

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических занятий
по дисциплине «Теория принятия решений в вопросах защиты информации»
для студентов направления подготовки
10.03.01 Информационная безопасность
Направленность (профиль)
«Организация и технологии защиты информации (по отрасли или в сфере
профессиональной деятельности)»

Ставрополь,
2026

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Тема 1. Введение в проблематику курса

Практическое занятие № 1. Решение задач методом анализа иерархий

Тема 2. Математические основы теории принятия решений

Практическое занятие № 2. Целочисленное линейное программирование.

Тема 3. Теория игр

Практическое занятие № 3. Одноиндексные задачи линейного программирования

Тема 4. Критерии принятия решений

Практическое занятие № 4. Анализ чувствительности одноиндексных задач линейного программирования

Тема 5. Распознавание образов в теории принятия решений

Практическое занятие № 5. Двухиндексные задачи линейного программирования. Задача о назначениях

ВВЕДЕНИЕ

1. Цель и задачи освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины ознакомление студентов с важнейшими структурами математического программирования, теории оптимизации и исследования операций и их применением в математических моделях информационных процессов и управления; выработка представлений и базовых знаний в области прикладного применения теории принятия решений в инфотелекоммуникационных системах

2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	ИД-1УК-1 выделяет проблемную ситуацию, осуществляет ее многофакторный анализ и диагностику на основе системного подхода	В совершенстве выделяет проблемную ситуацию, осуществляет ее многофакторный анализ и диагностику на основе системного подхода
	ИД-3УК-1 определяет и оценивает риски возможных вариантов решений проблемной ситуации, выбирает оптимальный вариант её решения.	В совершенстве определяет и оценивает риски возможных вариантов решений проблемной ситуации, выбирает оптимальный вариант её решения.

Тема 1. Введение в проблематику курса

Практическое занятие № 1

Решение задач методом анализа иерархий

Формируемые компетенции: УК-1

Теоретическая часть:

Отметим еще раз основные моменты. В общем случае, в теории принятия решений используются “разумные”, по возможности обоснованные процедуры выбора наилучшей из нескольких возможных альтернатив. Насколько правильным будет выбор, зависит от качества данных, используемых при описании ситуации, в которой принимается решение. С этой точки зрения процесс принятия решений может принадлежать к одному из трех возможных условий (если не рассматривать многокритериальные задачи).

1. Принятие решений в условиях определенности, когда данные известны точно.

2. Принятие решений в условиях риска, когда данные можно описать с помощью вероятностных распределений.

3. Принятие решений в условиях неопределенности, когда данным нельзя приписать относительные веса (весовые коэффициенты), которые представляли бы степень их значимости в процессе принятия решений.

По существу, в условиях определенности данные надежно определены, в условиях неопределенности они не определены. Принятие решений в условиях риска, следовательно, представляет “промежуточный” случай.

В этом разделе рассматривается подход к принятию решений в ситуациях, когда, например, для идей, чувств, эмоций определяются некоторые количественные показатели, обеспечивающие числовую шкалу предпочтений для возможных альтернативных решений. Этот подход известен как метод анализа иерархий.

Перед тем как изложить детали данного метода, рассмотрим пример, демонстрирующий способ, с помощью которого оцениваются различные альтернативные решения.

Некий выпускник, отличник средней школы субъект X желает поступить в один из трех университетов: A , B или C . Для того, чтобы выбрать университет, субъект X сформулировал два основных критерия: местонахождение университета и его академическая репутация. Будучи отличным учеником, он оценивает академическую репутацию университета в пять раз выше, чем его местонахождение. Это приводит к тому, что репутации университета приписывается вес (с точностью до целых величин) примерно 83 %, а его местонахождению – 17 %. Проведенный анализ (правила такого анализа будут изложены ниже) дал следующие оценки (таблица 2.1).

Таблица 2.1

Критерии	Университет		
	A	B	C
Местонахождение	12.9	27.7	59.4
Репутация	54.5	27.3	18.2

Структура задачи принятия решений приведена в таблице 2.2. Задача имеет единственный иерархический уровень с двумя критериями (местонахождение и репутация) и три альтернативных решения (университет либо A , либо B , либо C).

Оценка выбора одного из трех университетов основана на вычислении комбинированных весовых коэффициентов (приведены в таблице 2.2). На основе этих вычислений университет A получает наивысший комбинированный вес и, следовательно, является оптимальным выбором субъекта X .

Таблица 2.2

Задача	Выбор университета					
	Местоположение (0.17)			Репутация (0.83)		
Критерий иерархии 1 уровня						
Альтернативы	$У_{н.A}$ 0.129	$У_{н.B}$ 0.277	$У_{н.C}$ 0.594	$У_{н.A}$ 0.545	$У_{н.B}$ 0.273	$У_{н.C}$ 0.182
Университет	$У_{н.A}$		$У_{н.B}$		$У_{н.C}$	
Формирование оценки выбора	$0.17 \cdot 0.129 + 0.83 \cdot 0.545 = 0.4743$		$0.17 \cdot 0.277 + 0.83 \cdot 0.273 = 0.2737$		$0.17 \cdot 0.594 + 0.83 \cdot 0.182 = 0.2520$	

Общая структура метода анализа иерархий может включать несколько иерархических уровней со своими критериями. Предположим в примере выше, что у субъекта X есть сестра-близнец (субъект Y), которая также решила поступать в один из выбранных братом университетов. Однако их родители ставят условие, что дети должны учиться в одном университете, тогда они смогут пользоваться одним автомобилем. В таблице 2.3 приведена структура задачи выбора решения, которая теперь включает два иерархических уровня со своими критериями. Величины p и q (предположительно равные) на первом иерархическом уровне представляют собой весовые коэффициенты, которые приписываются точкам зрения брата и сестры относительно процессов выбора соответственно.

Таблица 2.3

Задача	Выбор университета											
Критерий иерархии 1 уровня	Брат (p)						Сестра (q)					
Критерий иерархии 2 уровня	Местоположение (p_1)			Репутация (q_1)			Местоположение (p_2)			Репутация (q_2)		
Альтернативы	Ун.А p_{11}	Ун.В p_{12}	Ун.С p_{13}	Ун.А q_{11}	Ун.В q_{12}	Ун.С q_{13}	Ун.А p_{21}	Ун.В p_{22}	Ун.С p_{23}	Ун.А q_{21}	Ун.В q_{22}	Ун.С q_{23}

Второй иерархический уровень использует веса (p_1, p_2) и (q_1, q_2) для отображения индивидуальных точек зрения брата и сестры относительно критериев местонахождения и академической репутации каждого университета. Остальная часть структуры принятия решения может быть интерпретирована аналогично предыдущему примеру. Заметим, что

$$\begin{aligned}
 p + q &= 1, \\
 p_1 + p_2 &= 1, q_1 + q_2 = 1, \\
 p_{11} + p_{12} + p_{13} &= 1, p_{21} + p_{22} + p_{23} = 1, \\
 q_{11} + q_{12} + q_{13} &= 1, q_{21} + q_{22} + q_{23} = 1.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Пусть для данной задачи выбора установлены следующие значения весовых коэффициентов.

$$\begin{aligned}
 p &= 0,5, q = 0,5, \\
 p_1 &= 0,17, p_2 = 0,83, \\
 p_{11} &= 0,129, p_{12} = 0,277, p_{13} = 0,594, \\
 p_{21} &= 0,545, p_{22} = 0,273, p_{23} = 0,182, \\
 q_1 &= 0,3, q_2 = 0,7, \\
 q_{11} &= 0,2, q_{12} = 0,3, q_{13} = 0,5, \\
 q_{21} &= 0,5, q_{22} = 0,2, q_{23} = 0,3.
 \end{aligned}$$

Основываясь на этой информации, оценим с помощью комбинированных весов каждый из трех университетов. По аналогии с предыдущим примером запишем следующие формулы расчета для каждого университета.

$$\text{Ун.А} = p \cdot (p_1 \cdot p_{11} + p_2 \cdot p_{21}) + q \cdot (q_1 \cdot q_{11} + q_2 \cdot q_{21}) = 0.44214$$

$$\text{Ун.В} = p \cdot (p_1 \cdot p_{12} + p_2 \cdot p_{22}) + q \cdot (q_1 \cdot q_{12} + q_2 \cdot q_{22}) = 0.25184$$

$$\text{Ун.С} = p \cdot (p_1 \cdot p_{13} + p_2 \cdot p_{23}) + q \cdot (q_1 \cdot q_{13} + q_2 \cdot q_{23}) = 0.30602$$

Сложность метода анализа иерархий заключается в определении относительных весовых коэффициентов (таких, как использованных в первом примере) для оценки альтернативных решений. Если имеется n критериев на заданном уровне иерархии, соответствующая процедура создает матрицу A размерности $n \times n$, именуемую матрицей парных сравнений, которая отражает суждение лица, принимающего решение, относительно важности разных критериев. Парное сравнение (лучше - хуже, дороже - дешевле и т.д.) выполняется таким образом, что критерий в строке i ($i = 1, 2, \dots, n$) оценивается относительно каждого из критериев, представленных n столбцами.

Покажем, как была определена матрица сравнения A для задачи выбора субъектом A в первом примере. Начнем с главного иерархического уровня, который имеет дело с критериями академической репутации университета и его местонахождения. С точки зрения

субъекта A академическая репутация университета в 5 раз важнее его местонахождения. Следовательно, он приписывает элементу a_{21} значение 5. Это автоматически предполагает, что $a_{12} = 1/5$. Обозначив через R и L критерии репутации университета и его местонахождения, можно записать матрицу сравнения следующим образом.

$$A = \begin{pmatrix} & L & R \\ L & 1 & 1/5 \\ R & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

В соответствии с методом анализа иерархий для описания упомянутых оценок используются в данном случае целые числа от 1 до 9. Может использоваться любая шкала – в диагонали тогда располагаются элементы с минимальным значением. Однако, в этом случае можно все элементы матрицы разделить на число, стоящее в диагонали, если это число не равно 1. При этом $a_{ij} = 1$ означает, что i -й и j -й критерии одинаково важны, $a_{ij} = 5$ отражает мнение, что i -й критерий значительно важнее, чем j -й, а, например, $a_{ij} = 9$ указывает, что i -й критерий чрезвычайно важнее j -го. Другие промежуточные значения между 1 и 9 интерпретируются аналогично. Согласованность таких обозначений обеспечивается следующим важным условием: если $a_{ij} = k$, то автоматически $a_{ji} = 1/k$ (иначе не будут выполняться соответствующие равенства, указанные во втором примере). Кроме того, все диагональные элементы a_{ii} матрицы A должны быть равны 1, так как они выражают оценку критерия относительно самого себя.

При анализе используются относительные (нормализованные) веса критериев R и L , которые могут быть определены путем деления элементов каждого столбца на сумму элементов этого же столбца. Следовательно, для нормализации матрицы A делим элементы первого столбца на величину $1 + 5 = 6$, элементы второго – на величину $1 + 1/5 = 1.2$. Искомые относительные веса W_R и W_L критериев вычисляются теперь в виде средних значений элементов соответствующих строк полученной после выполнения указанных операций нормализованной матрицы A_N . Следовательно,

$$A_N = \begin{pmatrix} & L & R \\ L & 0.17 & 0.17 \\ R & 0.83 & 0.83 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Средние значения элементов строк} \\ W_L = \frac{0.17+0.17}{2} = 0.17 \\ W_R = \frac{0.83+0.83}{2} = 0.83 \end{array}$$

В результате вычислений получили $W_R = 0,83$ и $W_L = 0,17$, т.е. те веса, которые показаны в таблице 2.2. Столбцы матрицы A_N попарно одинаковы, что имеет место лишь в случае, когда лицо, принимающее решение, проявляет идеальную согласованность в определении элементов матрицы A . Относительные веса альтернативных решений, соответствующих университетам A , B и C , вычисляются в пределах каждого критерия R и L с использованием следующих двух матриц сравнения университетов друг с другом.

$$A_L = \begin{pmatrix} & A & B & C \\ A & 1 & 1/2 & 1/5 \\ B & 2 & 1 & 1/2 \\ C & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Здесь три числа 2, 5, 2 отражают мнение субъекта X (соответственно университет B сравнивается с A (a_{21}), C – с A (a_{31}), C – с B (a_{32})). Суммы элементов столбцов = 8, 3.5, 1.7.

$$A_R = \begin{pmatrix} & A & B & C \\ A & 1 & 2 & 3 \\ B & 1/2 & 1 & 3/2 \\ C & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Здесь два числа 2 и 3 определяют сравнение соответственно университета A с B (a_{12}) и A с C (a_{13}). Суммы элементов столбцов = 1.83, 3.67, 5.5.

Элементы матриц A_R и A_L определены на основе суждений субъекта A , касающихся относительной важности трех университетов. При делении элементов каждого столбца

матриц A_R и A_L на сумму элементов этих же столбцов получаем следующие нормализованные матрицы.

$$A_{LN} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & 0.125 & 0.143 & 0.118 \\ B & 0.250 & 0.286 & 0.294 \\ C & 0.625 & 0.571 & 0.588 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{Средние значения элементов строк} \\ W_{LA} = \frac{0.125+0.143+0.118}{3} = 0.129 \\ W_{LB} = \frac{0.250+0.286+0.294}{3} = 0.277 \\ W_{LC} = \frac{0.625+0.571+0.588}{3} = 0.594 \end{pmatrix}$$

$$A_{RN} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & 0.545 & 0.545 & 0.545 \\ B & 0.273 & 0.273 & 0.273 \\ C & 0.182 & 0.182 & 0.182 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{Средние значения элементов строк} \\ W_{RA} = \frac{0.545+0.545+0.545}{3} = 0.545 \\ W_{RB} = \frac{0.273+0.273+0.273}{3} = 0.273 \\ W_{RC} = \frac{0.182+0.182+0.182}{3} = 0.182 \end{pmatrix}$$

Величины $(W_{RA}, W_{RB}, W_{RC}) = (0,545, 0,273, 0,182)$ дают соответствующие веса для университетов A, B и C с точки зрения академической репутации. Аналогично величины $(W_{LA}, W_{LB}, W_{LC}) = (0,129, 0,277, 0,594)$ являются относительными весами, касающимися местонахождения университетов.

Во втором примере мы отмечали, что все столбцы нормализованных матриц A_N и A_{RN} идентичны, а столбцы матрицы A_{LN} таковыми не являются. Одинаковые столбцы указывают на то, что результирующие относительные веса сохраняют одно и то же значение независимо от того, как выполняется сравнение. В этом случае говорят, что исходные матрицы сравнения A_N и A_{RN} являются согласованными. Следовательно, матрица A_{LN} не является таковой. Согласованность означает, что решение будет согласовано с определениями парных сравнений критериев или альтернатив. С математической точки зрения согласованность матрицы A означает, что умножение $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$ для всех i, j и k . Например, в матрице A_{RN} из второго примера $a_{13} = 3$ и $a_{12} \cdot a_{23} = 2 \cdot 3/2 = 3 = a_{13}$. Свойство согласованности требует линейной зависимости столбцов (и строк) матрицы A . В частности, столбцы любой матрицы сравнений размерностью 2×2 являются зависимыми, и, следовательно, такая матрица всегда является согласованной. Не все матрицы сравнений являются согласованными. Действительно, принимая во внимание, что такие матрицы строятся на основе человеческих суждений, можно ожидать некоторую степень несогласованности, и к ней следует относиться терпимо при условии, что она не выходит за определенные “допустимые” рамки.

Чтобы выяснить, является ли уровень согласованности “допустимым”, необходимо определить соответствующую количественную меру для матрицы сравнений A . В примере 2 мы видели, что идеально согласованная матрица A порождает нормализованную матрицу A_N , в которой все столбцы одинаковы.

В компактной форме условие согласованности матрицы A формулируется следующим образом. Матрица A будет согласованной тогда и только тогда, когда

$$A \cdot w = n \cdot w, \quad (2.2)$$

где w – вектор-столбец относительных весов $w_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Когда матрица A не является согласованной, относительный вес w_i аппроксимируется средним значением n элементов i -й строки нормализованной матрицы A_N (см. пример 2). Обозначив через вектор $\bar{w}$ вычисленные оценки (средние значения), можно показать, что

$$A \cdot \bar{w} = n_{max} \cdot \bar{w}, \quad (2.3)$$

где $n_{max} \geq n$. В этом случае, чем ближе n_{max} к n , тем более согласованной является матрица сравнения A . В результате в соответствии с методом анализа иерархий вычисляется коэффициент согласованности (K_C) в виде

$$K_C = \frac{K_A}{K_S}, \quad K_A = \frac{n_{max}-n}{n-1}, \quad K_S = \frac{1.98 \cdot (n-2)}{n}, \quad (2.4)$$

где K_A – коэффициент согласованности матрицы A , K_S – стохастический коэффициент согласованности матрицы A .

Стохастический коэффициент согласованности K_S определяется эмпирическим путем как среднее значение коэффициента K_A для большой выборки генерированных случайным образом матриц сравнения A .

Коэффициент согласованности K_C используется для проверки согласованности матрицы сравнения A следующим образом. Если $K_C \leq 0,1$, то уровень несогласованности является приемлемым. В противном случае уровень несогласованности матрицы сравнения A является высоким, и лицу, принимающему решение, рекомендуется проверить элементы парного сравнения a_{ij} матрицы A в целях получения более согласованной матрицы.

Значение n_{max} вычисляется на основе матричного уравнения (2.3), при этом нетрудно заметить, что i -е уравнение этой системы имеет вид:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \bar{w}_j = n_{max} \cdot \bar{w}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Учитывая, что $\sum_{i=1}^n \bar{w}_i = 1$, получим следующую формулу расчета

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \bar{w}_j = n_{max} \cdot \sum_{i=1}^n \bar{w}_i = n_{max} \quad (2.5)$$

В примере 2 матрица A_L является несогласованной, так как столбцы матрицы A_{LN} не-одинаковы. Требуется исследовать согласованность матрицы A_L . Вычислим значение n_{max} . Из данных примера 2 получим по формуле (2.5)

$$A_L \cdot \bar{w} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/5 \\ 2 & 1 & 1/2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.129 \\ 0.277 \\ 0.594 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3863 \\ 0.8320 \\ 1.7930 \end{bmatrix}$$

Отсюда получаем $n_{max} = 0.3863 + 0.8320 + 1.7930 = 3.0113$. Далее

$$K_A = \frac{n_{max} - n}{n - 1} = \frac{3.0113 - 3}{3 - 1} = 0.00565; \quad K_S = \frac{1.98 \cdot (n - 2)}{n} = \frac{1.98 \cdot (3 - 2)}{3} = 0.66$$

$$K_C = \frac{K_A}{K_S} = \frac{0.00565}{0.66} = 0.00856$$

Так как $K_C < 0,1$, уровень несогласованности матрицы A_L является приемлемым.

Задания

1. Некоторая фирма объявила конкурс на замещение вакантной должности. Отдел кадров фирмы сузил поиск будущего сотрудника до трех кандидатур: субъекты X, Y, Z. Конечный отбор основан на трех критериях: собеседование (C), опыт работы (O) и рекомендации (P) – относительные веса задаются в матрице A. На результатах собеседования с тремя претендентами, сбора данных, относящихся к опыту их работы и рекомендациям, строятся 3 матрицы A_C , A_O и A_P . Задать данные и на их основе принять решение, какого из трех кандидатов следует принять на работу? Оцените согласованность данных.

$$A = \begin{pmatrix} & C & O & P \\ C & 1 & ? & ? \\ O & ? & 1 & ? \\ P & ? & ? & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_C = \begin{pmatrix} & X & Y & Z \\ X & 1 & ? & ? \\ Y & ? & 1 & ? \\ Z & ? & ? & 1 \end{pmatrix} \quad A_O = \begin{pmatrix} & X & Y & Z \\ X & 1 & ? & ? \\ Y & ? & 1 & ? \\ Z & ? & ? & 1 \end{pmatrix} \quad A_P = \begin{pmatrix} & X & Y & Z \\ X & 1 & ? & ? \\ Y & ? & 1 & ? \\ Z & ? & ? & 1 \end{pmatrix}$$

2. Два субъекта X и Y покупают новый дом. Рассматриваются три варианта - A, B и C. Были согласованы два критерия для выбора дома: площадь зеленой лужайки (Л) и близость к месту работы (Р). Задать предпочтения в указанных ниже матрицах сравнений. Необходимо оценить три дома, принять решения для X и Y в порядке их приоритета (матрица A) и вычислить коэффициент согласованности каждой матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} & X & Y \\ X & 1 & ? \\ Y & ? & 1 \end{pmatrix} \quad A_X = \begin{pmatrix} & Л & Р \\ Л & 1 & ? \\ Р & ? & 1 \end{pmatrix} \quad A_Y = \begin{pmatrix} & Л & Р \\ Л & 1 & ? \\ Р & ? & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{XЛ} = \begin{pmatrix} & A & B & C \\ A & 1 & ? & ? \\ B & ? & 1 & ? \\ C & ? & ? & 1 \end{pmatrix} \quad A_{XР} = \begin{pmatrix} & A & B & C \\ A & 1 & ? & ? \\ B & ? & 1 & ? \\ C & ? & ? & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{YЛ} = \begin{pmatrix} & A & B & C \\ A & 1 & ? & ? \\ B & ? & 1 & ? \\ C & ? & ? & 1 \end{pmatrix} \quad A_{YР} = \begin{pmatrix} & A & B & C \\ A & 1 & ? & ? \\ B & ? & 1 & ? \\ C & ? & ? & 1 \end{pmatrix}$$

3. Автор книги по исследованию операций определил три критерия для выбора издательства, которое будет печатать его книгу: процент авторского гонорара (Г), уровень маркетинга (М) и размер аванса (А). Издательства H и P проявили интерес к изданию книги. Задавая приведенные ниже матрицы сравнения, необходимо дать оценку двум издательствам и оценить согласованность решения.

$$A = \begin{pmatrix} & \Gamma & M & A \\ \Gamma & 1 & ? & ? \\ M & ? & 1 & ? \\ A & ? & ? & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{\Gamma} = \begin{pmatrix} & H & P \\ H & 1 & ? \\ P & ? & 1 \end{pmatrix} \quad A_M = \begin{pmatrix} & H & P \\ H & 1 & ? \\ P & ? & 1 \end{pmatrix} \quad A_A = \begin{pmatrix} & H & P \\ H & 1 & ? \\ P & ? & 1 \end{pmatrix}$$

4. Профессор политологии планирует предсказать исход выборов в местный совет большого города. Кандидаты X, Y и Z баллотируются на одно место. Профессор делит всех избирателей на три категории: левые (L), центристы (C) и правые (R). Оценка кандидатов основывается на трех факторах: опыт общественной работы (O), лояльность к социальным программам (Л) и характер (X). Задать приведенные ниже матрицы сравнения для первого иерархического уровня, связанного с градацией избирателей (левые, центристы и правые).

$$A = \begin{pmatrix} & L & C & R \\ L & 1 & ? & ? \\ C & ? & 1 & ? \\ R & ? & ? & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_L = \begin{pmatrix} & O & Л & X \\ O & 1 & ? & ? \\ Л & ? & 1 & ? \\ X & ? & ? & 1 \end{pmatrix} \quad A_C = \begin{pmatrix} & O & Л & X \\ O & 1 & ? & ? \\ Л & ? & 1 & ? \\ X & ? & ? & 1 \end{pmatrix} \quad A_R = \begin{pmatrix} & O & Л & X \\ O & 1 & ? & ? \\ Л & ? & 1 & ? \\ X & ? & ? & 1 \end{pmatrix}$$

Профессор сгенерировал еще девять матриц сравнения для трех кандидатов на втором иерархическом уровне, связанном с опытом общественной работы, лояльностью и характером. Затем был использован метод анализа иерархий для сведения этих матриц к следующим относительным весам.

