерции I_ρ относительно некоторого полюса называется взятая по всей площади сечения F сумма произведений площадей элементарных площадок dF на квадраты их расстояний до этого полюса:

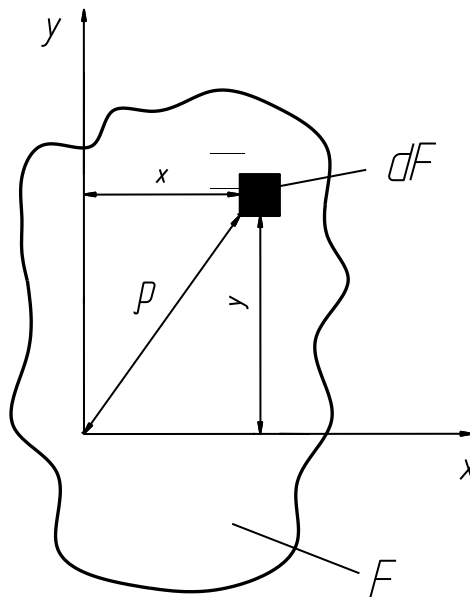


Рисунок 9.4 - Определение осевых и полярного моментов

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF \quad (11)$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \quad (12)$$

$$I_\rho = \int (x^2 + y^2) dF = \int x^2 dF + \int y^2 dF = I_y + I_x \quad (13)$$

Сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно точки пересечения этих осей (начала координат).

Значения I_x и I_y для простых фигур приведены в справочной литературе. Для наиболее распространенных сечений эти значения приведены в таблице 9.1

Центробежным моментом инерции I_{xy} относительно двух взаимно перпендикулярных осей называется взятая по всей площади сечения сумма произведений площадей элементарных площадок dF на произведение их расстояний до этих осей

$$I_{xy} = \int_F xy dF \quad (14)$$

Размерность осевого, полярного и центробежного моментов инерции – длина в четвёртой степени $\dim I_x = \dim I_\rho = \dim I_{xy} = L^4$, единицы измерения m^4 , $mm^4 \dots$

В зависимости от расположения осей он может быть как положительным, так и отрицательным и в частных случаях равным нулю. Если сечение имеет ось симметрии, то его центробежный момент инерции относительно этой оси и перпендикулярной к ней оси равен нулю.

Две взаимно перпендикулярных оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями инерции, а осевые моменты инерции относительно этих осей – главными моментами инерции.

Осевым моментом сопротивления сечения называется частное от деления осевого момента инерции, взятого относительно этой же оси, на расстояние y_{max} или x_{max} от рассматриваемой оси до наиболее удаленной точки сечения:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}, \quad W_y = \frac{I_y}{x_{max}} \quad (15)$$

y_{max} – это расстояние от оси X до наиболее удаленной точки сечения.

x_{max} – расстояние от оси Y до наиболее удаленной точки сечения.

Геометрические характеристики сечений изменяются по величине с изменением положения системы координат. При параллельном переносе осей координат осевые и центробежный моменты инерции преобразуются в соответствии с формулой Гюйгенса и определяются из выражений (16):

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= I_x + a^2 F \\ I_{y_1} &= I_y + b^2 F \end{aligned} \quad (16)$$

$$I_{x_1y_1} = I_{xy} + abF$$

где a – расстояние между осями X и X_1 ; b – расстояние между осями Y и Y_1 . При этом оси координат X и Y должны быть обязательно центральными, т. е. проходить через центр тяжести фигуры.

Моменты инерции сложного сечения I определяются как алгебраическая сумма моментов инерции составных частей

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n. \quad (17)$$

Через любую точку сечения всегда можно провести две взаимно перпендикулярные главные оси. Как правило, практическое значение имеют главные оси, проходящие через центр тяжести; они называются главными центральными осями инерции. Эти оси принято обозначать u и v . Моменты инерции относительно главных центральных осей (I_u и I_v) называются главными центральными моментами инерции.

Главные оси u и v характерны тем, что относительно одной из них осевой момент инерции максимален, а относительно другой – минимален по сравнению с моментами инерции относительно любых других осей, проходящих через ту же точку.

