

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям
по дисциплине «Математика»
для студентов направления подготовки
08.03.01 Строительство

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	4
ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ	5
Виды матриц. Действия над матрицами. Определители. Вычисление определителей.....	5
Ранг матрицы. Обратная матрица.....	9
Системы линейных алгебраических уравнений	12
Теорема Кронекера-Капелли. Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений	14
ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ	16
Векторная алгебра	16
Уравнение прямой на плоскости. Способы задания прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости	19
Прямая в пространстве. Уравнение прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве.....	19
Плоскость в пространстве. Уравнение плоскостей в пространстве	21
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	22
Предел функции. Основные теоремы о пределах.....	22
Замечательные пределы. Бесконечно малые, бесконечно большие и неограниченные функции.....	25
Понятие производной. Правила дифференцирования	27
Дифференцирование сложной функции	29
Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Функции заданные неявно и параметрически и их дифференцирование	31
Дифференциал функции, применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков	33

Приложения производной: уравнение касательной и нормали к плоской кривой, правила Лопиталя, формула Тейлора.....	35
Применение производной к исследованию функций. Построение графиков функций	38
Комплексные числа	40
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.....	42
Производные и дифференциалы функций нескольких переменных	42
Экстремум функции двух переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума. Условный экстремум	44
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	46
Неопределённый интеграл. Непосредственное интегрирование. Интегрирование подстановкой (замена переменной). Интегрирование по частям	46
Интегрирование рациональных и иррациональных функций.....	48
Интегрирование тригонометрических функций. Определённый интеграл и методы его вычисления	51
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	53
ДУ с разделяющимися переменными. Однородные ДУ первого порядка	53
Линейные ДУ 1-го порядка. Уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах	55
Линейные однородные дифференциальные уравнения. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения	57
САМОСТОЯТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ (2 семестр)	59

ВВЕДЕНИЕ

Целью изучения дисциплины «Математика» является получение знаний и умений, позволяющих в дальнейшем заниматься научной и прикладной деятельностью, формирование у студентов профессиональных компетенций будущего бакалавра.

Задачами освоения дисциплины являются:

- овладение студентами основ математического аппарата, необходимого для приобретения ими соответствующих профессиональных компетенций;
- освоение студентами математических знаний, необходимых для решения теоретических и практических задач, связанных с применением математических методов в других дисциплинах естественнонаучного содержания;
- формирование умений осуществлять научный анализ, обобщение и оформление результатов исследований;
- приобретение навыков обработки результатов исследований с использованием информационных технологий для планирования и коррекции процессов профессиональной деятельности и решения других практических задач.

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Практическое занятие №1

Виды матриц. Действия над матрицами. Определители.

Вычисление определителей

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие задачи приводят к понятиям определителей второго и третьего порядков. Как обозначаются определители?
2. Расскажите о правилах вычисления определителей второго и третьего порядков. Как называют правило вычисления определителей третьего порядков?
3. Дайте определение определителя n -го порядка?
4. Сформулируйте основные свойства определителей.
5. Введите понятия минора.
6. Дайте определение алгебраического дополнения элемента определителя.
7. Сформулируйте теорему о вычислении определителя и следствие из неё.
8. Дайте определение матрицы, элементов матрицы; расскажите, как матрицы обозначаются, приведите примеры.
9. Введите понятия квадратной, диагональной, единичной, нулевой, ступенчатой, транспонированной, симметрической матриц, матрицы-строки и матрицы-столбца. Приведите примеры.
10. Когда говорят о размерах, а когда о размерности матрицы? Приведите примеры и введите соответствующие обозначения.
11. Дайте определение суммы двух матриц. Какие матрицы можно складывать? Приведите примеры.
12. Как умножить матрицу на число? Приведите пример.
13. Для каких двух матриц можно определить операцию произведения? Введите эту операцию, проиллюстрируйте её на примере. Коммутативно ли

умножение двух матриц?

14. Приведите пример использования матриц в области Вашей предметной деятельности.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. Привести к ступенчатому виду матрицу A с помощью элементарных

преобразований над строками: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Привести к ступенчатому виду матрицу A с помощью элементарных

преобразований над строками: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Найти матрицы

$A + B$, $3A - B$, $A \cdot B$.

4. Найти произведение матриц AB , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Найти $((A - B) \cdot C)^T$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$.

7. Решить уравнение $\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$.

8. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ по правилу Саррюса.

9. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам 3-й

строки.

10. Вычислите определитель четвёртого порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Привести к ступенчатому виду матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 13 \\ 3 & 1 & -7 & 9 \\ -1 & 2 & 0 & -10 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Даны матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найти

матрицы $A + B$, $4A - 5B - 3E$, $A \cdot B$.

3. Найти произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 18 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу $\frac{1}{3} \cdot A - 2 \cdot B^T \cdot C$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 27 \\ -9 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислить определители второго порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \varphi & 1 \\ -1 & \operatorname{tg} \varphi \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}.$$

6. Вычислить определители 3-го порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

7. Вычислить определители с помощью «правила треугольников»:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}.$$

8. Вычислить определители 3-го порядка разложением по какой-нибудь строке или столбцу:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}.$$

9. Вычислить определители 4-го порядка разложением по какой-нибудь строке или столбцу:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

10. Решить уравнения:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Практическое занятие № 2

Ранг матрицы. Обратная матрица

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Какая матрица называется матрицей ступенчатого вида?
2. Дайте определение ранга матрицы.
3. Перечислите элементарные преобразования матрицы.
4. Как вычислить ранг матрицы с помощью элементарных преобразований?
5. Введите понятия линейно зависимых и линейно независимых строк (столбцов) матрицы. Какое ещё можно дать определение ранга матрицы?
6. Изложите метод окаймляющих миноров для нахождения ранга матрицы. На каких свойствах этот метод основан?
7. Определите понятия обратимая матрица, обратная матрица, вырожденная и невырожденная матрицы.
8. В каком случае определитель матрицы равен нулю?
9. Назовите условия обратимости матрицы.
10. Дайте определение минора и алгебраического дополнения.
11. Сформулируйте алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.
12. Расскажите, как найти обратную матрицу с помощью элементарных преобразований путём присоединения единичной матрицы.
13. Как решается вопрос об обратимости матрицы при применении метода элементарных преобразований для её отыскания?
14. Как проверить правильность нахождения обратной матрицы?

**Практические задания для развития и контроля владения
компетенциями**

Задания, решаемые в аудитории:

1. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один

из базисных миноров: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

3. Найти ранг матрицы методом единиц и нулей: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 0 & -4 \\ 3 & 8 & 2 & -19 \end{pmatrix}.$

4. Найти (методом присоединённой матрицы) матрицу, обратную к

данной: $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

5. Найти (методом элементарных преобразований) матрицу, обратную к

данной: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$

2. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один из базисных миноров:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

3. Найти ранг матрицы методом единиц и нулей:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

4. Найти обратную матрицу методом присоединённой матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$

5. Найти обратную матрицу методом элементарных преобразований:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$

Практическое занятие № 3

Системы линейных алгебраических уравнений

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Что называется решением системы?
2. Какая классификация систем в зависимости от существования решения вам известна?
3. Какие системы называются равносильными?
4. Какие преобразования считаются элементарными?
5. Метод Крамера.
6. Матричный метод решения СЛАУ.
7. Метод Гаусса.
8. Может ли частное решение системы линейных уравнений совпадать с её общим решением?
9. Могут ли различные методы решения системы линейных уравнений дать различные ответы?
10. Возможно ли, чтобы система линейных уравнений имела решение с помощью метода Гаусса, но не имела решения по формулам Крамера?
11. Однородные и неоднородные системы.
12. Совместные и несовместные системы.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

а)
$$\begin{cases} 4x + y = 5; \\ 3x - 2y = 12. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ x + 6y = -3 \end{cases},$$

в)
$$\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ 5x + y + z = 18 \\ 2x + y + 2z = 15 \end{cases}.$$

г)
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ 2x - y + 4z = 5, \\ 3x + y - z = 2. \end{cases},$$

д)
$$\begin{cases} x + y - z = 3, \\ x + y + z = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

2. Решить системы уравнений, используя метод полного исключения Жордана-Гаусса.

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + y - z = 0 \\ 4x - y + 5z = 3 \end{cases}, & \text{б) } \begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + 2y + 3z = 5. \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}, & \text{в) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6 \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases} \end{array}$$

3. Решить матричным методом систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9 \\ x + 2y - 3z = 14. \\ 3x + 4y + z = 16 \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить её двумя способами: 1) по формулам Крамера, 2) методом Гаусса.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, ; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, . \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases} \end{array}$$

2. Дана система линейных уравнений. Доказать её совместность и решить двумя способами: 1) методом Крамера; 2) средствами матричного исчисления.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, ; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, . \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases} \end{array}$$

Практическое занятие № 4

Теорема Кронекера-Капелли. Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Однородные системы.
2. Совместные и несовместные системы.
3. Сформулировать теорему Кронекера-Капелли.
4. Что означает «исследовать систему уравнений»?
5. Как определяется количество свободных и базисных переменных?
6. Как определить базисные переменные?
7. Что можно сказать о существовании решений однородной системы уравнений?
8. Что можно сказать о множестве решений системы линейных уравнений, если ранг $r(A)$ матрицы этой системы и ранг $r(A|B)$ расширенной матрицы равны нулю?
9. Фундаментальная система решений.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. Исследовать систему по теореме Кронекера-Капелли и, если она совместна, то решить:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases} ; \quad \text{б) } \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x + 3y + z = -5 \\ 3x - 2y - z = 1 \end{cases} ; \quad \text{г) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 - 1. \end{cases}$$

2. Решить систему однородных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0; \\ x - 3y = 0 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} ; \quad \text{в) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases} .$$

3. Найти фундаментальную систему решений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases} , \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases} .$$

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

Указать общее решение системы и фундаментальный набор решений.

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, ; \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, . \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

2. Найти фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, . \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5 = 0, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases} .$$

ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Практическое занятие № 5

Векторная алгебра

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение вектора, модуля вектора. Как обозначают эти величины.
2. Введите понятие единичного вектора, нулевого вектора, коллинеарных, сонаправленных и противоположно направленных векторов, равных векторов, компланарных векторов.
3. Расскажите, какие операции над векторами относят к числу линейных операций.
4. Объясните правила построения суммы двух векторов (правило треугольника, правило параллелограмма), суммы конечного числа векторов (правило ломанной).
5. Дайте определение разности двух векторов и постройте разность двух векторов.
6. Как найти произведение вектора на действительное число?
7. Перечислите основные свойства линейных операций над векторами.
8. Введите понятие линейной комбинации системы векторов, линейно зависимой и линейно независимой системы векторов. Сколько векторов на плоскости и в пространстве могут быть линейно независимы?
9. Дайте определение базиса и ранга системы векторов, координат вектора.
10. Как определяются линейные операции над векторами в координатной форме?
11. Дайте определение скалярного произведения двух геометрических векторов и сформулируйте его основные свойства и геометрическую интерпретацию.
12. Как определить угол между векторами и длину векторами и длину

вектора? Запишите формулы в координатной форме.

13. Расскажите о компланарных векторах и о направляющих косинусах.

14. Сформулируйте определение векторного произведения, расскажите о его геометрических приложениях. Перечислите основные свойства векторного произведения.

15. Дайте определение смешенного произведения векторов. Сформулируйте основные свойства смешанного произведения, расскажите о его геометрических приложениях.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. По заданным векторам $\vec{a} = (2; -1; 2)$, $\vec{b} = (1; 0; 2)$, $\vec{c} = (3; -2; 1)$ вычислить

- а) скалярное произведение $(\vec{a}, 2\vec{b} - \vec{c})$;
- б) векторное произведение $[\vec{b}, 3\vec{a} + 2\vec{c}]$;
- в) смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$.

2. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Найти:

- 1) косинус угла между рёбрами AB и AD ,
- 2) площадь грани ABC ,
- 3) $\text{pr}_{\vec{AD}} \vec{AC}$,
- 4) объем пирамиды $ABCD$, если $A(2,0,3)$, $B(3,2,1)$, $C(0,5,3)$, $D(-1,1,-1)$.

3. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{c} = 5\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

Необходимо:

- а) вычислить смешанное произведение трех векторов $\vec{a} \cdot 3\vec{b} \cdot \vec{c}$;
- б) найти модуль векторного произведения $|3\vec{a} \times 2\vec{c}|$;
- в) проверить, будут коллинеарны или ортогональны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{c}$;
- г) проверить, будут ли компланарны три вектора $\vec{a}$, $2\vec{b}$ и $3\vec{c}$.

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{c} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$.