Кандидат	Правые			Центристы			Правые		
	O	Л	X	O	Л	X	O	Л	X
X	0.1	0.2	0.3	0.3	0.5	0.2	0.7	0.1	0.3
Y	0.5	0.4	0.2	0.4	0.2	0.4	0.1	0.4	0.2
Z	0.4	0.4	0.5	0.3	0.3	0.4	0.2	0.5	0.5

Используя эту информацию, необходимо определить, кто из кандидатов выиграет выборы, и оценить согласованность решения.

5. Школьный округ крайне заинтересован в сокращении своих расходов, что вызвано очередным уменьшением бюджетного финансирования начальных школ. Есть две возможности решить эту проблему: ликвидировать программу физического воспитания (Ф) или программу музыкального образования (М). Управляющий округа сформировал комитет с равным представительством от местного школьного совета (С) и ассоциации родителей и учителей (Р) для изучения ситуации и выработки предложения. Комитет принял решение изучить ситуацию с точки зрения ограничения бюджета (Б) и потребностей учеников (П). Задать приоритеты и определите следующие матрицы сравнения.

$$A_C = \begin{pmatrix} & Б & П \\ Б & 1 & ? \\ П & ? & 1 \end{pmatrix} \quad A_P = \begin{pmatrix} & Б & П \\ Б & 1 & ? \\ П & ? & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{CB} = \begin{pmatrix} & Ф & М \\ Ф & 1 & ? \\ М & ? & 1 \end{pmatrix} \quad A_{CP} = \begin{pmatrix} & Ф & М \\ Ф & 1 & ? \\ М & ? & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{PB} = \begin{pmatrix} & \Phi & M \\ \Phi & 1 & ? \\ M & ? & 1 \end{pmatrix} \quad A_{PP} = \begin{pmatrix} & \Phi & M \\ \Phi & 1 & ? \\ M & ? & 1 \end{pmatrix}$$

Проанализируйте полученную ситуацию, связанную с принятием решения, и выработайте соответствующее предложение.

6. Решив купить автомобиль, человек сузил свой выбор до трех моделей: *M1*, *M2* и *M3*. Факторами, влияющими на его решение, являются: стоимость автомобиля (*C*), стоимость обслуживания (*O*), стоимость поездки по городу (*Г*) и сельской местности (*М*). Следующая таблица содержит необходимые данные, соответствующие трехгодичному сроку эксплуатации автомобиля.

Модель автомобиля	<i>C</i> (ден.ед.)	<i>O</i> (ден.ед.)	<i>Г</i> (ден.ед.)	<i>М</i> (ден.ед.)
<i>M1</i>	6000	1800	4500	1500
<i>M2</i>	8000	1200	2250	750
<i>M3</i>	10000	600	1125	600

Используйте указанные стоимости для построения матриц сравнений. Оцените согласованность матриц и определите модель автомобиля, которую следует выбрать.

Темы, которые выносятся на защиту

1. Системный анализ и его основные составляющие.
2. Системный анализ и проблемы принятия решений.
3. Качество и эффективность.
4. Основные понятия исследования операций.
5. Проблемы сложных ситуаций.
6. Характеристика задачи выбора.
7. Проблемы выбора при принятии решений.
8. Проблемы представления информации о качестве.
9. Принятие решений группой лиц.
10. Метод анализа иерархий.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1,2

Дополнительная: 1, 2,3

Тема 2. Математические основы теории принятия решений

Практическое занятие № 2

Целочисленное линейное программирование.

Цель: знакомство с задачами целочисленного линейного программирования, изучение различных методов решения в системе компьютерной математики.

Формируемые компетенции: УК-1

Теоретическая часть:

1. Краткие теоретические сведения

Типичная задача целочисленного программирования имеет вид:

Пример 1. (Распределение капиталовложений)

Оценивается пять проектов с точки зрения их возможного финансирования на предстоящий трехлетний период. Следующая таблица содержит ожидаемую прибыль от реализации каждого проекта и распределение необходимых капиталовложений по годам.

Проект	Расходы (млн. долл./год)			Прибыль (млн. долл.)
	1-й год	2-ой год	3-й год	
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
Доступный капитал (млн. долл.)	25	25	25	

Предполагается, что каждый утвержденный проект будет реализован за трехлетний период. Необходимо определить совокупность проектов, которой соответствует максимум суммарной прибыли.

Методы решения задач целочисленного линейного программирования основаны на использовании вычислительных возможностей методов линейного программирования. Обычно алгоритмы целочисленного программирования включают три шага.

Шаг 1. "Ослабление" пространства допустимых решений задачи целочисленного линейного программирования путем замены любой двоичной переменной y непрерывным ограничением $0 \leq y \leq 1$ и отбрасывания требования целочисленности для всех остальных переменных. В результате получается обычная задача линейного программирования.

Шаг 2. Решение задачи линейного программирования и определение ее оптимального решения.

Шаг 3. Имея полученное (непрерывное) оптимальное решение, добавляем специальные ограничения, которые итерационным путем изменяют пространство допустимых решений задачи линейного программирования таким образом, чтобы в конечном счете получилось оптимальное решение, удовлетворяющее требованиям целочисленности.

Разработаны два общих метода генерирования специальных ограничений, о которых идет речь при реализации шага 3.

1. Метод ветвей и границ.

2. Метод отсекающих плоскостей.

Хотя ни один из упомянутых методов не дает надежных результатов при решении

задачи целочисленного линейного программирования, опыт вычислений свидетельствует, что метод ветвей и границ более успешно решает задачу, чем метод отсекающих плоскостей.

3.1. Метод ветвей и границ

Предположим, что рассматривается задача максимизации. Зададим нижнюю границу оптимального значения целевой функции z задачи ЦЛП равной $-\infty$. Положим $i = 0$.

Шаг 1. (Зондирование и определение границы).

Выбираем i -ю подзадачу линейного программирования ЛП _{i} для исследования. Решаем ЛП _{i} и зондируем ее, при этом возможна одна из трех ситуаций, а) Оптимальное значение целевой функции задачи ЛП _{i} не может улучшить текущей нижней границы.

б) ЛП _{i} приводит к лучшему допустимому целочисленному решению, чем текущая нижняя граница.

с) ЛП _{i} не имеет допустимых решений.

Возможны два случая.

а) Если задача ЛП _{i} прозондирована, нижняя граница изменяется только при условии, что найдено лучшее решение задачи ЦЛП. Если все подзадачи прозондированы, необходимо закончить вычисления: оптимальным решением задачи ЦЛП является то, которое соответствует текущей нижней границе, если такая существует. Иначе положить $i = i + 1$ и повторить шаг 1.

б) Если задача ЛП _{i} не прозондирована, переходим к шагу 2 для выполнения ветвления.

Шаг 2. (Ветвление).

Выбираем одну из целочисленных переменных x_j , оптимальное значение x_j^* которой в оптимальном решении задачи ЛП _{i} не является целым числом. Исключаем из пространства допустимых решений область $[x_j^*] < x_j < [x_j^*] + 1$ (где $[v]$ — наибольшее целое, не превосходящее v) путем формирования двух подзадач ЛП, которые соответствуют ограничениям $x_j \leq [x_j^*]$ и $x_j \geq [x_j^*] + 1$. Положим $i = i + 1$ и переходим к шагу 1.

3.2. Метод отсекающих плоскостей

Данный метод, как и метод ветвей и границ, начинает работу с оптимального решения "обычной" (непрерывной) задачи линейного программирования. Однако вместо ветвления и построения границ этот метод видоизменяет пространство допустимых решений, последовательно прибавляя специальным образом построенные ограничения (именуемые отсечениями). Рассмотрим сначала идею этого метода на графическом примере, а затем покажем, как отсечения строятся алгебраически.

Алгебраический способ определения отсечений. Метод отсекающих плоскостей начинает работу с решения непрерывной задачи линейного программирования. В симплекс-таблице, соответствующей оптимальному решению задачи линейного программирования, следует выбрать одну из строк (называемую производящей), для которой базисная переменная нецелочисленная. Искомое отсечение строится на основании дробных составляющих коэффициентов производящей строки. По этой причине его называют дробным отсечением.

Пример 2. Построение отсечения.

Максимизировать $z = -7x_1 + 10x_2$
при ограничениях
 $-x_1 + 3x_2 \leq 6$,
 $7x_1 + x_2 \leq 35$,
 $x_1, x_2 \geq 0$ и целые.

При дополнительных переменных x_3 и x_4 Для ограничений 1 и 2 задачи из примера

оптимальная симплекс-таблица соответствующей задачи линейного программирования имеет следующий вид.

Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	Решение
z	0	0	$63/22$	$31/22$	66.5
x_2	0	1	$7/22$	$1/22$	3.5
x_1	1	0	$-1/22$	$3/22$	4.5

Оптимальным непрерывным решением является $x_1=4.5$, $x_2=3.5$, $x_3=0$, $x_4=0$ и $z=66.5$, Целочисленное отсечение получается в предположении, что все переменные задачи являются целочисленными. Заметим также, так как коэффициенты исходной целевой функции являются целочисленными, то и значение z , соответствующее целочисленному решению, должно быть целочисленным.

Информация, содержащаяся в симплекс-таблице, соответствующей оптимальному решению, может быть записана в виде следующих уравнений,

z - уравнение:

$$z + 63/22 \cdot x_3 + 31/22 \cdot x_4 = 66 \cdot 1/2,$$

x_2 - уравнение:

$$x_2 + 7/22 \cdot x_3 + 1/22 \cdot x_4 = 3 \cdot 1/2,$$

x_1 - уравнение:

$$x_1 - 1/22 \cdot x_3 + 3/22 \cdot x_4 = 4 \cdot 1/2.$$

Так как в этом примере z , x_1 и x_2 должны быть целочисленными и все они на данный момент имеют дробные значения в оптимальной симплекс-таблице, любое из трех уравнений можно использовать в качестве производящей строки для построения отсечения. Выберем (произвольно) для этой цели z - уравнение.

$$z + 63/22 \cdot x_3 + 31/22 \cdot x_4 = 66 \cdot 1/2 \quad (\text{производящая } z\text{-строка}).$$

Для построения дробного отсечения каждый из нецелочисленных коэффициентов раскладывается на целую и дробную части при условии, что дробная часть является строго положительной.

Например,

$$5/2 = (2 + 1/2),$$

$$-7/3 = (-3 + 2/3)$$

Разложение коэффициентов производящей z - строки приводит к следующему уравнению.

$$z + (2 + 19/22)x_3 + (1 + 9/22)x_4 = (66 + 1/2).$$

При переносе всех целочисленных слагаемых в левую часть уравнения, а всех дробных слагаемых в правую часть получаем следующее.

$$z + 2x_3 + x_4 - 66 = 1/2 - 19/22 \cdot x_3 - 9/22 \cdot x_4$$

Поскольку все переменные в рассматриваемой задаче принимают целочисленные значения, левая часть последнего уравнения должна быть целочисленной, откуда следует, что и правая часть также должна принимать целые значения. Перепишем ее следующим образом.

$$1/2 - 19/22 \cdot x_3 - 9/22 \cdot x_4 = 1/2 - (19/22 \cdot x_3 + 9/22 \cdot x_4).$$

Поскольку $x_3, x_4 \geq 0$ выражение в скобках является неотрицательным. Поэтому величина $1/2 - 19/22 \cdot x_3 - 9/22 \cdot x_4$, будучи целочисленной, не может превышать 1. Следовательно, необходимое условие целочисленности можно записать следующим

образом.

$$1/2 - 19/22 \cdot x_3 - 9/22 \cdot x_4 \leq 0.$$

Это и есть отсечение, порожденное z - строкой. Нетрудно убедиться, что ранее найденное оптимальное непрерывное решение $x_1 = 41$, $x_2 = 31$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ не удовлетворяет отсечению. Действительно, так как $x_3 = x_4 = 0$, отсечение не удовлетворяется (оно приводит к неравенству $1 \leq 0$). Следовательно, если мы присоединим отсечение к конечной симплекс-таблице, то оптимальное решение новой симплекс-таблицы будет "двигаться" в направлении выполнения ограничения целочисленности.

2. Задание:

2.1. Ознакомиться с методами решения задачи целочисленного линейного программирования.

2.2. В соответствии с вариантом задания, определенным преподавателем, составить программы, реализующие метод решения.

3. Варианты заданий

1. В модели распределения капиталовложений из примера 3.2-1 предположим, что проект 5 должен быть обязательно выбран, если выбирается либо проект 1, либо 3. Измените математическую модель, включив в нее новое ограничение, и решите полученную задачу.

2. Рассмотрите задачу о загрузке самолета грузами пяти типов. Вес w_j , объем v_j , а также стоимость g_i единицы груза каждого типа приведены в следующей таблице.

Груз i	Вес единицы груза, w_j (тонны)	Объем единицы груза, v_j , (куб. ярд)	Стоимость единицы груза, g_i , (в \$100)
1	5	1	4
2	8	8	7
3	3	6	6
4	2	5	5
5	7	4	4

Максимальная грузоподъемность и объем самолета равны 112 тонн и 109 куб, ярдов соответственно. Сформулируйте в виде модели ЦЛП задачу определения набора грузов, обеспечивающего максимальную стоимость груза, и найдите решение.

3. Пусть есть 7 полных бутылок вина, 7 бутылок, заполненных наполовину, и 7 пустых бутылок. Необходимо распределить 21 бутылку между тремя персонами так, чтобы каждый получил 7 бутылок. В то же время каждый должен получить одинаковое количество вина. Сформулируйте эту задачу в виде задачи ЦЛП с ограничениями в виде равенств и найдите решение. (Совет. Используйте фиктивную целевую функцию, все коэффициенты которой равны нулю.)

4. Эксцентричный шейх оставил завещание относительно распределения стада верблюдов между тремя детьми: Тарик получает не менее половины стада, Шариф - не менее одной трети, а Маиса — по меньшей мере одну девятую часть. Остаток завещался благотворительной организации. В завещании не упоминался размер стада, говорилось лишь, что количество верблюдов — число нечетное и благотворительная организация получает в точности одного верблюда. Сколько верблюдов оставил шейх и сколько получил каждый из его детей?

5. Супружеская пара фермеров посылает трех своих сыновей на базар продать 90 яблок, для того чтобы обучить их числам и обращению с деньгами. Самый старший Джим получил для продажи 50 яблок, Билл (средний) — 30 и самый младший Джон — лишь 10. Родители поставили пять условий. 1) Цена яблок должна быть равна либо \$1 за 7 яблок, либо \$3 за 1 яблоко. 2) Каждый ребенок может использовать один или оба варианта цен. 3) Все дети должны вернуться с одинаковой суммой денег. 4) Каждый ребенок приносит домой сумму, которая является четным числом (без центов). 5) Сумма денег, полученная каждым из детей, должна быть максимальной при сформулированных условиях. Считается, что дети могут продать все яблоки, которые они имеют. Как дети могут выполнить требования своих родителей?

6. Когда-то был капитан торгового судна, который хотел наградить трех членов команды за их героические усилия по спасению груза корабля во время неожиданного шторма. Капитан взял некоторую сумму денег у казначея и отдал приказ старшему помощнику распределить их поровну между тремя матросами после того, как корабль достигнет берега. Однажды ночью один из матросов решил взять свою (справедливую) третью часть заранее. После деления денег на три равные части осталась одна монета, которую матрос решил оставить себе (в дополнение к третьей части денег). На следующую ночь второй матрос решил осуществить такой же план и, повторив деление на три части оставшейся суммы, присвоил себе еще и монету, которая осталась после деления. На третью ночь третий матрос взял третью часть того, что осталось, и одну дополнительную монету, которая осталась после деления. Когда корабль достиг берега, старший помощник капитана разделил остаток денег поровну между тремя матросами и снова осталась одна монета. Старший помощник отложил эту монету в сторону и вручил матросам предназначенные им равные части. Сколько денег было в самом начале? Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите оптимальное решение. (Совет. Задача имеет бесконечно много целочисленных решений. Предположите для удобства, что следует определить минимальную сумму денег, которая удовлетворяет условиям задачи. Увеличивая затем полученное решение на 1, рассмотрите его как нижнюю границу и получите новое минимальное решение. Продолжая таким образом, можно наметить шаблон общего решения.)

7. Имеются следующие слова, состоящие из трех букв: AFT, FAR, TVA, ADV, JOE, FIN, OSF и KEN. Предположим, что буквам алфавита приписаны числа (метки), начиная с $A = 1$ и заканчивая $Z = 26$. Каждое слово помечается числом, равным сумме числовых меток составляющих его трех букв. Например, слово AFT имеет метку $1 + 6 + 20 = 27$. Необходимо выбрать пять из заданных восьми слов таким образом, чтобы получить максимальную суммарную метку. Вместе с тем выбранные пять слов должны удовлетворять следующему условию: (сумма меток первых букв) $<$ (сумма меток вторых букв) $<$ (сумма меток третьих букв). Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите ее оптимальное решение.

8. Фирма, специализирующаяся на грамзаписи песен, заключила договор с восходящей звездой эстрады на запись восьми песен. Продолжительность песен равна 8, 3, 5, 5, 9, 6, 7 и 12 минут соответственно. Фирма планирует использовать для записи двусторонние кассеты. Каждая сторона имеет длительность звучания 30 минут. Фирма намерена распределить песни на две стороны кассеты сбалансированным образом. Это значит, что продолжительность звучания песен на каждой стороне кассеты должна быть примерно одинаковой (насколько это возможно). Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите оптимальное решение.

9. Рассмотрите задачу из предыдущего упражнения в предположении, что характер мелодий песен диктует условия, согласно которым третья и четвертая песни не могут быть записаны на одной стороне кассеты. Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП. Возможно ли использование 25-минутной (для каждой стороны) кассеты для записи 8 песен? Если нет, используйте модель ЦЛП, чтобы определить минимальную емкость кассеты для записи.

10(1). Компания планирует производство некоторой продукции на трех станках, которой должно быть изготовлено не менее 2000 единиц. Минимальная производительность любого станка равна 500 единиц. Следующая таблица содержит необходимую информацию для рассматриваемой задачи.

Станок	Расходы на переналадку	Затраты на производство единицы продукции	Производительность (в единицах продукции)
1	300	2	600
2	100	10	800
3	200	5	1200

Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите ее оптимальное решение.

11(2). Нефтедобывающая компания изучает вопрос о бурении четырех нефтяных скважин на двух нефтеносных участках. Издержки подготовки к бурению на каждом участке и затраты на бурение скважины j на участке i ($i=1,2;j=1, 2, 3, 4$) приведены в следующей таблице.

Участок	Затраты на бурение скважины (млн долл.)				Издержки подготовки к бурению (млн долл.)
	1	2	3	4	
1	2	1	8	5	5
2	4	6	3	1	6

Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите ее оптимальное решение.

12(3). Рассматриваются три промышленных участка для размещения обрабатывающих заводов, которые снабжают своей продукцией трех потребителей. Объемы производства продукции, объемы потребления и себестоимость перевозки продукции от заводов к потребителям содержатся в следующей таблице.

	1	2	3	Объем производства
1	\$10	\$15	\$12	1800
2	\$17	\$14	\$20	1400
3	\$15	\$10	\$11	1300
Спрос	1200	1700	1600	

В дополнение к транспортным, имеются еще фиксированные затраты в объеме 10 000, 15 000 и 12 000 долларов, связанные с 1, 2 и 3 заводом соответственно.

Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите ее оптимальное решение.

13(1). Менеджер проектов имеет 10 сотрудников, которые работают над шестью проектами, причем каждый работает одновременно над несколькими проектами, как показано в следующей таблице.

Проект

	1	2	3	4	5	6
1		X		X	X	
2	X		X		X	
3		X	X	X		X
4			X	X	X	
5	X	X	X			
6	X	X	X	X		X
7	X	X			X	X
8	X		X	X		
9					X	X
10	X	X		X	X	X

Менеджер должен встретиться с каждым из 10 сотрудников один раз в неделю для обсуждения их проблем. Беседа с каждым из них длится примерно 20 минут, т.е. на разговоры со всеми сотрудниками уходит 3 часа 20 минут. Предлагается проводить встречи менеджера с группами сотрудников, работающих над одним и тем же проектом, чтобы уменьшить суммарное время, затрачиваемое на совещания. Менеджер планирует составить график обсуждения проектов таким образом, чтобы уменьшить движение в офисе, т.е. сократить число сотрудников, входящих и выходящих из комнаты для совещаний. В какой последовательности необходимо рассматривать проекты?