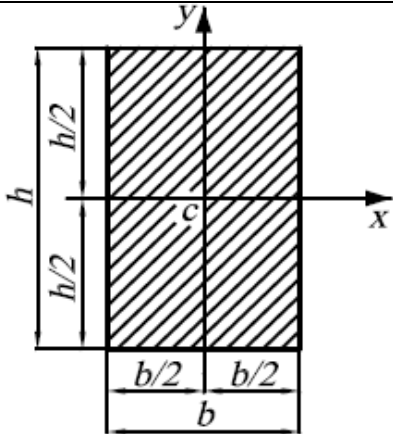
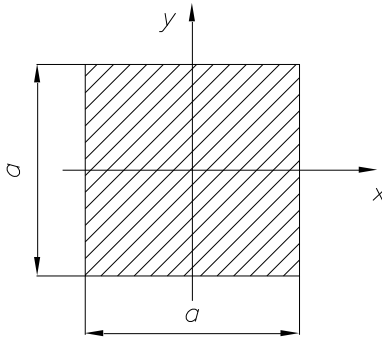
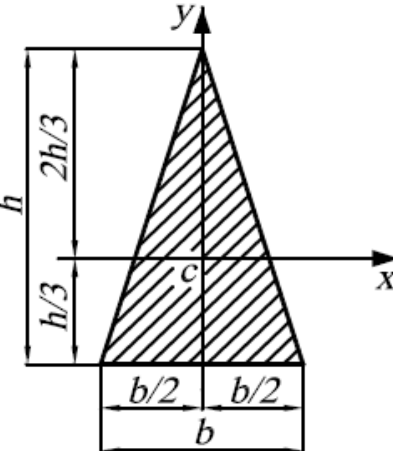
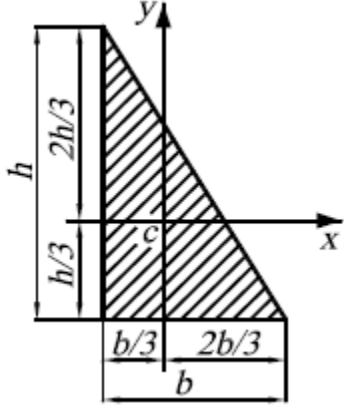
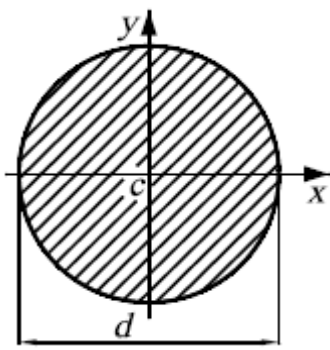
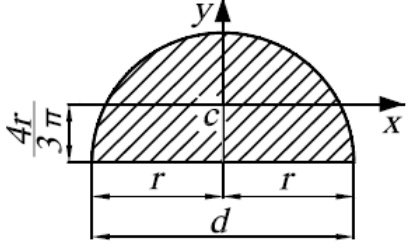
Для сечений, имеющих одну или несколько осей симметрии, положение главных осей определяется на следующих основаниях:

о если сечение имеет ось симметрии, то эта ось и любая другая ось, ей перпендикулярная, образуют систему главных осей;

о если сечение имеет две оси симметрии, то эти оси симметрии являются главными центральными осями инерции сечения;

о если сечение имеет три и более осей симметрии, то любая центральная ось сечения является главной и все главные центральные моменты инерции сечения равны между собой.

Таблица 9.1 – Моменты инерции сечений

№	Сечение	I_x	I_y	№	Сечение	I_x	I_y
1		$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	2		$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$
3		$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{48}$	4		$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{36}$
5		$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	6		$0,11r^4$	$\frac{\pi d^4}{128}$

Примечание к таблице:

1. Оси X и Y – центральные оси
2. Для второй и пятой фигур значения I_x и I_y не изменяются при любом повороте оси.
3. Для первой, третьей, четвертой фигур в кубе берется та сторона, которую пересекает данная ось.

Задание

В таблице 9.2 заданы варианты сложных симметричных сечений, для которых требуется:

- экспериментально определить положение центра тяжести сечения;
- вычертить заданное сечение в масштабе, нанести на него систему координат XOY так, чтобы ось Y являлась одновременно осью симметрии сечения;
- разбить заданное сечение на простейшие (прямоугольник, треугольники, полукруг), определить площадь каждой простой фигуры F_i и площадь всей фигуры F ;
- нанести на схему центры тяжести каждой простой фигуры C_i и провести через них координатные оси X_i и Y_i , параллельные ранее выбранным осям X и Y ;
- определить координаты центра тяжести каждой из фигур в предварительно выбранной случайной системе координат XOY ;
- по схеме найти расстояния y_i между осями X и X_i ; и расстояния x_i между осями Y и Y_i ;
- по формулам (5, 6) вычислить статические моменты каждой простой фигуры относительно ранее выбранных случайных осей X и Y ;
- по формулам (8) вычислить координаты центра тяжести сечения X_C и Y_C ; сравнить расчетные значения с экспериментальными, полученными в п.1, определить погрешность измерений;
- отметить на схеме положение центра тяжести фигуры – точки C и провести через нее координатные оси X_C и Y_C , параллельные осям X и Y ;
- найти расстояния между осями X_C и X_i : $a_i = y_i - y_C$ и показать их на чертеже;

- найти расстояния между осями Y_C и Y_i : $b_i = x_i - x_C$ и показать их на чертеже;
- пользуясь таблицей 9.1, вычислить осевые I_{xi} , I_{yi} моменты инерции каждой простой фигуры относительно её собственных центральных осей инерции $X_i C_i Y_i$;
- по формулам (16) вычислить моменты инерции всей фигуры относительно главных центральных осей инерции X_C и Y_C ;
- найти моменты сопротивления сечения в главных осях инерции по формулам (15).