Необходимо: а) вычислить смешанное произведение трёх векторов $2\vec{a}$, $-2\vec{b}$, $\vec{c}$; б) найти модуль векторного произведения $\vec{b}$ и $2\vec{c}$; в) вычислить скалярное произведение двух векторов $4\vec{a}$ и $2\vec{c}$; г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора $2\vec{b}$ и $\vec{c}$; д) проверить, будут ли компланарны три вектора $\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $2\vec{c}$.

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2, -3, -1)$, $B(-3, 1, 4)$, $C(3, 2, 5)$ и $D(-2, -4, 3)$. Вычислить: а) площадь грани ACD ; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра AB и две вершины пирамиды C и D ; в) объем пирамиды $ABCD$.

3. Сила $\vec{F} = (3, -2, 1)$ приложена к точке $A(3, 3, 2)$. Вычислить: а) работу силы $\vec{F}$ в случае, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B(5, 1, -3)$; б) модуль момента силы $\vec{F}$ относительно точки B .

Практическое занятие № 6

Уравнение прямой на плоскости. Способы задания прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости

1. Составить уравнение прямой l , записать в общем виде и построить:

- а) $b = 6, \alpha = \frac{\pi}{4}$; б) т. $M(2, 4), k = -\frac{1}{3}$;
- в) проходящей через 2 различные точки $P(3; 1)$ и $Q(7; 11)$;
- г) проходящей через точку $A(5; 4)$ перпендикулярно прямой BC , где $B(-1; 2), C(-3; -2)$;
- д) проходящей через точку $A(1; -2)$ параллельно прямой BC , где $B(-1; 2), C(-3; -2)$;
- е) проходящей через точку $M(2; 3)$ и имеющий направляющий вектор $\vec{s} = (1; -4)$;
- ж) проходящей через точку $M(-1; 5)$ с нормальным вектором $\vec{n} = (-3; 2)$.

2. Определить взаимное расположение прямых:

- а) $3x - 2y + 7 = 0, 2x + 3y - 3 = 0$; б) $x - 2y - 4 = 0, 2x - 4y + 3 = 0$.

3. Вычислить расстояние d между прямыми:

- а) $3x - 4y - 10 = 0, 6x - 8y + 5 = 0$;
- б) $4x - 3y + 15 = 0, 8x - 6y + 30 = 0$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - 2y + 5 = 0, x + 2y - 9 = 0$ и параллельной прямой $2x + y + 6 = 0$.

Прямая в пространстве. Уравнение прямой в пространстве.

Взаимное расположение прямых в пространстве

5. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через:

- а) точку $M_0(2; 0; 3)$ и параллельно вектору $\vec{s} = (4; -3; 5)$;
- б) точку $M_0(4; -1; 2)$ и параллельно прямой $L': \frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$;
- в) точку $M_0(1; -1; 0)$ и параллельно оси OX (OY, OZ);
- г) точки $M_1(1; -2; 1)$ и $M_2(3; 1; -1)$;
- д) точку $M_0(2; 3; -5)$ и параллельно прямой, являющейся пересечением двух

плоскостей $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

6. Найти угол между двумя прямыми L_1 и L_2 :

а) $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}},$ $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}};$

б) $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 0, \\ z = -t + 3 \end{cases},$ $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = 0, \\ z = t - 3 \end{cases};$

в) $\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0, \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases},$ $\begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0, \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0 \end{cases}.$

7. Установить взаимное расположение прямых L_1 и L_2 :

а) $\frac{x-2}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-2}$ и $\begin{cases} x = 5 - 8t, \\ y = 4 - 6t, \\ z = 3 + 4t \end{cases}$

б) $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{1},$ и $\frac{x+4}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}.$

8 Составить параметрическое уравнение прямой, перпендикулярной плоскости $3x + y - z - 8 = 0$ и проходящей через точку $M_0(2; -1; -3)$.

Практическое занятие № 7

Плоскость в пространстве. Уравнение плоскостей в пространстве

1. Составить уравнение плоскости, заданное точкой $M(2; 1; -1)$ и нормальным вектором $\vec{N} = (1; -2; 3)$.
2. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $A(2; -1; 4)$ перпендикулярно прямой, проходящей через точки $B(2; -1; 0)$ и $C(-1; 1; 3)$.
3. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точки $M_1(2; 1; -1)$, $M_2(-2; 4; 5)$, $M_3(0; 2; -3)$.
4. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точки $M_1(3; 4; -5)$ и $M_2(3; 1; 2)$ параллельно вектору $\vec{a} = (3; -1; 4)$.
5. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точку $M_1(3; 4; -5)$, параллельно векторам $\vec{a}_1 = (3; 1; -1)$ и $\vec{a}_2 = (1; -2; 1)$.
6. Составить уравнение плоскости π_1 , проходящей через точку $M_0(1; -3; -2)$ параллельно плоскости $\pi_2: 3x - 2y + 4z = 3$.
7. Составить уравнение плоскости π , проходящей через точки $M_1(-1; 3; 0)$ и $M_2(2; 4; -1)$ и перпендикулярно плоскости $\pi_1: x - 2y + 3z = 10$.

Задания для самостоятельной работы дома:

Даны четыре точки $A_1(2, 3, 1)$, $A_2(4, 1, -2)$, $A_3(6, 3, 7)$, $A_4(-5, -4, 8)$.

Составить уравнения:

- а) плоскости $A_1A_2A_3$;
- б) прямой A_1A_2 ;
- в) прямой A_4M , перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;
- г) прямой A_3N , параллельной прямой A_1A_2 ;
- д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2 .

Вычислить:

- е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
- ж) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Практическое занятие № 8

Предел функции. Основные теоремы о пределах

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Что называется пределом функции в точке?
2. Определите предел функции на бесконечности.
3. Дайте определение предела функции слева (справа).
4. Может ли функция $f(x)$ иметь два различных предела при $x \rightarrow a$?
5. Чему равен предел постоянной величины?
6. Чему равен предел: а) суммы; б) разности; в) произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$?
7. Чему равен предел частного функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ($x \rightarrow a$)?
8. Как можно избавиться от неопределённости вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, если числитель и знаменатель дроби содержат многочлены?
9. Как разложить квадратный трёхчлен на линейные множители?
10. Сформулируйте теорему Виета.
11. Как можно избавиться от неопределённости $\left[\frac{0}{0} \right]$, если числитель и (или) знаменатель содержат иррациональные выражения?
12. Запишите формулы сокращённого умножения, помогающие определить сопряжённые выражения для данных.
13. Сформулируйте правила вычисления пределов дроби при $x \rightarrow \infty$, если числитель и знаменатель содержат многочлены.

**Практические задания для развития и контроля владения
компетенциями**

Задания, решаемые в аудитории:

1. Найдите пределы

а) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 3)$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 8x + 20}{x^3 + 3x^2 + 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^3 + 2x^2}$;
г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$; д) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$; е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$;
ж) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$; з) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt[3]{2+x} + x}$;
и) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2)^3}{(x-5)^3}$; к) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2}}{x^2 - 3x + 2}$.

2. Найдите пределы функций при $x \rightarrow \infty$:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+7}{x+2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-10^7}{3x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{3x^2} + x - 4}$;
г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 1}{x^3 + 5x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$.

3. Вычислите пределы функции при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$, если

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3}, & (x > 1) \\ \frac{2x}{4x-15}, & (x \leq 1) \end{cases}.$$

4. Найдите односторонние пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{3}{4-2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3}{4-2x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{4-2x}$;
г) $\lim_{x \rightarrow -0} 2^{\frac{1}{x}}$; д) $\lim_{x \rightarrow +0} 2^{\frac{1}{x}}$.

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Найдите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^3 + 1}{x^2 + 5x + 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$;
г) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$; д) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)(x-3)}$; е) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2}$;

$$\begin{aligned}
 \text{ж)} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 + x}{(x-2)(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{x-2} \right); & \text{з)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}; \\
 \text{и)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}; & \text{к)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x^2} - 1}{x^2 + x^3}; & \text{л)} \quad & \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x-4}; \\
 \text{м)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}; & \text{н)} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}}.
 \end{aligned}$$

2. Найдите пределы функций при $x \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2}{2x + 1}; & \text{б)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 - 1}{3x^4 + 3}; & \text{в)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + x - 4}.
 \end{aligned}$$

3. Найдите односторонние пределы:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad & \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x-3}; & \text{б)} \quad & \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x-3}; \\
 \text{в)} \quad & \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{3^{1+x}}; & \text{г)} \quad & \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{3^{1+x}}; & \text{д)} \quad & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{3^{x+1}}.
 \end{aligned}$$

Практическое занятие № 9

Замечательные пределы. Бесконечно малые, бесконечно большие и неограниченные функции

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Запишите первый замечательный предел и следствия из него.
2. Запишите второй замечательный предел и следствия из него.
3. Определите число e . Укажите его приближенное значение с точностью до одного десятичного знака.
4. Какая показательная функция называется экспоненциальной? Постройте её график.
5. Какая функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
6. Какая функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
7. Какова простейшая связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?
8. Какова простейшая связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой величиной?
9. Что значит сравнить две бесконечно малые величины?
10. Какие две бесконечно малые величины называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных величин.
11. Как эквивалентные бесконечно малые величины могут быть использованы при вычислении пределов функции?

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. Вычислите пределы с помощью первого замечательного предела:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{3x}$; г) $\lim_{v \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos v}{\sin\left(v - \frac{\pi}{3}\right)}$.

2. Вычислите пределы с помощью второго замечательного предела:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x+5}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{5x+1}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}$.

3. Определите порядок малости нижеследующих б.м функций относительно б.м функции $\beta(x) = x - 1$, если $x \rightarrow 1$:

а) $\alpha(x) = x^3 + 2x - 3$; б) $\alpha(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$; в) $\alpha(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2x-1}$.

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Вычислите пределы с помощью первого замечательного предела:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$; в) $\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z) \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2}$.

2. Вычислите пределы с помощью второго замечательного предела:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{7x}\right)^{5x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{1+x}\right)^{3x-1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{2x}}$.

Практическое занятие № 10

Понятие производной. Правила дифференцирования

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие задачи, приводящие к понятию производной, Вам известны?
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Как найти производную функции $y = f(x)$ по определению?
4. В чем состоит механический смысл производной?
5. Дайте определение непрерывной функции в точке и на отрезке. Сформулируйте свойства непрерывных функций.
6. Как связаны между собой дифференцируемость функции в некоторой точке с непрерывностью функции в этой точке?
7. Приведите пример непрерывной функции, не имеющей производной в некоторой точке.
8. Чему равна производная:
а) постоянной; б) алгебраической суммы дифференцируемых функций; в) произведения двух дифференцируемых функций; г) дроби; д) сложной функции; е) обратной функции?
9. Запишите формулы для нахождения производных основных элементарных функций.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. Пользуясь определением производной, найдите производные от следующих функций:
а) $y = 3x^2 - 4x$; б) $y = \frac{1}{x^2}$; в) $y = \sqrt{4x+1}$; г) $y = \sin(3x+1)$.
2. Дана функция: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$. Найдите производную этой функции в точке $x = 0$.

3. Найдите производные следующих функций:

а) $y = x^4 + 3x^2 - 6$; б) $y = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 5$;

в) $y = (x^2 + 2x + 1)(4x^2 + 1)$; г) $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$;

д) $y = \sqrt[3]{(1+2x)^2}$; е) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$;

ж) $y = x^2 - \frac{3}{x^4}$; з) $y = 2x \sin 3x - \cos 4x$.

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Пользуясь определением производной, найдите производные от следующих функций:

$$y = -2x; \quad y = (2x-1)^2; \quad y = \sqrt{x}.$$

2. Найдите производные следующих функций:

а) $y = 6x^3 - x^2$; б) $y = x - 2\sqrt{x}$; в) $y = (\sqrt{x} - 2)^2$;

г) $y = x^3(1-3x)$; д) $y = (x^3 - 3x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^5}$;

е) $y = \frac{2x}{1-x^2}$; ж) $y = \frac{1+2x}{1-3x}$; з) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

и) $y = x^2 \sin 5x$; к) $y = 3x + \operatorname{tg} 2x$.

Практическое занятие № 11

Дифференцирование сложной функции

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение производной функции в точке.
2. Назовите основные правила дифференцирования функций.
3. Запишите таблицу производных основных элементарных функций.
4. Дайте определение сложной функции. Приведите примеры.
5. Сформулируйте теорему для нахождения производной сложной функции.
6. Составьте таблицу нахождения производных для функций вида $f(u)$, где f – одна из элементарных функций, $u = u(x)$.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. Найдите производные следующих функций:
а) $y = e^{-x^2}$; б) $y = \frac{1}{4} \ln(1+x^2)$; в) $y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$;
г) $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$; д) $y = \arccos(e^{x^2})$; е) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}$;
ж) $y = 2 \sin^2 2x \cdot \operatorname{ctg}^3 2x$; з) $y = \arcsin \sqrt{\sin x}$;
и) $y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$; к) $y = \sqrt{\frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}} \cdot (\arccos e^{2x})$.
2. Вычислите $y'\left(-\frac{1}{2}\right)$, если $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}$.