14(2). Продавец книг, проживающий в городе А, один раз в месяц должен посетить своих четырех клиентов, которые проживают в городах Б, В, Г и Д соответственно. Приведенная ниже таблица содержит расстояния в милях между различными городами.

	А	Б	В	Г	Д
А	0	120	220	150	210
Б	120	0	80	ПО	130
В	220	110	0	160	185
Г	150	ПО	160	0	190
Д	210	130	185	190	0

Необходимо составить маршрут движения продавца книг, минимизирующий суммарное пройденное расстояние. Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП. 3. Пусть в предыдущем упражнении города Б, В, Г и Д обозначены через 1, 2, 3 и 4, а город А разделен на два, которые обозначены через 0 и 5. Пусть маршрут продавца книг начинается в городе 0, проходит (в некотором порядке) через города 1, 2, 3 и 4 и заканчивается в городе 5. Определим переменную v_i для города i ($i = 0, 1, \dots, 5$), которая удовлетворяет условиям $0 \leq v_i \leq 5$. Пусть $x_{ij} = 1$, если в маршруте городу следует за городом i , и 0 в противном случае. Покажите, что ограничения $v_i - v_j + 5x_{ij} \leq 4$, $i = 0, 1, \dots, 4$, $j = 1, 2, \dots, 5$, гарантируют исключение всех неполных маршрутов в решении задачи.

15(1). Компания АВС занимается доставкой грузов пяти потребителям. Можно выбрать следующие маршруты перевозки грузов.

- Маршрут 1. 1, 2, 3, 4.
- Маршрут 2. 4, 3, 5.
- Маршрут 3. 1, 2, 5.
- Маршрут 4. 2, 3, 5.
- Маршрут 5. 1, 4, 2.
- Маршрут 6. 1, 3, 5.

Эти маршруты определяются грузоподъемностью автомобиля, доставляющего грузы. Например, на маршруте 1 автомобиль имеет грузоподъемность, достаточную для доставки грузов лишь потребителям 1, 2, 3 и 4. Следующая таблица содержит расстояния (в милях) между терминалом компании ABC и потребителями.

	ABC	1	2	3	4	5
ABC	0	10	12	16	9	8
1	10	0	32	8	17	10
2	12	32	0	14	21	20
3	16	8	14	0	15	18
4	9	17	21	15	0	11
5	8	10	20	18	11	0

Необходимо выполнить дневник поставки пяти потребителям, минимизируя при этом пройденный суммарный путь. Оптимальное решение может быть таким, что один и тот же потребитель обслуживается более чем одним маршрутом. Но при реализации такого решения используется только один из этих маршрутов. Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите оптимальное решение.

16(2). Американский университет формирует комитет по рассмотрению жалоб студентов. В соответствии с указаниями, полученными из администрации, в эту комиссию необходимо включить по крайней мере одну женщину, одного мужчину, одного студента, одного администратора и одного преподавателя. Выдвинуты десять кандидатур (обозначенных для удобства буквами от a до j). Принадлежность этих кандидатур к различным категориям отражена в следующей таблице.

Категория	Кандидатуры
Женщины	a, b, c, d, e
Мужчины	f, g, h, i, j
Студенты	a, b, c, j
Администраторы	e, f
Преподаватели	d, g, h, i

Университет заинтересован создать наименьшую по составу комиссию, гарантирующую представительство каждой из указанных категорий. Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите ее оптимальное решение.

17(3). Округ Вашингтон определил шесть городов, которые нуждаются в службе скорой помощи. Станции скорой помощи могут быть расположены в некоторых или во всех шести городах. Однако в силу территориальной близости некоторых городов одна станция может обслуживать более одного населенного пункта. Единственным условием является время поездки; оно не должно превышать 15 минут. Приведенная ниже таблица содержит время поездки в минутах между шестью городами.

	1	2	3	4	5	6
1	0	23	14	18	10	32
2	23	0	24	13	22	11
3	14	24	0	60	19	20
4	18	13	60	0	55	17
5	10	22	19	55	0	12
6	32	11	20	17	12	0

Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП, оптимальное решение которой определит наименьшее количество станций и их расположение. Найдите оптимальное решение.

18(4). Сокровища короля Тута находятся в музее в Новом Орлеане. План музея, состоящего из нескольких комнат, соединенных открытыми дверями, показан на рис. 9.3. Сторож, находящийся у двери, может наблюдать за двумя смежными комнатами. Администрация музея заинтересована, чтобы в каждой комнате присутствовал сторож, используя при этом минимальное их число. Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и найдите ее оптимальное решение.

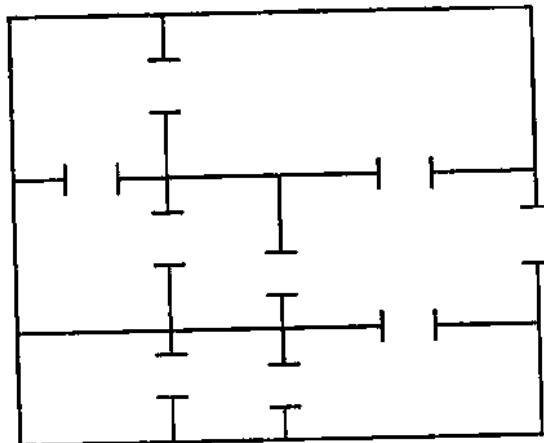


Рис. 9.3

19(1). Игровая доска состоит из девяти равных квадратов, расположенных 3х3. Требуется заполнить каждый квадрат числом из интервала от 1 до 9 таким образом, чтобы сумма чисел каждой строки, каждого столбца и каждой диагонали была равна 15. Определите числа в каждом квадрате для следующих случаев.

- Числа в каждой строке и каждом столбце различны.
- Числа во всех квадратах различны.

Запишите сформулированную задачу в виде задачи ЦЛП с ограничениями и решите ее.

20(2). Станок используется для производства двух взаимозаменяемых видов продукции. Производительность станка позволяет за день изготовить не более 20 единиц продукции первого вида и 10 единиц второго вида. Существует альтернативная настройка станка, позволяющая ежедневно изготавливать не более 12 единиц продукции вида 1 и 22 единицы вида 2. Анализ рынка показывает, что максимальный суммарный спрос на два вида продукции составляет 35 единиц ежедневно. Предположим, что прибыль от производства единицы продукции первого и второго вида составляет 10 и 12 долларов соответственно. Какая из двух возможных настроек станка должна быть выбрана? Сформулируйте задачу в виде задачи ЦЛП и решите ее. (Примечание Сформулированная двухмерная задача может быть решена путем перебора возможных решений после графического построения пространства допустимых решений. Этого нельзя сделать в n - мерной задаче.)

21(3). Некая компания производит три вида продукции. Ежедневные временные затраты и потребности сырья, необходимые на изготовление одной единицы продукции, приведены в следующей таблице.

Продукция	Необходимое время (час./ед.)	Необходимое сырье (фунты/ед.)
1	3	4
2	4	3
3	5	6

Доходы от производства единицы каждого вида продукции равны 25, 30 и 22 доллара соответственно. Компания имеет возможность организовать выпуск этой продукции в двух цехах своего производства. Цехи отличаются главным образом ресурсом рабочего времени и сырья, как показывает следующая таблица.

Цех	Ресурс рабочего времени (часов в рабочий день)	Ресурс сырья (фунты в день)
1	100	100
2	90	120

Сформулируйте задачу в виде задачи частично-целочисленного линейного программирования для оптимального размещения производства по цехам.

22(4). Рассмотрите задачу планирования производственной линии, связанной с изготовлением двух различных изделий на одном станке. Последовательность выполнения необходимых для этого восьми операций изображена на рис. 9.4. Пусть p_j — время выполнения j -й операции ($j = 1, 2, \dots, n$). Сроки сдачи изделий типа 1 и 2, которые определяются исходя из некоторого исходного момента, равны d_1 и d_2 соответственно. Предполагается, что любая выполняемая на станке операция должна быть завершена до начала другой операции. Сформулируйте задачу в виде задачи частично-целочисленного линейного программирования.

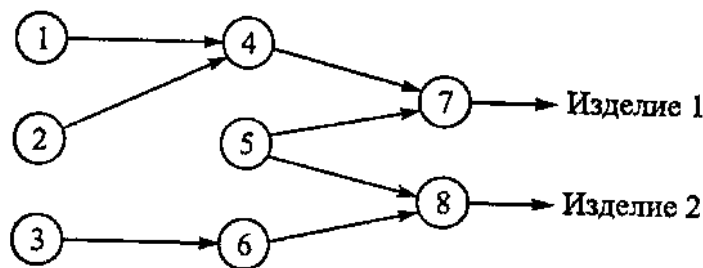


Рис 9 4

23(5). Компания владеет фабрикой, которая производит изделия трех типов. Необходимые трудовые затраты и потребности сырья для производства одной единицы каждого из трех типов изделий приведены в следующей таблице.

Тип изделия	Необходимое время (час./ед)	Необходимое сырье (фунты/ед)
1	3	4
2	4	3
3	5	6
Наличный дневной объем	100	100

Доходы от производства единицы каждого из трех типов изделий равны 25, 30 и 45 долларов соответственно. Если будет производиться изделие типа 3, то его ежедневный объем производства должен быть не менее 5 единиц. Сформулируйте задачу в виде задачи частично-целочисленного линейного программирования и найдите оптимальное решение.

24(6). Опишите невыпуклые заштрихованные области допустимых решений, которые изображены на рис. 9.5, в виде набора одновременно выполняющихся ограничений. Найдите оптимальное решение, которое максимизирует целевую функцию $z = 2x_1 + 3x_2$ при ограничениях, определяющих область, изображенную на рис. 9 5,а.

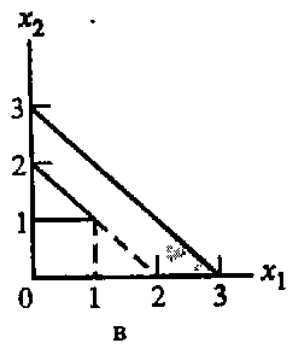
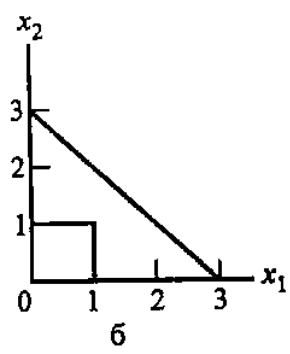
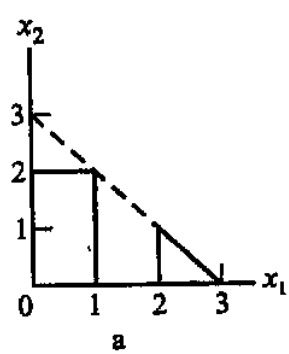


Рис 9.5

7. Пусть требуется, чтобы любые А ограничений из следующих m ограничений были активными.

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Покажите, как это сделать

24(8). Правая часть следующего ограничения может принимать одно из значений $b_1, b_2, \dots, b_m$, т.е.

$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1, b_2, \dots$ или b_m . Покажите, как можно представить это ограничение.

25(1). Решите задачу ЦЛП из примера 9.3-1 методом ветвей и границ, начиная с переменной x_2 как переменной ветвления. Решите подзадачи с помощью программы TORA, используя опцию MODIFY (Изменить) для задания верхней и нижней границ. Начните с решения подзадачи, включающей ограничение $x_2 \leq [x_2']$.

26(2). Постройте дерево подзадач, получаемое при использовании метода ветвей и границ для каждой из приведенных ниже задач. Для удобства в нулевом узле в качестве переменной ветвления всегда выбирайте x_1 .

а) Максимизировать $z = 3x_1 + 2x_2$
при ограничениях
 $2x_1 + 2x_2 \leq 9,$
 $3x_1 + 3x_2 \leq 18,$
 $x_1, x_2 \geq 0$ и целые.

б) Максимизировать $z = 2x_1 + 3x_2$
при ограничениях
 $5x_1 + 7x_2 \leq 35,$
 $4x_1 + 9x_2 \leq 36,$
 $x_1, x_2 \geq 0$ и целые.

в) Максимизировать $z = x_1 + x_2$
при ограничениях
 $2x_1 + 5x_2 \leq 16,$
 $6x_1 + 5x_2 \leq 27,$
 $x_1, x_2 \geq 0$ и целые.

г) Минимизировать $z = 5x_1 + 4x_2$
при ограничениях
 $3x_1 + 2x_2 \geq 5,$
 $2x_1 + 3x_2 \geq 7,$
 $x_1, x_2 \geq 0$ и целые.

д) Максимизировать $z = 5x_1 + 7x_2$
при ограничениях
 $2x_1 + x_2 \leq 13,$
 $6x_1 + 9x_2 \leq 41,$
 $x_1, x_2 \geq 0$ и целые.

27(3). Решите задачи из предыдущего упражнения, предполагая, что на переменную x_1 не накладывается условие целочисленности.

28(4). Покажите графически, что следующая задача ЦЛП не имеет допустимых решений, а затем проверьте этот результат с помощью метода ветвей и границ.

Максимизировать $z = 2x_1 + x_2$

при ограничениях

$$10x_1 + 10x_2 \leq 9,$$

$$10x_1 + 5x_2 \geq 1,$$

$x_1, x_2 \geq 0$ и целые.

29(5). Решите следующие задачи с использованием метода ветвей и границ.

а) Максимизировать $z = 18x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 4x_4$

при ограничениях

$$15x_1 + 12x_2 + 7x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 37$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0$ ИЛИ 1.

б) Максимизировать $z = x_1 + 2x_2 + 5x_3$

при ограничениях

$$|-x_1 + 10x_2 - 3x_3| \geq 15,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 10,$$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ и целые.

30(1). В примере 9.3-4 покажите графически, может ли каждое из следующих ограничений служить в качестве правильного отсечения.

а) $x_1 + 2x_2 \leq 10$.

б) $2x_1 + x_2 \leq 10$.

с) $3x_2 \leq 10$.

д) $3x_1 + x_2 \leq 15$.

30(2). В примере 9.3-4 покажите графически, как следующие два правильных отсечения могут привести к оптимальному целочисленному решению.

Отсечение I. $x_1 + 2x_2 \leq 10$.

Отсечение II. $3x_1 + x_2 \leq 15$.

31(1). Запишите отсечения I и II в примере 9.3-5 через уравнения для переменных x_1 и x_2 и покажите, что они совпадают с отсечениями, которые графически показаны на рис. 9.13.

32(2). Покажите, что дробное отсечение не приводит к допустимому решению в приведенной ниже задаче, если не устранены все дроби в ограничении.

Максимизировать $z = x_1 + 2x_2$

при ограничениях

$$x_1 + 1/2 * x_2 \leq 13/4,$$

$x_1, x_2 \geq 0$ и целые

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1,2

Дополнительная: 1, 2,3

Тема 3. Теория игр

Практическое занятие № 3

Одноиндексные задачи линейного программирования

Цель: Приобретение навыков построения математических моделей одноиндексных задач ЛП и решения их в Microsoft Excel.

Формируемые компетенции: УК-1

Теоретическая часть:

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи и постройте ее модель.

2. Найдите оптимальное решение задачи в Excel и продемонстрируйте его преподавателю.

Примечание 2.1. Расчет числовых данных, которые непосредственно не заданы в условии задачи, производите непосредственно в ячейках экранной формы. Например,

для ввода коэффициента $\frac{4}{60}$ при x_A в левой части (2.3) в соответствующую ячейку

надо ввести выражение $=4/60$, после чего в ячейке отобразится результат вычисления, то есть 0,066666667. Для ввода правой части ограничения (2.3) в соответствующую ячейку надо ввести выражение $=14*8*1*22$, при этом в ячейке отобразится число 2464. Этот способ позволяет четко представлять путь получения числовых данных в ячейках экранной формы, избегать ошибок при расчете параметров задачи, а также обеспечивает высокую точность расчетов.

3. Оформите отчет по Практическому занятию, который должен содержать:

- титульный лист (рис.2.1);
- исходные данные варианта;
- построенную модель задачи с указанием всех единиц измерения;
- результаты решения задачи.

Если в какой-либо системе (экономической, организационной, военной и т.д.) имеющихся в наличии ресурсов не хватает для эффективного выполнения каждой из намеченных работ, то возникают так называемые **распределительные задачи**. Цель решения распределительной задачи – отыскание оптимального распределения ресурсов по работам. Под оптимальностью распределения может пониматься, например, минимизация общих затрат, связанных с выполнением работ, или максимизация получаемого в результате общего дохода.

Для решения таких задач используются методы математического программирования. **Математическое программирование** – это раздел математики, занимающийся разработкой методов отыскания экстремальных значений функции, на аргументы которой наложены ограничения. Слово "программирование" заимствовано из зарубежной литературы, где оно используется в смысле "планирование".

Наиболее простыми и лучше всего изученными среди задач математического программирования являются задачи линейного программирования.

Характерные черты задач ЛП следующие:

1) показатель эффективности L представляет собой линейную функцию, заданную на элементах решения $x_1, x_2, \dots, x_n$;

2) ограничительные условия, налагаемые на возможные решения, имеют вид линейных равенств или неравенств.

В общей форме записи модель задачи ЛП имеет вид:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max(\min);$$

при ограничениях

[illegible]

Допустимое решение – это совокупность чисел $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи (2.1).

Оптимальное решение – это план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, при котором ЦФ принимает свое максимальное (минимальное) значение.

Для построения математической модели необходимо ответить на следующие три вопроса.

1. Что является искомыми величинами, то есть переменными этой задачи?
2. В чем состоит цель, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать наилучшему, то есть оптимальному, решению?
3. Какие ограничения должны быть наложены на переменные, чтобы выполнялись условия, описанные в задаче?

В данном практическом занятии рассматривается одноиндексная задача ЛП, представляющая собой **общую распределительную задачу**, которая характеризуется различными единицами измерения работ и ресурсов.

Рассмотрим следующую задачу (вариант 0 из табл.2.1).

Постановка задачи

Мебельный комбинат выпускает книжные полки А из натурального дерева со стеклом, полки В₁ из полированной ДСП (древесно-стружечной плиты) без стекла и полки В₂ из полированной ДСП со стеклом. Габариты полок А, В₁ и В₂ следующие: длина 1100 (d) мм, ширина 250 (w) мм, высота 300 (h) мм (рис.2.2). Размер листа ДСП 2 × 3 м.

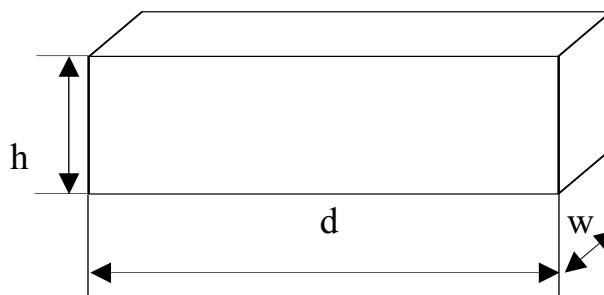


Рис.4.2. Габариты полок, выпускаемых мебельным комбинатом

При изготовлении полок А выполняются следующие работы: столярные, покрытие лаком, сушка, резка стекла, упаковка. Все операции, производимые в ходе столярных работ и упаковки, выполняются вручную. Полки В₁ и В₂ поставляются в торговую сеть в разобранном виде. За исключением операции упаковки, все остальные операции (производство комплектующих полки, резка

стекла) при изготовлении полок В₁ и В₂, выполняются на специализированных автоматах.

Трудоемкость столярных работ по выпуску одной полки А составляет 4 (Тр₁) ч. Производительность автомата, покрывающего полки А лаком – 10 (Пр₁) полок в час, автомата, режущего стекло – 100 (Пр₂) стекол в час. Сменный фонд времени автомата для покрытия лаком – 7 (ФВ₁) ч, автомата для резки стекла – 7,5 (ФВ₂) ч. Сушка полок, покрытых лаком, происходит в течение суток в специальных сушилках, вмещающих 50 (V₁) полок. На упаковку полки А требуется 4 (Тр₂) минуты. В производстве полок заняты 40 (Р₁) столяров и 14 (Р₂) упаковщиков.

Производительность автомата, производящего комплектующие полки В₁ и В₂, равна 3 (Пр₃) полки в час, а его сменный фонд времени равен 7,4 (ФВ₃) ч, трудоемкость упаковочных работ составляет 8 (Тр₃) мин для полки В₁ и 10 (Тр₄) мин для полки В₂.

От поставщиков комбинат получает в месяц 400 (Z₁) листов полированной ДСП, 230 (Z₂) листов ДВП (древесно-волоконистой плиты), а также 260 (Z₃) листов стекла. Из каждого листа ДВП можно выкроить 14 (К₁) задних стенок полок В₁ и В₂, а из каждого листа стекла – 10 (К₂) стекол для полок А и В₂.

Склад готовой продукции может разместить не более 350 (V₂) полок и комплектов полок, причем ежедневно в торговую сеть вывозится в среднем 40 (N) полок и комплектов. На начало текущего месяца на складе осталось 100 (Ост) полок, произведенных ранее. Себестоимость полки А равна 205 (С₁) руб., полки В без стекла – 142 (С₂) руб., со стеклом – 160 (С₃) руб.

Маркетинговые исследования показали, что доля продаж полок обоих видов со стеклом составляет не менее 60% (Д) в общем объеме продаж, а емкость рынка полок производимого типа составляет около 5300 (V₃) штук в месяц. Мебельный комбинат заключил договор на поставку заказчику 50 (З) полок типа В₂ в текущем месяце.

Составьте план производства полок на текущий месяц. Известны цены реализации полок: полка А – 295 (Ц₁) руб., полка В без стекла – 182 (Ц₂) руб., полка В со стеклом – 220 (Ц₃) руб.