Пример определения геометрических характеристик сложного сечения

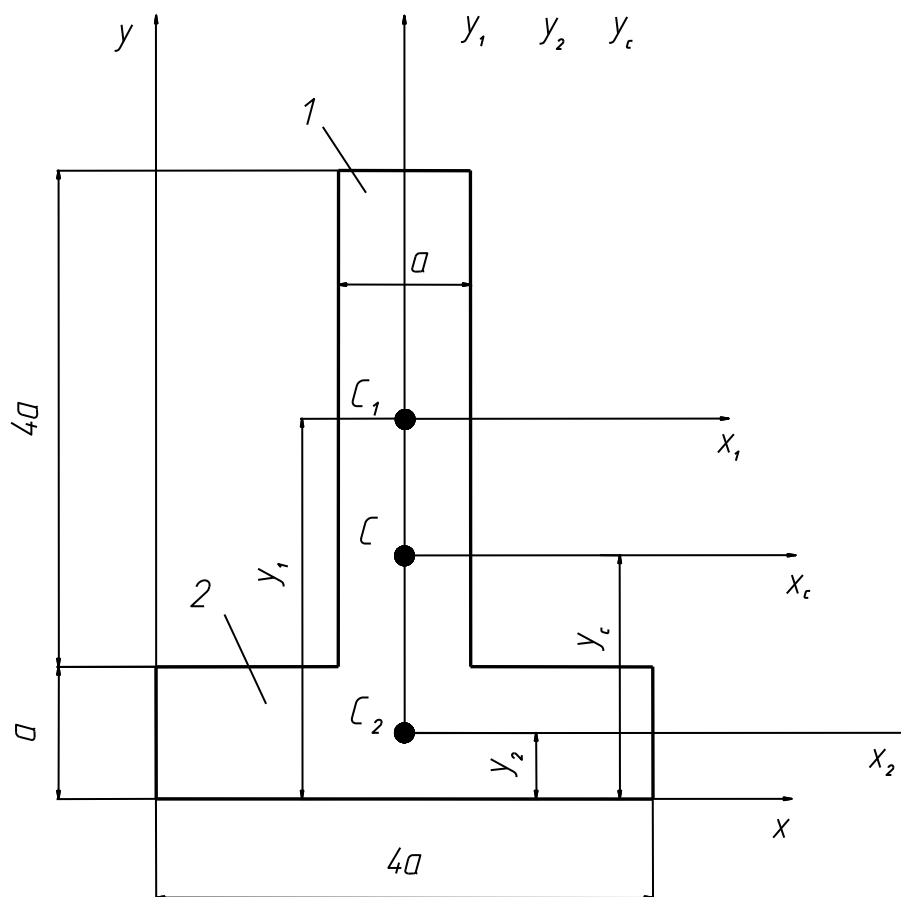


Рисунок 9.3 - Пример

$$F_1 = F_2 = 4a^2$$

$$x_1 = 2a; \quad x_2 = 2a$$

$$X_c = \frac{\sum S_y}{\sum F} = \frac{S_y^{(1)} + S_y^{(2)}}{F_1 + F_2} = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2} = \frac{4a^2 \times 2a + 4a^2 \times 2a}{8a^2} = 2a$$

Если сечение имеет ось симметрии, то эта ось – центральная.

$$y_c = \frac{\sum S_x}{\sum F} = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2}{F_1 + F_2} = \frac{4a^2 \times 3a + 4a^2 \times 0,5a}{8a^2} = 1,75a$$