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Найдите производные следующих функций:
а) $y = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$; б) $y = 3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x^2+1}}$; в) $y = x - \operatorname{arctg} 2x$;
г) $y = e^{-2x} \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right)$; д) $y = \frac{5^{2x}}{2 + \sqrt{4 + 5^{2x}}}$; е) $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

$$\text{ж) } y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}};$$

$$\text{з) } y = \frac{\cos \sqrt{e^{1-2x}}}{x}.$$

$$2. \text{ Вычислите } u'(2) + u'(0), \text{ если } u = x\sqrt{4-x^2} + 4\arcsin \frac{x}{2}.$$

$$3. \text{ Покажите, что } y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \text{ } y = e^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

Практическое занятие № 12

Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков. Функции заданные неявно и параметрически и их дифференцирование

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Запишите формулу логарифмического дифференцирования.
2. Когда применяется формула логарифмического дифференцирования?
3. Расскажите о дифференцировании показательно-степенной функции.
4. Дайте определение производной второго порядка, производной n -го порядка.
5. Дайте определение неявного задания функции. Приведите примеры.
6. Как от неявного задания перейти к явному заданию функции? Всегда ли это можно сделать. Приведите примеры.
7. Как проводят дифференцирование неявной функции?
8. Расскажите о нахождении производных высших порядков от неявно заданных функций.
9. Дайте определение параметрически заданной функции. Приведите примеры.
10. Расскажите, как от параметрического задания функции перейти к явному заданию функции.
11. Запишите формулы для нахождения производных первого и второго порядков от параметрически заданной функции.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные следующих функций:

а) $y = x^5(1+3x)^3(1-2x)^2$;

б) $y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$;

$$\text{в)} y = \sqrt[3]{\frac{x(1+x)^2}{(1-x)^2}};$$

$$\text{г)} y = (\sin x)^x;$$

$$\text{д)} y = \sqrt[x]{x}.$$

2. Найдите производные высших порядков для следующих функций:

$$\text{а)} y = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 1; y'' = ?;$$

$$\text{б)} y = \cos 2x; y''' = ?$$

3. Для данных неявных функций найдите производные первого порядка $y'(x)$:

$$\text{а)} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1;$$

$$\text{б)} y = \operatorname{tg}(x + y).$$

4. Для функций, заданных параметрически, найдите производные первого и второго порядков

$$\text{а)} \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 + 1; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы дома:

1. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные следующих функций:

$$\text{а)} y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4};$$

$$\text{б)} y = \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{в)} y = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3} \sqrt[3]{(x-3)^7}};$$

$$\text{г)} y = (\cos x)^{\sin 2x}.$$

2. Найдите производные высших порядков для следующих функций:

$$\text{а)} y = 3x^3 - 5x^2 + x; y''' = ?;$$

$$\text{б)} y = e^x + 2x; y^{IV} = ?.$$

3. Для данной неявной функции найдите производные первого и второго порядков $e^y \sin x = e^{-x} \cos y$.

4. Для функций, заданных параметрически, найдите производные первого и второго порядков

$$\text{а)} \begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{3t}. \end{cases};$$

$$\text{б)} \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

Практическое занятие № 13

Дифференциал функции, применение дифференциала к приближенным вычислениям. Дифференциалы высших порядков

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение дифференциала функции.
2. Запишите формулу для вычисления дифференциала первого и последующих порядков.
3. Сформулируйте основные свойства дифференциалов.
4. В чем заключается свойство инвариантности формы дифференциала? Дифференциалы каких порядков обладают указанным свойством?
5. Расскажите о геометрическом смысле дифференциала первого порядка.
6. Как используется дифференциал в приближенных вычислениях?
7. Выведите формулу приближенного вычисления значений функций. Как определить погрешность приближения?

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. Найдите дифференциалы следующих функций:
а) $y = \frac{x^3}{1-x}$; б) $y = e^{x^2} - 2x + 1$; в) $y = \arccos^2 3x$; г) $y = \frac{2 \sin 2x - 3 \cos 2x}{e^{3x}}$.
2. Вычислите с точностью до 0,01 дифференциал функции
$$y = x + (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x \text{ при } x = -\frac{\pi}{4} \text{ и } dx = 0,2.$$
3. С помощью дифференциала найдите приближенные значения для данных выражений:
а) $\sqrt[3]{1,02}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{120}$; г) $\sqrt[3]{9}$;
д) $\sin 29^\circ$; е) $\operatorname{arctg} 0,98$; е) $\ln 1,01$; ж) $\log_2 1,98$.
4. Для данных функций найдите дифференциалы высших порядков:
а) $y = \ln 2x$; $d^3 x = ?$; б) $y = \sqrt{x}$, $d^4 x = ?$.

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Найдите дифференциалы следующих функций:

а) $y = \sqrt{3 - x^2}$; б) $y = 3^{2x}$; в) $y = \sin^2 \frac{x}{3}$; г) $y = e^{-x}(2 - 2x - x^2)$.

2. Вычислите с точностью до 0,01 дифференциалы функций:

а) $y = x(1 + x)(1 - x)$ при $x = 10$ и $dx = 0,1$;

б) $y = x\sqrt{x^2 + 5}$ при $x = -2$ и $dx = \frac{1}{5}$.

3. С помощью дифференциала найдите приближенные значения для данных выражений:

а) $\sqrt[3]{1,1}$; б) $\sqrt[3]{26,81}$; в) $\sqrt{34}$; г) $\sqrt[4]{17}$; д) $\sqrt[10]{1000}$;

е) $\cos 151^\circ$; ж) $\arccos 0,4993$; з) $\operatorname{tg} 44^\circ 56'$; и) $\lg 11$.

4. Для данной функций найдите дифференциалы высших порядков:

$$y = e^{2x}, d^n y = ?$$

Практическое занятие № 14

Приложения производной: уравнение касательной и нормали к плоской кривой, правила Лопиталю, формула Тейлора

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Сформулируйте геометрический смысл производной функции.
2. Выведите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
3. Какая прямая называется нормалью к кривой? Какой вид имеет уравнение нормали?
4. Сформулируйте правило Лопиталю для раскрытия неопределённости вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов функции.
5. Сформулируйте правило Лопиталю для раскрытия неопределённости вида $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов функции.
6. Сколько раз подряд можно применять правило Лопиталю и когда это правило неприменимо?
7. Как можно раскрыть неопределённость вида $0 \cdot \infty$ при вычислении предела функции?
8. Что нужно сделать при вычислении предела функции, если он содержит неопределённость вида $\infty - \infty$?
9. Какой приём применяют для применения правил Лопиталю, если предел функции содержит неопределённость вида 0^0 , или ∞^0 , или 1^∞ ?
10. Расскажите о формуле Тейлора и формуле Маклорена. Для чего эти формулы могут использоваться?
11. Разложите по формуле Тейлора (Маклорена) функции $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.

**Практические задания для развития и контроля владения
компетенциями**

Задания, решаемые в аудитории:

1. Составьте уравнение касательной и нормали

а) к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке с абсциссой $x = 1$;

б) к кривой $y = \ln x$ в точке с абсциссой $x = 1$.

2. Используя правило Лопиталя, найдите следующие пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 \ln x$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$; ж) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 5x}$;

з) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$; и) $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} \ln x$; к) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{x^2 - 1} - \frac{7}{x^3 - 1} \right)$;

л) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$; м) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

3. По формуле Тейлора разложите многочлен

$P(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$ по степеням $x + 1$.

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Составьте уравнение касательной и нормали

а) к окружности $x^2 + y^2 = 25$ в точке $A(3; -4)$;

б) к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ в точке $A(1; 1)$.

2. Используя правило Лопиталя, найдите следующие пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 11x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$;

г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1 + x)}$; д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{\ln(e^x - e^2)}{\ln(x - 2)}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{arcsin} 5x}$; з) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x$; и) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln(x + e^x)$;

$$\kappa) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right);$$

$$\text{л) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + e^x \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$\text{м) } \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}.$$

3. По формуле Тейлора разложите многочлен:

а) $P(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$ по степеням $x - 2$;

б) $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ по степеням $x - 1$.

Практическое занятие № 15

Применение производной к исследованию функций. Построение графиков функций

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение возрастающей и убывающей функции на некотором промежутке.
2. Как найти интервалы монотонности функции?
3. Дайте определения экстремумов функции.
4. Определите наибольшее и наименьшее значения функции.
5. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
6. Какие точки называются критическими?
7. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.
8. Как ведётся исследование функции на экстремум с помощью второй производной?
9. Укажите порядок исследования функции на возрастание и убывание и экстремумы.
10. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции? Укажите порядок решения этой задачи.
11. Определите понятия выпуклость и вогнутость графика функции.
12. Какую точку называют точкой перегиба?
13. Как найти интервалы выпуклости и вогнутости функции?
14. Как определить точки перегиба?
15. Что называется асимптотой кривой $y = f(x)$?
16. Как найти асимптоту $y = ax + b$ кривой $y = f(x)$, т.е. как найти a и b ?
17. По какой схеме следует проводить исследование функции и построение её графика?
18. Для решения каких вопросов исследования функции и построения её графика:

- а) не нужны теория пределов и дифференциальное исчисление?
- б) необходимо уметь вычислять пределы?
- в) нужна первая производная?
- г) нужна вторая производная?

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. Найдите интервалы возрастания и убывания следующих функций:

а) $y = x^3 + 3x^2 + 3x$; б) $y = \frac{2x}{1+x^2}$; в) $y = \cos x - x$.

2. Исследуйте на экстремум следующие функции:

а) $y = x^2(x - 6)$; б) $y = e^x \sin x$; в) $y = \frac{x}{\ln x}$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения следующих функций:

а) $y = x^2 - 4x + 6$ на отрезке $[-3; 10]$;

б) $y = \sqrt{5 - 4x}$ на отрезке $[-1; 1]$.

4. Найдите точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости следующих кривых:

а) $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$; б) $y = 3 - \sqrt[5]{(x+2)^7}$; в) $y = 1 - \ln(x^2 - 4)$.

5. Найдите асимптоты следующих функций:

а) $y = \frac{2x}{x-1}$; б) $y = \frac{1}{2x^2 + x - 1}$.

6. Исследуйте функции и постройте их графики:

а) $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$; б) $y = (x-3)\sqrt{x}$.

Практическое занятие №16

Комплексные числа

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие задачи привели к необходимости расширения поля действительных чисел до поля комплексных чисел?
2. Дайте определение поля комплексных чисел.
3. Какие формы записи комплексного числа Вы знаете? Дайте их определения.
4. Определите следующие понятия: действительная и мнимая части комплексного числа, мнимая единица, коэффициент при мнимой части, сопряжённое комплексное число, модуль и аргумент комплексного числа.
5. Какие способы геометрической интерпретации комплексных чисел Вы знаете?
6. Как перевести комплексное число из алгебраической формы записи в тригонометрическую форму и обратно?
7. Определите действия сложения, вычитания, умножения и деления над комплексными числами в алгебраической форме. Докажите записанные Вами правила. Какое свойство сопряжённых комплексных чисел используется при делении?
8. Определите действия умножения, деления, возведения в целую степень и извлечение корня n -ой степени ($n \in \mathbb{N}$) для комплексных чисел, записанных в тригонометрической и показательных формах. Укажите роль корней n -ой степени из единицы и их геометрическую интерпретацию.
6. Докажите формулы для умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. Решите уравнения во множестве комплексных чисел:
а) $x^2 + 2x + 10 = 0$; б) $x^2 - x + 3 = 0$.

2. Вычислить в алгебраической форме

а) $(3 - 5i) + (1 + 2i)$; б) $(1 + 4i) \cdot (1 + 3i)$; в) $(-3 - i) \cdot (-1 + 2i)$;
г) $\frac{1 + 2i}{1 - 3i}$; д) $\frac{-1 + 3i}{-1 - 5i}$; е) $(3 + 2i)^2$; ж) i^{20} ; з) $\frac{i^8 - 3i^{11}}{1 + 2i^{19}}$.

3. Вычислите, предварительно переводя числа в тригонометрическую форму

а) $(1 + i) \cdot (2 - 2i)$; б) $\frac{\sqrt{3} - i}{2 + 2i}$; в) $(1 - i)^{15}$; г) $\sqrt{1 - i}$; д) $\sqrt[4]{1}$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = -2i$. Представьте их в показательной форме, найдите частные $\frac{z_1}{z_2}$ и результат представьте в алгебраической форме.

