

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ
по дисциплине «Математический анализ»
для студентов направления подготовки
10.03.01 Информационная безопасность
Направленность (профиль)
«Организация и технологии защиты информации (по отрасли или в сфере
профессиональной деятельности)»

Ставрополь, 2026 г.

ВВЕДЕНИЕ

1. Цель и задачи освоения дисциплины (модуля)

Целью изучения дисциплины «Математический анализ» является научное обоснование, фундаментальных понятий: теории комплексных и вещественных чисел; основных методов вычисления пределов, производных, неопределенных, определенных интегралов, рядов; обучение методам работы с непрерывными функциями; методам дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной; основам теории числовых и функциональных рядов, а также приобретение набора общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 10.03.01 Информационная безопасность.

Задачами дисциплины являются:

- Расширение и углубление знаний, умений и навыков, определяемых содержанием базовых дисциплин.
- Умение проводить обработку и анализ полученных результатов при проведении экспериментов по заданной методике.
- Формирование исследовательской позиции и исследовательского поведения
- Развитие мыслительных операций.
- Воспитание математической и профессиональной культуры.
- Обучение решению учебных и жизненных проблем путем анализа информации.
- Расширение математического кругозора студентов.

2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю), соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов

ОПК-3 Способен использовать необходимые математические методы для решения задач профессиональной деятельности	ИД-1 ОПК-3 обеспечивает выполнение проекта в соответствии с установленными целями, сроками и затратами, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений, в том числе с использованием цифровых инструментов.	Умеет обеспечивать выполнение проекта в соответствии с установленными целями, сроками и затратами, исходя из действующих правовых норм, имеющихся ресурсов и ограничений, в том числе с использованием цифровых инструментов.
---	--	--

	ИД-2 ОПК-3 Оперирует элементами числовых полей, линейных пространств, линейными операторами, матрицами, векторами, линейными и нелинейными геометрическими объектами; решает системы линейных уравнений; применяет алгебраические методы для решения геометрических задач; применяет алгебраические и геометрические методы для решения прикладных задач, а так же производит оценку качества полученных решений; демонстрирует способность к абстракции, в том числе умение логически развивать отдельные формальные теории и устанавливать связь между ними.	Уверенно оперирует элементами числовых полей, линейных пространств, линейными операторами, матрицами, векторами, линейными и нелинейными геометрическими объектами; решает системы линейных уравнений; применяет алгебраические методы для решения геометрических задач; применяет алгебраические и геометрические методы для решения прикладных задач, а так же производит оценку качества полученных решений; демонстрирует способность к абстракции, в том числе умение логически развивать отдельные формальные теории и устанавливать связь между ними
	ИД-3 ОПК-3 Способен использовать математические методы и программные технологии работы с алгебраическими структурами для решения задач профессиональной деятельности.	В совершенстве демонстрирует способность использовать математические методы и программные технологии работы с алгебраическими структурами для решения задач профессиональной деятельности.

ПЛАНЫ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие №1-5.

Тема: Предмет математического анализа. Множества и операции над ними.

Действительная функция действительного аргумента

Предел числовой последовательности и его геометрический смысл

Формируемые компетенции: ОПК-3.

Предисловие

Раздел «Введение в анализ» включен в учебную программу курса математического анализа, который изучают студенты физико-математического факультета очной и заочной форм обучения.

Данный раздел изучается студентами первого курса. Поэтому важно помочь им в самостоятельной работе при изучении данного раздела. Прочное усвоение «Введение в анализ» является одним из условий успешного изучения всего курса математического анализа.

С целью облегчения изучения раздела «Введение в анализ», в методическом указании по каждой теме даются краткие теоретические пояснения, приводятся решения типовых задач, что помогает при решении индивидуальных заданий, варианты которых даны в данном методическом указании.

1.1 Область определения функции

При нахождении области определения элементарной функции надо обращать внимание на следующие моменты:

- 1) дробные выражения определены только для тех значений, при которых знаменатель отличен от нуля;
- 2) радикалы четной степени определены только для тех значений x , при которых подкоренное выражение неотрицательно;
- 3) трансцендентные функции $\log_a x$, $tg x$, $ctg x$, $arcsin x$, $arccos x$ определены соответственно при следующих значениях аргумента x : функция $\log_a x$ определена для $0 < x < \infty$;

$tg x$ определен на всей числовой оси, исключая точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, ($n \in Z$); $ctg x$ определен на всей числовой оси, исключая точки $x = \pi n$, ($n \in Z$), обратные тригонометрические функции $arcsin x$, $arccos x$ определены для $-1 \leq \tilde{d} \leq 1$.

Если аналитическое выражение функции представляет собой алгебраическую сумму нескольких слагаемых или произведение нескольких сомножителей, то область определения функции находится как пересечение областей определения всех слагаемых или всех сомножителей.

Пример. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{9 - x^2} + \lg(x - 1) - \arcsin(x - 1)$$

Решение. Находим области определения для каждого слагаемого в отдельности.

Выражения $\sqrt{9 - x^2}$, $\lg(x - 1)$, $\arcsin(x - 1)$ имеют смысл соответственно при $|x| \leq 3$, $x > 1$, $0 \leq \tilde{d} \leq 2$. Область определения данной функции есть пересечение полученных трех областей. Имеем

$$[-3,3] \cap]-\infty, \infty[\cap [0,2] =]1,2].$$

Геометрическая интерпретация дана на рис.1.

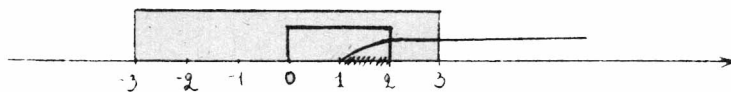


Рис.1

Ответ: $1 < \tilde{\sigma} \leq 2$ или $\tilde{\sigma} \in]1,2]$.

1.2. Предел последовательности

Для того, чтобы доказать, что последовательность $\{\tilde{\sigma}_n\}$ имеет пределом число a , надо доказать следующее: каково бы ни было положительное число ε (в том числе сколь угодно малое), для него найдется такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что $|\tilde{\sigma}_n - a| < \varepsilon$ для всех $n > N$.

Пример. Пользуясь определением предела числовой последовательности, доказать, что последовательность

$$\{\tilde{\sigma}_n\} = \left\{ \frac{2n-1}{4n+1} \right\}$$

имеет своим пределом число $1/2$. Указать, для каких значений n величина $\left| \frac{2n-1}{4n+1} - \frac{1}{2} \right|$ меньше $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Имеем

$$\left| \tilde{\sigma}_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n-1}{4n+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{2(4n+1)} < \frac{3}{8n}$$

Если n таково, что $\frac{3}{8n} < \varepsilon$, где ε – любое положительное число то $\left| \tilde{\sigma}_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$. Поэтому в качестве N можно взять любое число, удовлетворяющее неравенству $N > \frac{3}{8\varepsilon}$, например,

$N = \left\lceil \frac{3}{8\varepsilon} \right\rceil$, т.е. целую часть числа $\frac{3}{8\varepsilon}$. Тогда

$$\left| \tilde{\sigma}_n - \frac{1}{2} \right| < \frac{3}{8n} < \frac{3}{8N} < \frac{3 \cdot 8}{8 \cdot 3} \varepsilon = \varepsilon.$$

При $\varepsilon = 0,0001$ число N можно взять равным $N = \left\lceil \frac{3}{8 \cdot 10^{-3}} \right\rceil = 375$. Это значит, что все члены последовательности, начиная с 375, содержатся в интервале $\left[\frac{1}{2} - 0,001; \frac{1}{2} + 0,001 \right]$.