$$y_1 = 3a, \quad y_2 = \frac{a}{2} = 0,5a$$

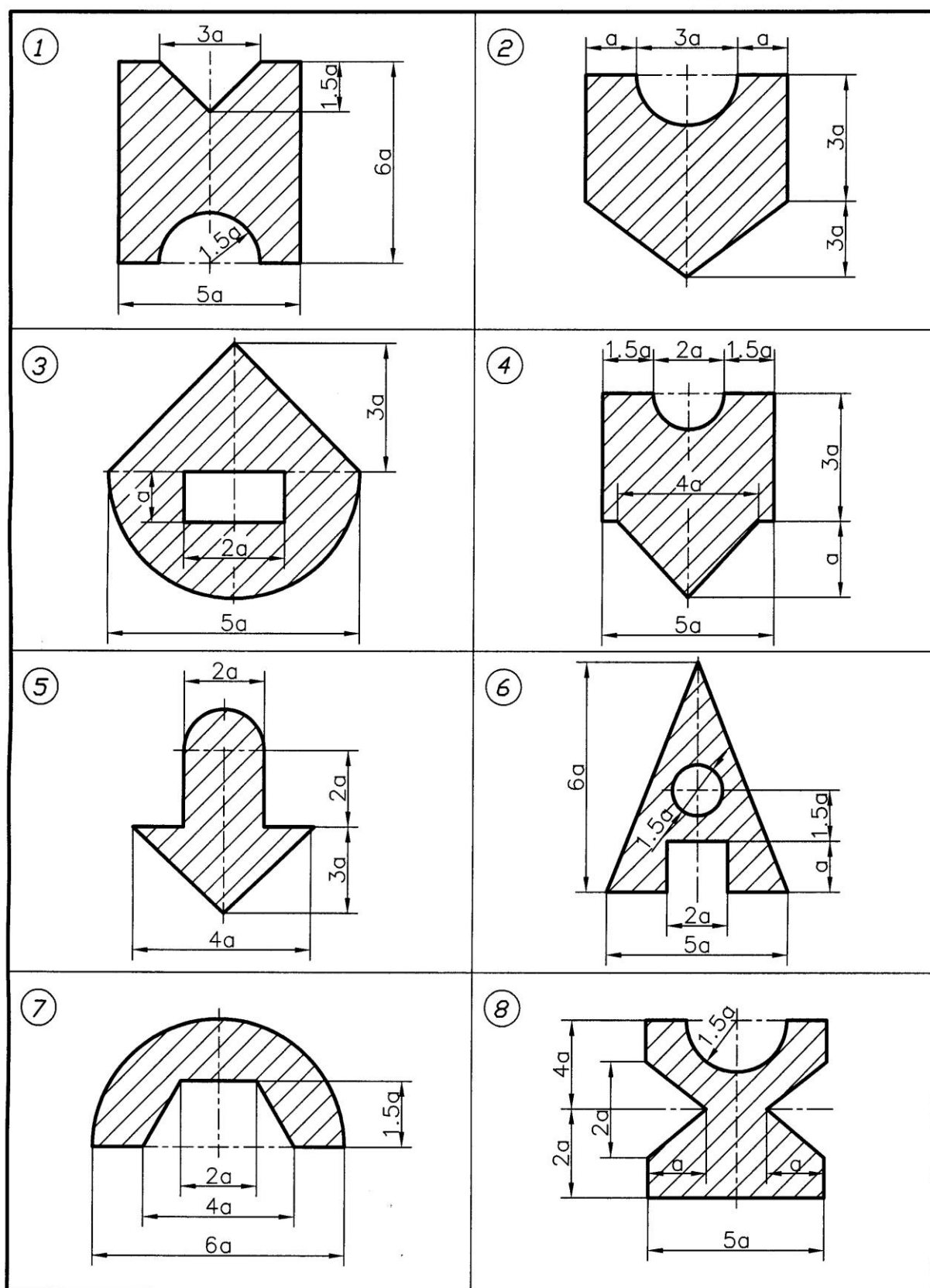
$$I_{yc}^{(1)} = I_{y_1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{4aa^3}{12} \approx 0,3a^4$$

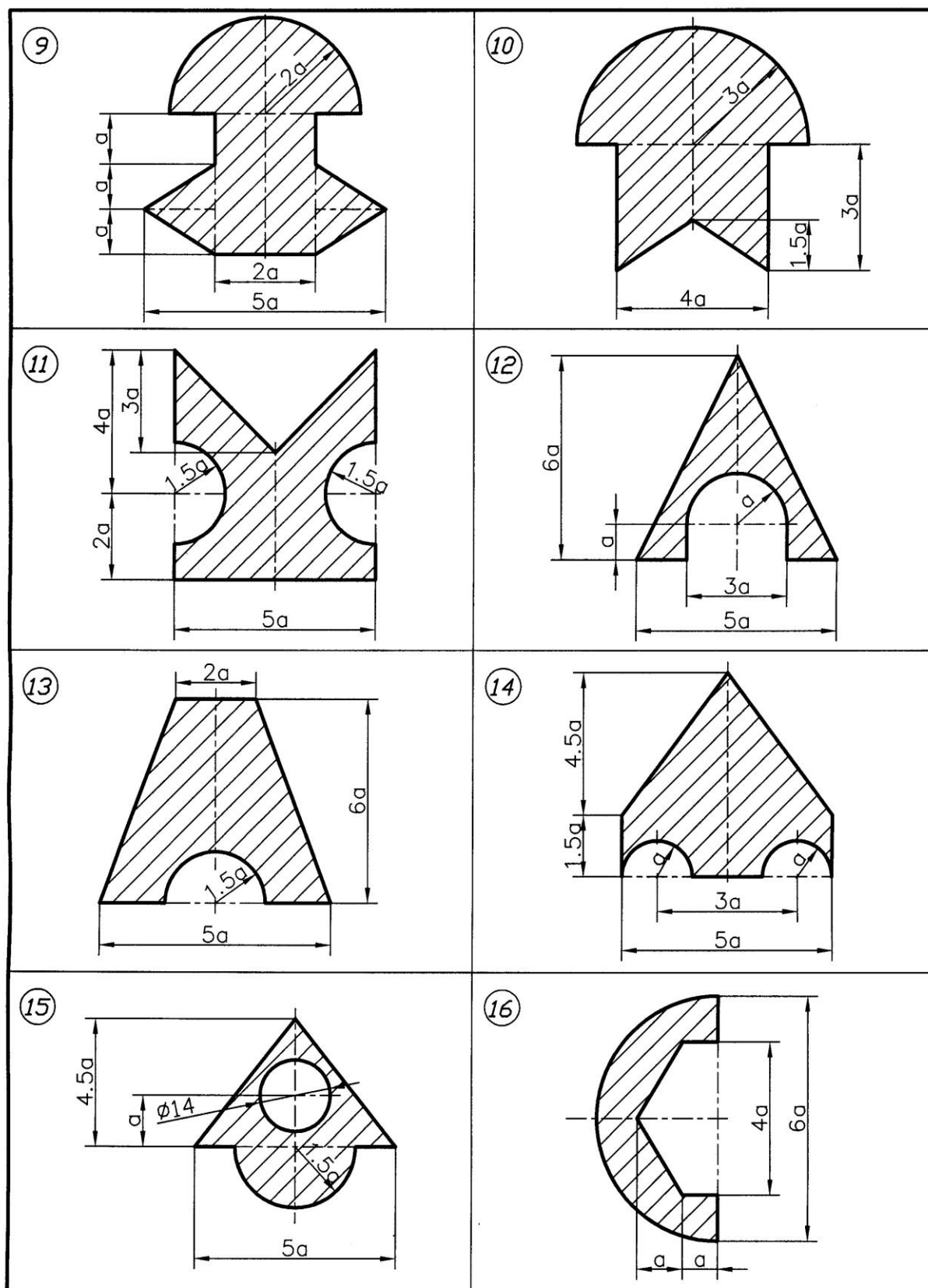
$$I_{yc}^{(2)} = I_{y_2} = \frac{a(4a)^3}{12} \approx 5a^4$$