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Решите уравнения во множестве комплексных чисел:

а) $x^2 - 3x + 5 = 0$; б) $x^2 + 12x + 40 = 0$.

2. Вычислить в алгебраической форме

а) $(1 - i) - (3 + 2i)$; б) $(2 - 4i) \cdot (1 + 2i)$;
в) $(1 + i) \cdot (4 - 3i)$; г) $\frac{1 - i}{1 + 4i}$; д) $\frac{-5 + 3i}{-2 + 2i}$;
е) $(1 - 3i)^3$; ж) $(-i)^{12}$; з) $\frac{i^{4n+3} + i^{15}}{2 + i^{17}}$.

3. Вычислите, предварительно переводя числа в тригонометрическую форму

а) $(-3 + \sqrt{3}i) \cdot (-4 - 4i)$; б) $\frac{-2\sqrt{3} - 2i}{3 - 3i}$; в) $(-\sqrt{3} + 3i)^{12}$;
г) $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$; д) $\sqrt[3]{-i}$.

4. Даны комплексные числа $z_1 = -5 + 5i\sqrt{3}$, $z_2 = 3i$. Представьте их в показательной форме, найдите частные $\frac{z_2}{z_1}$ и результат представьте в алгебраической форме.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Практическое занятие № 17

Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение функции двух переменных.
2. Введите понятия области определения, области значений, графика функции для функции двух переменных (для функции нескольких переменных).
3. Для функции двух переменных определите понятия приращения функции по каждой из переменных. Введите понятие полного приращения функции двух переменных.
4. Введите понятие непрерывности для функции двух переменных.
5. Дайте определение частных производных первого порядка на примере функции двух переменных.
6. Определите частные производные второго и более высоких порядков.
7. Сформулируйте теорему о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования.
8. Запишите формулу вычисления частных производных для сложной функции.
9. Запишите формулу для вычисления полной производной.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. Найдите область определения следующих функций:
а) $z = \ln(x + y)$; б) $u = \arccos(x + y)$; в) $z = \sqrt{4 - x^2 + 6x - y^2}$.
2. Найдите частные производные первого порядка для следующих функций:
а) $z = x^2 + 3xy + 4y^3$; б) $u = \sin(3x + 5y - 4z)$; в) $z = e^{\frac{x}{y}}$.

3. Найти полный дифференциал функции $z = e^x \ln y + \sin y \ln x$.

4. Вычислить значение производной сложной функции:

а) $u = x^3 y z^2$, где $x = \sin t$, $y = \sqrt{t}$, $z = t^2$;

б) $z = \sin(3u + 2v - 4w)$, где $u = 2x^3$, $v = 3x^2$, $w = x^4$.

5. Вычислить значения частных производных функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

а) $z \cdot e^z + y \cdot e^y = x \cdot e^x$;

б) $4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4 = 0$.

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Найдите область определения следующих функций:

а) $z = \ln(4x + 5y)$; б) $u = \arcsin \frac{2x-3}{y}$; в) $z = \sqrt{1 - x^2 + 4y - y^2}$.

2. Найдите частные производные первого порядка для следующих функций:

а) $z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; б) $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; в) $z = e^{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. Вычислите $f'_x(2,3)$ и $f'_y(2,3)$, если $f(x, y) = x^2 + y^3$.

4. Докажите, что если $z = \ln(x^2 + y^2)$, то $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

5. Вычислить значение производной сложной функции:

а) $u = x^2 e^y$, где $x = \cos t$, $y = \sin t$;

б) $u = \ln(e^{-x} + e^y)$, где $x = t^2$, $y = t^3$.

6. Вычислить значения частных производных функции $z = z(x; y)$, заданной неявно:

а) $xy = z^2 - 1$;

б) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$.

Практическое занятие № 18

Экстремум функции двух переменных. Необходимое и достаточное условия экстремума. Условный экстремум

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение точки максимума и точки минимума для функции двух переменных.
2. Дайте определение экстремума для функции двух переменных.
3. Сформулируйте необходимые условия экстремума для функции двух переменных.
4. Сформулируйте достаточное условие экстремума для функции двух переменных. Как определить вид экстремума.
5. Расскажите о порядке исследования функции двух переменных на экстремум.
6. Какой экстремум называется условным?
7. Запишите функцию Лагранжа для отыскания условного экстремума.
8. Как можно исследовать функцию на условный экстремум?
9. Расскажите об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. Найдите экстремумы функций
а) $z = xy(1 - x - y)$; б) $z = e^{0,5x}(x + y^2)$; в) $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.
2. Найдите экстремум функции $z = xy$ при условии, что x и y связаны уравнением $2x - 3y - 5 = 0$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = 1 - x^2 - y^2$ в круге $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите экстремумы функций:

а) $z = 2xy - 4x - 2y$; б) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

2. Из всех прямоугольников с заданной площадью найдите тот, у которого периметр наименьший.

3. Определите размеры конуса наибольшего объёма при условии, что его боковая поверхность равна S .

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Практическое занятие № 19

Неопределённый интеграл. Непосредственное интегрирование. Интегрирование подстановкой (замена переменной). Интегрирование по частям

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение первообразной функции для данной функции $f(x)$ на данном промежутке.
2. Что называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$?
3. Сформулируйте основные свойства определённого интеграла (правила интегрирования).
4. Составьте таблицу основных интегралов.
5. В чем суть метода непосредственного интегрирования?
6. Сформулируйте теорему об инвариантности формул интегрирования.
7. Запишите формулу замены переменной в неопределённом интеграле. Когда целесообразно применять замену переменной интегрирования?
8. Расскажите, как применяется формула замены переменной в неопределённом интеграле. Что необходимо сделать после сведения интеграла к табличному?
9. Запишите формулу интегрирования по частям.
10. Когда целесообразно применение способа интегрирования по частям?
11. Интегралы какого вида можно вычислять с помощью формулы интегрирования по частям?
12. Три класса интегралов, берущихся методом интегрирования по частям.

Практические задания для развития и контроля владения

компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. Вычислите методом непосредственного интегрирования:

- а) $\int (x^5 + 4x^2 - 3x + 1)dx$; б) $\int \frac{2x^2+x-1}{x^3} dx$;
в) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$; г) $\int (1 + \sin x + \cos x)dx$.

2. Преобразуя дифференциал, сведите интегралы к табличным и вычислите их:

- а) $\int \sqrt[3]{1-3x} dx$; б) $\int \frac{dx}{5-2x}$; в) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$; г) $\int \frac{dx}{\cos^2 12x}$.

3. Методом замены переменной вычислите интегралы:

- а) $\int \cos^5 4x \cdot \sin 4x dx$; б) $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-1}} dx$.

4. Вычислите интегралы методом интегрирования по частям:

- а) $\int (1-3x)e^{2x} dx$; б) $\int (x^2-1) \sin 3x dx$; в) $\int x \cdot \operatorname{arctg} 3x dx$;
г) $\int e^x \cos x dx$; д) $\int e^{-2x} \sin \frac{x}{2} dx$.

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Вычислите методом непосредственного интегрирования:

- а) $\int \frac{x^2+3x-1}{\sqrt[3]{x}} dx$; б) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$; в) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

2. Преобразуя дифференциал, сведите интегралы к табличным и вычислите их:

- а) $\int (2x-3)^{10} dx$; б) $\int \frac{dx}{1-x}$; в) $\int \frac{dx}{3x-7}$;
г) $\int 2e^{-3x} dx$; д) $\int (\sin 5x - \cos 7x) dx$.

3. Методом замены переменной вычислите интегралы:

- а) $\int x \cdot \sin x^2 dx$; б) $\int \frac{x}{x^2-1} dx$; в) $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{16-e^x}} dx$.

4. Вычислите интегралы методом интегрирования по частям:

- а) $\int (x-1) \cos 2x dx$; б) $\int \arcsin x dx$;
в) $\int (x^2-1) \ln 2x dx$; г) $\int e^{-x} \cos 2x dx$.

Практическое занятие № 20

Интегрирование рациональных и иррациональных функций

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Расскажите о нахождении интегралов вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$; $\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}$.
2. Как находится интеграл от целой рациональной функции?
3. Какая рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется правильной?
4. Рациональные дроби, какого вида называются элементарными?
5. Как связана правильная рациональная дробь с элементарными дробями? Расскажите, как составляется схема разложения правильной дроби на основные элементарные дроби.
6. Какой способ применяется для разложения правильной рациональной дроби на сумму элементарных дробей?
7. Как интегрируются правильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от правильной рациональной дроби.
8. Как интегрируются неправильные рациональные дроби? Расскажите порядок нахождения интеграла от неправильной рациональной дроби.
9. Всегда ли можно найти интеграл от рациональной функции?
10. Перечислите, в каких случаях интегралы, содержащие элементарные функции интегрируются в элементарных функциях.
11. Расскажите о нахождении интегралов $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Какие замены при их вычислении необходимо сделать и к каким табличным интегралам они сводятся?
12. Сформулируйте порядок отыскания интеграла от функции, содержащей квадратный корень из квадратного трёхчлена в знаменателе дроби и постоянную величину в числителе.
13. Сформулируйте порядок отыскания интеграла от функции, содержащей квадратный корень из квадратного трёхчлена в знаменателе дроби и линейную функцию в числителе.

14. Какие подстановки удобно применить для взятия следующих интегралов: $\int R\left(x, x^{\frac{p}{q}}, \dots, x^{\frac{s}{t}}\right) dx$, $\int R\left(x, (\alpha x + \beta)^{\frac{p}{q}}, \dots, (\alpha x + \beta)^{\frac{s}{t}}\right) dx$, $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{s}{t}}\right) dx$, где R – рациональная функция, $p, q, \dots, s, t$ – целые числа.

15. Расскажите, какие подстановки применяются при вычислении интегралов $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$? К каким табличным интегралам они сводятся?

16. Расскажите о вычислении интегралов от дифференциального бинома $\int x^m (a + bx^n)^p dx$. Назовите случаи интегрирования дифференциального бинома в элементарных функциях.

17. Какие способы нахождения интеграла вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ можете указать?

18. Расскажите о применении подстановок Эйлера при вычислении интегралов $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$. Сколько существует подстановок Эйлера? В каком случае может применяться каждая из них? Без какой из подстановок можно было бы обойтись? Объясните почему?

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. Вычислите интегралы от рациональных функций:

а) $\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 3}$; б) $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29} dx$; в) $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-1)} dx$.

2. Вычислите интегралы от иррациональных функций:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2 - \sqrt{2x+1}}}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Вычислите интегралы от рациональных функций:

а) $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7} dx$; б) $\int \frac{x^2}{x^6+2x^3+3} dx$; в) $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$.

2. Вычислите интегралы от иррациональных функций:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}; \quad \text{B) } \int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^5}}.$$

Практическое занятие № 21

Интегрирование тригонометрических функций. Определённый интеграл и методы его вычисления

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Применение универсальной тригонометрической подстановки.
2. Вычисление интеграла вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, если функция R чётная относительно $\sin x$ и $\cos x$.
3. Вычисление интеграла вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, если функция R является нечётной относительно $\cos x$.
4. Вычисление интеграла вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, если функция R является нечётной относительно $\sin x$.
5. Вычисление интеграла произведения синусов и косинусов различных аргументов.
6. Что называется определённым интегралом от a до b от функции $f(x)$?
7. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
8. Сформулируйте основные свойства определённого интеграла.
9. Запишите формулу интегрирования по частям в определённом интеграле.
10. Запишите формулу замены переменной в определённом интеграле.
11. На что следует обращать внимание при вычислении определённого интеграла с помощью замены переменной по сравнению с неопределённым интегралом?

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. Вычислите неопределённые интегралы:
 - а) $\int \sin 5x \sin 6x dx$;
 - б) $\int \cos^7 x dx$;
 - в) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$;
 - г) $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x}$.

2. Вычислите определённые интегралы:

$$\text{a) } \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx; \quad \text{б) } \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx; \quad \text{в) } \int_1^2 x \ln x dx.$$

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Вычислите неопределённые интегралы:

$$\text{a) } \int \cos \frac{4}{3} x \cos 3x dx; \quad \text{б) } \int \sin^5 x dx;$$

$$\text{в) } \int \cos^3 x \sin^5 x dx; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

2. Вычислите определённые интегралы:

$$\text{a) } \int_0^2 (3x^2 - 1) dx; \quad \text{б) } \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} dx; \quad \text{в) } \int_0^{\pi} x \sin 2x dx.$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Практическое занятие № 22

ДУ с разделяющимися переменными. Однородные ДУ первого порядка

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение дифференциального уравнения, его порядка. Запишите общий вид дифференциального уравнения первого и n -го порядков.
2. Введите понятия общего и частного решений дифференциального уравнения. Расскажите, как из общего решения получить частное решение уравнения.
3. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися и разделёнными переменными. Расскажите порядок решения уравнения с разделяющимися переменными.
4. Введите определение однородной функции и дайте определение однородного дифференциального уравнения первого порядка. Расскажите, как свести решение однородного дифференциального уравнения к решению уравнения с разделяющимися переменными.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. Найдите общее решение следующих дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:
а) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$; б) $xy(1 + x^2)y' - 1 - y^2 = 0$.
2. Найдите общее решение однородных дифференциальных уравнений:
а) $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$; б) $y' = \frac{x-y}{x+3y}$.
3. Сведите уравнение к однородному и найдите его общее решение
 $(x + 2y + 3)dy - (3x + 6y - 1)dx = 0$.