1.3. Предел функции

Используем определение предела функции по Коши. Для того, чтобы доказать, что функция $y = f(x)$ имеет предел в точке $x = a$, равный A , надо взять произвольное число $\varepsilon > 0$ и показать, что для него найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, при котором из неравенств $0 < |x - a| < \delta$ будет следовать неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пример 1. Пользуясь определением предела, доказать, что функция $f(x) = 3x^2 - 2$ имеет в точке $x = 2$ предел, равный 10.

Решение. Преобразуем выражение $|f(x) - 10|$ следующим образом:

$$|f(x)| = |3x^2 - 2 - 10| = |3x^2 - 12| = 3|x^2 - 4| = 3|x - 2||x + 2|.$$

Оценим сверху это выражение внутри любого отрезка, содержащего точку $x = 2$ и содержащегося в области определения функции например:

$x \in [1, 3] \subset (-\infty, +\infty)$. Наибольшее значение $|x + 2|$ на отрезке $[1, 3]$ равно 5. Справедливо соотношение

$$|f(x) - 10| = 3|x - 2||x + 2| < 3 \cdot 5|x - 2| = 15|x - 2|.$$

Отсюда ясно, что за $\delta(\varepsilon)$ можно взять $\varepsilon/15$, так как $|f(x) - 10| < 15 \cdot \frac{\varepsilon}{15} = \varepsilon$ для всех

$|x - 2| < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{15}$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдено $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{15}$ и тем самым показано, что $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2) = 10$.

Пример 2. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^3 + 1} = 3$.

Решение. Имеем

$$|f(x) - 3| = \left| \sqrt{\tilde{\delta}^3 + 1} - 3 \right| = \frac{\tilde{\delta}^3 + 1 - 9}{\sqrt{\tilde{\delta}^3 + 1} + 3} = \frac{\tilde{\delta}^3 - 8}{\sqrt{\tilde{\delta}^3 + 1} + 3} = \frac{(\tilde{\delta} - 2)(\tilde{\delta}^2 + 2\tilde{\delta} + 4)}{\sqrt{\tilde{\delta}^3 + 1} + 3}.$$

Оценим сверху последнее выражение на отрезке $[0, 3]$, содержащем точку $x = 2$. Так как $\tilde{\delta}^2 + 2\tilde{\delta} + 4 \leq 19$, а $\sqrt{\tilde{\delta}^3 + 1} + 3 > 3$ на отрезке $[0, 3]$, получим

$$|f(x) - 3| = \frac{|\tilde{\delta} - 2|(\tilde{\delta}^2 + 2\tilde{\delta} + 4)}{\sqrt{\tilde{\delta}^3 + 1}} < |\tilde{\delta} - 2| \cdot \frac{19}{3}.$$

Отсюда видно, что в качестве $\delta(\varepsilon)$ можно взять $\frac{3}{19}\varepsilon$ т.е. $|f(x) - 3| < \varepsilon$ при $\delta(\varepsilon) = \frac{3}{19}\varepsilon$.

Действительно,

$$|f(x)| < \frac{3}{19}|\tilde{\delta} - 2| < \frac{19}{3} \cdot \frac{3}{19}\varepsilon = \varepsilon \text{ при } |\tilde{\delta} - 2| < \frac{3}{19}\varepsilon. \text{ Таким образом, согласно определению}$$

предела функции по Коши, $\lim_{\tilde{\delta} \rightarrow 2} \sqrt{\tilde{\delta}^3 + 1} = 3$.

1.4. Вычисление пределов

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Но такая подстановка часто приводит к неопределенным выражениям вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 * \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$. Нахождением предела функции в таком случае называют раскрытие неопределенностей. При раскрытии неопределенностей, прежде чем перейти к пределу, необходимо провести преобразование данного выражения.

Пример 1. Вычислить $\lim_{\tilde{\delta} \rightarrow 1/2} \frac{2\tilde{\delta}^2 - 7\tilde{\delta} + 3}{8\tilde{\delta}^3 - 1}$.

Решение. Так как при подстановке $x = \frac{1}{2}$ в числитель и знаменатель они обращаются в нуль, то мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Разложим числитель и знаменатель на множители и перейдем к пределу. В полученном выражении будем иметь

$$\lim_{\tilde{\delta} \rightarrow 1/2} \frac{2\tilde{\delta}^2 - 7\tilde{\delta} + 3}{8\tilde{\delta}^3 - 1} = \lim_{\tilde{\delta} \rightarrow 1/2} \frac{2(\tilde{\delta} - 1/2)(\tilde{\delta} - 3)}{2(\tilde{\delta} - 1/2)(4\tilde{\delta}^2 + 2\tilde{\delta} + 1)} = \lim_{\tilde{\delta} \rightarrow 1/2} \frac{\tilde{\delta} - 3}{4\tilde{\delta}^2 + 2\tilde{\delta} + 1} = \frac{1/2 - 3}{4 * 1/4 + 1 + 1} = -\frac{5}{6}$$

В этом примере неопределенность $\frac{0}{0}$ при $x \rightarrow 1/2$ уничтожена после сокращения на $(x - 1/2)$.

В общем случае для того, чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ дробно-рациональной функции, нужно в числителе выделить сомножитель вида $(\tilde{o} - \tilde{o}_0)^{\hat{e}}$, а в знаменателе $(\tilde{o} - \tilde{o}_0)^{\hat{l}}$, где $\kappa, l > 0$ – целые числа. Далее нужно сократить числитель и знаменатель на выражение $(\tilde{o} - \tilde{o}_0)^m$, где $m = \min(\kappa, l)$, и воспользоваться формулой

$$\lim_{\tilde{o} \rightarrow \tilde{o}_0} \frac{(\tilde{o} - \tilde{o}_0)^{\hat{e}}}{(\tilde{o} - \tilde{o}_0)^{\hat{l}}} = \begin{cases} \infty, & \hat{e} < \hat{l}; \\ 1, & \hat{e} = \hat{l}; \\ 0, & \hat{e} > \hat{l} \end{cases}$$

Метод выделения множителя $(\tilde{o} - \tilde{o}_0)$ применяется и при раскрытии неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, содержащих иррациональные выражения. Один способ выделения множителя $(\tilde{o} - \tilde{o}_0)$ связан с преобразованием домножения на сопряженное выражение.

Пример 2. Вычислить $\lim_{\tilde{o} \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{\tilde{o}}}{4 - \sqrt{2\tilde{o} - 2}}$.