$$I_{yc} = I_{yc}^{(1)} + I_{yc}^{(2)} \approx 5,3a^4$$

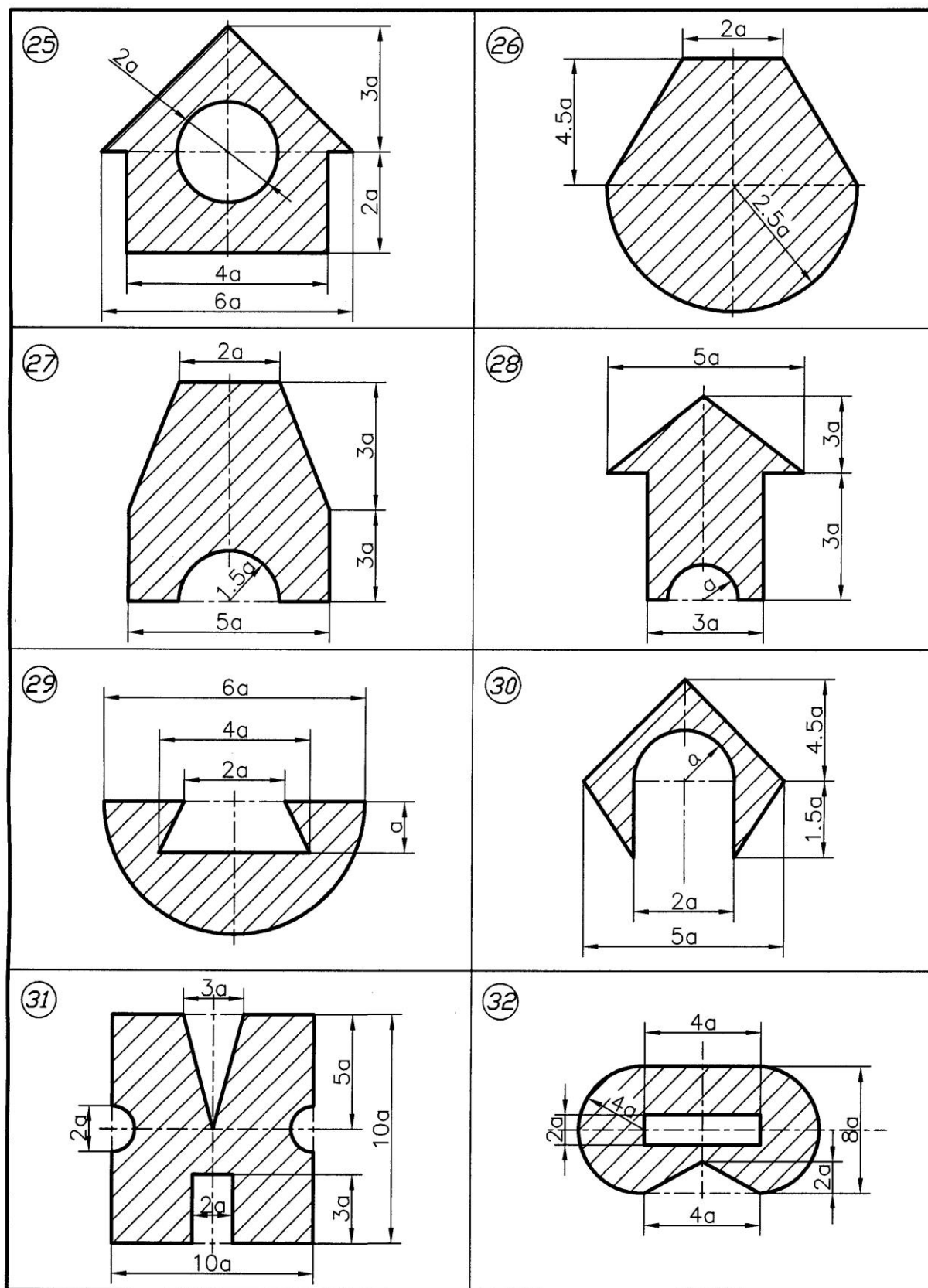
$$W_{yc} = \frac{I_{yc}}{x_{\max}} = \frac{5,3a^4}{2a} \approx 2,7a^3$$