Построение модели

I этап построения модели заключается в определении (описании, задании, идентификации) переменных. В данной задаче искомыми неизвестными величинами является количество полок каждого вида, которые будут произведены в текущем месяце. Таким образом, X_A – количество полок А (шт./мес.); X_{B₁} – количество полок В₁ (шт./мес.); X_{B₂} – количество полок В₂ (шт./мес.).

II этап построения модели заключается в построении целевой функции, представляющей цель решения задачи. В данном случае цель – это максимизация прибыли, получаемой от продажи полок всех видов в течение месяца. Поскольку в этой задаче прибыль может быть определена как разность между ценой (Ц₁, Ц₂, Ц₃) и себестоимостью (С₁, С₂, С₃), то ЦФ имеет вид

$L(X) = (295 - 205) x_A + (182 - 142) x_{B_1} + (220 - 160) x_{B_2} \rightarrow \max$	$\frac{\partial \text{доход}}{\partial x_A} \cdot \frac{\partial \text{доход}}{\partial x_{B_1}} \cdot \frac{\partial \text{доход}}{\partial x_{B_2}} = \frac{\partial \text{доход}}{\partial x_A} \cdot \frac{\partial \text{доход}}{\partial x_{B_1}} \cdot \frac{\partial \text{доход}}{\partial x_{B_2}}$
---	---

III этап построения модели заключается в задании ограничений, моделирующих условия задачи. Все ограничения рассматриваемой задачи можно разделить на несколько типов.

Ограничения по фонду времени (с использованием трудоемкости работ)

Левая часть ограничений по фонду времени представляет собой время, затрачиваемое на производство полок в течение месяца в количестве x_A, x_{B_1}, x_{B_2} штук. Правая часть ограничения – это фонд рабочего времени исполнителя работы (рабочего или автомата) за смену. Неравенство (2.2) описывает ограничение по фонду времени на выполнение столярных работ. Коэффициент 4 ч/шт. (Tr_1) – это время, затрачиваемое на **столярные работы** при производстве одной полки типа А (трудоемкость); 40 чел. (P_1) – это количество столяров, участвующих в производстве; $8 \div (\div \ddot{a} \ddot{e} \cdot \tilde{n} \grave{i} \cdot \ddot{a} \grave{i} \cdot \grave{i} \grave{a} \tilde{n} \cdot)$ – количество часов работы одного человека в течение смены; 1 см./дн. – количество смен в одном рабочем дне; 22 дн./мес. – количество рабочих дней в месяце (табл.2.1):

$4x_A \leq 40 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 22$	$\frac{\div}{\grave{i} \grave{a} \tilde{n} \cdot} \leq \frac{\div}{\grave{i} \grave{a} \tilde{n} \cdot}$	(4.2)
$\frac{\div}{\grave{o} \grave{o} \cdot} \cdot \frac{\grave{o} \grave{o} \cdot}{\grave{i} \grave{a} \tilde{n} \cdot} \leq \div \ddot{a} \ddot{e} \cdot \frac{\div}{\div \ddot{a} \ddot{e} \cdot \tilde{n} \grave{i} \cdot} \cdot \frac{\tilde{n} \grave{i} \cdot}{\ddot{a} \grave{i} \cdot} \cdot \frac{\ddot{a} \grave{i} \cdot}{\grave{i} \grave{a} \tilde{n} \cdot}$		

Примечание 2.2. Важным моментом проверки правильности составления ограничений является проверка совпадения единиц измерения левой и правой частей ограничения. В ограничении (2.2) левая и правая части измеряются в часах, потраченных на выпуск продукции в течение месяца.

Аналогично записывается ограничение (2.3) по фонду времени на **упаковочные работы**, в котором 14 чел. (P_2) – это количество упаковщиков:

$\frac{4}{60}x_A + \frac{8}{60}x_{B_1} + \frac{10}{60}x_{B_2} \leq 14 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 22$	$\frac{\div}{\grave{i} \grave{a} \tilde{n} \cdot} \leq \frac{\div}{\grave{i} \grave{a} \tilde{n} \cdot}$	(4.3)
$\frac{\grave{i} \grave{e} \grave{i} \cdot}{\grave{i} \grave{e} \grave{i} \cdot \div} \cdot \frac{\grave{o} \grave{o} \cdot}{\grave{i} \grave{a} \tilde{n} \cdot} \leq \div \ddot{a} \ddot{e} \cdot \frac{\div}{\div \ddot{a} \ddot{e} \cdot \tilde{n} \grave{i} \cdot} \cdot \frac{\tilde{n} \grave{i} \cdot}{\ddot{a} \grave{i} \cdot} \cdot \frac{\ddot{a} \grave{i} \cdot}{\grave{i} \grave{a} \tilde{n} \cdot}$		

Ограничения по фонду времени (с использованием производительности работ)

Неравенство (2.4) описывает ограничение по фонду времени на покрытие лаком полок типа А. Отличие ограничений, учитывающих данные о **производительности** работ, от ограничений, учитывающих данные о **трудоемкости** работ, состоит в том, что производительность необходимо преобразовать в трудоемкость. Трудоемкость является

величиной, обратной производительности. Коэффициент $\frac{1}{10} \left(\frac{1}{\grave{i} \grave{o} \grave{d} \cdot} \right)$ при x_A в (2.4) –

это количество часов, приходящихся на покрытие лаком одной полки типа А. При записи правой части ограничения учитываем, что автомат, выполняющий покрытие лаком, работает не полную смену (8 ч), а в течение сменного фонда времени 7 ч (ΦB_1). Это связано с необходимостью подготовки автомата к работе и обслуживанием его после окончания работы.

$\frac{1}{10}x_A \leq 7 \cdot 1 \cdot 22$	$\frac{\div}{\grave{i} \grave{a} \tilde{n} \cdot} \leq \frac{\div}{\grave{i} \grave{a} \tilde{n} \cdot}$	(4.4)
---	--	-------

$\frac{\div}{\emptyset\emptyset} \cdot \frac{\div}{\text{iañ}} \leq \frac{\div}{\text{ñi}} \cdot \frac{\div}{\text{ái}} \cdot \frac{\div}{\text{iañ}}$
--

Неравенство (2.5) описывает ограничение по фонду времени на резку стекла для полок типа А и В₂:

$\frac{2}{100}x_A + \frac{2}{100}x_{B_2} \leq 7,5 \cdot 1 \cdot 22$	$\frac{\div}{\text{iañ}} \leq \frac{\div}{\text{iañ}}$	(4.5)
$\frac{\div}{\emptyset\emptyset} \cdot \frac{\div}{\text{iañ}} \leq \frac{\div}{\text{ñi}} \cdot \frac{\div}{\text{ái}} \cdot \frac{\div}{\text{iañ}}$		

Неравенство (2.6) описывает ограничение по фонду времени на производство комплектующих полок типа В₁ и В₂:

$\frac{1}{3}x_{B_1} + \frac{1}{3}x_{B_2} \leq 7,4 \cdot 1 \cdot 22$	$\frac{\div}{\text{iañ}} \leq \frac{\div}{\text{iañ}}$	(4.6)
$\frac{\div}{\emptyset\emptyset} \cdot \frac{\div}{\text{iañ}} \leq \frac{\div}{\text{ñi}} \cdot \frac{\div}{\text{ái}} \cdot \frac{\div}{\text{iañ}}$		

*Ограничения по запасу расходуемых в производстве материалов
(по запасу используемых для производства полок деталей)*

Неравенство (4.7) описывает ограничение по запасу листов ДСП, поставляемых на комбинат ежемесячно. При этом следует учесть, что из листа ДСП надо выкраивать комплекты (верхнюю и нижнюю стороны полок, 2 боковые стороны) для производства полок. Поэтому при задании ограничения имеет смысл ориентироваться не на количество листов ДСП, а на количество комплектов для полок [правая часть (4.7)], которые можно получить из имеющегося запаса ДСП. Но поскольку листы ДСП можно раскраивать различными способами и получать при этом различное количество деталей и комплектов, то обозначим месячный запас комплектов в правой части (4.7) как $Y_{\text{êîïë}}$ и рассмотрим способ его численного определения позже. В левой части ограничения (4.7) задается количество комплектов (по одному на полку), необходимых на производство полок в течение месяца в объеме x_{B_1} , x_{B_2} :

$1x_{B_1} + 1x_{B_2} \leq Y_{\text{êîïë}}$	$\frac{\text{êîïë}}{\text{iañ}} \leq \frac{\text{êîïë}}{\text{iañ}}$	(4.7)
$\frac{\text{êîïë}}{\emptyset\emptyset} \cdot \frac{\div}{\text{iañ}} \leq \frac{\text{êîïë}}{\text{iañ}}$		

Аналогично ограничению по ДСП неравенство (4.8.) – это ограничение по запасу задних стенок из ДВП для полок В₁ и В₂, а неравенство (4.9) – ограничение по запасу стекол для полок А и В₂. В отличие от ДСП листы ДВП и листы стекла кроются стандартным способом, и из каждого листа ДВП получается 14 (К₁) задних стенок полок, а из каждого листа стекла получается 10 (К₂) стекол. Ежемесячный запас листов ДВП и стекла составляет соответственно 230 (Z₂) и 260 (Z₃). При составлении левых

частей ограничений (2.8) и (2.9) следует учесть, что на каждую полку B_1 и B_2 приходится по одной задней стенке, а на каждую полку A и B_2 – по 2 стекла:

$1x_{B_1} + 1x_{B_2} \leq 230 \cdot 14$	$\frac{\text{çàäíÿÿ ñòáíèà}}{\text{ìàñ.}} \leq \frac{\text{çàäíÿÿ ñòáíèà}}{\text{ìàñ.}}$	(4.8)
$\frac{\text{çàäíÿÿ ñòáíèà}}{\text{øò.}} \cdot \frac{\text{øò.}}{\text{ìàñ.}} \leq \frac{\text{ëèñò ÄÂĬ}}{\text{ìàñ.}} \cdot \frac{\text{çàäíÿÿ ñòáíèà}}{\text{ëèñò ÄÂĬ}}$		

$2x_A + 2x_{B_2} \leq 260 \cdot 10$	$\frac{\text{ñòâêëî}}{\text{ìàñ.}} \leq \frac{\text{ñòâêëî}}{\text{ìàñ.}}$	(4.9)
$\frac{\text{ñòâêëî}}{\text{øò.}} \cdot \frac{\text{øò.}}{\text{ìàñ.}} \leq \frac{\text{ëèñò ñòâêëà}}{\text{ìàñ.}} \cdot \frac{\text{ñòâêëî}}{\text{ëèñò ñòâêëà}}$		

Ограничения по емкости вспомогательных помещений и рынка

Неравенство (4.10) является ограничением по количеству полок A , которые может вместить сушилка. В правой части (4.10) представлено количество полок, которые могут быть просушены в течение месяца (в день может быть просушено 50 (V_1) полок):

$x_A \leq 50 \cdot 22$	$\frac{\text{øò.}}{\text{ìàñ.}} \leq \frac{\text{øò.}}{\text{ìàñ.}}$	(4.10)
$\frac{\text{øò.}}{\text{ìàñ.}} \leq \frac{\text{øò.}}{\text{äí.}} \cdot \frac{\text{äí.}}{\text{ìàñ.}}$		

Неравенство (4.11) описывает ограничение по количеству полок всех видов, которые может вместить склад готовой продукции. При этом правая часть (4.11) учитывает, что общая емкость склада уменьшена на 100 (Ост) полок, которые остались невывезенными с прошлого месяца. Кроме того, в течение месяца каждый день будет освобождаться по 40 (N) мест для полок:

$x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \leq 350 - 100 + 40 \cdot 22$	$\frac{\text{øò.}}{\text{ìàñ.}} \leq \frac{\text{øò.}}{\text{ìàñ.}}$	(4.11)
$\frac{\text{øò.}}{\text{ìàñ.}} \leq \frac{\text{øò.}}{\text{ìàñ.}} - \frac{\text{øò.}}{\text{ìàñ.}} + \frac{\text{øò.}}{\text{äí.}} \cdot \frac{\text{äí.}}{\text{ìàñ.}}$		

Неравенство (4.12) описывает ограничение по примерной емкости рынка, равной 5300 (V_3) полкам всех видов:

$x_A + x_{B_1} + x_{B_2} \leq 5300$	$\frac{\text{øò.}}{\text{ìàñ.}} \leq \frac{\text{øò.}}{\text{ìàñ.}}$	(4.12)
-------------------------------------	--	--------

Ограничения по гарантированному заказу

Неравенство (4.13) показывает, что необходимо произвести как минимум 50 (3) заказанных полок B_2 , а возможно, и большее количество, но уже для свободной продажи:

$x_{B_2} \geq 50$	$\frac{\text{øò.}}{\text{ìàñ.}} \leq \frac{\text{øò.}}{\text{ìàñ.}}$	(4.13)
-------------------	--	--------

Ограничения по соотношению объемов продаж различных товаров

Неравенство (4.14) показывает, что доля полок А и В₂ в общем объеме полок, производимых для свободной продажи, должна составлять не менее 60% (Д). К такому выводу приводят результаты маркетинговых исследований. Поскольку из всех полок В₂ в свободную продажу поступит лишь $(x_{B_2} - 50)$, то это учитывается при составлении ограничения (4.14), которое после алгебраических преобразований принимает вид (4.15).

$x_A + (x_{B_2} - 50) \geq 0,6[x_A + x_{B_1} + (x_{B_2} - 50)]$	$\frac{\text{общ.}}{\text{план.}} \leq \frac{\text{общ.}}{\text{план.}} \quad (4.14)$
---	---

$0,4x_A - 0,6x_{B_1} + 0,4x_{B_2} \geq 20$	(4.15)
--	----------

Определение количества комплектов для полок В₁ и В₂

Рассмотрим подробно вопрос определения максимально возможного количества комплектов для полок В₁ и В₂, которое можно произвести из ежемесячного запаса ДСП. В зависимости от размеров листов ДСП (2000 × 3000 мм) и габаритов полок (1100 × 250 × 300 мм) детали полок В₁ и В₂ можно выкроить различными способами. Рассмотрим три возможных варианта такого раскроя, представленные на рис.4.3 (затененные участки – это неиспользованная площадь ДСП).

Согласно 1-му варианту из одного листа ДСП для полок В₁ и В₂ можно выкроить 19 деталей верхней или нижней стенок, а также 9 деталей боковых стенок. По 2-му варианту раскроя получаем 12 деталей верхней или нижней стенок и 36 деталей боковых стенок. По 3-му варианту раскроя получаем 16 деталей верхней или нижней стенок и 18 деталей боковых стенок. Обозначим количество листов ДСП, раскроенных в течение месяца: по 1-му варианту через y_1 (лист./мес.); по 2-му варианту - y_2 (лист./мес.); по 3-му варианту – y_3 (лист./мес.). При производстве полок нам выгодно стремиться к такому раскрою листов ДСП, при котором из полученных деталей можно укомплектовать максимальное количество полок. Количество комплектов, получаемых из раскроенных деталей, мы ранее обозначили через Y_{max} . Таким образом, наша цель описывается целевой функцией

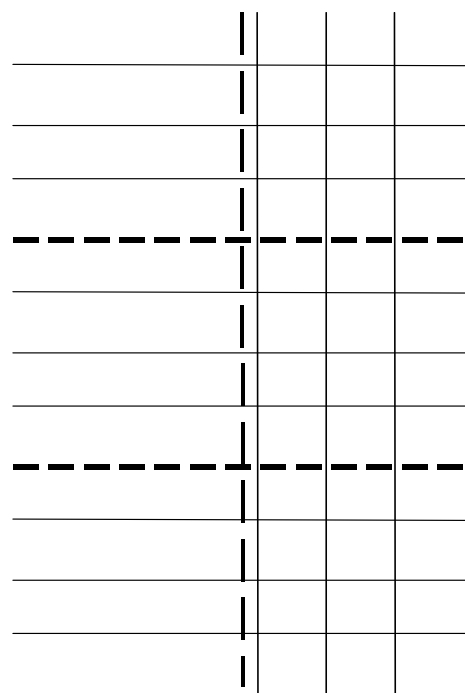
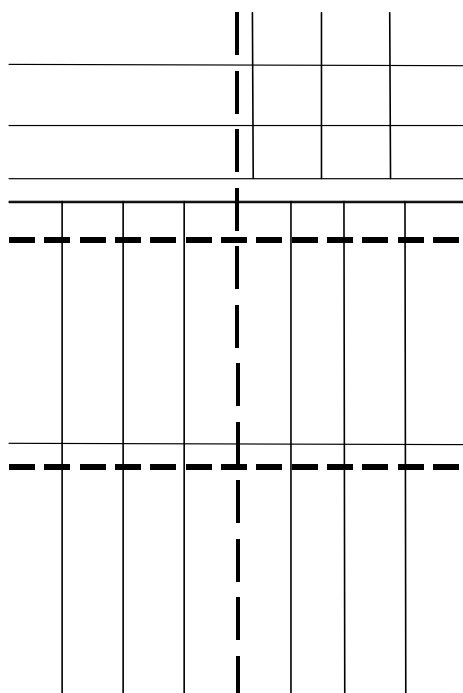
$L(Y) = Y_{\text{max}} \rightarrow \max$	компл./мес.
--	-------------

19 áâðõíèõ è í è æ í è ð ñòáí í ê,

12 áâðõíèõ è í è æ í è ð ñòáí í ê,

9 áí êí âú õ ñòáí í ê

36 áí êí âú õ ñòáí í ê



16 áâðõíèõ è í è æ í è ð ñòáí í ê,

18 áí êí âú õ ñòáí í ê

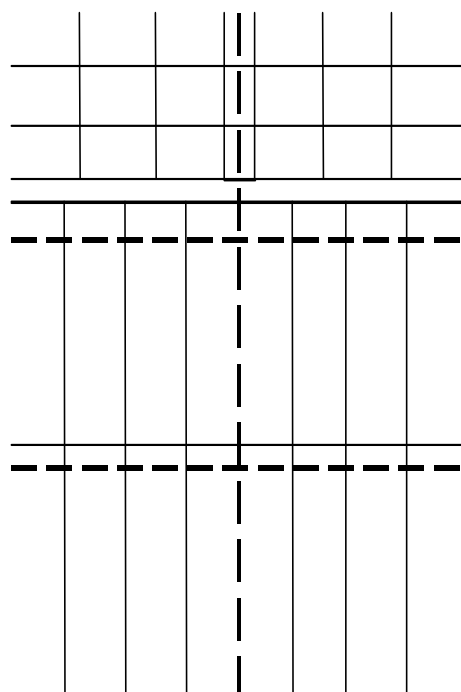


Рис.4.3. Возможные варианты раскроя листов ДСП

Количество всех раскроенных листов ДСП не должно превышать 400 (Z_1), то есть ежемесячный запас их на складе:

$y_1 + y_2 + y_3 \leq 400$	лист./мес.
----------------------------	------------

При этом, поскольку в каждый комплект входит одна верхняя и одна нижняя стенки, количество нижних и верхних стенок, получаемых при раскрое всех листов ДСП [левая часть (4.16)], должно быть не меньше чем $2Y_{\text{комп.}}$:

$19y_1 + 12y_2 + 16y_3 \geq 2Y_{\text{комп.}}$	$\frac{\text{доск.}}{\text{лист.}} \geq \frac{\text{доск.}}{\text{лист.}}$	(4.16)
$\frac{\text{доск.}}{\text{лист.}} \cdot \frac{\text{доск.}}{\text{лист.}} \leq \frac{\text{доск.}}{\text{лист.}} \cdot \frac{\text{комп.}}{\text{лист.}}$		

Аналогичный смысл имеет ограничение (4.17), которое задает нижнюю границу количества боковых стенок полок:

$9y_1 + 36y_2 + 18y_3 \geq 2Y_{\text{комп.}}$	$\frac{\text{доск.}}{\text{лист.}} \geq \frac{\text{доск.}}{\text{лист.}}$	(4.17)
---	--	--------

После преобразования описанных неравенств получим модель задачи (4.18), позволяющую раскроить максимальное количество комплектов:

$$\begin{aligned}
 &L(Y) = Y_{\text{комп.}} \rightarrow \max; \\
 &\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \leq 400, \\ 19y_1 + 12y_2 + 16y_3 - 2Y_{\text{комп.}} \geq 0, \\ 9y_1 + 36y_2 + 18y_3 - 2Y_{\text{комп.}} \geq 0, \\ y_1, y_2, y_3, Y_{\text{комп.}} \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

Таким образом, при решении задачи (4.18) симплекс-методом (например, в MS Excel) переменная $Y_{\text{комп.}}$ **непосредственно** определяет значение ЦФ, а переменные y_1 , y_2 и y_3 влияют на изменение значения ЦФ **косвенно**, через ограничения. Решив задачу (4.18) для варианта 0, мы получим значение правой части ограничения (4.7) $Y=3387$ компл, после чего сможем решить исходную задачу, модель которой имеет вид:

$$\begin{aligned}
L(X) &= 90x_A + 40x_{B_1} + 60x_{B_2} \rightarrow \max; \\
\left\{ \begin{aligned}
4x_A &\leq 7040; \\
0,067x_A + 0,133x_{B_1} + 0,167x_{B_2} &\leq 2464; \\
0,1x_A &\leq 154; \\
0,02x_A + 0,02x_{B_2} &\leq 165; \\
0,333x_{B_1} + 0,333x_{B_2} &\leq 162,8; \\
x_{B_1} + x_{B_2} &\leq 3387; \\
x_{B_1} + x_{B_2} &\leq 3220; \\
2x_A + 2x_{B_2} &\leq 2600; \\
x_A &\leq 1100; \\
x_A + x_{B_1} + x_{B_2} &\leq 1220; \\
x_A + x_{B_1} + x_{B_2} &\leq 5300; \\
x_{B_2} &\geq 50; \\
0,4x_A - 0,6x_{B_1} + 0,4x_{B_2} &\geq 20; \\
x_A, x_{B_1}, x_{B_2} &\geq 0.
\end{aligned} \right. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Решив задачу (4.19), получаем

$$\begin{aligned}
x_A &= 1100 \text{ шт./мес.}, \quad x_{B_1} = 0 \text{ шт./мес.}, \quad x_{B_2} = 120 \text{ шт./мес.}, \\
L(X) &= 106\,200 \text{ руб./мес.},
\end{aligned} \quad (4.20)$$

то есть в текущем месяце необходимо произвести 1100 полок А и 120 полок В₂, а производство полок В₁ нецелесообразно. После реализации всех произведенных полок комбинат получит прибыль в размере 106 200 рублей.