Решение. Данный пример представляет из себя неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель на произведение $(3 + \sqrt{\tilde{o}})(4 + \sqrt{2\tilde{o} - 2})$, а затем сократим на множитель $(9 - \tilde{o})$. Получим

$$\lim_{\tilde{o} \rightarrow 9} \frac{(3 - \sqrt{\tilde{o}})(3 + \sqrt{\tilde{o}})(4 + \sqrt{2\tilde{o} - 2})}{(4 - \sqrt{2\tilde{o} - 2})(3 + \sqrt{\tilde{o}})(4 + \sqrt{2\tilde{o} - 2})} = \lim_{\tilde{o} \rightarrow 9} \frac{(9 - \tilde{o})(4 + \sqrt{2\tilde{o} - 2})}{2(9 - \tilde{o})(3 + \sqrt{\tilde{o}})} = \lim_{\tilde{o} \rightarrow 9} \frac{(4 + \sqrt{2\tilde{o} - 2})}{2(3 + \sqrt{\tilde{o}})} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Пример 3. Вычислить $\lim_{\tilde{o} \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\tilde{o}^3 + 5} + \sqrt{\tilde{o}}}{\sqrt[4]{\tilde{o}^2 + 3\tilde{o}} - \tilde{o}^2}$

Данный пример представляет из себя неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Поделим числитель и знаменатель на старшую степень x , содержащуюся в них. В данном случае это $\tilde{o}^2$. Будем иметь

$$\lim_{\tilde{\delta} \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\tilde{\delta}^3 + 5} + \sqrt{\tilde{\delta}}}{\sqrt[4]{\tilde{\delta}^2 + 3\tilde{\delta}} - \tilde{\delta}^2} = \lim_{\tilde{\delta} \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{\tilde{\delta}^3 + 5}}{\tilde{\delta}^2} + \frac{\sqrt{\tilde{\delta}}}{\tilde{\delta}^2}}{\frac{\sqrt[4]{\tilde{\delta}^2 + 3\tilde{\delta}}}{\tilde{\delta}^2} - \frac{\tilde{\delta}^2}{\tilde{\delta}^2}} = \lim_{\tilde{\delta} \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{\tilde{\delta}^3 + 5}{\tilde{\delta}^4}} + \sqrt{\frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^4}}}{\sqrt[4]{\frac{\tilde{\delta}^2 + 3\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^8}} - 1} = \lim_{\tilde{\delta} \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{\tilde{\delta}} + \frac{5}{\tilde{\delta}^4}} + \sqrt{\frac{1}{\tilde{\delta}^3}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{\tilde{\delta}^6} + \frac{3}{\tilde{\delta}^7}} - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$

В общем случае, когда переменная величина x бесконечно велика, а дробь представляет из себя неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, данный метод пригоден, если дробь можно представить в

виде $\frac{\tilde{\delta}^l h(\tilde{\delta})}{\tilde{\delta}^\beta g(\tilde{\delta})}$ и существует конечный предел $\lim_{\tilde{\delta} \rightarrow \infty} \frac{h(\tilde{\delta})}{g(\tilde{\delta})}$ (l и β - вещественные числа).

Неопределенность вида $\frac{0}{0}$ встречается также в примерах, решение которых связано с применением первого замечательного предела

$$\lim_{\tilde{\delta} \rightarrow 0} \frac{\sin \tilde{\delta}}{\tilde{\delta}} = 1.$$

Пример 4. Вычислить $\lim_{\tilde{\delta} \rightarrow 4} (4 - \tilde{\delta}) \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \tilde{\delta}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0 \rightarrow \infty$. Сделаем замену $x - 4 = z$, тогда $z \rightarrow 0$ при $\tilde{\delta} \rightarrow 4$. После ряда преобразований при $z \rightarrow 0$ получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, раскрытие которой достигается использованием первого замечательного предела. Проведем тождественные преобразования с учетом равенства $x = z + 4$:

$$(4 - \tilde{\delta}) \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \tilde{\delta} = z \cdot \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{8} (4 + z) \right] = z \cdot \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{8} (4 + z) \right] = z \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} z \right) = z \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} z = \frac{z}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} z}$$

Теперь имеем

$$\lim_{\tilde{\delta} \rightarrow 4} (4 - \tilde{\delta}) \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \tilde{\delta} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} z} = \frac{8}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{8} z \cdot \cos \frac{\pi}{8} z}{\sin \frac{\pi}{8} z} = \frac{8}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \cos \frac{\pi}{8} z = \frac{8}{\pi}$$

Часто для вычисления предела степени, основание которой стремится к единице, а показатель к бесконечности, при $\tilde{\delta} \rightarrow a$ или при $\tilde{\delta} \rightarrow \infty$ используется второй замечательный предел

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^{\delta} = \lim_{L \rightarrow 0} (1 + L)^{1/L} = e$$

Пример 5. Вычислить $\lim_{\delta \rightarrow 4} (3\delta - 11)^{1/(\delta-4)}$.

Для решения данного примера необходимо раскрыть неопределенность вида 1^{∞} . Сделаем замену $x - 4 = y$. Тогда $\delta' \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 4$ и $x = 4 + y$.

Получим

$$\lim_{\delta \rightarrow 4} (3\delta - 11)^{1/(\delta-4)} = \lim_{\delta' \rightarrow 0} [3(4 + \delta') - 11]^{1/\delta'} = \lim_{\delta' \rightarrow 0} (1 + \delta')^{1/\delta'} = e.$$

При вычислении пределов функций часто оказывается полезным использование равенств

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \delta)}{\delta} = 1 ; \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{a^{\delta} - 1}{\delta} = \ln a .$$

Пример 6. Вычислить $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{5^{\delta} - 4^{\delta}}{\delta^2 + \delta}$

Имеем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{5^{\delta} - 4^{\delta}}{\delta^2 + \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{4^{\delta} \left[\left(\frac{5}{4} \right)^{\delta} - 1 \right]}{\delta(\delta + 1)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{4^x}{(\delta + 1)} \ln \frac{5}{4} = \ln \frac{5}{4} .$$

Иногда в примерах, для решения которых нужно раскрыть неопределенность вида 1^{∞} , используется и первый замечательный предел.

Пример 7. Вычислить $\lim_{\delta \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi}{2} \delta \right)^{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} \delta}$

Решение. Сделаем замену $x - 1 = y$. Тогда $x = 1 + y$ и $\delta' \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 1$. Имеем

$$\left(\sin \frac{\pi}{2} \delta \right)^{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} \delta} = \left[\sin \frac{\pi}{2} (1 + \delta') \right]^{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} (1 + \delta')} = \left[\cos \frac{\pi}{2} \delta' \right]^{(-\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2} \delta')^2} = \left[1 + (-1 - \cos \frac{\pi}{2} \delta') \right]^{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2} \delta'}$$

Далее

$$\lim_{\tilde{o} \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi}{2} \tilde{o} \right)^{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} \tilde{o}} = \lim_{\tilde{o} \rightarrow 0} \left[\left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{4} \tilde{o} \right)^{-\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4} \tilde{o}}} \right]^{-\sin^2 \frac{\pi}{4} \tilde{o} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2} \tilde{o}} = \lim_{\tilde{o} \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{4} y \cdot \cos^2 \frac{\pi}{2} y}{\sin^2 \frac{\pi}{2} y} =$$

$$\lim_{\tilde{o} \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2} y}{\cos^2 \frac{\pi}{4} y} = \frac{1}{4}$$

1.5. Непрерывность функции

При исследовании функции на непрерывность следует учесть, что элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках, где она не определена. Если функция задана несколькими аналитическими выражениями для различных интервалов изменения аргумента, то она может иметь разрывы и в тех, где меняется ее аналитическое выражение.