Таблица 9.2 – Расчетные схемы сложных сечений





17	18
19	20
21	22
23	24



Вопросы для защиты работы:

1. Относительно каких осей следует определять моменты сопротивления и моменты инерции сечения при изгибе?
2. Какие оси называются главными и центральными?
3. Как определить положение центра тяжести сложного сечения?
4. Какой знак имеют осевые моменты инерции сечения?
5. Как определить моменты инерции сечения относительно параллельных осей, одни из которых центральные?
6. Какие моменты инерции называются главными?
7. Чему равны осевые моменты инерции прямоугольника, круга, квадрата, треугольника, полукруга относительно их главных осей инерции?
8. Что называется осевым моментом сопротивления сечения?
9. По заданию преподавателя определить геометрические характеристики (моменты инерции и моменты сопротивления) сечения, составленного из простых геометрических фигур.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ДАННОЙ ТЕМЕ

1 Щербакова, Ю. В. Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебное пособие / Ю. В. Щербакова. - Сопротивление материалов, 2020-02-05. - Саратов : Научная книга, 2019. - 159 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-9758-1776-1

2. Коргин, А. В Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебно-методическое пособие к выполнению практических работ для обучающихся по направлению подготовки 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, профиль «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные средства и оборудование» / А. В. Коргин, В. А. Ермаков, В. А. Романец. - Москва : МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 186 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-7264-1842

3. Селиванов, Ю.Т. Прикладная механика : учебное пособие / Ю.Т. Селиванов ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2017. - 81 с. : ил. - Библиогр.: с. 77 - ISBN 978-5-8265-1807-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=499187> (13.04.2019).

2 Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гумерова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428011> (10.09.2018).

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к самостоятельной работе по дисциплине
«Техническая механика»
для студентов направления
23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и
комплексов»**

Ставрополь
2023

Данные методические указания к самостоятельной работе по дисциплине «Техническая механика» предназначены для бакалавров направления подготовки 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов очной формы обучения.

В методических указаниях определена цель самостоятельной работы и приведен теоретический материал, необходимый студентам для выполнения поставленных перед ними задач. Приведен список необходимой литературы.

Составитель: к.т.н., доцент. В. Г. Терещенко.

Рецензент: д.т.н., проф. В. Г. Копченков.

Содержание

	Стр.
1. Цель и задачи самостоятельной работы по освоению дисциплины	5
2. Подготовка к лабораторным занятиям	6
3. Самостоятельное изучение теоретических вопросов	8
4. Научно-исследовательская работа студентов	9
Рекомендуемая литература и сайты	10

1. Цель и задачи самостоятельной работы по освоению дисциплины.

Самостоятельная работа – очень важная, неотъемлемая часть обучения. Целью самостоятельной работы по «Технической механике» в комплексе с аудиторными занятиями является формирование следующих компетенций будущего бакалавра по направлению 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, содержание которых представлено в таблице 1.

Таблица 1. – Компетенции, формируемые при изучении «Технической механики»

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования.	ИД-1. ОПК-1. Умеет использовать методы математического анализа и моделирования в оценке надежности автотранспортных средств, их узлов, агрегатов, механизмов и деталей.	Применяя естественнонаучные и общетехнические знания основных понятий и аксиом статики, условий равновесия твёрдого тела, характеристик поступательного и вращательного движения, основных законов динамики, гипотез сопротивления материалов, видов деформации бруса, характеристик и видов напряжённого состояния, использует методы математического анализа и моделирования, умеет выполнять элементарные кинематические, динамические и прочностные расчёты.
ОПК-3. Способен в сфере своей профессиональной деятельности проводить измерения и наблюдения, обрабатывать и представлять экспериментальные данные и результаты	ИД-1. ОПК-3. Владеет умениями использовать необходимые методы измерений и наблюдений в технологических процессах производства.	Используя знания о размерностях и единицах измерения величин в области технической механики, об основах анализа размерностей и теории подобия, способен сформулировать задачу

испытаний		экспериментального исследования, измерений и наблюдений в технологических процессах производства.
-----------	--	---

Задачами освоения дисциплины являются: привитие обучаемому навыков использования законов и методов теоретической механики и сопротивления материалов.

2. Подготовка к лабораторным занятиям

На лабораторных занятиях по технической механике студенты выполняют эксперименты, изучают образцы, выполняют расчёты, графические построения, эскизы образцов и деталей, изучают примеры выполнения заданий и выполняют задания самостоятельно. Все задания предполагают выполнение графических изображений и вычислений.