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Найдите общее решение следующих дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

а) $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$; б) $y'x = \sqrt{y - 1}$.

2. Найдите общее решение однородных дифференциальных уравнений:

а) $5xyy' = x^2 + y^2$; б) $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$.

Практическое занятие № 23-24

Линейные ДУ 1-го порядка. Уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение линейного дифференциального уравнения первого порядка, запишите его общий вид.
2. Расскажите о решении линейного дифференциального уравнения первого порядка. Укажите, какая замена используется при его решении, к каким типам уравнений сводится решение линейного уравнения в результате сделанной замены.
3. Дайте определение дифференциального уравнения Бернулли.
4. Расскажите о методе решения уравнения Бернулли.
5. Дайте определение дифференциального уравнения в полных дифференциалах.
6. Расскажите, как найти общее решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах.
7. В каких случаях уравнение может быть сведено к уравнению в полных дифференциалах?

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. Найдите общие решения следующих линейных дифференциальных уравнений первого порядка:
а) $y' - 2y = x^2 - x$; б) $y' + xy = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
2. Решите дифференциальное уравнение линейное относительно переменной x : $(y^4 + 2x) \cdot y' = y$.
3. Найдите общее решение дифференциального уравнения Бернулли $4xy' + 3y = -e^x \cdot x^4 \cdot y^5$.
4. Решите дифференциальные уравнения в полных дифференциалах:

а) $(xy - x^2) \cdot y' + y^2 - 3xy - 2x^2 = 0;$

б) $(xy + \sin y)dx + (0.5x^2 + x \cos y)dy = 0.$

5. Найдите частные решения дифференциальных уравнений, отвечающие заданным начальным условиям:

а) $(\ln y - 5y^2 \sin 5x)dx + \left(\frac{x}{y} + 2y \cos 5x\right)dy = 0, y(0) = e;$

б) $x^3y' + 4y = 12, y(0) = 1.$

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Найдите общие решения следующих линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

а) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x};$ б) $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x.$

2. Решите дифференциальное уравнение линейное относительно переменной x : $y' \cdot (x + y^2) = y.$

3. Найдите общее решение дифференциального уравнения Бернулли $y' - 2y \operatorname{tg} x + y^2 \sin^2 x = 0.$

4. Решите дифференциальные уравнения в полных дифференциалах:

а) $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0;$

б) $(\arcsin x + 2xy)dx + (x^2 + 1 + \operatorname{arctg} y)dy = 0.$

5. Найдите частные решения дифференциальных уравнений, отвечающие заданным начальным условиям:

а) $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0, y(0) = 0;$

б) $y' \sin x - y \cos x = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

Практическое занятие № 25

Линейные однородные дифференциальные уравнения. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, запишите его общий вид.
2. Дайте определение линейно независимых функций.
3. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.
4. Запишите вид общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в зависимости от корней характеристического уравнения.
5. Дайте определение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, запишите его общий вид.
6. Сформулируйте теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
7. Расскажите, как найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории:

1. Найдите общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка:
а) $y'' - 12y' + 20y = 0$; б) $y'' - 5y' = 0$;
в) $y'' + 20y = 0$; г) $y'' - 16y' + 64y = 0$.
2. Найдите общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:
а) $y'' - 5y' + 6y = 2x^2 - 5x + 3$; б) $y'' - 12y' + 20y = 3e^{2x}$;
в) $y'' + 25y = 3 \sin 5x - 4 \cos 5x$.
3. Решите дифференциальное уравнение, пользуясь теоремой о

наложении решений: $y'' - 6y' = x^2 - e^{6x}$.

Задания для самостоятельной работы дома:

1. Найдите общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка:

а) $y'' - 15y' + 56y = 0$;

б) $y'' - 4y' = 0$;

в) $y'' + 25y = 0$;

г) $y'' + 8y' + 16y = 0$.

2. Найдите общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

а) $y'' - 8y' + 7y = 3x - 2$;

б) $y'' - 8y' = 3x - 2$;

в) $y'' - 8y' = 3 \cos 4x$.

3. Решите дифференциальное уравнение, пользуясь теоремой о наложении решений: $y'' - 12y' + 35y = 3x^2 - 4x + 5 \sin 2x - e^{7x}$.

САМОСТОЯТЕЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ (2 семестр)

Задание 1. Пройти все тестирования в СЭО.

Задание 2. Изучить следующие примеры решения задач по теме «Ряды».

Тема занятия «Числовые ряды. Ряды с положительными членами и признаки их сходимости: признаки сравнения, Даламбера, Коши»

1. Исследуйте ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию и поэтому является сходящимся. Согласно свойствам числовых рядов данный ряд будет также сходящимся, так как если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C u_n$, где C – некоторое число.

2. Определите сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+3n}{1+3n}\right)^{2n-1}$.

Решение. Проверим необходимое условие сходимости числового ряда. Находим предел n -го члена ряда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+3n}{1+3n}\right)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1+3n}\right)^{2n-1} = \left| \begin{array}{l} 1+3n = t \\ n = \frac{t-1}{3} \\ \text{при } n \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty \end{array} \right| = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1+t}\right)^{\frac{2}{3}(t-1)-1} = e^{\frac{2}{3}} \neq 0, \end{aligned}$$

следовательно, данный ряд расходится.

3. Примените признак сравнения для исследования сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \text{ если } p < 1.$$

Решение. Так как $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$ для любых $n > 1$ и гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то, по первому признаку сравнения числовых рядов, данный ряд

является расходящимся.

4. Примените признак сравнения для исследования сходимости рядов

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 5}; \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 5}.$$

Решение. а) Так как $\frac{1}{3^n + 5} < \frac{1}{3^n}$ для любого n и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ сходящийся, как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, то данный ряд сходится по первому признаку сравнения числовых рядов.

б) Сравним данный ряд вновь с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$. В отличие от предыдущего примера $\frac{1}{3^n - 5} > \frac{1}{3^n}$ для всех n , поэтому первый признак сравнения ответа не даст.

Воспользуемся вторым признаком сравнения числовых рядов. Для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ находим $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$. Если этот предел есть конечное число, отличное от нуля, то ряды сходятся и расходятся одновременно.

$$\text{Находим } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3^n - 5}}{\frac{1}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^n - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3^n)'}{(3^n - 5)'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot \ln 3}{3^n \cdot \ln 3} = 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

5. Примените признак Даламбера для исследования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^{n-1}}$.

Решение. Выпишем n -й член ряда $u_n = \frac{n}{5^{n-1}}$, тогда $u_{n+1} = \frac{n+1}{5^n}$.

Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\text{Вычисляем } D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 5^{n-1}}{5^n \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{5n} = \frac{1}{5}. \text{ Так как}$$

$D < 1$, то данный ряд сходится.

**Тема занятия «Знакоположительные ряды. Знакопередающие
ряды, признак Лейбница»**

1. Исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} \cdot 5^n$ на сходимость.

Решение. Воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} \cdot 5^n} = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = 5 \cdot e^{-2} = \frac{5}{e^2} < 1. \quad \text{Так как}$$

$K < 1$, то ряд сходится.

2. Проверьте, сходится ли ряд $\frac{1}{101} + \frac{2}{104} + \frac{3}{109} + \frac{4}{116} + \dots$?

Решение. Запишем общий член ряда $a_n = \frac{n}{100 + n^2}$. Введём в рассмотрение

функцию $f(n) = \frac{n}{100 + n^2}$. Эта функция непрерывная и невозрастающая при

$$n > 10, \quad \text{так как} \quad f'(n) = \frac{100 + n^2 - 2n^2}{(100 + n^2)^2} = \frac{100 - n^2}{(100 + n^2)^2} = -\frac{(n-10)(n+10)}{(100 + n^2)^2} < 0 \quad \text{при}$$

$n > 10$. Воспользуемся интегральным признаком Коши:

$$\begin{aligned} \int_{10}^{+\infty} \frac{n}{100 + n^2} dn &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{10}^A \frac{n}{100 + n^2} dn = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_{10}^A \frac{d(100 + n^2)}{100 + n^2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln(100 + n^2) \Big|_{10}^A = \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln(100 + A^2) - \ln 200) = \infty, \end{aligned} \quad \text{следовательно}$$

данный ряд расходится.

3. Найдите сумму ряда $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{4}{n^2 - 12n + 35}$.

Решение. Разложим дробь $\frac{4}{n^2 - 12n + 35}$ на элементарные с помощью метода неопределённых коэффициентов:

$$\frac{4}{n^2 - 12n + 35} = \frac{4}{(n-5)(n-7)} = \frac{A}{n-5} + \frac{B}{n-7} = \frac{An - 7A + Bn - 5B}{(n-5)(n-7)} =$$

$$= \frac{(A+B)n - 7A - 5B}{(n-5)(n-7)}, \text{ отсюда } \begin{cases} A+B=0 \\ -7A-5B=4 \end{cases}, \begin{cases} A=-B \\ 7B-5B=4 \end{cases}, \begin{cases} A=-2 \\ B=2 \end{cases}.$$

Следовательно, $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{4}{n^2 - 12n + 35} = 2 \sum_{n=8}^{\infty} \left(\frac{1}{n-7} - \frac{1}{n-5} \right) =$

$$= 2 \left(\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-7} - \frac{1}{n-5}\right) + \dots \right) = 2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3.$$

4. Проверьте сходимость ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$.

Решение. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ сходится, так как

удовлетворяет условиям признака Лейбница:

$$1) 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Данный ряд сходится условно, так как ряд, составленный из его абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - гармонический ряд, расходится.

5. Исследуйте сходимость ряда $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$.

Решение. Ряд $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \dots$ является

знакопеременным. Этот ряд является абсолютно сходящимся, так как сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots \quad (\text{в этом легко убедиться с}$$

помощью интегрального признака Коши).

Тема занятия «Степенные ряды и область их сходимости.

Разложение функций в степенной ряд»

1. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$$

Решение. Это степенной ряд, все коэффициенты его, за исключением a_0 ,

отличны от нуля. Найдём радиус и интервал сходимости данного ряда. Здесь

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ и } a_{n+1} = \frac{1}{n+1}. \text{ Поэтому } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Следовательно, радиус сходимости $R=1$ и ряд сходится на интервале $(-1,1)$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости, т.е. в

точках $x=\pm 1$. При $x=1$ получаем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, а при $x=-1$ -

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, который сходится в силу признака Лейбница. Таким образом,

данный ряд сходится в любой точке полуинтервала $[-1,1)$ и расходится вне его.

2. Определить область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+4}{5n+7}\right)^n (x-1)^n$.

Решение. Воспользуемся формулой Коши – Адамара:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n+4}{5n+7}\right)^n\right|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{5n+7}} = \frac{5}{2}. \text{ Тогда интервал сходимости}$$

$\left(-\frac{5}{2}+1; \frac{5}{2}+1\right)$, то есть $\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$. В точках $-\frac{3}{2}$ и $\frac{7}{2}$ исследуем отдельно.

При $x = -\frac{3}{2}$ имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+4}{5n+7}\right)^n \left(-\frac{5}{2}\right)^n$.

При $x = \frac{7}{2}$ имеем знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+4}{5n+7}\right)^n \left(\frac{5}{2}\right)^n$.

Применим необходимый признак сходимости рядов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n+4}{5n+7} \cdot \frac{5}{2} \right|^n \geq 1 \neq 0,$$

так как $\frac{2n+4}{5n+7} > \frac{2}{5}$, $\left(\frac{10n+20-10n-14}{(5n+7)5} = \frac{6}{5(5n+7)} > 0 \right)$, следовательно при

$x = -\frac{3}{2}$ и $x = \frac{7}{2}$ ряд расходится. Таким образом, $\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$ - интервал

сходимости данного ряда.

3. Определите интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+4}{5n+7} \right)^n (x-1)^n$.