Пример 1. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{\tilde{o} - 8}{\tilde{o}^2 - 11\tilde{o} + 24}$ и построить график.

Решение. Точками разрыва в данном случае могут быть точки, где знаменатель обращается в нуль, т.е. $x = 8$ и $x = 3$. В точке $x = 8$ функция $f(x)$ не определена, так как при подстановке $x = 8$ в дробь имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Вычислим предел функции $f(x)$ при $\tilde{o} \rightarrow 8$

$$\lim_{\tilde{o} \rightarrow 8} \frac{\tilde{o} - 8}{\tilde{o}^2 - 11\tilde{o} + 24} = \lim_{\tilde{o} \rightarrow 8} \frac{1}{\tilde{o} - 3} = \frac{1}{5}$$

Следовательно, точка $x = 8$ является точкой устранимого разрыва. Исследуем точку $x = 3$. Для этого находим пределы функции $f(x)$ при $\tilde{o} \rightarrow 3 + 0$ и $\tilde{o} \rightarrow 3 - 0$. Получаем

$$\lim_{\tilde{o} \rightarrow 3-0} \frac{\tilde{o} - 8}{\tilde{o}^2 - 11\tilde{o} + 24} = \lim_{\tilde{o} \rightarrow 3-0} \frac{\tilde{o} - 8}{(\tilde{o} - 8)(\tilde{o} - 3)} = -\infty$$

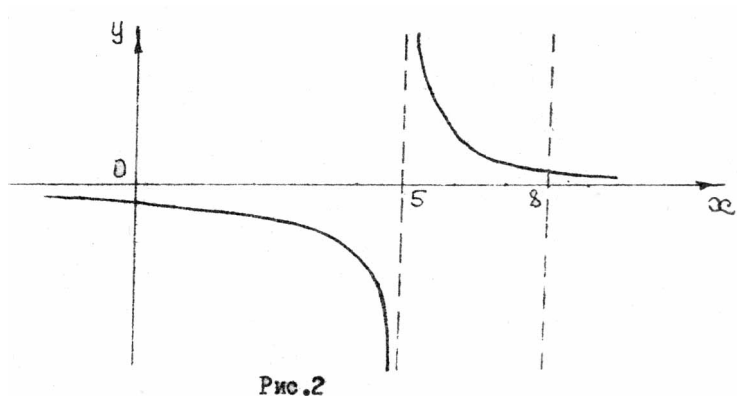
$$\lim_{\tilde{o} \rightarrow 3+0} \frac{\tilde{o} - 8}{\tilde{o}^2 - 11\tilde{o} + 24} = \lim_{\tilde{o} \rightarrow 3+0} \frac{\tilde{o} - 8}{(\tilde{o} - 8)(\tilde{o} - 3)} = +\infty$$

Делаем вывод, что точка $x = 3$ является точкой бесконечного разрыва. Для построения графика вычислим пределы функции при $\tilde{o} \rightarrow \pm\infty$ и найдем точки пересечения графика с осями координат. При $x = 0$ и $x = 1$ значения y соответственно равны $-\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{2}$. Имеют место равенства

$$\lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\sigma} - 8}{\tilde{\sigma}^2 - 11\tilde{\sigma} + 24} = +0;$$

$$\lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow -\infty} \frac{\tilde{\sigma} - 8}{\tilde{\sigma}^2 - 11\tilde{\sigma} + 24} = -0$$

График функции изображен на рис.2.



Пример 2. Найти точки разрыва и исследовать их характер для $f(x) = a^{\frac{2}{4-\tilde{\sigma}}}$. Построить график.

Решение. Исследуем точку разрыва $x = 4$. Так как

$$\lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow 4-0} \frac{2}{4-\tilde{\sigma}} = \infty ; \quad \lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow 4+0} \frac{2}{4-\tilde{\sigma}} = -\infty,$$

то

$$\lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow 4-0} a^{\frac{2}{4-\tilde{\sigma}}} = \infty ; \quad \lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow 4+0} a^{\frac{2}{4-\tilde{\sigma}}} = 0$$

Поэтому $x = 4$ есть точка бесконечного разрыва. Чтобы построить график, вычислим пределы функции $f(x)$ при $\tilde{\sigma} \rightarrow \pm\infty$.

$$\lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow +\infty} a^{\frac{2}{4-\tilde{\sigma}}} = 1 ; \quad \lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow -\infty} a^{\frac{2}{4-\tilde{\sigma}}} = 1.$$

Отметим, что при $x = 0$ значение $\delta = \sqrt{a} \approx 1,6$. График функции изображен на рис. 3.

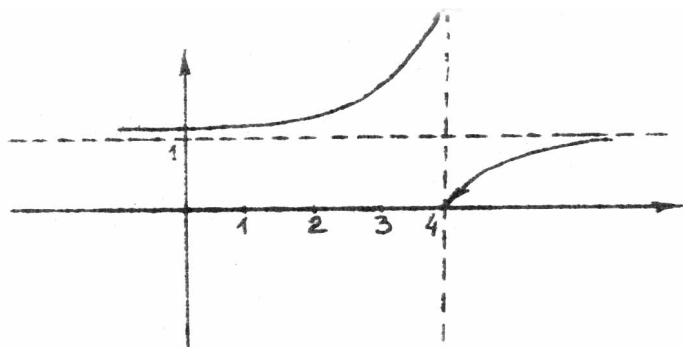


Рис. 3

Пример 3. Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(\delta) = \begin{cases} 3^{-\delta}, & \delta \leq -1; \\ 2, & -1 < \delta \leq 0; \\ 1 + \cos \delta, & \delta > 0. \end{cases}$$

Решение. Внутри каждого из трех промежутков $]-\infty; -1[$, $]-1, 0[$, $]0, \infty[$, соответствующие им функции определены и непрерывны. Остается исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность только в точках $\delta_1 = -1$ и $\delta_2 = 0$, в которых “стыкутся” графики функций, составляющих $f(x)$. Исследуем точку $\delta_1 = -1$. Имеем $\lim_{\delta \rightarrow -0} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow -1-0} 3^{-\delta} = 3$. Так как $f(x)=2$ при $-1 < x < 0$, то $\lim_{\delta \rightarrow -1+0} f(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow -1+0} 2 = 2$. Односторонние пределы конечны, но не равны между собой, поэтому $x = -1$ есть точка разрыва первого ряда. В ней функция претерпевает скачок, равный -1 . Исследуя точку $\delta_2 = 0$. Справедливы равенства:

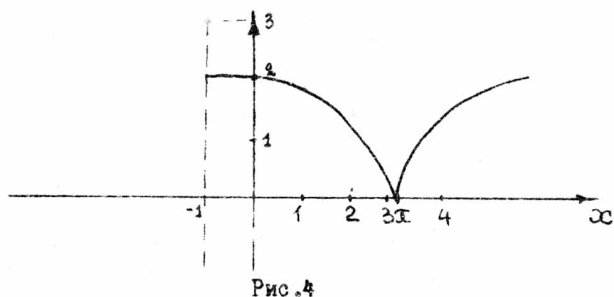
$$\lim_{\delta \rightarrow -0} f(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow -0} 2 = 2;$$

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} f(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow +0} (1 + \cos \delta) = 2.$$

Односторонние пределы в точке $\delta_2 = 0$ равны. Поэтому точка δ_2 есть точка непрерывности функции $f(x)$ и

$$f(0) = \lim_{\delta \rightarrow -0} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow +0} f(\delta) = 2.$$

График функции имеет вид, представленный на рис. 4



4.4. Установить, в каких точках и какого рода разрывы имеют следующие функции. Построить графики данных функций.