Поэтому на каждом лабораторном занятии студент должен иметь тетрадь, ручку, карандаш, ластик, два треугольника (с углами 30, 60, и 90 градусов, и с углами 45, 45 и 90 градусов) или треугольник и линейку, циркуль, транспортир, инженерный калькулятор.

Перед лабораторным или практическим занятием (накануне) студент должен внимательно прочесть записи последних текущих лекций по «технической механике». С теоретическим материалом по данному лабораторному или практическому занятию можно также предварительно ознакомиться (в сжатом виде) по методическим указаниям к выполнению лабораторных работ по дисциплине «техническая механика» для бакалавров направления 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов.

Свою готовность к выполнению лабораторной работы студент проверяет самостоятельно, мысленно отвечая на вопросы для защиты работы.

Тем студентам, кому трудно даются решение задач и понимание различных разделов дисциплины «техническая механика», рекомендуется вернуться к ранее пройденному и вновь прочитать соответствующие места в своём школьном учебнике физики, геометрии или алгебры.

Для понимания раздела статики необходимо знать следующие сведения. Из математики – теорему синусов, теорему косинусов, площадь треугольника, сложение векторов, векторное произведение двух векторов. Из физики – законы Ньютона. Рекомендуется повторить эти темы.

Т.к. время, отведённое на самостоятельную работу сопоставимо со временем аудиторных занятий, значительную часть расчётов, графических построений, оформления лабораторной работы или практического занятия студент выполняет самостоятельно. Как правило, выполненную полностью и оформленную работу студент должен предоставить для проверки преподавателем на следующем лабораторном занятии. Для защиты проделанной работы студент должен уметь объяснить смысл и логику своих записей, выполнить небольшое задание, аналогичное части проделанной работы, ответить на вопросы к занятию.

3. Самостоятельное изучение теоретических вопросов

В соответствии с учебным планом «Техническая механика» изучается на I и II курсах. В часы самостоятельной работы студенту необходимо: Закреплять знания и навыки, полученные на аудиторных занятиях с преподавателем. Выполнять выданные на занятиях задания в соответствии со своим вариантом, доделывать, оформлять лабораторные работы. Изучить дополнительные темы и подготовиться к ответам на вопросы:

Тема 1 Статика.

1. Основные понятия и модели механики.
2. Механическое движение и взаимодействие.
3. Векторные величины в механике. Действия с векторами.
4. Системы координат. Число степеней свободы точки и твёрдого тела.
5. Основные и производные размерности величин в механике.

1. Методы сложения сил.
2. Условия равновесия системы сходящихся сил.
3. Момент силы относительно точки и его свойства.
4. Момент силы относительно точки как векторная величина.
5. Пара сил, момент пары сил.
6. Условия эквивалентности пар сил, лежащих в одной плоскости.
7. Условие эквивалентности пар сил в пространстве.
8. Какие элементы пары сил определяет её вектор?
9. Теоремы об эквивалентности и о сложении пар.
10. Момент силы относительно оси
11. Условия равновесия твёрдого тела в пространстве.
12. Условия равновесия плоской системы сил.
13. Связи и их реакции.
14. Статически определимые и статически неопределимые системы сил
15. Равновесие плоской системы параллельных сил.
16. Что называют системой параллельных сил?
17. Как направлен главный вектор системы параллельных сил? Чему равен его модуль?
18. Уравнения равновесия параллельных сил на плоскости.

Тема 2 Кинематика.

1. Способы задания движения точки.
2. Поступательное движение твёрдого тела.
3. Вращательное движение твёрдого тела вокруг неподвижной оси.
4. Плоскопараллельное движение твёрдого тела.
5. Скорости и ускорения точек вращающегося тела.
6. Теорема о проекциях скоростей двух точек тела.
7. Определение скоростей точек плоской фигуры и помощью мгновенного центра скоростей.

Тема 3 Динамика.

8. Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальной точки.
9. Принцип Даламбера для материальной точки.
10. Количество движения материальной точки.
11. Кинетическая энергия материальной точки.
12. Теорема об изменении количества движения материальной точки.
13. Момент количества движения точки относительно центра и оси.
14. Теорема об изменении момента количества движения точки (теорема моментов).
15. Работа силы. Мощность.
16. Теорема об изменении кинетической энергии точки.

Тема 4 Модель и свойства деформируемого тела.

1. Какие силы называют внутренними?
2. Как определяют главный вектор внутренних сил?
3. Как определяют главный момент внутренних сил?
4. Понятие прочности в сопротивлении материалов.
5. Понятия жёсткости и устойчивости.
6. Модель материала в дисциплине «сопротивление материалов».
7. Деформации и перемещения.
8. Полное механическое напряжение.
9. Составляющие полного механического напряжения.
10. Понятие о напряжённом состоянии точки.

11. Деформации линейные и угловые, обратимые и необратимые.

Тема 5 Частные случаи деформации бруса.