4.4. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Что такое распределительная задача, общая распределительная задача?
2. Что такое математическое и линейное программирование?
3. Какова общая форма записи модели ЛП?
4. Что такое допустимое и оптимальное решения?
5. Каковы основные этапы построения математической модели ЛП?
6. Каков экономический смысл и математический вид ЦФ задачи о производстве полок?
7. Как можно классифицировать ограничения задачи о полках по их экономическому смыслу?
8. Чем отличается построение ограничений, использующих данные о трудоемкости и производительности работ?
9. Объясните способ построения каждого конкретного ограничения задачи о полках.
10. Каким образом решается задача оптимального раскроя листов ДСП?
11. Каким образом единицы измерения параметров задачи используются для выявления ошибок построения ограничений?

Исходные данные вариантов задач к лабораторной работе №2

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	1100	1070	1140	1030	1180	990	1220	950	1260	910	1300	870	1340
w	250	240	260	230	270	240	260	230	270	240	260	230	270
h	300	290	280	270	260	250	240	310	320	330	340	350	360
Тр1	4	4,4	3,6	4,8	3,2	5,2	2,8	5,6	2,4	6	2	6,4	1,6
Тр2	4	10	5	9	6	8	7	5	8	6	9	7	10
Тр3	8	15	10	13	9	13	10	8	11	10	15	14	16
Тр4	10	16	12	14	10	14	11	9	14	13	18	16	20
Р1	40	22	19	6	27	16	9	25	11	8	30	14	7
Р2	14	16	12	11	7	5	13	3	6	8	10	2	9
Пр1	10	4	9	5	2	6	4	7	4	3	5	8	6
Пр2	100	150	170	250	180	130	190	120	200	110	210	140	220
Пр3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
ФВ1	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,1	7,2	7,0	7,3	7,4
ФВ2	7,5	7,6	7,7	7,0	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,1	7,2
ФВ3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,4	7,5	7,6
Z1	400	390	365	380	415	370	405	350	395	410	385	420	375
Z2	230	240	235	220	215	200	195	180	205	160	175	140	155
Z3	260	200	250	190	240	180	230	290	220	230	210	270	200
K1	14	15	5	16	6	17	7	12	8	13	18	11	9
K2	10	11	12	5	13	6	14	7	15	8	16	9	17
V1	50	20	65	40	55	75	45	60	35	70	25	30	80
V2	350	400	360	300	370	310	380	320	390	330	410	340	420
V3	5300	2000	3700	3000	1100	4000	2500	1500	1400	2700	4300	3100	1900
N	40	45	67	50	72	55	44	60	38	65	30	70	35
Ост	100	110	90	170	80	160	70	150	60	140	50	120	40

Продолжение табл.2.1

№ вар.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Д	60(A,B2)	15A	10B1	15(B1,B2	43(A,B1)	72A	12B2	16(B1,B2	23(A,B2)	46A	59B1	13(B1,B2	9(A,B1)
З	50B2	30A	15B1	10A, 18B1	5A, 12B2	40B1, 3B2	60B2	24A	80B1	14A, 21B1	38A, 62B2	23B1, 20B2	84B2
C ₁	205	210	145	200	150	215	170	220	165	225	180	230	195
C ₂	142	150	125	164	120	187	125	176	129	195	143	207	126
C ₃	160	170	133	178	134	205	148	197	142	210	162	214	146
Ц ₁	295	256	213	284	192	243	198	274	203	281	224	276	249
Ц ₂	182	202	149	190	154	230	175	246	194	263	214	287	186
Ц ₃	220	224	158	206	147	243	180	242	167	267	202	246	187
3 варианта раскроя листов ДСП; 8 ч в смене; работа в 1 смену; 22 рабочих дня в месяце													

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1,2

Дополнительная: 1, 2,3

Тема 4. Критерии принятия решений

Практическое занятие № 4

Анализ чувствительности одноиндексных задач линейного программирования

Цель: Приобретение навыков анализа чувствительности задач ЛП на основе различных типов отчетов, выдаваемых Microsoft Excel, о результат поиска решения.

Формируемые компетенции: УК-1

Теоретическая часть:

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Для задачи, решенной в на предыдущем занятии, получите в Excel все типы отчетов по результатам поиска решения, необходимые для анализа чувствительности.

2. Проанализируйте задачу на чувствительность к изменениям параметров исходной модели.

3. Результаты анализа задачи на чувствительность внесите в общий отчет по предыдущей работе.

5.3.1. Задачи анализа оптимального решения на чувствительность

На практике многие экономические параметры (цены на продукцию и сырье, запасы сырья, спрос на рынке, заработная плата и т.д.) с течением времени меняют свои значения. Поэтому оптимальное решение задачи ЛП, полученное для конкретной экономической ситуации, после ее изменения может оказаться непригодным или неоптимальным. В связи с этим возникает задача **анализа чувствительности** задачи ЛП, а именно того, как возможные изменения параметров исходной модели повлияют на полученное ранее оптимальное решение.

Ограничения линейной модели классифицируются следующим образом (рис.3.1). **Связывающие** ограничения проходят через оптимальную точку, например (1) и (2). **Несвязывающие** ограничения не проходят через оптимальную точку, например (3), (4) и (5). Аналогично ресурс, представляемый связывающим ограничением, называют **дефицитным**, а ресурс, представляемый несвязывающим ограничением, – **недефицитным**. Ограничение называют **избыточным** в том случае, если его исключение не влияет на область допустимых решений и, следовательно, на оптимальное решение, например, (5). Выделяют следующие три задачи анализа на чувствительность.

1. Анализ сокращения или увеличения ресурсов:

1) на сколько можно увеличить (ограничения типа $\leq$) или уменьшить (ограничения типа $\geq$) запас **дефицитного** ресурса для улучшения оптимального значения ЦФ?

2) на сколько можно уменьшить (ограничения типа $\leq$) или увеличить (ограничения типа $\geq$) запас **недефицитного** ресурса при сохранении полученного оптимального значения ЦФ?

2. Увеличение (уменьшение) запаса какого из ресурсов наиболее выгодно?

3. Анализ изменения целевых коэффициентов: каков диапазон изменения коэффициентов ЦФ, при котором не меняется оптимальное решение?

5.3.2. Графический анализ оптимального решения на чувствительность

Область допустимых решений задачи на рис.5.1 – многоугольник OABCDE. Если **связывающее** ограничение (дефицитный ресурс) (2) передвигать до точки F, то это приведет к расширению области допустимых решений до многоугольника OABCFE и к получению

нового оптимального решения в точке F. При этом ограничение (2) станет избыточным. Новое решение (F) лучше прежнего (C), поскольку для пересечения с точкой F линия ЦФ должна пройти по направлению вектора (выходящего из начала координат и показывающего направление максимизации ЦФ) дальше точки C (рис.5.2).

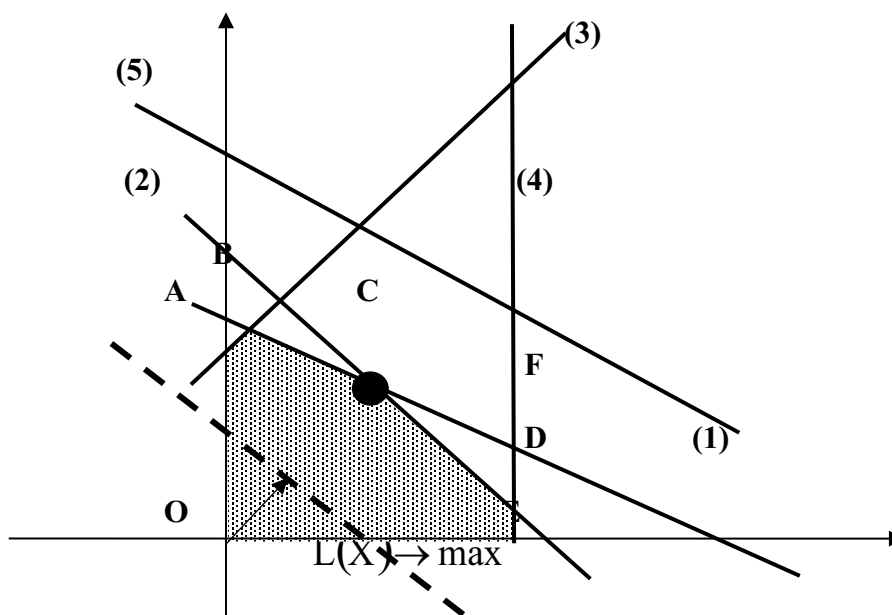


Рис.5.1. Исходная задача ЛП для графического анализа чувствительности

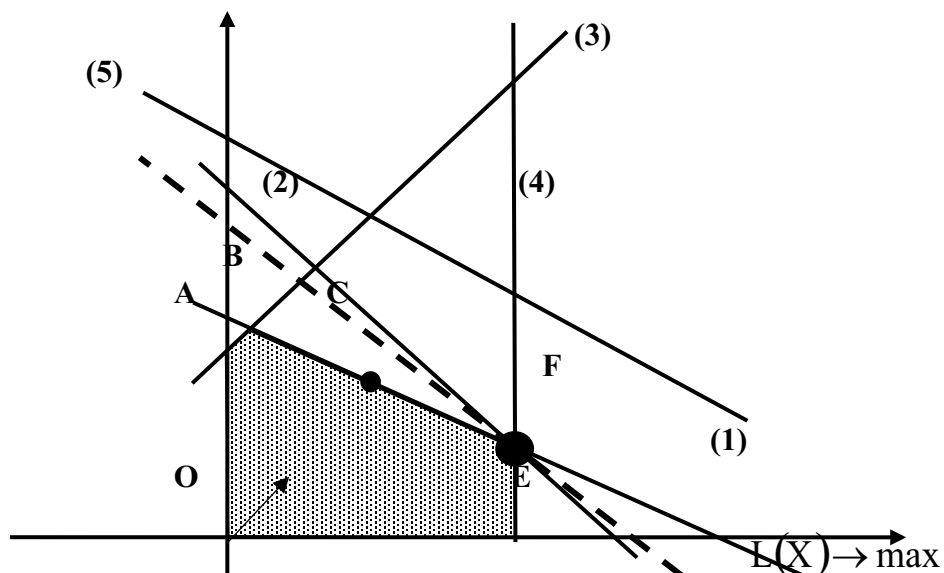


Рис.5.2. Анализ максимального изменения запаса дефицитного ресурса (2) с целью улучшения оптимального решения $C \rightarrow F$

Таким образом, **чтобы** графически определить максимальное изменение запаса дефицитного ресурса, улучшающее оптимальное решение, **необходимо** передвигать соответствующую прямую в направлении улучшения ЦФ до тех пор, пока это ограничение не станет избыточным.

Графический анализ максимально возможного изменения запаса недефицитного ресурса показан на рис.5.3. Передвинем несвязывающее ограничение (3) до пересечения с оптимальным решением в точке С.

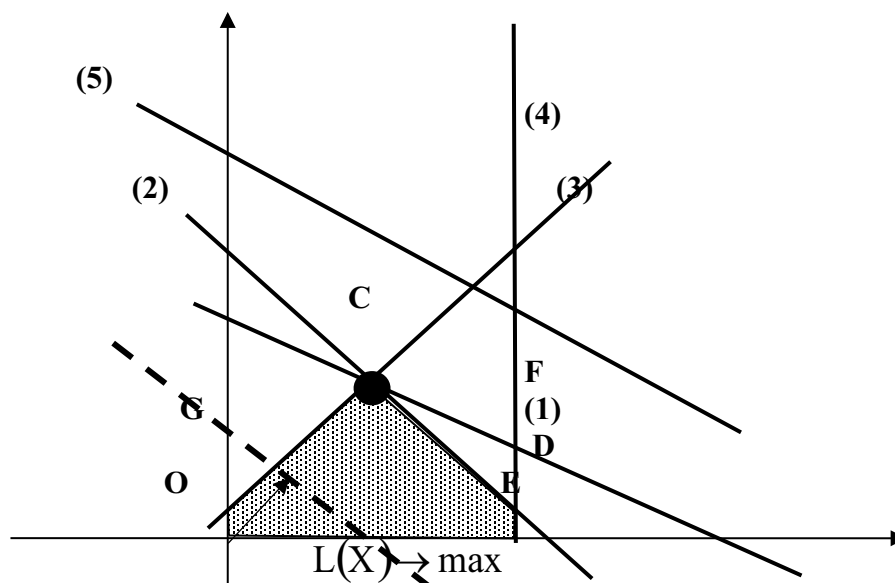


Рис.5.3. Анализ максимального изменения запаса недефицитного ресурса (3), не изменяющего оптимальное решение С

Это соответствует уменьшению запаса недефицитного ресурса (3), который в оптимальной точке С исходной задачи (см. рис.5.1) расходовался не полностью. Областью допустимых решений станет многоугольник OGCDE. Оптимальное решение останется прежним (точка С). Таким образом, **чтобы графически определить максимальное изменение запаса недефицитного ресурса, не меняющее оптимального решения, необходимо передвигать соответствующую прямую до пересечения с оптимальной точкой.**

Для того чтобы выяснить, запас какого из дефицитных ресурсов выгоднее увеличивать в первую очередь, необходимо определить, какую пользу (например, прибыль) принесет увеличение запасов каждого из них на единицу. Для этих целей вводится понятие **ценности дополнительной единицы i-го ресурса** (теневая цена):

$$y_i = \frac{\max_{x \in D} L(x) - \max_{x \in D, x_i = 0} L(x)}{x_i}$$

То есть сначала наращивается запас ресурса, имеющего максимальное значение y_i , затем – второе по величине и т.д.

Графический анализ изменения целевых коэффициентов (например, цен на производимую продукцию), не приводящих к изменению оптимального решения, проводится путем вращения линии ЦФ. При увеличении коэффициента ЦФ c_1 или уменьшении коэффициента c_2 целевая прямая на графике вращается вокруг оптимальной точки по часовой стрелке. Если c_1 уменьшается или же увеличивается c_2 , то целевая прямая вращается вокруг оптимальной точки против часовой стрелки (рис.5.4).

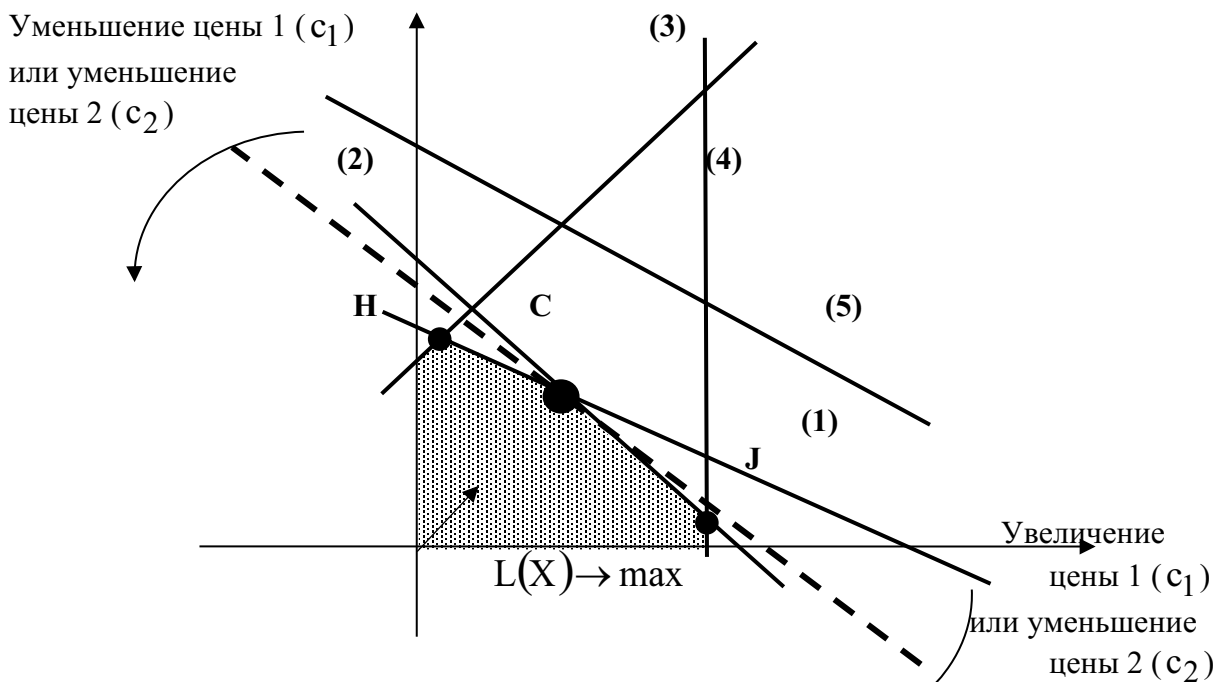


Рис.5.4. Анализ изменения коэффициентов c_1 и c_2 ЦФ

Зафиксируем значение c_2 . Оптимальное решение в точке С не будет меняться при увеличении c_1 до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (2). Аналогично оптимальное решение в точке С не будет меняться при уменьшении c_1 до тех пор, пока целевая прямая не совпадет с прямой (1).

При таких поворотах точка С будет оставаться оптимальной до тех пор, пока наклон целевой прямой не выйдет за пределы, определяемые наклоном прямых ограничений (1) и

(2). Если целевая прямая выйдет за пределы наклона (1) или (2), то оптимальной станет соответственно точка Н или J.

Таким образом, нижний и верхний пределы изменения цены 1 определяются значениями коэффициента c_1 , при которых наклон целевой прямой совпадает соответственно с наклонами прямых ограничений (1) и (2).

5.3.3. Анализ оптимального решения на чувствительность в Excel

Проведем анализ чувствительности задачи о мебельном комбинате из практического занятия №2 (часть I). Для этого необходимо после запуска в Excel задачи на решение в окне "Результаты поиска решения" выделить с помощью мыши два типа отчетов: "Результаты" и "Устойчивость" (рис.3.5).

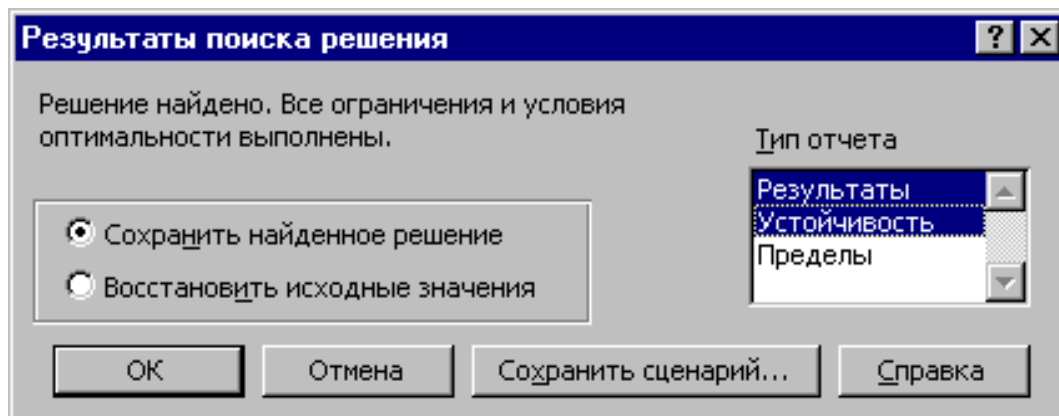


Рис.5.5. Выделение типов отчетов требуемых для анализа чувствительности

5.3.3.1. Отчет по результатам

Отчет по результатам состоит из трех таблиц (рис.5.6):

- 1) таблица 1 содержит информацию о ЦФ;
- 2) таблица 2 содержит информацию о значениях переменных, полученных в результате решения задачи;
- 3) таблица 3 показывает результаты оптимального решения для ограничений и для граничных условий.

Microsoft Excel - Пример_4.xls						
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?						
	A	B	C	D	E	F
1	Целевая ячейка (Максимум)					
2	Ячейка	Имя	Исходно	Результат		
3	\$F\$6	Козф. ЦФ Значение	0	106200		
4	Изменяемые ячейки					
5	Ячейка	Имя	Исходно	Результат		
6	\$B\$3	Значение ХА	0	1100		
7	\$C\$3	Значение ХВ1	0	0		
8	\$D\$3	Значение ХВ2	0	120		
9	Ограничения					
10	Ячейка	Имя	Значение	формула	Статус	Разница
11	\$F\$21	Заказ на полки В2 Лев. часть	120	\$F\$21>=\$H\$21	не связан.	70
12	\$F\$22	Доля продаж Лев. часть	488	\$F\$22>=\$H\$22	не связан.	468
13	\$F\$10	ФВ по столярн.раб. Лев. часть	4400	\$F\$10<=\$H\$10	не связан.	2640
14	\$F\$11	ФВ по упаковке Лев. часть	93,33333333	\$F\$11<=\$H\$11	не связан.	2370,666667
15	\$F\$12	ФВ по покрыт. лаком Лев. часть	110	\$F\$12<=\$H\$12	не связан.	44
16	\$F\$13	ФВ по раскрою стекла Лев. часть	12,2	\$F\$13<=\$H\$13	не связан.	152,8
17	\$F\$14	ФВ по произв. компл.В Лев. часть	40	\$F\$14<=\$H\$14	не связан.	122,8
18	\$F\$15	По компл. раскроя ДСП (У) Лев. часть	120	\$F\$15<=\$H\$15	не связан.	3267
19	\$F\$16	Расход ДВП Лев. часть	120	\$F\$16<=\$H\$16	не связан.	3100
20	\$F\$17	Расход стекла Лев. часть	2440	\$F\$17<=\$H\$17	не связан.	160
21	\$F\$18	Емкость сушилки Лев. часть	1100	\$F\$18<=\$H\$18	связанное	0
22	\$F\$19	Емкость склада Лев. часть	1220	\$F\$19<=\$H\$19	связанное	0
23	\$F\$20	Емкость рынка Лев. часть	1220	\$F\$20<=\$H\$20	не связан.	4080
24	\$B\$3	Значение ХА	1100	\$B\$3>=\$B\$4	не связан.	1100
25	\$C\$3	Значение ХВ1	0	\$C\$3>=\$C\$4	связанное	0
26	\$D\$3	Значение ХВ2	120	\$D\$3>=\$D\$4	не связан.	70

Рис.5.6. Лист отчета по результатам

Если ресурс используется полностью (то есть ресурс дефицитный), то в графе "Статус" ("Состояние") соответствующее ограничение указывается как "связанное"; при неполном использовании ресурса (то есть ресурс недефицитный) в этой графе указывается "не связан". В графе "Значение" приведены величины использованного ресурса.