Решение. Для нахождения интервала сходимости ряда воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+4}{5n+7} \right)^n (x-1)^n} = |x-1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{5n+7} = \frac{2}{5} |x-1| < 1,$$

отсюда $|x-1| < \frac{5}{2}$, $-\frac{5}{2} < x-1 < \frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2} < x < \frac{7}{2}$ – интервал сходимости данного ряда.

4. Определите интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1} \sqrt{n}}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера. Выпишем n -й и $(n+1)$ -й

члены ряда: $u_n = \frac{(-x)^n}{3^{n-1} \sqrt{n}}$, $u_{n+1} = \frac{(-x)^{n+1}}{3^n \sqrt{n+1}}$. Тогда находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1} 3^{n-1} \sqrt{n}}{3^n \sqrt{n+1} x^n} \right| = \frac{|x|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{|x|}{3} < 1, \quad -3 < x < 3 \quad -$$

интервал сходимости ряда.

При $x = -3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$ – ряд с положительными членами. Так как $\frac{3}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$

для любого натурального n ($\sqrt{n} < 3n$, $9n^2 - n > 0$, $n(9n-1) > 0$),

следовательно, ряд расходится.

При $x = 3 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{\sqrt{n}}$ – ряд сходится, но условно.

Заметим, что так как среди коэффициентов данного ряда $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

– нет равных нулю, то для нахождения радиуса сходимости можно было

воспользоваться формулой $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} \right)$. Тогда вычисляем

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \sqrt{n+1}}{3^{n+1} \sqrt{n}} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 3.$$

Следовательно, $(-3; 3)$ – интервал сходимости.

5. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x) = e^x$.

Решение. Если функция $f(x)$ на интервале $(-R, R)$ разлагается в степенной

ряд $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$, то коэффициенты этого ряда

определяются по формулам

$$a_0 = f(0), a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Подставляя выражения коэффициентов, получаем ряд

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots, \quad (*)$$

который называется *рядом Маклорена* для функции $f(x)$.

Имеем $f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$, откуда при $x=0$ получаем

$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$. Подставляя полученные числа в формулу (*), находим

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Так как $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)}{n!} = \infty$, то ряд сходится на всей числовой прямой.

6. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x) = e^{-x^2}$.

Решение. Воспользуемся разложением функции e^x , полученным выше.

Положим $t = -x^2$, тогда $e^{-x^2} = e^t$. Имеем

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots$$

При $t = -x^2$ находим искомое разложение

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \dots,$$

которое справедливо, очевидно, для всех значений x .

7. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x) = \cos^2 x$.

Решение. Имеем $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$. Используя формулу

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, |x| < +\infty, \text{ запишем разложение}$$

функции $\cos 2x$, заменив там x на $2x$:

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

или

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \dots$$

Таким образом,

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \dots \right) \right].$$

Окончательно получаем

$$\cos^2 x = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} \dots$$

Полученный ряд сходится при всех x .

8. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

Решение. Имеем $\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$. Воспользовавшись известным

разложением $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$,

можем записать

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots$$

Отсюда получаем

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \right).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, находим искомое разложение:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots + \frac{2x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

Очевидно, ряд сходится в интервале $(-1,1)$.

9. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Решение. Имеем $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2}$. Воспользовавшись разложением

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots[\alpha-(n-1)]}{n!}x^n + \dots, -1 < x \leq 1$$

нетрудно получить разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1 \cdot x}{2 \cdot 1!} + \frac{1 \cdot 3x^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5x^3}{2^3 \cdot 3!} + \dots + \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)x^n}{2^n \cdot n!} + \dots,$$

справедливое для интервала $(-1,1)$.

10. Найдите сумму ряда $\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$

Решение. Рассмотрим ряд $x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots$, исследуем его на сходимость:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1}} = 1, \text{ при } |x| < 1 - \text{ ряд сходится (при } x = \pm 1 -$$

расходится). Сумма этого ряда $S = \frac{x^2}{1-x^2}$, так как ряд представляет собой

геометрическую прогрессию. Таким образом, $x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots = \frac{x^2}{1-x^2}$.

Проинтегрируем обе части полученного разложения:

$$\int_0^x (x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots) dx = \int_0^x \frac{x^2}{1-x^2} dx,$$

$$\int_0^x x^2 dx + \dots + \int_0^x x^{2n} dx + \dots = \int_0^x \frac{x^2}{1-x^2} dx,$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{1-x^2} \right) dx = -x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|.$$

11. Найдите сумму ряда $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x + \dots + (n+1)(n+2)x^n + \dots$

Решение. Воспользуемся бесконечной геометрической прогрессией

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x} \quad (\text{сходится при } |x| < 1).$$

Дважды продифференцируем ряд:

$$((1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots)')' = \left(\frac{1}{1-x} \right)'',$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x + \dots + (n+1)(n+2)x^n + \dots = \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right)' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Тема занятия «применение степенных рядов к приближенным вычислениям значений функций, интегралов, пределов»

1. Вычислите $e^{0,2}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Имеем $e^{0,2} = 1 + 0.2 + \frac{0.2^2}{2!} + \frac{0.2^3}{3!} + \frac{0.2^4}{4!} + \dots$

Погрешность приближения $e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ определяется

$$\begin{aligned} \text{остатком } R_n &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \dots = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \left(1 + \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) = \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{n+1}} = \frac{x^n}{n!} \left(\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right) < \\ &< \frac{x^n}{n!} \left(\frac{x}{n+1} + \left(\frac{x^2}{n+1} \right)^2 + \left(\frac{x}{n+1} \right)^3 + \dots \right) = \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{\frac{x}{n+1}}{1 - \frac{x}{n+1}} = \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x}{n+1-x}. \end{aligned}$$

$$\text{Имеем } R_n < \frac{0.2^n}{n!} \cdot \frac{0.2}{n+1-0.2} = \frac{0.2^{n+1}}{n!(n+0.8)}.$$

$$\text{При } n=1 \quad R_1 = \frac{0.2^2}{1!(1+0.8)} = \frac{0.04}{1.8} > 0.0001.$$

$$\text{При } n=2 \quad R_2 = \frac{0.2^3}{2!(2+0.8)} = \frac{0.008}{2.28} > 0.0001.$$

$$\text{При } n=3 \quad R_3 = \frac{0.2^4}{3!(3+0.8)} = \frac{0.0016}{6 \cdot 3.8} < 0.0001, \text{ т.е. для достижения}$$

требуемой точности необходимо взять первые три члена разложения:

$$e^{0.2} \approx 1 + 0.2 + \frac{0.2^2}{2!} + \frac{0.2^3}{3!} \approx 1.2213.$$

2. Вычислить $\sin 18^\circ$ с точностью до 10^{-5} .

Решение. Воспользуемся разложением $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$

$$\text{Тогда } \sin 18^\circ = \frac{\pi}{10} - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{5!} - \dots \quad \text{Этот ряд удовлетворяет условиям}$$

признака Лейбница, поэтому допускаемая погрешность по абсолютной величине должна быть меньше первого из отброшенных членов ряда.

$$18^\circ = \frac{\pi}{10} \approx 0.31416; \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 \approx 0.098896; \left(\frac{\pi}{10}\right)^3 \approx 0.031006; \left(\frac{\pi}{10}\right)^5 \approx 0.003060$$

$$\text{Следовательно, } \sin \frac{\pi}{10} = 0.31416 - 0.00517 + 0.00003 - 6 \cdot 10^{-8} + \dots \approx$$

$$\approx 0.31416 - 0.00517 + 0.00003 = 0.309017.$$

3. Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$ с точностью до 0.0001.

Решение. Заменяя в разложении $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$ x на $-x^2$,

$$\text{получим } e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Подставим этот ряд под знак данного интеграла и почленно проинтегрируем

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} dx - \int_0^{\frac{1}{4}} x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} x^4 dx - \frac{1}{3!} \int_0^{\frac{1}{4}} x^6 dx + \dots = 0.25 - \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{10 \cdot 4^5} - \frac{1}{42 \cdot 4^7} + \dots \approx$$

$$\approx 0.25 - \frac{1}{3 \cdot 4^3} \approx 0.25 - 0.0052 = 0.2448$$

Так как знаки чередуются, ряд, удовлетворяет теореме Лейбница и

$$\frac{1}{10 \cdot 4^5} = \frac{1}{10240} < \frac{1}{10000} = 0.0001.$$

4. Вычислите предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{2e^x - x^2 - 2x - 2}$.

Решение. В данном пределе имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0} \right]$, для её

раскрытия воспользуемся разложением функций $y = e^x$ и $y = \sin x$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{2e^x - x^2 - 2x - 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots) - x}{2(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots) - x^2 + 2x - 2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{\frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \dots} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3} + \frac{x^2}{5!} - \dots}{\frac{2}{3!} + \frac{2x}{4!} + \dots} = -\frac{1}{2}.$$

5. Вычислите предел функции $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctg x}{x^3}$.

Решение. Для раскрытия неопределённости воспользуемся разложениями функций $y = \sin x$ и $y = \arctg x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctg x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3!} \right) - x^5 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!} \right) + \dots}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3!} \right) - x^2 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!} \right) + \dots = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации и проведению
самостоятельной работы
по дисциплине
«Математика»
для студентов направления подготовки
08.03.01 Строительство

Оглавление

<u>Введение</u>	74
<u>Общая характеристика самостоятельной работы</u>	76
<u>План-график выполнения самостоятельной работы</u>	79
<u>Контрольные точки и виды отчетности по ним</u>	89
<u>Методические рекомендации по изучению теоретического материала</u>	97
<u>Методические указания по видам работ, предусмотренных рабочей программой дисциплины</u>	104
<u>Методические указания по подготовке к экзамену</u>	106
<u>Список рекомендуемой литературы</u>	108

Введение

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования – «подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности».

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за

стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя:

- изучение и систематизацию официальных государственных документов – законов, постановлений, указов, нормативно-инструкционных и справочных материалов с использованием информационно-поисковых систем «Консультант-плюс», «Гарант», глобальной сети «Интернет»;
- изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации;
- подготовку докладов и рефератов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ;
- участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.

Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.

Общая характеристика самостоятельной работы

Цели и основные задачи СРС

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой специалиста и бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

Виды самостоятельной работы

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы – аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и

эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации, содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.).

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателей являются:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание рефератов;
- подготовка к семинарам и лабораторным работам, их оформление;
- составление аннотированного списка статей из соответствующих журналов по отраслям знаний (педагогических, психологических, методических и др.);
- подготовка рецензий на статью, пособие;
- выполнение микроисследований;
- подготовка практических разработок;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;
- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов.

(В зависимости от особенностей факультета перечисленные виды работ могут быть расширены, заменены на специфические).

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

- текущие консультации;
- коллоквиум как форма контроля освоения теоретического содержания дисциплин: (в часы консультаций, предусмотренных учебным планом);
- прием и разбор домашних заданий (в часы практических занятий);
- прием и защита лабораторных работ (во время проведения л/р);

- выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин (руководство, консультирование и защита курсовых работ (в часы, предусмотренные учебным планом);
- выполнение учебно-исследовательской работы (руководство, консультирование и защита УИРС);
- прохождение и оформление результатов практик (руководство и оценка уровня сформированности профессиональных умений и навыков);
- выполнение выпускной квалификационной работы (руководство, консультирование и защита выпускных квалификационных работ) и др.

План-график выполнения самостоятельной работы
Технологическая карта самостоятельной работы обучающегося

Коды реализованных компетенций	Вид деятельности студентов	Итоговый продукт самостоятельной работы	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
				СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
1 семестр						
УК-2 ОПК-1	Подготовка к практическим занятиям	Самостоятельное решение задач	Собеседование	36		36
	Решение типовых, разноуровневых и проблемных задач	Индивидуальные домашние задания	Собеседование	36		36
Итого за 1 семестр				72		72
2 семестр						
УК-2 ОПК-1	Самостоятельное изучение литературы по основам интегрального исчисления функции одной переменной, интегрального исчисления функции многих переменных, дифференциальным уравнениям.	Конспект	Собеседование	18		18
	Подготовка к практическим занятиям	Самостоятельное решение задач	Собеседование	15		15
	Решение типовых, разноуровневых и проблемных задач	Индивидуальные домашние задания	Собеседование	18		18
Итого за 2 семестр				51		51
Итого				123		123

Организация СРС

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Организацию самостоятельной работы студентов обеспечивают: факультет, кафедра, учебный и методический отделы, преподаватель, библиотека, ТСО, ИВТ, издательство и др.

Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Выполняя самостоятельную работу под контролем преподавателя студент должен:

- освоить минимум содержания, выносимый на самостоятельную работу студентов и предложенный преподавателем в соответствии с Государственными образовательными стандартами высшего образования (ФГОС ВО) по данной дисциплине.
- планировать самостоятельную работу в соответствии с графиком самостоятельной работы, предложенным преподавателем.
- самостоятельную работу студент должен осуществлять в организационных формах, предусмотренных учебным планом и рабочей программой преподавателя.