Вариант 1

$$a) y = \frac{\tilde{o} + 4}{\tilde{o}^2 + 9\tilde{o} + 20}; \quad a) y = 6^{\frac{1}{\tilde{o}-5}}; \quad a) y = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \leq 0; \\ x^2 + 1 & \text{при } 0 < x < 1; \\ x & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

Вариант 2

$$a) y = \frac{x-1}{x^2+x-2}; \quad a) y = 4^{\frac{1}{3-\tilde{o}}}; \quad a) y = \begin{cases} -\frac{\tilde{o}}{3} & \text{при } \tilde{o} \leq 0; \\ \sin x & \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ x - \frac{\pi}{2} & \text{при } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вариант 3

$$a) y = \frac{1-4x}{x^2-4x-5}; \quad a) y = 7^{\frac{1}{\tilde{o}-1}}; \quad a) y = \begin{cases} \tilde{o}^2 & \text{при } \tilde{o} \neq 0; \\ 2 & \text{при } \tilde{o} = 0. \end{cases}$$

Вариант 4

$$a)y = \frac{1+4x}{x^2-3x-10};$$

$$\acute{a})\acute{o} = 6^{\frac{1}{\tilde{o}+4}};$$

$$\hat{a})\acute{o} = \begin{cases} \sqrt{1-\tilde{o}} & \ddot{o} \leq 0; \\ \operatorname{tg} x & \ddot{o} > 0 & 0 < x < \frac{\pi}{4}; \\ 1 & \ddot{o} > 0 & x > \frac{\pi}{4}; \\ 0 & \ddot{o} > 0 & x = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Вариант 5

$$a)y = \frac{x-1}{x^2+2x-3};$$

$$\acute{a})\acute{o} = 6^{\frac{1}{4-\tilde{o}}};$$

$$\hat{a})\acute{o} = \begin{cases} 2\tilde{o}^2 & \ddot{o} \leq 0; \\ \cos x & \ddot{o} > 0 & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ x - \frac{\pi}{2} & \ddot{o} > 0 & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Вариант 6

$$\acute{a})\acute{o} = \frac{1+5\tilde{o}}{\tilde{o}^2-8\tilde{o}+15};$$

$$\acute{a})\acute{o} = 8^{\frac{1}{4-\tilde{o}}};$$

$$\acute{o} = \begin{cases} \tilde{o}+1 & \ddot{o} \leq 0; \\ \tilde{o}^2 & \ddot{o} > 0 & 0 < x < 2; \\ 2 & \ddot{o} > 0 & x = 2; \\ \frac{1}{2}\tilde{o}+3 & \ddot{o} > 0 & x > 2. \end{cases}$$

Вариант 7

$$\dot{a}) \acute{o} = \frac{\tilde{o} - 2}{\tilde{o}^2 + \div - 6};$$

$$\acute{a}) \acute{o} = 2^{\frac{1}{\tilde{o}+5}};$$

$$\acute{o} = \begin{cases} \tilde{o}^2 + 1 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x < 0; \\ 1 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & 0 < x \leq 2; \\ \tilde{o} - 2 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x > 2. \end{cases}$$

Вариант 8

$$\dot{a}) \acute{o} = \frac{1 - 7\tilde{o}}{\tilde{o}^2 - \tilde{o} - 12};$$

$$\acute{a}) \acute{o} = 9^{\frac{1}{\tilde{o}-2}};$$

$$y = \begin{cases} x + 1 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x < 0; \\ 2 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x = 0; \\ x^2 + 1 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & 0 < x < 1; \\ 1 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x \geq 1. \end{cases}$$

Вариант 9

$$\dot{a}) \acute{o} = \frac{\tilde{o} + 2}{\tilde{o}^2 + \tilde{o} - 2};$$

$$\acute{a}) \acute{o} = 7^{\frac{1}{\tilde{o}-3}};$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 1 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & \tilde{o} \leq 0; \\ x & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & 0 < x < 2; \\ 2x - 2 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x \geq 2. \end{cases}$$

Вариант 10

$$\dot{a}) \acute{o} = \frac{8\tilde{o} + 3}{\tilde{o}^2 - 3\tilde{o} - 4};$$

$$\acute{a}) \acute{o} = 3^{\frac{1}{\tilde{o}+6}};$$

$$y = \begin{cases} -2x & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x < 0; \\ 1 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x = 0; \\ \sqrt{x} & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & 0 < x < 4; \\ 3 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x \geq 4. \end{cases}$$

Практическое занятие № 6-10.

Тема: Свойства сходящихся последовательностей

Бесконечно малые и бесконечно большие числовые последовательности
и связь между ними

Теоремы о пределах числовых последовательностей

Формируемые компетенции: ОПК-3.

Тема ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Изучение теоретического материала должно сопровождаться практическим применением его. Поэтому мы решим ряд типичных примеров и задач по всей теме и дадим упражнения для самостоятельной работы.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

а) $y = \sin(3x + 2)$;

б) $y = a^{3x}, a > 0$;

в) $y = \sqrt[3]{x}$;

г) $y = \frac{1}{x^2 + 2}$;

д) $y = x^\alpha, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$;

е) $y = \ln 2x$.

Чтобы вычислить производную функции $y = f(x)$ в некоторой точке x_0 , исходя из ее определения, необходимо:

1/ значению аргумента $x = x_0$ дать некоторое приращение и получить новое значение аргумента $x = x_0 + \Delta x$;

2/ найти соответствующее приращение функции

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

3/ составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приращения функции к вызывающему его приращению аргумента;

4/ вычислить предел этого отношения при $\Delta \tilde{o} \rightarrow 0$, если он существует.

РЕШЕНИЕ. а/ Дадим значению аргумента x_0 приращение Δx и получим $\tilde{o} = \tilde{o}_0 + \Delta \tilde{o}$. Тогда соответствующее приращение функции примет вид:

$$\Delta y = \sin(3(x_0 + \Delta x) + 2) - \sin(3x_0 + 2) =$$

$$= 2 \sin \frac{3\Delta x}{2} \cos(3x_0 + 2 + \frac{3\Delta x}{2})$$

Разделим обе части этого равенства на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$.