Для граничных условий (строки 24, 25, 26 на рис. 5.6) в графе "Разница" показана разность между значением переменной в найденном оптимальном решении и заданным для нее граничным условием.

Таблица 3 отчета по результатам дает информацию для анализа возможного изменения запасов *недефицитных* ресурсов при сохранении полученного оптимального значения ЦФ. Так, если на ресурс наложено ограничение типа $\geq$, то в графе "Разница" дается количество ресурса, на которое была превышена минимально необходимая норма. Например, анализ строки 26 (см. рис. 5.6) отчета по результатам для задачи о мебельном комбинате показывает, что полок выпущено на 70 шт. больше, чем было заказано. То есть из 120 полок только 70 шт. пойдут в свободную продажу. Таким образом, можно дать следующий ответ на вопрос об изменении запаса недефицитного ресурса "Значение ХВ2": *обязательный заказ на производство полок В₂ можно увеличить на 70 шт., то есть заказывать до 120 шт., и при этом оптимальное решение (4.20) задачи не изменится.*

Если на ресурс наложено ограничение типа $\leq$, то в графе "Разница" дается количество ресурса, которое не используется при реализации оптимального решения. Так, анализ строки 13 (см. рис. 5.6) отчета по результатам для задачи о мебельном комбинате показывает, что время столярных работ составило 4440 ч. Неизрасходованным остается 2640 ч из общего фонда времени, отведенного на столярные работы. Из этого следует, что

запас недефицитного ресурса “Фонд времени по столярным работам” можно **уменьшить на 2640 ч** и это никак не повлияет на оптимальное решение (4.20). Отсюда следует, что количество столяров можно уменьшить на 15 человек

$$\frac{2640 \div /i\grave{a}\tilde{n} .}{8 \div /(\div \grave{a}\tilde{e} . \cdot \tilde{n}\grave{i} .) \cdot 1 \tilde{n}\grave{i} . / \grave{a}\tilde{i} . \cdot 22 \grave{a}\tilde{i} . / i\grave{a}\tilde{n} .} = 15 \div \grave{a}\tilde{e} .$$

или перевести их на выпуск другой продукции.

Анализ строки 23 показывает, что общее количество выпускаемых полок составляет 1220 шт., что меньше предполагаемой емкости рынка на 4080 шт. *То есть запас недефицитного ресурса “Емкость рынка” может быть уменьшен до 1220 полок и это никак не повлияет на оптимальное решение (4.20).* Другими словами, уменьшение спроса до 1220 полок в месяц никак не скажется на оптимальных объемах выпуска полок.

На основании проведенного анализа можно сделать вывод о том, что существуют причины (ограничения), не позволяющие мебельному комбинату выпускать большее количество полок и получать большую прибыль. Проанализировать эти причины позволяет отчет по устойчивости.

5.3.3.2. Отчет по устойчивости

Отчет по устойчивости состоит из двух таблиц (рис.5.7).

Таблица 1 содержит информацию, относящуюся к переменным.

1. Результат решения задачи.

2. Нормированная стоимость, которая показывает, на сколько изменится значение ЦФ в случае принудительного включения единицы этой продукции в оптимальное решение. Например, в отчете по устойчивости для рассматриваемой задачи (см. рис.3.7) нормированная стоимость для полок B_1 равна –20 руб./шт. (строка 5). Это означает, что если мы, несмотря на оптимальное решение (2.20), потребуем включить в план выпуска 1 полку B_1 , то новый план выпуска ($x_A = 1100$; $x_{B_1} = 1$; $x_{B_2} = 119$) принесет нам прибыль 106 180 руб./мес., что на 20 руб. меньше, чем в прежнем оптимальном решении.

3. Коэффициенты ЦФ.

4. Предельные значения приращения целевых коэффициентов Δc_j , при которых сохраняется первоначальное оптимальное решение. Например, *допустимое увеличение цены на полки B_1 равно 20 руб./шт., а допустимое уменьшение – практически не ограничено* (строка 5 на рис.3.7). Это означает, что если цена на полки B_1 возрастет более чем на 20 руб./шт., например станет равной 61 руб./шт., то оптимальное решение изменится: станет целесообразным выпуск B_1 в количестве 70 шт. А если их цена будет снижаться вплоть до нуля, то оптимальное решение (2.20) останется прежним.

Примечание 5.1. При выходе за указанные в отчете по устойчивости пределы изменения цен оптимальное решение может меняться как по номенклатуре выпускаемой продукции, так и по объемам выпуска (без изменения номенклатуры).

Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$3	Значение ХА	1100	0	90	1E+30	30
\$C\$3	Значение ХВ1	0	-20	40	20	1E+30
\$D\$3	Значение ХВ2	120	0	60	30	20

Ограничения						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$F\$21	Заказ на полки В2 Лев. часть	120	0	50	70	1E+30
\$F\$22	Доля продаж Лев. часть	488	0	20	468	1E+30
\$F\$10	ФВ по столярн. раб. Лев. часть	4400	0	7040	1E+30	2640
\$F\$11	ФВ по упаковке Лев. часть	93,33333333	0	2464	1E+30	2370,666667
\$F\$12	ФВ по покрыт. лаком Лев. часть	110	0	154	1E+30	44
\$F\$13	ФВ по раскрою стекла Лев. часть	12,2	0	165	1E+30	152,8
\$F\$14	ФВ по произв. компл.В Лев. часть	40	0	162,8	1E+30	122,8
\$F\$15	По компл. раскрою ДСП (У) Лев. часть	120	0	3387	1E+30	3267
\$F\$16	Расход ДВП Лев. часть	120	0	3220	1E+30	3100
\$F\$17	Расход стекла Лев. часть	2440	0	2600	1E+30	160
\$F\$18	Емкость сушилки Лев. часть	1100	30	1100	70	368,4
\$F\$19	Емкость склада Лев. часть	1220	60	1220	80	70
\$F\$20	Емкость рынка Лев. часть	1220	0	5300	1E+30	4080

Рис.5.7. Отчет по устойчивости для задачи о мебельном комбинате

Таблица 2 (см. рис.5.7) содержит информацию, относящуюся к ограничениям.

1. Величина использованных ресурсов в колонке "Результ. значение".

2. Предельные значения приращения ресурсов Δb_i . В графе "Допустимое Уменьшение" показывают, на сколько можно уменьшить (устранить излишек) или увеличить (повысить минимально необходимое требование) ресурс, сохранив при этом оптимальное решение. Рассмотрим анализ *дефицитных* ресурсов, так как анализ *недефицитных* ресурсов был дан в подразд.5.3.3.1. Анализируя отчет по результатам, мы установили, что существуют причины (ограничения), не позволяющие мебельному комбинату выпускать большее, чем в оптимальном решении, количество полок и получать более высокую прибыль. В рассматриваемой задаче (вариант 0) такими ограничениями являются *дефицитные* ресурсы "Емкость сушилки" и "Емкость склада готовой продукции". Поскольку знак ограничений этих запасов имеет вид $\leq$, то возникает вопрос, на сколько максимально должна возрасти емкость этих помещений, чтобы обеспечить увеличение выпуска продукции. Ответ на этот вопрос показан в графе "Допустимое Увеличение".

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1,2

Дополнительная: 1, 2,3

Тема 5. Распознавание образов в теории принятия решений

Практическое занятие № 5

Двухиндексные задачи линейного программирования. Задача о назначениях

Цель: Приобретение навыков построения математических моделей задач о назначении и решения этих задач в Microsoft Excel.

Формируемые компетенции: УК-1

Теоретическая часть:

6.2. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Согласно номеру своего варианта выберите условие задачи.
2. Постройте модель задачи, включая транспортную таблицу.
3. Найдите оптимальное решение задачи с помощью Excel и представьте его преподавателю.
4. Оформите отчет по работе, который должен содержать:
 - транспортную таблицу и модель задачи с указанием всех единиц измерения;
 - результат решения задачи с указанием единиц измерения.

6.3. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Задача о назначениях – это РЗ, в которой для выполнения каждой работы требуется один и только один ресурс (один человек, одна автомашина и т.д.), а каждый ресурс может быть использован на одной и только одной работе. То есть ресурсы не делимы между работами, а работы не делимы между ресурсами. Таким образом, задача о назначениях является частным случаем ТЗ. Задача о назначениях имеет место при назначении людей на должности или работы, автомашин на маршруты, водителей на машины, при распределении групп по аудиториям, научных тем по научно-исследовательским лабораториям и т.п.

Исходные параметры модели задачи о назначениях

1. n – количество ресурсов, m – количество работ.
2. $a_i = 1$ – единичное количество ресурса A_i ($i = \overline{1, n}$), например: один работник; одно транспортное средство; одна научная тема и т.д.
3. $b_j = 1$ – единичное количество работы B_j ($j = \overline{1, m}$), например: одна должность; один маршрут; одна лаборатория.
4. c_{ij} – характеристика качества выполнения работы B_j с помощью ресурса A_i .

Например, компетентность i -го работника при работе на j -й должности; время, за которое i -е транспортное средство перевезет груз по j -му маршруту; степень квалификации i -й лаборатории при работе над j -й научной темой.

Искомые параметры

1. x_{ij} – факт назначения или неназначения ресурса A_i на работу B_j :
$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i - \text{е } \text{д} \text{а} \text{н} \text{о} \text{д} \text{н} \text{я} \text{ } i \text{а} \text{ } j - \text{е } \text{д} \text{а} \text{н} \text{а} \text{ } \text{д} \text{о} \text{ } , \\ 1, & \text{если } i - \text{е } \text{д} \text{а} \text{н} \text{о} \text{д} \text{н} \text{я} \text{ } i \text{а} \text{ } j - \text{е } \text{д} \text{а} \text{н} \text{а} \text{ } \text{д} \text{о} . \end{cases}$$
2. $L(X)$ – общая (суммарная) характеристика качества распределения ресурсов по работам.

Таблица 4.1

Общий вид транспортной матрицы задачи о назначениях

Ресурсы, A_i	Работы, B_j				Количество ресурсов
	$\hat{A}_1$	$\hat{A}_2$	...	B_m	

$\dot{A}_1$	c_{11}	c_{12}	...	c_{1m}	1
$\dot{A}_2$	c_{21}	c_{22}	...	c_{2m}	1
...	...	...	...	...	...
A_n	c_{n1}	c_{n2}	...	c_{nm}	1
Количество работ	1	1	...	1	$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$

Модель задачи о назначениях

$$L(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min ;$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad (i = \overline{1, n}) \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j = \overline{1, m}) \\ x_{ij} = \begin{cases} 0, & (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}) \\ 1, & \end{cases} \end{cases} \quad (6.1)$$

Специфическая структура задачи о назначениях позволила разработать так называемый **"Венгерский метод"** ее решения. Поэтому, хотя в Excel такие задачи решаются обычным симплекс-методом, в лабораторной работе требуется построить модель задачи о назначениях вида (5.1). В некоторых случаях, например, когда c_{ij} – это компетентность, опыт работы, или квалификация работников, условие задачи может требовать максимизации ЦФ, в отличие от (5.1). В этом случае ЦФ $L(X)$ заменяют на $L_1(X) = -L(X)$ и решают задачу с ЦФ $L_1(X) \rightarrow \min$, что равносильно решению задачи с ЦФ $L(X) \rightarrow \max$.

6.4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Отдел кадров предприятия устроил конкурсный набор специалистов на две вакантные должности. На эти новые места (НМ) претендуют 3 прежних сотрудника (ПС), уже работающие в других отделах, и 4 новых сотрудника (НС). Номера новых сотрудников, новых и прежних мест выбираются по вариантам из табл.6.2. Номера прежних мест являются номерами прежних сотрудников.

Отдел кадров оценил по десятибалльной шкале компетентность новых сотрудников (табл.6.3) и прежних сотрудников (табл.6.4) для работы и на новых местах, и на прежних местах (ПМ), то есть занимаемых прежними сотрудниками. Необходимо учесть, что руководство предприятия, во-первых, предпочитает, чтобы прежние сотрудники не претендовали на места друг друга, и, во-вторых, не намерено увольнять прежних сотрудников.

Необходимо распределить сотрудников по должностям наилучшим образом.

6.5. РЕКОМЕНДАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

1. Процесс приведения задачи о назначениях к сбалансированному виду имеет свои особенности по сравнению с ТЗ. Если условие сбалансированности задачи (6.2) не выполняется из-за нехватки работ или исполнителей в количестве k_{ab} , то для создания баланса надо ввести такое же количество k_{ab} фиктивных строк или столбцов.

2. Особенностью решения данной задачи является моделирование системы предпочтений, сложившейся у руководства предприятия по описанному в условии задачи кадровому вопросу.

3. В задаче о назначениях увольнение прежнего сотрудника или непринятие на работу нового сотрудника моделируется попаданием единицы в фиктивный столбец матрицы решений задачи, поэтому для запрещения или разрешения таких ситуации необходимо использовать соответствующие "тарифы".

4. Значения "тарифов" c_{ij}^c выбираются в зависимости от направления оптимизации ЦФ задачи о назначениях ($L(X) \rightarrow \max$ или $L(X) \rightarrow \min$). При этом руководствуются принципом "невыгодности" запрещенных назначений. Так, если $L(X)$ – это общая компетентность работников, то в качестве запрещающих надо выбирать нулевые компетентности c_{ij}^c . А если $L(X)$ – это общее время прохождения машинами транспортных маршрутов, то в качестве запрещающих надо выбирать значения c_{ij}^c , превосходящие по величине максимальные реальные значения c_{ij} .

5. При решении задач о назначении в Excel необходимо учитывать, что переменные x_{ij} являются булевыми.

6.4. ВАРИАНТЫ

Таблица 6.2

Номера сотрудников и мест их работы для конкретного варианта

№ варианта	Новые сотрудники (НС)	Места работы прежних сотрудников (ПМ)	Новые места (НМ)
1	3, 4, 7, 8	1, 2, 3	1, 2
2	1, 2, 5, 6	2, 5, 6	2, 3
3	5, 6, 7, 8	1, 2, 5	3, 4
4	3, 4, 5, 6	4, 5, 6	1, 4
5	1, 2, 3, 4	2, 3, 4	2, 4
6	2, 4, 6, 8	3, 4, 6	1, 3
7	1, 3, 5, 7	2, 3, 6	1, 4
8	2, 3, 6, 7	3, 4, 5	2, 3
9	1, 4, 5, 8	2, 3, 5	3, 4
10	2, 3, 4, 5	1, 2, 6	1, 2
11	4, 5, 6, 7	1, 3, 5	2, 4
12	1, 2, 7, 8	2, 4, 6	1, 3

Таблица 6.3

Компетентность новых сотрудников

	НМ1	НМ2	НМ3	НМ4	ПМ1	ПМ2	ПМ3	ПМ4	ПМ5	ПМ6
НС1	6	5	7	6	5	6	7	6	7	5
НС2	5	5	8	8	7	6	4	5	8	8
НС3	6	7	5	6	4	5	4	5	6	6
НС4	7	8	7	6	5	7	6	8	5	5
НС5	7	6	6	5	5	4	5	5	4	6
НС6	8	8	9	7	6	7	8	7	9	8
НС7	9	8	9	9	8	7	8	9	8	7
НС8	7	7	8	9	7	8	9	6	7	8

Таблица 6.4

Компетентность прежних сотрудников

	НМ1	НМ2	НМ3	НМ4	Занимаемое место
ПС1	7	6	6	7	7
ПС2	8	9	7	7	8
ПС3	6	5	6	6	6
ПС4	7	9	6	8	8
ПС5	8	7	8	8	7
ПС6	4	5	6	4	5

6.5. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ НА ЗАЩИТЕ РАБОТЫ

1. Какова постановка задачи о назначениях?
2. В чем отличие модели задачи о назначениях от модели ТЗ?
3. Каковы исходные и искомые параметры задачи о назначениях?
4. Запишите математическую модель задачи о назначениях.
5. Как записать модель задачи о назначениях, подразумевающую максимизацию ЦФ, в виде (5.1)?
6. Каким образом в модели задачи о назначениях можно запретить конкретное назначение?
7. В чем особенности процесса приведения задачи о назначениях к сбалансированному виду?
8. Поясните модель задачи о назначениях, построенную по заданному варианту.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме.

Основная: 1,2

Дополнительная: 1, 2,3

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «Теория принятия решений в вопросах защиты информации»

для студентов направления подготовки
10.03.01 «Информационная безопасность»

Направленность (профиль):

«Организация и технологии защиты информации (по отрасли или в сфере
профессиональной деятельности)»

Ставрополь,
2026

ВВЕДЕНИЕ

Целью дисциплины является:

- ознакомление студентов с важнейшими структурами математического программирования, теории оптимизации и исследования операций и их применением в математических моделях информационных процессов и управления;
- выработка представлений и базовых знаний в области прикладного применения теории принятия решений в инфотелекоммуникационных системах.

1. Общая характеристика самостоятельной работы студента

Основными видами учебной работы по достижению результатов освоения дисциплины являются лекции, практические занятия и самостоятельная работа студентов (СРС).

На лекциях раскрываются основные положения и понятия курса, формируются знания в области документоведения.

На практических занятиях формируются умения, необходимые для решения задач профессиональной деятельности.

Приступая к изучению учебной дисциплины, необходимо ознакомиться с учебной программой, получить в библиотеке рекомендованные учебные пособия, а также получить у преподавателя в электронном виде конспекты лекций, методические рекомендации к практическим занятиям, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и выполнения практических и работ.

Для изучения дисциплины предлагается список основной и дополнительной литературы. Основная литература предназначена для обязательного изучения, дополнительная – поможет более глубоко освоить отдельные вопросы, подготовить исследовательские задания и выполнить задания для самостоятельной работы.

В ходе лекционных занятий студент обязан осуществлять конспектирование учебного материала, особое внимание, обращая на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных понятий, физических явлений, процессов, эффектов. В рабочих конспектах желательно оставлять поля, на которых следует делать пометки из рекомендованной литературы, дополнять материал прослушанной лекции, формулировать научные выводы и практические рекомендации. Студент имеет право задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью выяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

Самостоятельная работа студентов над материалом учебной дисциплины является неотъемлемой частью учебного процесса и должна предполагать углубление знания учебного материала, излагаемого на аудиторных занятиях, и приобретение дополнительных знаний по отдельным вопросам самостоятельно.

Основными видами самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине являются:

- самостоятельное выполнение заданий по заданным темам;
- самостоятельное изучение учебного материала по заданным темам;
- подготовка к практическим заданиям, оформление отчета по выполненному практическому занятию и подготовка к собеседованию по результатам работы.

Основными методами самостоятельной работы студентов являются:

1) для овладения знаниями:

- чтение текста (конспекта лекций, учебника, дополнительной литературы) и конспектирование текста;

- работа с нормативными документами;

- поиск информации в Интернет;

2) для закрепления и систематизации знаний:

- работа с конспектом лекции (обработка текста);

- повторная работа над учебным материалом (учебника, дополнительной литературы, слайдами);
 - составление плана и тезисов ответа или графическое изображение структуры ответа;
 - составление таблиц для систематизации учебного материала;
 - изучение нормативных документов;
 - ответы на контрольные вопросы;
- 3) для формирования умений:
- подготовка к практическим занятиям;
 - решение задач и практических заданий;
 - подготовка отчетов по практическим занятиям;
 - рефлексивный анализ профессиональных умений.

В случае пропуска учебного занятия студент может воспользоваться содержанием различных блоков учебно-методического комплекса (лекции, практические занятия, контрольные вопросы и тесты) для самоподготовки и освоения темы. Для самоконтроля необходимо использовать вопросы и задания, предлагаемые к практическим занятиям, а также варианты тестовых заданий.

2. Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций, индикатора(ов)	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
5 семестр					
УК-1 ИД-1 УК-1 ИД-3	Подготовка к практическому занятию	Собеседование	13.00	2.00	15.00
УК-1 ИД-1 УК-1 ИД-3	Подготовка к лекции	Конспект	13.00	2.00	15.00
УК-1 ИД-1 УК-1 ИД-3	Подготовка доклада	Доклад	13.00	2.00	15.00
УК-1 ИД-1 УК-1 ИД-3	Самостоятельное изучение литературы	Конспект	12.00	2.00	14.00
УК-1 ИД-1 УК-1 ИД-3	Самостоятельное выполнение заданий по заданным темам.	Конспект. Письменный отчет	11.00	2.00	13.00
Итого за семестр			62.00	10.00	72.00
Итого			62.00	10.00	72.00

3. Порядок выполнения самостоятельной работы

3.1 Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Комплексное изучение предлагаемой студентам учебной дисциплины «Теория принятия решений в вопросах защиты информации» предполагает овладение материалами лекций, учебников, программы, творческую работу студентов в ходе проведения лабораторных работ, а также систематическое выполнение заданий для самостоятельной работы.

В ходе лекций раскрываются основные вопросы в рамках рассматриваемых тем, делаются акценты на наиболее сложные и интересные положения изучаемого материала, которые должны быть приняты студентами во внимание. Материалы лекций являются основой для подготовки студентов к лабораторным работам.