1. Основные виды деформаций бруса.
2. Внутренние силы при растяжении и сжатии.
3. Каковы «механизмы» пластической деформации?
4. Абсолютное и относительное удлинение.
5. Коэффициент Пуассона.
6. Закон Гука при растяжении и сжатии.
7. Модуль упругости при растяжении и сжатии.
8. Испытания на растяжение: образцы, испытательные машины, условия.
9. Механические характеристики, получаемые при испытаниях на растяжение.
10. Испытания на сжатие: требования к образцам и условиям испытаний.
11. Диаграммы растяжения пластичных, хрупко-пластичных и хрупких материалов.
12. Сравнение механических характеристик материалов при растяжении и сжатии.
13. Физический предел текучести и условный предел текучести.
14. Условие прочности при растяжении и сжатии.
15. Какие напряжения называют предельными?
16. Что называют коэффициентом запаса прочности?
17. Каково соотношение допускаемых напряжений растяжения и сжатия?
18. Срез.
19. Смятие.
20. Кручение вала круглого сечения. Деформации и напряжения.
21. Условие прочности при кручении.
22. Прямой поперечный изгиб. Внутренние силовые факторы.
23. Нормальные напряжения при изгибе.
24. Условие прочности при изгибе.
25. Правила знаков при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.
26. Статический момент площади сечения.
27. Координаты центра тяжести сечения.
28. Осевые моменты инерции сечения.
29. Полярный момент инерции сечения.
30. Центробежный момент инерции сечения.
31. Виды напряжённого состояния в точке материала.
32. Обобщённый закон Гука.
33. Устойчивость сжатых стержней. Понятие о критической силе.

4. Научно-исследовательская работа студентов

На кафедре ТЭА имеется научная школа, выполняются теоретические и экспериментальные исследования, направленные на повышение надёжности и долговечности машин и другого оборудования. Разрабатываются методы испытания материалов, приборы. В этой работе традиционно участвуют и студенты. См. <http://www.ncstu.ru/faculties/femt/kpmiok>. Тем, кто будет изучать

представленный материал, рекомендуется принять участие в научно-исследовательской работе кафедры, выступить с докладами на студенческих и других научных конференциях. Такие научные исследования могут иметь продолжение в дальнейшей учёбе и профессиональной деятельности.

Получать информацию и общаться по поводу научно-исследовательской работы студентов можно в группе «Механика» в социальной сети Вконтакте. <https://vk.com/club129565092> Студенческое научное общество «Механика».

5. Рекомендуемая литература и сайты

Основная литература:

1. Рябцев, В. А. Основы механики : учебное пособие / В. А. Рябцев, А. А. Воропаев, Д. В. Хван. — Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2021. — 295 с. — ISBN 978-5-4497-1051-2. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/108306.html> (дата обращения: 16.04.2022). — Режим доступа: для авторизир. пользователей
2. Щербакова, Ю. В. Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебное пособие / Ю. В. Щербакова. - Сопротивление материалов, 2020-02-05. - Саратов : Научная книга, 2019. - 159 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-9758-1776-1

Дополнительная литература:

1. Коргин, А. В Сопротивление материалов Электронный ресурс : Учебно-методическое пособие к выполнению практических работ для обучающихся по направлению подготовки 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, профиль «Подъемно-транспортные, строительные, дорожные средства и оборудование» / А. В. Коргин, В. А. Ермаков, В. А. Романец. - Москва : МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 186 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-7264-1842
2. Прикладная механика : учебное пособие / Х.С. Гуменова, В.М. Котляр, Н.П. Петухов, С.Г. Сидорин ; Министерство образования и науки России ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 142 с. : табл., граф., ил. - <http://biblioclub.ru/>. - Библиогр.: с. 126. - ISBN 978-5-7882-1571-6
3. Шинкин, В.Н. Теоретическая механика Электронный ресурс : учебное пособие / В.Н. Шинкин. - Теоретическая механика, 2019-09-01. - Москва :

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов по дисциплине «Техническая механика» для студентов направления 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов». Составитель Терещенко В.Г. (электронная версия)
2. Методические указания по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Техническая механика» для студентов направления 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов». Составитель Терещенко В.Г. (электронная версия)

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. «Прикладная механика» - электронный учебный курс для студентов очной и заочной форм обучения. – Режим доступа: <http://www.prikladmeh.ru/>
2. «Прикладная механика» - контрольные задания. Учебное пособие для заочников. Теоретическая механика и сопротивление материалов. Изложены теоретические вопросы, приведены контрольные задания с примерами решения задач. – Режим доступа: <http://www.kstu.ru/servlet/contentblob?id=76413>

Информационно-справочные системы, используемые при изучении дисциплины:

1	http://catalog.ncstu.ru/catalog – Официальный сайт библиотеки ФГАОУ ВПО СКФУ.
2	http://www.iprbookshop.ru/home.html – Электронно-библиотечная система
3	www.biblioclub.ru – Университетская библиотека онлайн
4	https://kompas.ru/source/info_materials/2014_-_01-amp-fem-rukovodstvo-polsovatelja.pdf АРМ FEM. Система прочностного анализа для КОМПАС-3D. Руководство пользователя

Программное обеспечение:

1	Лицензионное программное обеспечение: MicrosoftOfficeStandard 2013
2	Компас-3D. Система прочностного анализа АРМ FEM V14 для Компас-3D V14.