Получим:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\cos(3x_0 + 2 + \frac{3\Delta x}{2}) \frac{2 \sin \frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x}]$$

Заменим бесконечно малую величину $\sin \frac{3\Delta x}{2}$ эквивалентной бесконечно малой $\frac{3\Delta x}{2}$ и воспользуемся тем, что в силу непрерывности косинуса

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(3x_0 + 2 + \frac{3\Delta x}{2}) = \cos(3x_0 + 2).$$

Получим:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(3x_0 + 2 + \frac{3\Delta x}{2}) = 3 \cos(3x_0 + 2).$$

Таким образом,

$$(\sin(3x + 2))' = 3 \cos(3x + 2).$$

б/ Дадим x_0 приращение Δx . Тогда получим:

$$\Delta y = a^{3(x_0 + \Delta x)} - a^{3x_0} = a^{3x_0} (a^{3\Delta x} - 1).$$

Разделим обе части этого равенства на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{3x_0} (a^{3\Delta x} - 1)}{\Delta x} = 3a^{3x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{3\Delta x} - 1}{3\Delta x} = 3a^{3x_0} \ln a,$$

$$(a^{3x})' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3a^{3x_0} \ln a,$$

так как $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$

Остальные примеры решить самостоятельно.

Напомним основные правила дифференцирования:

$$(\tilde{n})' = 0,$$

$$(uv)' = u'v + uv',$$

$$(u + v)' = u' + v', \quad \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

$$(cu)' = cu',$$

где c – постоянная, u и v – функции от x , имеющие производные.

Применение таблицы производных и правил дифференцирования.

2. Найти y' , если $y = 5\sqrt{x} + \frac{2}{x^5}$.

РЕШЕНИЕ. Перепишем данное выражение. Используя дробные и отрицательные показатели:

$$y = 5x^{\frac{1}{4}} + 2x^{-5}.$$

Применяя правила дифференцирования суммы, вынесения постоянной за знак производной и формулы производной степенной функции, получаем:

$$y' = \frac{5}{4}x^{-\frac{3}{4}} - 10x^{-6},$$

или, после очевидных преобразований,

$$y' = \frac{5}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{10}{x^6}.$$

3. Найти y' , если $y = x^5 \cos x$

РЕШЕНИЕ. По правилу дифференцирования произведения получаем:

$$y' = 5x^4 \cos x + x^5 (-\sin x),$$

или

$$y' = 5x^4 \cos x - x^5 \sin x.$$

4. Найти y' , если $y = \arctg x / x^3$

Применяя правило дифференцирования дроби и формулы из таблицы производных основных элементарных функций, находим:

$$y' = \frac{\frac{1}{1+x^2}x^3 - \arctg x \cdot 3x^2}{x^6}$$

или, после очевидных преобразований,

$$y' = \frac{x - 3(1+x^2)\arctg x}{x^4(1+x^2)}.$$

5. Найти производные от следующих функций:

а/ $y = x^5 \ctg x$;

б/ $y = 3^x \arcsin x$;

в/ $y = \frac{\arccos x}{1+x^2}$;

г/ $y = \frac{\tg x}{\sqrt[7]{x^2}}$;

д/ $y = e^x \ln x$;

е/ $y = e^x (\sin x - \cos x)$.

Производные сложных функций

Знания формул и правил дифференцирования недостаточно для нахождения производных сложных функций, например, таких как $y = \sqrt[3]{\sin x}$, $y = e^{\arctg^2 x}$ и т.д. В подобных случаях пользуются более общими формулами дифференцирования, основанными на теореме о производной функции от функции /суперпозиции двух функций/. Напомним её.

Пусть $y = f(\varphi(x))$ - сложная функция, т.е. $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. Если для соответствующих друг другу значений x и u существуют производные $f'(u)$ и $u' = \varphi'(x)$, то существует и производная от y по x , причём

$$y' = f'(u) \cdot u'.$$

6. Найти y' , если $y = (x^3 + 5x + 3)^4$.

РЕШЕНИЕ. Полагая $u = x^3 + 5x + 3$, имеем $y = u^4$. По формуле дифференцирования сложной функции получим:

$$y' = 4u^3 u' = 4u^3 (3x^2 + 5).$$

или, окончательно заменяя u на его значение, имеем:

$$y' = 4(x^3 + 5x + 3)^3 \cdot (3x^2 + 5).$$

Следует заметить, что к такой подробной записи прибегают только в самой начальной стадии освоения техники дифференцирования, а обычно вспомогательная функция вводится мысленно, что и рекомендуется делать в дальнейшем.

7. Найти y' , если $y = \ln(\operatorname{arctg} x)$.

РЕШЕНИЕ. В данном случае роль u играет $\operatorname{arctg} x$.

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

или

$$y' = \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}.$$

8. Найти y' , если $y = (\arccos \sqrt{x})^5$.

РЕШЕНИЕ. Данная функция состоит из трех суперпозиций. Получаем последовательно:

$$\begin{aligned} y' &= 5(\arccos \sqrt{x})^4 (\arccos \sqrt{x})' = 5(\arccos \sqrt{x})^4 \cdot \left(-\frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-x}}\right) = \\ &= -5(\arccos \sqrt{x})^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}, \end{aligned}$$

или

$$y' = -\frac{5 (\arccos \sqrt{x})^4}{2 \sqrt{x}(1-x)}.$$

9. Найти y' , если $y = 7^{\lg^3(x^2+5x)}$.

РЕШЕНИЕ. При подробной записи будем иметь:

$$\begin{aligned} y' &= 7^{\lg^3(x^2+5x)} \cdot \ln 7 \cdot [\lg^3(x^2+5x)]' = \\ &= 7^{\lg^3(x^2+5x)} \cdot \ln 7 \cdot 3\lg^2(x^2+5x) [\lg(x^2+5x)]' = \\ &= 7^{\lg^3(x^2+5x)} \cdot \ln 7 \cdot 3\lg^2(x^2+5x) \cdot \frac{(x^2+5x)'}{\cos^2(x^2+5x)} = \\ &= 3 \cdot 7^{\lg^3(x^2+5x)} \cdot \ln 7 \cdot \lg^2(x^2+5x) \cdot \frac{2x+5}{\cos^2(x^2+5x)}. \end{aligned}$$

При достаточном навыке следует писать сразу

$$y' = 3 \cdot 7^{\lg^3(x^2+5x)} \cdot \ln 7 \cdot \lg^2(x^2+5x) \cdot \frac{2x+5}{\cos^2(x^2+5x)}.$$

10. Найти y' , если $y = \ln(chx^3) + \frac{1}{2ch^2x}$.

РЕШЕНИЕ. Последовательно получаем:

$$y' = \frac{1}{ch x^3} sh x^3 \cdot 3x^2 + \left(-\frac{ch x sh x}{ch^4 x}\right) = 3th x^3 \cdot x^2 - th x \cdot \frac{1}{ch^2 x},$$

или

$$y' = 3x^2 th x^3 - th x \frac{1}{ch^2 x}.$$

11. Найти производные следующих функций.