Работа с конспектом лекций

Просмотрите конспект сразу после занятий. Отметьте материал конспекта лекций, который вызывает затруднения для понимания. Попытайтесь найти ответы на затруднительные вопросы, используя предлагаемую литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, сформулируйте вопросы и обратитесь на текущей консультации или на ближайшей лекции за помощью к преподавателю.

Каждую неделю отводите время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам и тестам.

Выполнение практических занятий по дисциплине «Теория принятия решений в вопросах защиты информации»

На первом занятии получите у преподавателя задания по курсу, планы подготовки к практическим занятиям. Обзаведитесь всем необходимым методическим обеспечением.

Перед практическими занятиями изучите теорию вопроса, предполагаемого к исследованию, ознакомьтесь с опытом других исследователей в этом направлении.

Целью практических занятий является:

- ***закрепление методов приложения теории к решению практических задач анализа и синтеза психологического знания;***
- проверка уровня понимания студентами вопросов, рассмотренных на лекциях и по учебной литературе, степени и качества усвоения материала;
- обучение навыкам освоения методики эксперимента и работы с нормативно-справочной литературой;
- ***восполнение пробелов в пройденной теоретической части курса и оказание помощи в его усвоении.***

3.2 Методические рекомендации по написанию и оформлению доклада

1. Общие положения

1.1. Доклад, как вид самостоятельной работы в учебном процессе, способствует формированию навыков исследовательской работы, расширяет познавательные интересы, учит критически мыслить.

1.2. При написании доклада по заданной теме студент составляет план, подбирает основные источники.

1.3. В процессе работы с источниками систематизирует полученные сведения, делает выводы и обобщения.

1.4. К докладу по крупной теме могут привлекать несколько студентов, между которыми распределяются вопросы выступления.

2. Выбор темы доклада

2.1. Тематика доклада обычно определяется преподавателем, но в определении темы инициативу может проявить и студент.

2.2. Прежде чем выбрать тему доклада, автору необходимо выявить свой интерес, определить, над какой проблемой он хотел бы поработать, более глубоко ее изучить.

3. Этапы работы над докладом

3.1. Формулирование темы, причем она должна быть не только актуальной по своему значению, но и оригинальной, интересной по содержанию.

3.2. Подбор и изучение основных источников по теме (как правильно, при разработке доклада используется не менее 8-10 различных источников).

3.3. Составление списка использованных источников.

3.4. Обработка и систематизация информации

3.5. Разработка плана доклада.

3.6. Написание доклада.

3.7. Публичное выступление с результатами исследования.

4. Структура доклада:

- титульный лист

- оглавление (в нем последовательно излагаются названия пунктов доклада, указываются страницы, с которых начинается каждый пункт);

- введение (формулирует суть исследуемой проблемы, обосновывается выбор темы, определяются ее значимость и актуальность, указываются цель и задачи доклада, дается характеристика используемой литературы);

- основная часть (каждый раздел ее, доказательно раскрывая отдельную проблему или одну из ее сторон, логически является продолжением предыдущего; в основной части могут быть представлены таблицы, графики, схемы);

- заключение (подводятся итоги или дается обобщенный вывод по теме доклада, предлагаются рекомендации);

- список использованных источников

5. Структура и содержание доклада

5.1. Введение - это вступительная часть научно-исследовательской работы. Автор должен приложить все усилия, чтобы в этом небольшом по объему разделе показать актуальность темы, раскрыть практическую значимость ее, определить цели и задачи эксперимента или его фрагмента.

5.2. Основная часть. В ней раскрывается содержание доклада. Как правило, основная часть состоит из теоретического и практического разделов. В теоретическом разделе раскрываются история и теория исследуемой проблемы, дается критический анализ литературы и показываются позиции автора. В практическом разделе излагаются методы, ход, и результаты самостоятельно проведенного эксперимента или фрагмента.

В основной части могут быть также представлены схемы, диаграммы, таблицы, рисунки и т.д.

5.3. В заключении содержатся итоги работы, выводы, к которым пришел автор, и рекомендации. Заключение должно быть кратким, обязательным и соответствовать поставленным задачам.

5.4. Список использованных источников представляет собой перечень использованных книг, статей, фамилии авторов приводятся в алфавитном порядке, при этом все источники даются под общей нумерацией литературы. В исходных данных источника указываются фамилия и инициалы автора, название работы, место и год издания.

5.5. Приложение к докладу оформляются на отдельных листах, причем каждое должно иметь свой тематический заголовок и номер, который пишется в правом верхнем углу, например: «Приложение 1»

6. Требования к оформлению доклада

6.1. Объем доклада может колебаться в пределах 5-15 печатных страниц; все приложения к работе не входят в ее объем.

6.2. Доклад должен быть выполнен грамотно, с соблюдением культуры изложения.

6.3. Обязательно должны иметься ссылки на используемую литературу.

6.4. Должна быть соблюдена последовательность написания библиографического аппарата.

7. Критерии оценки доклада

- актуальность темы исследования;
- соответствие содержания теме;
- глубина проработки материала; правильность и полнота использования источников;
- соответствие оформления доклада стандартам.

По усмотрению преподавателя доклады могут быть представлены на семинарах, научно-практических конференциях, а также использоваться как зачетные работы по пройденным темам.

3.3 Методические рекомендации по конспектированию первоисточников

Изучение и анализ литературных источников является обязательным видом самостоятельной работы студентов. Изучение литературы по избранной теме имеет своей задачей проследить характер постановки и решения определенной проблемы различными авторами, аргументацию их выводов и обобщений, провести анализ и систематизировать полученный материал на основе собственного осмысления с целью выяснения современного состояния вопроса.

Проработка отобранного материала обязательно должна идти с одновременным ведением записей прочитанного и своих замечаний. Запись может иметь как форму конспекта, так и выписок, а также картотеку положений, тезисов, идей, методик, что в дальнейшем облегчит классификацию и систематизацию полученного материала. Такого рода записи являются лучшим способом накопления и первичной обработки материал, одной из обязательных форм организации умственного труда.

Планом удобно пользоваться при подготовке к устному выступлению по выбранной теме. Каждый пункт плана должен раскрывать одну из сторон избранной темы, а весь план должен охватывать ее целиком.

Тезисы предполагают сжатое изложение основных положений текста в форме утверждения или отрицания. Они являются более совершенной формой записей и представляют основу для дискуссии. К тому же их легко запомнить.

Конспектирование – процесс мысленной переработки и письменной фиксации информации, в виде краткого изложения основного содержания, смысла какого-либо текста.

Результат конспектирования – запись, позволяющая конспектирующему немедленно или через некоторый срок с нужной полнотой восстановить полученную информацию. Конспект в переводе с латыни означает «обзор». По существу его и составлять надо как обзор, содержащий основные мысли текста без подробностей и второстепенных деталей. Конспект носит индивидуализированный характер: он рассчитан на самого автора и поэтому может оказаться малопонятным для других.

Для того чтобы осуществлять этот вид работы, в каждом конкретном случае необходимо грамотно решить следующие задачи:

1. Сориентироваться в общей композиции текста (уметь определить вступление, основную часть, заключение).
2. Увидеть логико-смысловую канву сообщения, понять систему изложения автором информации в целом, а также ход развития каждой отдельной мысли.
3. Выявить «ключевые» мысли, т. е. основные смысловые вехи, на которые «нанизано» все содержание текста.
4. Определить детализирующую информацию.
5. Лаконично сформулировать основную информацию, не перенося на письмо все целиком и дословно.

Во всяком научном тексте содержится информация 2-х видов: основная и вспомогательная. Основной является информация, имеющая наиболее существенное значение для раскрытия содержания темы или вопроса. К ней относятся: определения научных понятий, формулировки законов, теоретических принципов и т. д. Назначение

вспомогательной информации – помочь читателю лучше усвоить предлагаемый материал. К этому типу информации относятся разного рода комментарии. Основную – записываем как можно полнее, вспомогательную, как правило, опускаем. Содержание конспектирования составляет переработка основной информации в целях ее обобщения и сокращения. Обобщить – значит представить ее в более общей, схематической форме, в виде тезисов, выводов, отдельных заголовков, изложения основных результатов и т. п. Читая, мы интуитивно используем некоторые слова и фразы в качестве опорных. Такие опорные слова и фразы называются ключевыми. Ключевые слова и фразы несут основную смысловую и эмоциональную нагрузку содержания текста.

Выбор ключевых слов – это первый этап смыслового свертывания, смыслового сжатия материала.

Важными требованиями к конспекту являются наглядность и обозримость записей и такое их расположение, которое давало бы возможность уяснить логические связи и иерархию понятий.

По форме конспекты подразделяются на формализованные и графические.

1. Формализованные (все записи вносятся в заранее подготовленные таблицы).

Это удобно, во-первых, при конспектировании материалов, когда перечень характеристик описываемых предметов или явлений более или менее постоянен, во-вторых, при подготовке единого конспекта по нескольким источникам. Особенно если есть необходимость сравнения отдельных данных. Разновидностью формализованного конспекта является запись, составленная в форме ответов на заранее подготовленные вопросы, обеспечивающие исчерпывающие характеристики однотипных предметов или явлений.

2. Графические (элементы конспектируемой работы располагаются в таком виде, при котором видна иерархия понятий и взаимосвязь между ними).

По каждой работе может быть не один, а несколько графических конспектов, отображающих книгу в целом и отдельные ее части. Ведение графического конспекта – наиболее совершенный способ изображения внутренней структуры книги, а сам этот процесс помогает усвоению ее содержания.

Можно выделить следующие основные **типы конспектов: плановый, текстуальный, сводный, тематический.**

Плановый – легко получить с помощью предварительно сделанного плана произведения, каждому вопросу плана отвечает определенная часть конспекта:

а) вопросно-ответный (на пункты плана, выраженные в вопросительной форме, конспект дает точные ответы);

б) схематичный плановый конспект (отражает логическую структуру и взаимосвязь отдельных положений).

Текстуальный – это конспект, созданный в основном из цитат.

Сводный конспект – сочетает выписки, цитаты, иногда тезисы; часть его текста может быть снабжена планом.

Тематический – дает более или менее исчерпывающий ответ (в зависимости из числа привлеченных источников и другого материала, например, своих же записей) на поставленный вопрос – тему: обзорный; хронологический.

Роль конспекта – чисто учебная: он помогает зафиксировать основные понятия и положения первичного текста и в нужный момент их воспроизвести, например, при написании реферата или подготовке к экзамену.

Способы конспектирования.

- **Тезисы** – это кратко сформулированные основные мысли, положения изучаемого материала. Тезисы лаконично выражают суть читаемого, дают возможность раскрыть содержание. Приступая к освоению записи в виде тезисов, полезно в самом тексте отмечать места, наиболее четко формулирующие основную мысль, которую автор доказывает (если,

конечно, это не библиотечная книга). Часто такой отбор облегчается шрифтовым выделением, сделанным в самом тексте.

- **Линейно-последовательная запись текста.** При конспектировании линейно – последовательным способом целесообразно использование плакатно-оформительских средств, которые включают в себя следующие:

- сдвиг текста конспекта по горизонтали, по вертикали;
- выделение жирным (или другим) шрифтом особо значимых слов;
- использование различных цветов;
- подчеркивание;
- заключение в рамку главной информации.

- **Способ «вопросов – ответов».** Он заключается в том, что, поделив страницу тетради пополам вертикальной чертой, конспектирующий в левой части страницы самостоятельно формулирует вопросы или проблемы, затронутые в данном тексте, а в правой части дает ответы на них.

Одна из модификаций способа «вопросов – ответов» - таблица, где место вопроса занимает формулировка проблемы, поднятой автором (лектором), а место ответа – решение данной проблемы. Иногда в таблице могут появиться и дополнительные графы: например, «мое мнение» и т. п.

- **Схема с фрагментами** – способ конспектирования, позволяющий ярче выявить структуру текста, - при этом фрагменты текста (опорные слова, словосочетания, пояснения всякого рода) в сочетании с графикой помогают созданию рационально - лаконичного конспекта.

- **Простая схема** – способ конспектирования, близкий к схеме с фрагментами, объяснений к которой конспектирующий не пишет, но должен уметь давать их устно. Этот способ требует высокой квалификации конспектирующего. В противном случае такой конспект нельзя будет использовать.

- **Параллельный способ** конспектирования. Конспект оформляется на двух листах параллельно или один лист делится вертикальной чертой пополам и записи делаются в правой и в левой части листа.

Однако лучше использовать разные способы конспектирования для записи одного и того же материала.

Комбинированный конспект – вершина овладения рациональным конспектированием. При этом умело используются все перечисленные способы, сочетая их в одном конспекте (один из видов конспекта свободно перетекает в другой в зависимости от конспектируемого текста, от желания и умения конспектирующего). Именно при комбинированном конспекте более всего проявляется уровень подготовки и индивидуальность студента.

Принципы составления конспекта прочитанного.

1. Записать все выходные данные источника: автор, название, год и место издания. Если текст взят из периодического издания (газеты или журнала), то записать его название, год, месяц, номер, число, место издания.

2. Выделить поля слева или справа, можно с обеих сторон. Слева на полях отмечаются страницы оригинала, структурные разделы статьи или книги (названия параграфов, подзаголовки и т. п.), формулируются основные проблемы. Справа – способы фиксации прочитанной информации.

Один из видов чтения – углубленное – предполагает глубокое усвоение прочитанного и часто сохранение информации в целях последующего обращения к ней. Эффективность такого чтения повышается, если прочитанное зафиксировано не только в памяти, но и на бумаге. Психологи утверждают, что записанное лучше и полнее усваивается, прочнее откладывается в памяти. Установлено, что если прочитать 1000 слов и затем записать 50, подытоживающих прочитанное, то коэффициент усвоения будет выше, чем, если прочитать 10000 слов, не записав ни одного. Кроме того, при записи прочитанного

формируется навык свертывания информации. И, наконец, чередование чтения и записывания уменьшает усталость, повышает работоспособность и производительность умственного труда.

1. Резюмирование.

Резюме – краткий итог прочитанного, содержащий его оценку. Резюме характеризует основные выводы книги, главные итоги.

Выбор языковых средств для построения резюме-выводов подчинен основной задаче свертывания информации: минимум языковых средств – максимум информации. Это обычно одно – три четких, кратких, выразительных предложения, раскрывающих, по мнению автора, самую суть описываемого объекта.

2. Аннотация.

Аннотация – краткая обобщенная характеристика печатной работы (книги, статьи), включающая иногда и его оценку. Это наикратчайшее изложение содержания первичного документа, дающее общее представление о теме.

Основное ее назначение – дать некоторое представление о книге (статье, научной работе) с тем, чтобы рекомендовать ее определенному кругу читателей или воспользоваться своими записями при выполнении работы исследовательского, реферативного характера. Поэтому аннотации не требуется изложения содержания произведения, в ней лишь перечисляются вопросы, которые освещены в первоисточнике (содержание этих вопросов не раскрывается). Аннотация отвечает на вопрос: «О чем говорится в первичном тексте?», дает представление только о главной теме и перечне вопросов, затрагиваемых в тексте первоисточника.

Текст аннотации не стандартизирован. В научной литературе можно встретить различные требования к составлению аннотаций. Например, текст справочной аннотации может включать следующие сведения:

- тип и название аннотируемого документа (монография, диссертация, сборник, статья и т. п.)
- задачи, поставленные автором аннотируемого документа
- метод, которым пользовался автор (эксперимент, сравнительный анализ, компиляция других источников)
- принадлежность автора к определенной научной школе или направлению
- структуру аннотируемого документа
- предмет и тему произведения, основные положения и выводы автора
- характеристику вспомогательных иллюстративных материалов, дополнений, приложений, справочного аппарата, включая указатели и библиографию.

Задания по темам учебной дисциплины для самостоятельной работы

Уменьшение порядка платёжной матрицы

Порядок платёжной матрицы (количество строк и столбцов) может быть уменьшен за счёт исключения доминируемых и дублирующих стратегий.

Стратегия K^* называется доминируемой стратегией K^{**} , если при любом варианте поведения противодействующего игрока выполняется соотношение

$$A_{K^*} < A_{K^{**}},$$

где A_{K^*} и $A_{K^{**}}$ - значения выигрышей при выборе игроком, соответственно, стратегий K^* и K^{**} .

В случае, если выполняется соотношение

$$A_{K^*} = A_{K^{**}},$$

стратегия K^* называется дублирующей по отношению к стратегии K^{**} .

Например, в матрице (рис. 10.1)

	В 1	В 2	В 3	В 4	В 5	В 6
--	-----	-----	-----	-----	-----	-----

A 1	1	2	3	4	4	7
A 2	7	6	5	4	4	8
A 3	1	8	2	3	3	6
A 4	8	1	3	2	2	5

Рис. 10.1. Платёжная матрица с доминируемыми и дублирующими стратегиями

стратегия A1 является доминируемой по отношению к стратегии A2, стратегия B6 является доминируемой по отношению к стратегиям B3, B4 и B5, а стратегия B5 является дублирующей по отношению к стратегии B4. Данные стратегии не будут выбраны игроками, так как являются заведомо проигрышными и удаление этих стратегий из платёжной матрицы не повлияет на определение нижней и верхней цены игры, описанной данной матрицей.

Множество недоминируемых стратегий, полученных после уменьшения размерности платёжной матрицы, называется ещё множеством Парето (по имени итальянского экономиста Вильфредо Парето, занимавшегося исследованиями в данной области) [7].

Практическая часть:

Задание 10.1.

Определите, имеет ли платёжная матрица (рис. 10.2),

	B1	B2	B3	B4
A1	1	2	$N+1$	$N+2$
A2	4	$\log_2 N$	N^2	3
A3	6	1	3	N
A4	1	2	3	4

Рис. 10.2. Платёжная матрица

где N – порядковый номер Вашей фамилии в списке студентов группы:

- а) доминируемые или дублирующие стратегии;
- б) решение в чистых стратегиях.

Задание 10.2

Усовершенствуйте компьютерную программу, созданную при выполнении задания 10.2 так, чтобы она обеспечивала исключение доминируемых и дублирующих стратегий.

Решение матричной игры в чистых стратегиях

Рассмотрим пример решения матричной игры в чистых стратегиях, в реальных условиях.

Задача

Два предприятия производят продукцию и поставляют её на рынок региона. Они являются единственными поставщиками продукции в регион, поэтому полностью определяют рынок данной продукции в регионе.

Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию с применением одной из трёх различных технологий. В зависимости от качества продукции, произведённой по каждой технологии, предприятия могут установить цену единицы продукции на уровне 10, 6 и 2 денежных единиц соответственно. При этом предприятия имеют различные затраты на производство единицы продукции. (табл. 11.1.).

Таблица 11.1

Затраты на единицу продукции, произведенной на предприятиях региона (д.е.).

Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.	
		Предприятие 1	Предприятие 2
I	10	5	8
II	6	3	4
III	2	1.5	1

В результате маркетингового исследования рынка продукции региона была определена функция спроса на продукцию:

$$Y = 6 - 0.5 \times X,$$

где Y – количество продукции, которое приобретёт население региона (тыс. ед.), а X – средняя цена продукции предприятий, д.е.

Данные о спросе на продукцию в зависимости от цен реализации приведены в табл. 11.2.

Таблица 11.2

Спрос на продукцию в регионе, тыс. ед.

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Средняя цена реализации 1 ед. продукции, д.е.	Спрос на продукцию, тыс. ед.
Предприятие 1	Предприятие 2		
10	10	10	1
10	6	8	2
10	2	6	3
6	10	8	2
6	6	6	3
6	2	4	4
2	10	6	3
2	6	4	4
2	2	2	5

Значения Долей продукции предприятия 1, приобретенной населением, зависят от соотношения цен на продукцию предприятия 1 и предприятия 2. В результате маркетингового исследования эта зависимость установлена и значения вычислены (табл. 11.3.).

Таблица 11.3

Доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношения цен на продукцию

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Доля продукции предприятия 1, купленной населением
Предприятие 1	Предприятие 2	
10	10	0,31
10	6	0,33
10	2	0,18
6	10	0,7
6	6	0,3
6	2	0,2
2	10	0,92
2	6	0,85
2	2	0,72

По условию задачи на рынке региона действует только 2 предприятия. Поэтому долю продукции второго предприятия, приобретённой населением, в зависимости от соотношения цен на продукцию можно определить как единица минус доля первого предприятия.

Стратегиями предприятий в данной задаче являются их решения относительно технологий производства продукции. Эти решения определяют себестоимость и цену реализации единицы продукции. В задаче необходимо определить:

1. Существует ли в данной задаче ситуация равновесия при выборе технологий производства продукции обоими предприятиями?
2. Существуют ли технологии, которые предприятия заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?
3. Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия? Какое предприятие окажется в выигрышном положении?

Решение задачи

1. Определим экономический смысл коэффициентов выигрышей в платёжной матрице задачи. Каждое предприятие стремится к максимизации прибыли от производства продукции. Но кроме того, в данном случае предприятия ведут борьбу за рынок продукции в регионе. При этом выигрыш одного предприятия означает проигрыш другого. Такая задача может быть сведена к матричной игре с нулевой суммой. При этом коэффициентами выигрышей будут значения разницы прибыли предприятия 1 и предприятия 2 от производства продукции. В случае, если эта разница положительна, выигрывает предприятие 1, а в случае, если она отрицательна – предприятие 2.

2. Рассчитаем коэффициенты выигрышей платёжной матрицы. Для этого необходимо определить значения прибыли предприятия 1 и предприятия 2 от производства продукции. Прибыль предприятия в данной задаче зависит:

- от цены и себестоимости продукции;
- от количества продукции, приобретаемой населением региона;
- от доли продукции, приобретённой населением у предприятия.

Таким образом, значения разницы прибыли предприятий, соответствующие коэффициентам платёжной матрицы, необходимо определить по формуле (1):

$$D = p \times (S \times R_1 - S \times C_1) - (1-p) \times (S \times R_2 - S \times C_2) \quad (1),$$

где D – значение разницы прибыли от производства продукции предприятия 1 и предприятия 2;

p - доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением региона;

S – количество продукции, приобретаемой населением региона;

R_1 и R_2 - цены реализации единицы продукции предприятиями 1 и 2;

C_1 и C_2 – полная себестоимость единицы продукции, произведённой на предприятиях 1 и 2.