– выполнять самостоятельную работу и отчитываться по ее результатам в соответствии с графиком представления результатов, видами и сроками отчетности по самостоятельной работе студентов.

студент может:

сверх предложенного преподавателем (при обосновании и согласовании с ним) и минимума обязательного содержания, определяемого ФГОС ВО по данной дисциплине:

– самостоятельно определять уровень (глубину) проработки содержания материала;

– предлагать дополнительные темы и вопросы для самостоятельной проработки;

– в рамках общего графика выполнения самостоятельной работы предлагать обоснованный индивидуальный график выполнения и отчетности по результатам самостоятельной работы;

– предлагать свои варианты организационных форм самостоятельной работы;

– использовать для самостоятельной работы методические пособия, учебные пособия, разработки сверх предложенного преподавателем перечня;

– использовать не только контроль, но и самоконтроль результатов самостоятельной работы в соответствии с методами самоконтроля, предложенными преподавателем или выбранными самостоятельно.

Самостоятельная работа студентов должна оказывать важное влияние на формирование личности будущего специалиста, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет внеаудиторную работу по личному индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, времени и других условий.

Общие рекомендации по организации самостоятельной работы

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

- а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;
- б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение – это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним.

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков – важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

Работоспособность – способность человека к труду с высокой степенью напряженности в течение определенного времени. Различают внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организация рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться информацией;
- величина умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н. Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;
- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп работы;
- привычная последовательность и систематичность деятельности;
- правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменой дела. В течение дня работоспособность изменяется. Наиболее плодотворным является *утреннее время* (с 8 до 14 часов), причем максимальная

работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем *послеобеденное* (с 16 до 19 часов) и *вечернее* (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1 – 1,5 часа нужны перерывы по 10 – 15 мин, через 3 – 4 часа работы отдых должен быть продолжительным – около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда.

Физически здоровый молодой человек, обладающий хорошей подготовкой и нормальными способностями, должен, будучи студентом, отдавать *учению 9 – 10 часов в день* (из них 6 часов в вузе и 3 – 4 часа дома). Любой предмет нельзя изучить за несколько дней перед экзаменом. Если студент в году работает систематически, то он быстро все вспомнит, восстановит забытое. Если же подготовка шла аврально, то у студента не будет даже общего представления о предмете, он забудет все сданное.

Следует взять за правило: *учиться ежедневно, начиная с первого дня семестра.*

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться

в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр.

Ритм в работе – это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы – это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более

трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут – работа, 5 – 10 минут – перерыв; после 3 часов работы перерыв – 20 – 25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

Самостоятельная работа студента – необходимое звено становления исследователя и специалиста

Прогресс науки и техники, информационных технологий приводит к значительному увеличению научной информации, что предъявляет более высокие требования не только к моральным, нравственным свойствам человека, но и в особенности, постоянно возрастающие требования в области образования – обновление, модернизация общих и профессиональных знаний, умений специалиста.

Всякое образование должно выступать как динамический процесс, присущий человеку и продолжающийся всю его жизнь. Овладение научной

мыслью и языком науки является необходимой составляющей в самоорганизации будущего специалиста исследователя. Под этим понимается не столько накопление знаний, сколько овладение научно обоснованными способами их приобретения. В этом, вообще говоря, состоит основная задача вуза.

Специфика вузовского учебного процесса, в организации которого самостоятельной работе студента отводятся все больше места, состоит в том, что он является как будто бы последним и самым адекватным звеном для реализации этой задачи. Ибо во время учебы в вузе происходит выработка стиля, навыков учебной (познавательной) деятельности, рациональный характер которых будет способствовать постоянному обновлению знаний высококвалифицированного выпускника вуза.

Однако до этого пути существуют определенные трудности, в частности, переход студента от синтетического процесса обучения в средней школе, к аналитическому в высшей. Это связано как с новым содержанием обучения (расширение общего образования и углубление профессиональной подготовки), так и с новыми, неизвестными до сих пор формами: обучения (лекции, семинары, лабораторные занятия и т.д.). Студент получает не только знания, предусмотренные программой и учебными пособиями, но он также должен познакомиться со способами приобретения знаний так, чтобы суметь оценить, что мы знаем, откуда мы это знаем и как этого знания мы достигли. Ко всему этому приходят через собственную самостоятельную работу.

Это и потому, что самостоятельно приобретенные знания являются более оперативными, они становятся личной собственностью, а также мотивом поведения, развивают интеллектуальные черты, внимание, наблюдательность, критичность, умение оценивать. Роль преподавателя в основном заключается в руководстве накопления знаний (по отношению к первокурсникам), а в последующие годы учебы, на старших курсах, в совместном установлении проблем и заботе о самостоятельных поисках студента, а также контролирования за их деятельностью. Отметим, что

нельзя ограничиваться только приобретением знаний предусмотренных программой изучаемой дисциплины, надо постоянно углублять полученные знания, сосредотачивая их на какой-нибудь узкой определенной области, соответствующей интересам студента. Углубленное изучение всех предметов, предусмотренных программой, на практике является возможным, и хорошая организация работы позволяет экономить время, что создает условия для глубокого, систематического, заинтересованного изучения самостоятельно выбранной студентом темы.

Конечно, все советы, примеры, рекомендации в этой области, даваемые преподавателем, или определенными публикациями, или другими источниками, не гарантируют никакого успеха без проявления собственной активности в этом деле, т.е. они не дают готовых рецептов, а должны способствовать анализу собственной работы, ее целей, организации в соответствии с индивидуальными особенностями. Учитывая личные возможности, существующие условия жизни и работы, навыки, на основе этих рекомендаций, возможно, выработать индивидуально обоснованную совокупность методов, способов, найти свой стиль или усовершенствовать его, чтобы изучив определенный материал, иметь время оценить его значимость, пригодность и возможности его применения, чтобы, в конечном счете, обеспечить успешность своей учебы с будущей профессиональной деятельности.

Контрольные точки и виды отчетности по ним

В рамках рейтинговой системы успеваемость студентов по каждой дисциплине оценивается в ходе текущего контроля и промежуточной аттестации.

Текущий контроль

На первом этапе необходимо ознакомиться с рабочей программой дисциплины, в которой рассмотрено содержание тем дисциплины лекционного курса, взаимосвязь тем лекций с лабораторными и практическими занятиями, темы и виды самостоятельной работы. По каждому виду самостоятельной работы предусмотрены определённые формы отчетности.

Для успешного освоения дисциплины, необходимо самостоятельно детально изучить представленные темы по рекомендуемым источникам информации.

№ п/п	Темы для самостоятельного изучения	Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
		Основная	Дополни- тельная	Методи- ческая	Интернет- ресурсы
	Раздел 1. Элементы линейной алгебры	1,2	1,3		
1.	Тема 1. Матрицы и определители. (с применением дистанционных образовательных технологий)	1,2	1,3		
2.	Тема 2. Системы линейных алгебраических уравнений. (с применением дистанционных образовательных технологий)	1,2	1,3		
	Раздел 2. Элементы векторной алгебры	1,2	1,3		
3.	Тема 3. Векторы.	1,2	1,3		
	Раздел 3. Аналитическая геометрия	1,2	1,3		
4.	Тема 4. Аналитическая геометрия на плоскости. (с применением дистанционных образовательных технологий)	1,2	1,3		
5.	Тема 5. Аналитическая геометрия в пространстве. (с применением дистанционных образовательных технологий)	1,2	1,3		

6.	Тема 6. Кривые и поверхности второго порядка. Преобразование координат. Квадратичные формы.	1,2	1,3		
	Раздел 4. Основы математического анализа	1,2	1,3		
7.	Тема 7. Введение в математический анализ.	1,2	1,3		
8.	Тема 8. Производная и дифференциал функции.	1,2	1,3		
9.	Тема 9. Применение производных к исследованию свойств функции	1,2	1,3		
10.	Тема 10. Геометрические приложения дифференциального исчисления	1,2	1,3		
	Раздел 5. Комплексные числа.				
11.	Тема 11. Комплексные числа.				
	Раздел 6. Функция нескольких переменных.	1,2	1,3		
12.	Тема 12. Функция нескольких переменных. Предел функции. Непрерывные функции.	1,2	1,3		
13.	Тема 13. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных	1,2	1,3		
	Раздел 7. Неопределенный интеграл	1,2	1,3		
14.	Тема 14. Неопределенный интеграл и его свойства. Основные методы интегрирования. (с применением дистанционных образовательных технологий)	1,2	1,3		
15.	Тема 15. Интегрирование рациональных функций. (с применением дистанционных образовательных технологий)	1,2	1,3		
16.	Тема 16. Интегрирование тригонометрических функций. (с применением дистанционных образовательных технологий)	1,2	1,3		
17.	Тема 17. Интегрирование иррациональных функций. (с применением дистанционных образовательных технологий)	1,2	1,3		
	Раздел 8. Определенный интеграл	1,2	1,3		
18.	Тема 18. Определенный интеграл и методы его вычисления	1,2	1,3		
19.	Тема 19. Несобственные интегралы	1,2	1,3		
20.	Тема 20. Приложения определенного интеграла	1,2	1,3		
	Раздел 9. Дифференциальные уравнения	1,2	2,3		

21.	Тема 21. Дифференциальные уравнения первого порядка	1,2	2,3		
22.	Тема 22. ДУ высших порядков.	1,2	2,3		

Вопросы к дифзачету (1 семестр)

Знать

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Определители, их свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Различные способы вычисления определителей. Примеры.
2. Матрицы, основные определения, действия над матрицами.
3. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров.
4. Системы линейных алгебраических уравнений, теорема Кронекера - Капелли.
5. Решение систем линейных алгебраических уравнений по правилу Крамера.
6. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
7. Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью обратной матрицы.
8. Однородные системы линейных алгебраических уравнений. Фундаментальная система решений.

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

9. Векторы, основные определения, понятия, действия над ними.
10. Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме.
11. Коллинеарность и компланарность векторов.
12. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов, определения, свойства, геометрический смысл векторного и скалярного произведений.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

13. Уравнения прямой на плоскости: с угловым коэффициентом; через две точки; в отрезках, общее уравнение.
14. Уравнение плоскости в векторной и координатной формах.
15. Уравнение плоскости и прямой в пространстве.
16. Расстояние от точки до плоскости.
17. Условие параллельности и перпендикулярности векторов.
18. Канонические уравнения кривых второго порядка: формулы, определения, чертеж.
19. Канонические уравнения поверхностей второго порядка: формулы, чертеж.

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

1. Предел числовой последовательности.
2. Предел функции в точке и на бесконечности, его геометрическая интерпретация, действия над пределами.
3. Односторонние пределы.
4. Основные теоремы о пределах. Признаки существования пределов.
5. Первый и второй замечательные пределы.
6. Бесконечно большие функции и их свойства.
7. Бесконечно малые величины, их свойства, эквивалентность.
8. Раскрытие неопределенностей.
9. Непрерывность функции в точке, на интервале и на отрезке. Свойства.
10. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Формулировка теоремы Коши и ее геометрический смысл.
11. Точки разрыва, их классификация.

12. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Формулировка теоремы Коши и ее геометрический смысл.
13. Производная функции, ее геометрический и механический смысл.
14. Правила дифференцирования.
15. Производные основных элементарных функций. Таблица производных.
16. Производные сложной и обратной функций
17. Дифференциал, определение, геометрический смысл.
18. Производные и дифференциалы второго порядка. Определения, вычисление.
19. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей.
20. Применение производных к исследованию функций.
21. Основные теоремы дифференциального исчисления.
22. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Формула Тейлора.
23. Экстремум функции, необходимое и достаточные условия экстремума.
24. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
25. Выпуклость графика функции. Точки перегиба.
26. Асимптоты графика функции.
27. Касательная и нормаль к плоской кривой.

Уметь

1. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ методом разложения

по элементам какой-либо строки или столбца.

2. Найти обратную матрицу A^{-1} . $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти произведение $A \times B$.

4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Найти произведение $A \times B$.

5. Решить систему линейных уравнений методом Крамера
$$\begin{cases} x + y - z = 36 \\ x - y + z = 13 \\ -x + y + z = 7 \end{cases}$$

6. Решить систему линейных уравнений матричным способом

$$\begin{cases} 4x + y + z = 5 \\ 6x + 3y + 4z = 1 \\ 7x + 2y + 5z = 2 \end{cases}$$

7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, 5)$ параллельно прямой $3x - 4y + 15 = 0$.

8. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат, параллельно прямой, пересекающей ось OX в точке $(2, 0)$ и ось OY в точке $(0, 6)$.