а/ $y = \sqrt{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x};$

б/ $y = \sqrt[3]{2e^x + 2^x + 1};$

в/ $y = \arctg \ln x + \ln(\arctg x);$

г/ $y = \ln^5(ctg 3x);$

д/ $y = \sin^3 \arctg \sqrt[5]{1-2^x};$

е/ $y = \arcsin \frac{1-x}{1+x^2};$

ж/ $y = x^5 (\arccos \sqrt{x})^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin \sqrt{x} - 5tgx;$

з/ $y = 2^{\frac{\ln 1}{x}};$

и/ $y = \sin 2x \cdot \sin^3 x \cdot \cos 2x;$

к/ $y = \ln \cos(\sin 3x);$

л/ $y = e^{\arctg^3 \sqrt{x+4}};$

м/ $y = \ln \ln ctgx;$

н/ $y = \sqrt[3]{x^3 + \sqrt{x}}.$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме. **Основная: 1-7**

Практическое занятие № 11-15

Тема Вычисление пределов

Число e и натуральные логарифмы

Предел функции

Формируемые компетенции: ОПК-3

Иногда бывает целесообразно, прежде, чем находить производную от заданной сложной функции, предварительно преобразовать ее так, чтобы процесс дифференцирования упростился. В частности, если приходится вычислять производную от логарифма произведения, дроби, степени или корня, следует провести предварительное преобразование, пользуясь обычными правилами логарифмирования. Во многих случаях оказывается выгодным, прежде чем дифференцировать заданную функцию, взять ее логарифм, определить затем производную от этого логарифма и по производной от логарифма отыскать производную заданной функции. Такой прием называют способом логарифмического дифференцирования.

Таким образом, $y' = y(\ln y)'$.

Этот метод позволяет легко найти производную от сложной функции $y = u^v$, где u и v - функции аргумента x . А именно:

$$y' = (u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'. \quad (*)$$

Функцию вида u^v часто называют показательно-степенной.

12. Найти y' , если $y = \ln \sqrt[4]{\frac{x^3(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}}.$

РЕШЕНИЕ. Предварительное преобразование значительно упрощает нахождение производной, а именно:

$$y = \ln \sqrt[4]{\frac{x^3(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}} = \frac{3}{4} \ln x + \frac{1}{4} \ln(x-1) - \frac{1}{8} \ln(x^2+1).$$

Далее находим

$$y' = \frac{3}{4x} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{x}{4(x^2+1)}.$$

13. Найти y' , если $y = \frac{x^3(x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}}$.

РЕШЕНИЕ. В данном случае целесообразнее применить способ логарифмического дифференцирования.

Логарифмируем обе части исходного равенства:

$$\begin{aligned} \ln y &= 3 \ln x + 4 \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln(x-1) = \\ &= \frac{5}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln(x-1) + 4 \ln(x^2+1). \end{aligned}$$

Дифференцируя полученное соотношение, имеем:

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{x^2+1}.$$

Умножая теперь обе части последнего равенства на y и заменяя затем y , получаем:

$$y' = \frac{x^3(x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}} \cdot \left(\frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{x^2+1} \right).$$

14. Найти y' , если $y = (\operatorname{ctg} x)^{x^5}$.

РЕШЕНИЕ. Для показательной-степенной функции необходимо применять метод логарифмического дифференцирования или применять формулу (*)

$$\ln y = x^5 \ln \operatorname{ctg} x;$$

$$\frac{y'}{y} = 5x^4 \ln \operatorname{ctg} x + x^5 \frac{-1}{\operatorname{ctg} \sin^2 x} = 5x^4 \ln \operatorname{ctg} x - \frac{2x^5}{\sin 2x};$$

$$y' = (\operatorname{ctg} x)^{x^5} \cdot \left(5x^4 \ln \operatorname{ctg} x - \frac{2x^5}{\sin 2x} \right).$$

15. Найти производные следующих функций:

а/ $y = \sqrt[5]{x^4 \sqrt{x^2} \sqrt{x}};$

б/ $y = \ln \frac{\sqrt{7} + \operatorname{ctg} \frac{x}{5}}{\sqrt{7} - \operatorname{ctg} \frac{x}{5}};$

в/ $y = \sqrt{\frac{1 - \sin 3x}{1 + \sin 3x}};$

г/ $y = \ln \sqrt{1 + \operatorname{tg}^4 x};$

д/ $y = \frac{\sqrt[4]{x^3 + 3x - 5}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}};$

е/ $y = \ln \frac{(x^7 - 9)^3}{(x^3 + 5)^4};$

ж/ $y = x^9 (x^3 - 1)^{11} (x^5 + 7);$

з/ $y = e^{x^3} \operatorname{tg}^5 x \arccos^2 x;$

и/ $y = x^{\cos x};$

к/ $y = (\sin x)^{\operatorname{arctg} x^2};$

л/ $y = \sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x};$

м/ $y = (1 + x^2)^{\arcsin x}.$

Дифференциалы функций.

Дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал независимого переменного, то есть

$$dy = f'(x)dx.$$

Поэтому для нахождения дифференциала функции достаточно найти производную этой функции и полученное выражение умножить на dx .

Таким образом, техника вычисления дифференциала может быть сведена к технике отыскания производной. Следует заметить, однако, что можно вычислять дифференциалы и непосредственно, не находя предварительно производной, а пользуясь таблицей формул и правил, подобных тем, которые давались для производных, и свойствам инвариантности формы записи дифференциала. Покажем на примерах.

17. Найти дифференциалы от функций:

а/ $y = (1 + \operatorname{tg} x)^7$;

б/ $y = \ln \operatorname{arctg}(\sin x)$.

РЕШЕНИЕ. а/ Первый способ. Воспользуемся формулой

$$dy = y'dx.$$

Находим производную от заданной функции:

$$y' = 7(1 + \operatorname{tg} x)^6 \frac{1}{\cos^2 x}$$

тогда

$$dy = 7(1 + \operatorname{tg} x)^6 \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Второй способ. Находим непосредственно дифференциал:

$$dy = 7(1 + \operatorname{tg} x)^6 d(1 + \operatorname{tg} x) = 7(1 + \operatorname{tg} x)^6 \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

б/ Решаем вторым способом:

$$dy = \frac{d[\operatorname{arctg}(\sin x)]}{\operatorname{arctg}(\sin x)} = \frac{-\frac{1}{1 + \sin^2 x} d(\sin x)}{\operatorname{arctg}(\sin x)} = -\frac{\cos dx}{(1 + \sin^2 x)\operatorname{arctg}(\sin x)}.$$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме. **Основная: 1-7**

Практическое занятие № 16-21

Тема Замечательные пределы

Непрерывность функции

Сравнение бесконечно малых функций

Формируемые компетенции: ОПК-3

1.2 Область определения функции

При нахождении области определения элементарной функции надо обращать внимание на следующие моменты:

4) дробные выражения определены только для тех значений, при которых знаменатель отличен от нуля;

5) радикалы четной степени определены только для тех значений x , при которых подкоренное выражение неотрицательно;

6) трансцендентные функции $\log_a x$, $tg x$, $ctg x$, $\arcsin x$, $\arccos x$ определены соответственно при следующих значениях аргумента x : функция $\log_a x$ определена для $0 < x < \infty$;

$tg x$ определен на всей числовой оси, исключая точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, ($n \in \mathbb{Z}$); $ctg x$

определен на всей числовой оси, исключая точки $x = \pi n$, ($n \in \mathbb{Z}$), обратные тригонометрические функции $\arcsin x$, $\arccos x$ определены для $-1 \leq \tilde{o} \leq 1$.