Вычислим один из коэффициентов платёжной матрицы.

Пусть, например, предприятие 1 принимает решение о производстве продукции в соответствии с технологией III, а предприятие 2 – в соответствии с технологией II. Тогда цена реализации единицы. продукции для предприятия 1 составит 2 д.е. при себестоимости единицы. продукции 1,5 д.е. Для предприятия 2 цена реализации единицы. продукции составит 6 д.е. при себестоимости 4 д.е. (табл. 11.1).

Количество продукции, которое население региона приобретёт при средней цене 4 д.е., равно 4 тыс. ед. (таблица 11.2). Доля продукции, которую население приобретёт у предприятия 1, составит 0,85, а у предприятия 2 – 0,15 (табл. 11.3). Вычислим коэффициент платёжной матрицы a_{32} по формуле (1):

$$a_{32} = 0,85 \times (4 \times 2 - 4 \times 1,5) - 0,15 \times (4 \times 6 - 4 \times 4) = 0,5 \text{ тыс. ед.}$$

где $i=3$ – номер технологии первого предприятия, а $j=2$ – номер технологии второго предприятия.

Аналогично вычислим все коэффициенты платёжной матрицы. В платёжной матрице стратегии A1 – A3 – представляют собой решения о технологиях производства продукции предприятием 1, стратегии B1 – B3 – решения о технологиях производства продукции предприятием 2, коэффициенты выигрышей – разницу прибыли предприятия 1 и предприятия 2.

	B1	B2	B3	Min _j
A1	0,17	0,62	0,24	0.17
A2	3	-1,5	-0,8	-1.5
A3	0,9	0,5	0,4	0.4
Max _i	3	0.62	0.4	

Рис. 11.6. Платёжная матрица в игре «Борьба двух предприятий за рынок продукции региона».

В данной матрице нет ни доминируемых, ни дублирующих стратегий. Это значит, что для обоих предприятий нет заведомо невыгодных технологий производства продукции. Определим минимальные элементы строк матрицы. Для предприятия 1 каждый из этих элементов имеет значение минимально гарантированного выигрыша при выборе соответствующей стратегии. Минимальные элементы матрицы по строкам имеют значения: 0,17, -1,5, 0,4.

Определим максимальные элементы столбцов матрицы. Для предприятия 2 каждый из этих элементов также имеет значение минимально гарантированного выигрыша при выборе соответствующей стратегии. Максимальные элементы матрицы по столбцам имеют значения: 3, 0,62, 0,4.

Нижняя цена игры в матрице равна 0,4. Верхняя цена игры также равна 0,4. Таким образом, нижняя и верхняя цена игры в матрице совпадают. Это значит, что имеется технология производства продукции, которая является оптимальной для обоих предприятий в условиях данной задачи. Эта технология III, которая соответствует стратегиям A3 предприятия 1 и B3 предприятия 2. Стратегии A3 и B3 – чистые оптимальные стратегии в данной задаче.

Значение разницы прибыли предприятия 1 и предприятия 2 при выборе чистой оптимальной стратегии положительно. Это означает, что предприятие 1 выиграет в данной игре. Выигрыш предприятия 1 составит 0,4 тыс. д.е. При этом на рынке будет реализовано 5 тыс. ед. продукции (реализация равна спросу на продукцию, таблица 11.2).. Оба предприятия установят цену за единицу продукции в 2 д.е. При этом для первого предприятия полная себестоимость единицы продукции составит 1,5 д.е., а для второго – 1 д.е (таблица 1.1). Предприятие 1 окажется в выигрыше лишь за счёт высокой доли продукции, которую приобретёт у него население.

Практическая часть:

Задание 11.1

Два предприятия производят продукцию и поставляют её на рынок региона. Они являются единственными поставщиками продукции в регион, поэтому полностью определяют рынок данной продукции в регионе.

Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию с применением одной из пяти различных технологий. В зависимости от качества продукции, произведённой по каждой технологии, предприятия могут установить цену реализации

единицы продукции на уровне 10, 8, 6, 4 и 2 денежных единицы соответственно. При этом предприятия имеют различные затраты на производство единицы продукции. (табл. 11.4).

Таблица 11.4

Затраты на единицу продукции, произведенной на предприятиях региона (д.е.).

Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.	
		Предприятие 1	Предприятие 2
I	10	5	8
II	8	4	6
III	6	$3+0.1*N$	$4-0.2*N$
IV	4	2	2
V	2	$1,5-0.1*N$	$1+0.1*N$

N –номер варианта, предложенный преподавателем.

В результате маркетингового исследования рынка продукции региона была определена функция спроса на продукцию:

$$Y = 8 - 0.3 \times X,$$

где Y – количество продукции, которое приобретёт население региона (тыс. ед.), а X – средняя цена продукции предприятий, д.е.

Значения долей продукции предприятия 1, приобретенной населением, зависят от соотношения цен на продукцию предприятия 1 и предприятия 2. В результате маркетингового исследования эта зависимость установлена и значения вычислены (табл. 11.5).

Таблица 11.5

Доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношения цен на продукцию

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Доля продукции предприятия 1, купленной населением
Предприятие 1	Предприятие 2	
10	10	0,31
10	8	0,33
10	6	0,25
10	4	0,2
10	2	0,18
8	10	0,4
8	8	0,35
8	6	0,32
8	4	0,28
8	2	0,25
6	10	0,52
6	8	0,48
6	6	0,4
6	4	0,35
6	2	0,3
4	10	0,6
4	8	0,58
4	6	0,55
4	4	0,5
4	2	0,4

2	10	0,9
2	8	0,85
2	6	0,7
2	4	0,65
2	2	0,4

1. Существует ли в данной задаче ситуация равновесия при выборе технологий производства продукции обоими предприятиями?

2. Существуют ли технологии, которые предприятия заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?

3. Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия? Какое предприятие окажется в выигрышном положении? Дайте краткую экономическую интерпретацию результатов решения задачи.

Решение задачи необходимо провести с помощью программы, разработанной при выполнении практической части занятий 9 и 10.

Матричные игры со смешанным расширением

Рассмотрим пример решения матричной игры со смешанным расширением. Платёжную матрицу игры составим на основе исходных данных задачи, решённой при выполнении занятия 3, заменив лишь значения долей продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношений цен (табл. 12.1).

Таблица 12.1.

Доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношения цен на продукцию

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Доля продукции предприятия 1, купленной населением
Предп. 1	Предп. 2	
10	10	0,31
10	6	0,33
10	2	0,18
6	10	0,7
6	6	0,3
6	2	0,2
2	10	0,9
2	6	0,85
2	2	0,69

Применив к исходным данным задачи формулу (1) определения разницы прибыли от производства продукции (занятие 3), получим следующую платёжную матрицу (рис. 12.1)

	B1	B2	B3	min _j
A1	0,17	0,62	0,24	0,17
A2	3	-1,5	-0,8	-1,5
A3	0,75	0,5	0,175	0,175
max _i	3	0,62	0,24	

Рис. 12.1. Платёжная матрица в игре «Борьба двух предприятий за рынок продукции региона».

В данной матрице (рис. 12.1) нет доминируемых или дублирующих стратегий. Нижняя цена игры равна 0,175, а верхняя цена игры равна 0,24. Нижняя цена игры не равна верхней. Поэтому решения в чистых стратегиях не существует и для каждого из игроков необходимо найти оптимальную смешанную стратегию.

Решение задачи

1. В данной матрице имеются отрицательные коэффициенты. Для соблюдения условия неотрицательности в задачах линейного программирования прибавим к каждому коэффициенту матрицы модуль минимального отрицательного коэффициента. В данной задаче к каждому коэффициенту матрицы необходимо прибавить число 1,5 – значение модуля наименьшего отрицательного элемента матрицы. Получим платёжную матрицу, преобразованную для выполнения условия неотрицательности (рис. 12.2)

	B1	B2	B3
A1	1,67	2,12	1,74
A2	4,5	0	0,7
A3	2,25	2	1,675

Рис. 12.2. Платёжная матрица, преобразованная для выполнения условия неотрицательности

2. Опишем задачу линейного программирования для каждого игрока в виде системы линейных неравенств:

Для игрока 1:

$$1,67 \times x_1 + 4,5 \times x_2 + 2,25 \times x_3 \geq 1$$

$$2,12 \times x_1 + 0 \times x_2 + 2 \times x_3 \geq 1$$

$$1,74 \times x_1 + 0,7 \times x_2 + 1,675 \times x_3 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$$

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3$$

Для игрока 2:

$$1,67 \times y_1 + 2,12 \times y_2 + 1,74 \times y_3 \leq 1$$

$$4,5 \times y_1 + 0 \times y_2 + 0,7 \times y_3 \leq 1$$

$$2,25 \times y_1 + 2 \times y_2 + 1,675 \times y_3 \leq 1$$

$$y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0$$

$$\max Z = y_1 + y_2 + y_3$$

3. Решим обе задачи с использованием симплекс-метода, применяя программный комплекс "Линейная оптимизация". [5].

В результате решения задачи получим следующие значения целевой функции и переменных:

$$Z = 0,5771$$

$$V^* = 1/0,5771 = 1,7328$$

$$x_1 = 0,5144; x_2 = 0; x_3 = 0,0626$$

$$y_1 = 0,0582; y_3 = 0,5189$$

4. Для определения значений вероятностей выбора стратегий игроков 1 и 2 умножим значения переменных на V^* . $P_1 = x_1 \times V^* = 0,8914$, $p_2 = 0$, $p_3 = x_3 \times V^* = 0,1083$; $q_1 = y_1 \times V^* = 0,1008$, $q_2 = 0$, $q_3 = y_3 \times V^* = 0,8991$.

5. Определим значение цены игры. Для этого из величины V^* вычтем 1,5 (значение модуля наименьшего отрицательного элемента).

$$V = 1,7328 - 1,5 = 0,2328$$

Таким образом, в данной игре выиграет предприятие 1 (значение $V > 0$). Для достижения своей оптимальной стратегии (получения максимального математического

ожидания гарантированного выигрыша) предприятие 1 должно выбирать технологию 1 с вероятностью 0,8914, а технологию 3 – с вероятностью 0,1083. Предприятие 2, соответственно, должно выбирать технологию 1 с вероятностью 0,1008, а технологию 3 – с вероятностью 0,8991. Значение математического ожидания выигрыша предприятия 1 составит 0,2328 тыс. д.е.

Практическая часть:

Задание 12.1

Решить задачу из занятия 3 изменив исходные данные

Таблица 12.3

Затраты на единицу продукции, произведенной на предприятиях региона (д.е.).

Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.	
		Предприятие 1	Предприятие 2
I	10	5	8
II	8	$4-0.1*N$	6
III	6	$3+0.1*N$	$4-0.2*N$
IV	4	2	2
V	2	$1,5-0.1*N$	$1+0.1*N$

где N – порядковый номер Вашей фамилии в списке студентов группы.

Функция спроса на продукцию:

$$Y = 8 - (0.3+0.1*(N-1)) \times X$$

Таблица 12.4

Доля продукции предприятия 1, приобретаемой населением в зависимости от соотношения цен на продукцию

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Доля продукции предприятия 1, купленной населением
Предп. 1	Предп. 2	
10	10	$0,31+0.1*(N-1)$
10	8	0,33
10	6	0,25
10	4	0,2
10	2	0,18
8	10	0,4
8	8	0,35
8	6	0,32
8	4	0,28
8	2	0,25
6	10	0,52
6	8	0,48
6	6	0,4
6	4	0,35
6	2	$0,3-0.02*N$
4	10	0,6

4	8	0,58
4	6	$0,55+0.05*N$
4	4	0,5
4	2	0,4
2	10	0,9
2	8	0,85
2	6	0,7
2	4	0,65
2	2	0,4

Решение задачи необходимо провести с помощью программы, разработанной при выполнении практической части занятий 8, 9 и 10.

Статистические игры

Принятие управленческих решений предполагает наличие ситуаций выбора наиболее выгодного варианта поведения из нескольких имеющихся вариантов в условиях неопределённости. Такие задачи могут быть описаны матричными играми особого типа, в которых игрок взаимодействует не со вторым игроком, а с окружающей средой. Объективно окружающая среда не заинтересована в проигрыше игрока. В процессе принятия решения о выборе варианта поведения игрок имеет информацию о том, что окружающая среда может принять одно из нескольких возможных состояний и сталкивается с неопределённостью относительно того конкретного состояния, которое примет окружающая среда в данный момент времени.

Матричная игра, в которой игрок взаимодействует с окружающей средой, не заинтересованной в его проигрыше, и решает задачу определения наиболее выгодного варианта поведения с учётом неопределённости состояния окружающей среды, называется статистической игрой или «игрой с природой». Игрок в этой игре называется лицом, принимающим решение (ЛПР). [3,6,9,10].

В общем виде платёжная матрица статистической игры приведена на рисунке 13.1.

	S 1	S 2	...	S n
A 1	A_{11}	A_{12}	...	A_{1n}
A 2	A_{21}	A_{22}	...	A_{2n}
...	...	...	...	...
An	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Рис. 13.1. Общий вид платёжной матрицы статистической игры

В данной игре строки матрицы (A_i) - стратегии ЛПР, а столбцы матрицы (S_j) – состояния окружающей среды.

Критерии принятия решения

ЛПР определяет наиболее выгодную стратегию в зависимости от целевой установки, которую он реализует в процессе решения задачи. Результат решения задачи ЛПР определяет по одному из критериев принятия решения. Для того, чтобы прийти к однозначному и по возможности наиболее выгодному варианту решению, необходимо ввести оценочную (целевую) функцию. При этом каждой стратегии ЛПР (A_i) приписывается некоторый результат W_i , характеризующий все последствия этого решения. Из массива результатов принятия решений ЛПР выбирает элемент W , который наилучшим образом отражает мотивацию его поведения.

Критерий максимального математического ожидания выигрыша

Критерий максимального математического ожидания выигрыша применяется в тех случаях, когда ЛПР известны вероятности состояний окружающей среды. Платёжная матрица дополняется столбцом, каждый элемент которого представляет собой значение математического ожидания выигрыша при выборе соответствующей стратегии ЛПР:

$$W_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j \quad (2)$$

где p_j –вероятность j -го состояния окружающей среды.

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия ЛПР, при выборе которой значение математического ожидания выигрыша максимально:

$$W = \max W_i$$

Применение критерия максимального математического ожидания выигрыша, таким образом, оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, следующая:

1. ЛПР известны вероятности всех состояний окружающей среды;
2. Минимизация риска проигрыша представляется ЛПР менее существенным фактором принятия решения, чем максимизация среднего выигрыша.

Необходимость иметь информацию о вероятностях состояний окружающей среды ограничивает область применения данного критерия.

Критерий недостаточного основания Лапласа

Данный критерий используется при наличии неполной информации о вероятностях состояний окружающей среды в задаче принятия решения. Вероятности состояний окружающей среды принимаются равными и по каждой стратегии ЛПР в платёжной матрице определяется, таким образом, среднее значение выигрыша:

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{n} \quad (3)$$

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия ЛПР, при выборе которой значение среднего выигрыша максимально:

$$W = \max W_i$$

Использование данного критерия оправдано в следующей ситуации:

1. ЛПР не имеет информации, либо имеет неполную информацию о вероятностях состояний окружающей среды;
2. Вероятности состояний окружающей среды близки по своим значениям;
3. Минимизация риска проигрыша представляется ЛПР менее существенным фактором принятия решения, чем максимизация среднего выигрыша.

Максиминный критерий Вальда

Правило выбора решения в соответствии с максиминным критерием (ММ-критерием) можно интерпретировать следующим образом:

Платёжная матрица дополняется столбцом, каждый элемент которого представляет собой минимальное значение выигрыша в соответствующей стратегии ЛПР:

$$W_i = \min_j a_{ij} \quad (4)$$

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия ЛПР, при выборе которой минимальное значение выигрыша максимально:

$$W = \max W_i$$

Выбранная таким образом стратегия полностью исключает риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. Это свойство позволяет считать ММ-критерий одним из фундаментальных.

Применение ММ-критерия оправдано, если ситуация, в которой принимается решение следующая:

1. О возможности появления состояний окружающей среды ничего не известно;
2. Решение реализуется только один раз;
3. Необходимо исключить какой бы то ни было риск.

Критерий минимаксного риска Сэвиджа

Величина $(a_{\max j} - a_{ij})$, где $a_{\max j}$ - максимальный элемент j – го столбца, может быть интерпретирована как дополнительный выигрыш, получаемый в условиях состояния окружающей среды S_j при выборе ЛПР наиболее выгодной стратегии, по сравнению с выигрышем, получаемым ЛПР при выборе в тех же условиях любой другой стратегии. Эта же разность может быть интерпретирована как величина возможного проигрыша при выборе ЛПР i – й стратегии по сравнению с наиболее выгодной стратегией. На основе данной интерпретации разности выигрышей производится определение наиболее выгодной стратегии по критерию минимаксного риска.

Для определения оптимальной стратегии по данному критерию на основе платёжной матрицы рассчитывается матрица рисков, каждый коэффициент которой (r_{ij}) определяется по формуле:

$$r_{ij} = a_{\max j} - a_{ij} \quad (5)$$

Матрица рисков дополняется столбцом, содержащим максимальные значения коэффициентов r_{ij} по каждой из стратегий ЛПР:

$$R_i = \max_j r_{ij}$$

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия, в которой значение R_i минимально:

$$W = \min R_i$$

Ситуация, в которой оправдано применение критерия Сэвиджа, аналогична ситуации ММ-критерия, однако наиболее существенным в данном случае является учёт степени воздействия фактора риска на величину выигрыша.

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица

В практике принятия решений ЛПР руководствуется не только критериями, связанными с крайним пессимизмом или учётом максимального риска. Стараясь занять наиболее уравновешенную позицию, ЛПР может ввести оценочный коэффициент, называемый коэффициентом пессимизма, который находится в интервале $[0, 1]$ и отражает ситуацию, промежуточную между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма. Данный коэффициент определяется на основе статистических исследований результатов принятия решений или личного опыта принятия решений в схожих ситуациях.

Платёжная матрица дополняется столбцом, коэффициенты которого рассчитываются по формуле:

$$W_i = C \times \min_j a_{ij} + (1-C) \times \max_j a_{ij} \quad (6)$$

Где C – коэффициент пессимизма.

Оптимальной по данному критерию считается стратегия, в которой значение W_i максимально:

$$W = \max W_i$$

При $C=1$ критерий Гурвица превращается в ММ-критерий. При $C=0$ он превращается в критерий “азартного игрока”, делающего ставку на то, что «выпадет» наилучший случай.

Критерий Гурвица применяется в ситуации, когда :

1. Информация о состояниях окружающей среды отсутствует или недостоверна;
2. Необходимо считаться с появлением каждого состояния окружающей среды;
3. Реализуется только малое количество решений;
4. Допускается некоторый риск.

Критерий Ходжа-Лемана

Этот критерий опирается одновременно на ММ-критерий и критерий максимального математического ожидания выигрыша. При определении оптимальной стратегии по этому критерию вводится параметр достоверности информации о распределении вероятностей состояний окружающей среды, значение которого находится в интервале $[0, 1]$. Если степень достоверности велика, то доминирует критерий максимального математического ожидания выигрыша, в противном случае – ММ-критерий

$$W_i = u \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j + (1-u) \min_j a_{ij} \quad (7)$$

Платёжная матрица дополняется столбцом, коэффициенты которого определяются по формуле:

где u – параметр достоверности информации о вероятностях состояний окружающей среды.

Оптимальной по данному критерию считается та стратегия, в которой значение W_i максимально:

$$W = \max W_i$$

Данный критерий применим в следующем случае:

1. Имеется информация о вероятностях состояний окружающей среды, однако эта информация получена на основе относительно небольшого числа наблюдений и может измениться;
2. Принятое решение теоретически допускает бесконечно много реализаций;
3. При малом числе реализации допускается некоторый риск.

Практическая часть:

Задание 13.1

В матрице:

	S1	S2	S3
P _j	0,7	0,2	0,1
A1	20+N	18	15-N
A2	26	17+N/2	9
A3	40-N	16	N-1

где N – номер Вашей фамилии в списке студентов группы,

определить оптимальные стратегии и значения выигрышей при выборе оптимальных стратегий по каждому из критериев, указанных в теоретической части данного занятия.

Задание 13.2

Разработайте компьютерную программу, выполняющую следующие функции:

1. Ввод коэффициентов платёжной матрицы статистической игры, значений вероятностей состояний окружающей среды, значений коэффициента пессимизма и параметра достоверности информации о вероятностях состояний окружающей среды (по вариантам, предложенным преподавателем).

2. Определение оптимальных стратегий по каждому из критериев, указанных в теоретической части данного занятия.
3. Вывод информации о наименованиях оптимальных стратегий и значениях выигрышей при выборе оптимальной стратегии по каждому критерию.

Перечень литературы необходимый для освоения дисциплины

Основная литература:

1. Киздермишов, А. А. Актуальные вопросы защиты информации : учебное пособие / А. А. Киздермишов, А. В. Шопин. — Майкоп : АГУ, 2018. — 108 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/146128>
2. Технологии обеспечения безопасности информационных систем : учебное пособие : [16+] / А. Л. Марухленко, Л. О. Марухленко, М. А. Ефремов [и др.]. — Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2021. — 210 с. : ил., схем., табл. — Режим доступа: по подписке. — URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=598988>

Дополнительная литература:

1. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике. — М.: ЮНИТИ, 2000 .- 407 с.
2. Матюхина Е.Н. и др. Методические указания к лабораторным работам по дисциплине “ Теория принятия решений”. — М.: МГАПИ, 2003. — 17 с.
3. Заложнев А.Ю. Прикладные модели и методы внутрифирменного управления М.: ИПУ РАН, 2003. — 167 с.
4. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. — М.: Логос, 2000.8.2. Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)