9. Составить уравнение прямой “в отрезках” и построить ее:

$$2x + 3y - 6 = 0.$$

10. Составить уравнение прямой “в отрезках” и построить ее:

$$4x - 3y + 24 = 0.$$

11. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x - 4y - 12 = 0$ от координатного угла.

12. Найти угол между прямыми $3x = 4y - 7 = 0$ и $4x - 3y + 8 = 0$.

13. Найти $A+B$, AB , $A \setminus B$, $B \setminus A$, если

$$A = \{x \in R / x^2 + x - 20 = 0\} \quad B = \{x \in R / x^2 - 7x + 12 = 0\}$$

14. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$.

15. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}$.

16. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$.

17. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 10}$.

18. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$.

19. Вычислить: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$.

20. Найти производную функции: $y = x^3 \cos x$.

21. Найти производную функции: $y = \ln(x^3 + 7x + 2)$.

22. Вычислить дифференциал функции: $y = \sqrt{1+x^2}$.

23. Вычислить дифференциал функции: $y = \sin^2 t$.

- Владеть
1. Методами математических операций с матрицами, вычисления их ранга, нахождения обратных матриц и вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.
 2. Основными методами решения систем линейных алгебраических уравнений.
 3. Принципами составления и описания уравнений линий на плоскости.
 4. Основными понятиями теории множеств и ее применением для анализа, обработки и представления научной и деловой информации.
 5. Способами вычисления пределов функций в точке и на бесконечности.
 6. Основными понятиями дифференциального исчисления.

Вопросы к экзамену (2 семестр)

Знать

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Функция нескольких переменных (ФНП). Область определения. Предел

и непрерывность ФНП. Примеры.

2. Частные производные ФНП. Пример.
3. Полный дифференциал ФНП. Пример.
4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
5. Производные и дифференциалы высших порядков ФНП. Примеры.
6. Производная сложной функции (случай нескольких независимых переменных). Примеры.
7. Производная функции двух переменных, заданной в неявном виде. Пример.

8. Экстремум ФНП. Необходимое и достаточное условия экстремума ФНП. Пример.

9. Условный экстремум ФНП. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

10. Первообразная функции, неопределенный интеграл и его свойства.
11. Таблица интегралов.
12. Методы вычисления неопределенного интеграла (непосредственное интегрирование, подстановкой, по частям).
13. Интегрирование рациональных дробей.
14. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции.
15. Универсальная тригонометрическая подстановка.
16. Интегрирование иррациональностей.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

17. Определенный интеграл как предел интегральных сумм.
18. Формула Ньютона-Лейбница. Свойства определенного интеграла
19. Методы вычислений определенного интеграла (непосредственное, подстановкой, по частям).
20. Приложения определенного интеграла: Вычисление площади плоской фигуры, объема тела вращения, длины кривой.
21. Несобственные интегралы.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

22. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, задача Коши.
23. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Решение методом Бернулли и методом вариации произвольных постоянных.
24. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.
25. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.
26. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.
27. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида. Метод неопределенных коэффициентов.

Уметь 1. Вычислить неопределённые интегралы следующих типов:

$$\int \left(\frac{4}{9-x^2} - \sin 2x + 3\sqrt{x} \right) dx \quad ; \quad \int \frac{(2+3x)^2}{\sqrt[3]{x}} dx; \quad 3) \int x 7^x dx;$$
$$\int x \arcsin \frac{x}{5} dx; \int (x^2 + 4x) e^{3x} dx; \int 3x \sin(x^2 - 1) dx; \int (x-1) \ln 2x dx;$$

$$\int (2x^2 - 3) \cos 3x dx; \int \sqrt{x+1} dx; \int \frac{6}{x^2 - 3x + 5} dx; \int \frac{6-4x}{x^2 - 3x + 5} dx;$$

$$\int \frac{x^2 - 5}{x \cdot (x-1) \cdot (x+1)} dx; \int \frac{2x^5 - 8x^3 + 3}{x^2 - 2x} dx; \int \frac{6-4x}{\sqrt{x^2 - 3x + 5}} dx; \int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt[12]{x^5}} dx;$$

$$\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx; \int \sin 2x \cdot \sin 6x dx; \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx;$$

$$\int \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x + \sin x} dx; \int \frac{5 \operatorname{tg} x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx.$$

2. Найти определённые интегралы $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos 2x dx$; $\int_{-4}^4 \frac{x-5}{\sqrt{x+5}} dx$.

3. Исследовать несобственные интегралы вида $\int_{-\infty}^1 e^x dx$; $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$.

4. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2 - 4x - 7$ и $y = 3 - x$.

5. Вычислить длину дуги кривой, заданной параметрическими

уравнениями $\begin{cases} x = 6 \cos^3 t \\ y = 6 \sin^3 t \end{cases}, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}.$

6. Найти общее решение дифференциального уравнения $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

7. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = 0$, если корни характеристического уравнения:

а) $k_1 = a, k_2 = b$;

б) $k_1 = a, k_2 = 0$;

в) $k_1 = k_2 = b$;

г) $k_1 = a + bi, k_2 = a - bi$.

Записать общее решение для каждого из составленных уравнений.

8. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

а) $y'' + py' + qy = 0$;

б) $y'' + py' = 0$;

в) $y'' + qy = 0$;

г) $y'' - qy = 0$.

9. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$, отвечающего заданным начальным условиям $y(0) = C_1, y'(0) = C_2$.

Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

а) $y'' + py' + qy = f_1(x)$, где $f_1(x) = ax^2 + bx + p$;

б) $y'' + py' = f_2(x)$, где $f_2(x) = ax + b$;

в) $y'' - py' = f_3(x)$, где $f_3(x) = a \cdot e^{px}$;

г) $y'' + qy = f_4(x)$, где $f_4(x) = a \cdot \cos \omega x + b \sin \omega x$;

д) $y'' - qy = f_1(x) + f_3(x)$.

10. Найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = f_2(x) + f_4(x)$, отвечающее начальным условиям $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

- Владеть
1. Основными методами интегрального исчисления функции одной переменной.
 2. Основными методами дифференциального исчисления функции многих переменных.
 3. Методами решения дифференциальных уравнений.

Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы.

С первых же сентябрьских дней на студента обрушивается громадный объем информации, которую необходимо усвоить. Нужный материал содержится не только в лекциях (запомнить его – это только малая часть задачи), но и в учебниках, книгах, статьях. Порой возникает необходимость привлекать информационные ресурсы Интернет.

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности. Вчерашнему школьнику сделать это бывает весьма непросто: если в школе ежедневный контроль со стороны учителя заставлял постоянно и систематически готовиться к занятиям, то в вузе вопрос об уровне знаний вплотную встает перед студентом только в период сессии. Такая ситуация оборачивается для некоторых соблазном весь семестр посвятить свободному времяпрепровождению («когда будет нужно – выучу!»), а когда приходит пора экзаменов, материала, подлежащего усвоению, оказывается так много, что никакая память не способна с ним справиться в оставшийся промежуток времени.

Работа с книгой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой – это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на

бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Различают два вида чтения; первичное и вторичное. *Первичное* – это внимательное, неторопливое чтение, при котором можно остановиться на трудных местах. После него не должно остаться ни одного непонятого слова. Содержание не всегда может быть понятно после первичного чтения.

Задача *вторичного* чтения – полное усвоение смысла целого (по счету это чтение может быть и не вторым, а третьим или четвертым).

Правила самостоятельной работы с литературой

Как уже отмечалось, самостоятельная работа с учебниками и книгами (а также самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях) – это важнейшее условие

формирования у себя научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

- Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, – советует студенту и молодому ученому Г. Селье, – запомните только, где это можно отыскать» (Селье, 1987. С. 325).

- Сам такой перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и дипломных работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).

- Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и дипломных работ это позволит очень сэкономить время).

- Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть.

- При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время...

- Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).

- Если книга – Ваша собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора (это очень

хороший совет, позволяющий экономить время и быстро находить «избранные» места в самых разных книгах).

- Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать), и это может занять немалое время (у кого-то – до нескольких недель и даже месяцев); опыт показывает, что после этого студент каким-то «чудом» начинает буквально заглатывать книги и чуть ли не видеть «сквозь обложку», стоящая это работа или нет...

- «Либо читайте, либо перелистывайте материал, но не пытайтесь читать быстро... Если текст меня интересует, то чтение, размышление и даже фантазирование по этому поводу сливаются в единый процесс, в то время как вынужденное скорочтение не только не способствует качеству чтения, но и не приносит чувства удовлетворения, которое мы получаем, размышляя о прочитанном», – советует Г. Селье (Селье, 1987. – С. 325-326).

- Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи. В этом случае студент (или молодой ученый) будет как бы искать аргументы «за» или «против» интересующей его идеи, и одновременно он будет как бы общаться с авторами этих книг по поводу своих идей и размышлений... Проблема лишь в том, как найти «свою» идею...

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того насколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать

материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют **четыре основные установки в чтении научного текста:**

1. информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)
2. усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)
3. аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)
4. творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких **видов чтения:**

1. библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
2. просмотровое – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
3. ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;
4. изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;

5. аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;
2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;
3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;
4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;
5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта.
2. Выделите главное, составьте план.

3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора.

4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.

5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

**Методические указания по видам работ, предусмотренных рабочей
программой дисциплины**
Практические занятия

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала – умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

Методические указания по подготовке к экзамену

Подготовка к экзаменам и зачетам

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин завершается экзаменом. Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

Экзаменационная сессия – это серия экзаменов, установленных учебным планом. Между экзаменами интервал 3 – 4 дня. Не следует думать, что 3-4 дня достаточно для успешной подготовки к экзаменам. В эти 3 – 4 дня нужно систематизировать уже имеющиеся знания. На консультации перед экзаменом студентов познакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

Требования к организации подготовки к экзаменам те же, что и при занятиях в течение семестра, но соблюдаться они должны более строго. Во-первых, очень важно соблюдение режима дня; сон не менее 8 часов в сутки, занятия заканчиваются не позднее, чем за 2 – 3 часа до сна. Оптимальное время занятий, особенно по математике – утренние и дневные часы. В перерывах между занятиями рекомендуются прогулки на свежем воздухе, неустойчивые занятия спортом. Во-вторых, наличие хороших собственных конспектов лекций. Даже в том случае, если была пропущена какая-либо лекция, необходимо во время ее восстановить (переписать ее на кафедре), обдумать, снять возникшие вопросы для того, чтобы запоминание материала было осознанным. В-третьих, при подготовке к экзаменам у студента должен быть хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Здесь можно эффективно использовать листы опорных сигналов.

Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине,

отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Правила подготовки к зачетам и экзаменам:

- Лучше сразу сориентироваться во всем материале и обязательно расположить весь материал согласно экзаменационным вопросам (или вопросам, обсуждаемым на семинарах), эта работа может занять много времени, но все остальное – это уже технические детали (главное – это ориентировка в материале!).

- Сама подготовка связана не только с «запоминанием». Подготовка также предполагает и переосмысление материала, и даже рассмотрение альтернативных идей.

- Готовить «шпаргалки» полезно, но пользоваться ими рискованно. Главный смысл подготовки «шпаргалок» – это систематизация и оптимизация знаний по данному предмету, что само по себе прекрасно – это очень сложная и важная для студента работа, более сложная и важная, чем простое поглощение массы учебной информации. Если студент самостоятельно подготовил такие «шпаргалки», то, скорее всего, он и экзамены сдавать будет более уверенно, так как у него уже сформирована общая ориентировка в сложном материале.

- Как это ни парадоксально, но использование «шпаргалок» часто позволяет отвечающему студенту лучше демонстрировать свои познания (точнее – ориентировку в знаниях, что намного важнее знания «запомненного» и «тут же забытого» после сдачи экзамена).

- Сначала студент должен продемонстрировать, что он «усвоил» все, что требуется по программе обучения (или по программе данного преподавателя), и лишь после этого он вправе высказать иные, желательно аргументированные точки зрения.

Список рекомендуемой литературы

Перечень основной литературы:

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 14-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2017. - 608 с.
2. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2016. - 816 с

Перечень дополнительной литературы:

1. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами : 1 курс : [линейная алгебра, аналитическая геометрия, основы математического анализа, комплексные числа] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. - 9-е изд. - М. : Айрис Пресс, 2013. - 576 с.
2. Сборник задач по высшей математике с контрольными работами. 2 курс / К. Н. Лунгу [и др.] ; под ред. С. Н. Фебина. - 8-е изд. - Москва : АЙРИС ПРЕСС, 2013. - 591 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: с.
3. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко; Моск. гос. ун-т тех. и упр. им. К.Г. Разумовского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 396 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс). - На учебнике гриф: Доп.МО