Если аналитическое выражение функции представляет собой алгебраическую сумму нескольких слагаемых или произведение нескольких сомножителей, то область определения функции находится как пересечение областей определения всех слагаемых или всех сомножителей.

Пример. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{9 - x^2} + \lg(x - 1) - \arcsin(x - 1)$$

Решение. Находим области определения для каждого слагаемого в отдельности.

Выражения $\sqrt{9 - x^2}$, $\lg(x - 1)$, $\arcsin(x - 1)$ имеют смысл соответственно при $|x| \leq 3$, $x > 1$, $0 \leq \tilde{o} \leq 2$. Область определения данной функции есть пересечение полученных трех областей. Имеем

$$[-3, 3] \cap]1, \infty[\cap [0, 2] =]1, 2].$$

Геометрическая интерпретация дана на рис.1.

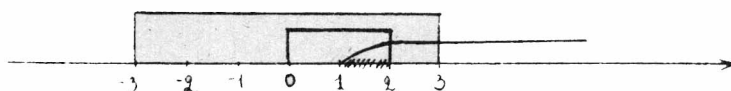


Рис.1

Ответ: $1 < \tilde{o} \leq 2$ или $\tilde{o} \in]1, 2]$.

1.2. Предел последовательности

Для того, чтобы доказать, что последовательность $\{\tilde{o}_n\}$ имеет пределом число a , надо доказать следующее: каково бы ни было положительное число ε (в том числе сколь угодно малое), для него найдется такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что $|\tilde{o}_n - a| < \varepsilon$ для всех $n > N$.

Пример. Пользуясь определением предела числовой последовательности, доказать, что последовательность

$$\{\tilde{o}_n\} = \left\{ \frac{2n-1}{4n+1} \right\}$$

имеет своим пределом число $1/2$. Указать, для каких значений n величина $\left| \frac{2n-1}{4n+1} - \frac{1}{2} \right|$ меньше $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Имеем

$$\left| \tilde{o}_n - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n-1}{4n+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{2(4n+1)} < \frac{3}{8n}$$

Если n таково, что $\frac{3}{8n} < \varepsilon$, где ε – любое положительное число то $\left| \tilde{o}_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$. Поэтому в

качестве N можно взять любое число, удовлетворяющее неравенству $N > \frac{3}{8\varepsilon}$, например, N

$= \left[\frac{3}{8\varepsilon} \right]$, т.е. целую часть числа $\frac{3}{8\varepsilon}$. Тогда

$$\left| \tilde{o}_n - \frac{1}{2} \right| < \frac{3}{8n} < \frac{3}{8N} < \frac{3 \cdot 8}{8 \cdot 3} \varepsilon = \varepsilon.$$

При $\varepsilon = 0,0001$ число N можно взять равным $N = \left[\frac{3}{8 \cdot 10^{-3}} \right] = 375$. Это значит, что все члены

последовательности, начиная с 375, содержатся в интервале $\left[\frac{1}{2} - 0,001; \frac{1}{2} + 0,001 \right]$.

1.3. Предел функции

Используем определение предела функции по Коши. Для того, чтобы доказать, что функция $y = f(x)$ имеет предел в точке $x = a$, равный A , надо взять произвольное число ε

> 0 и показать, что для него найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, при котором из неравенств $0 < |\tilde{\sigma} - a| < \delta$ будет следовать неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Пример 1. Пользуясь определением предела, доказать, что функция $f(x) = 3x^2 - 2$ имеет в точке $x = 2$ предел, равный 10.

Решение. Преобразуем выражение $|f(x) - 10|$ следующим образом:

$$|f(x)| = |3\tilde{\sigma}^2 - 2 - 10| = 3|\tilde{\sigma}^2 - 4| = 3|\tilde{\sigma} - 2||\tilde{\sigma} + 2|.$$

Оценим сверху это выражение внутри любого отрезка, содержащего точку $x = 2$ и содержащегося в области определения функции например:

$2 \in [1, 3] \in (-\infty, +\infty)$. Наибольшее значение $|\tilde{\sigma} + 2|$ на отрезке $[1, 3]$ равно 5. Справедливо соотношение

$$|f(x) - 10| = 3|\tilde{\sigma} - 2||\tilde{\sigma} + 2| < 3 \cdot 5|\tilde{\sigma} - 2| = 15|\tilde{\sigma} - 2|.$$

Отсюда ясно, что за $\delta(\varepsilon)$ можно взять $\varepsilon/15$, так как $|f(x)| < 15 \cdot \frac{\varepsilon}{15} = \varepsilon$ для всех

$|\tilde{\sigma} - 2| < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{15}$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдено $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{15}$ и тем самым показано, что $\lim_{x \rightarrow 2} (3\tilde{\sigma}^2 - 2) = 10$.

Пример 2. Доказать, что $\lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow 2} \sqrt{x^3 + 1} = 3$.

Решение. Имеем

$$|f(x) - 3| = \left| \sqrt{\tilde{\sigma}^3 + 1} - 3 \right| = \frac{\tilde{\sigma}^3 + 1 - 9}{\sqrt{\tilde{\sigma}^3 + 1} + 3} = \frac{\tilde{\sigma}^3 - 8}{\sqrt{\tilde{\sigma}^3 + 1} + 3} = \frac{(\tilde{\sigma} - 2)(\tilde{\sigma}^2 + 2\tilde{\sigma} + 4)}{\sqrt{\tilde{\sigma}^3 + 1} + 3}.$$

Оценим сверху последнее выражение на отрезке $[0, 3]$, содержащем точку $x = 2$. Так как $\tilde{\sigma}^2 + 2\tilde{\sigma} + 4 \leq 19$, а $\sqrt{\tilde{\sigma}^3 + 1} + 3 > 3$ на отрезке $[0, 3]$, получим

$$|f(x) - 3| = \frac{|\tilde{\delta} - 2|(\tilde{\delta}^2 + 2\tilde{\delta} + 4)}{\sqrt{\tilde{\delta}^3 + 1}} < |\tilde{\delta} - 2| \cdot \frac{19}{3}.$$

Отсюда видно, что в качестве $\delta(\varepsilon)$ можно взять $\frac{3}{19}\varepsilon$ т.е. $|f(x) - 3| < \varepsilon$ при $\delta(\varepsilon) = \frac{3}{19}\varepsilon$.

Действительно,

$|f(x)| < \frac{3}{19}|\tilde{\delta} - 2| < \frac{19}{3} \cdot \frac{3}{19}\varepsilon = \varepsilon$ при $|\tilde{\delta} - 2| < \frac{3}{19}\varepsilon$. Таким образом, согласно определению предела функции по Коши, $\lim_{\tilde{\delta} \rightarrow 2} \sqrt{\tilde{\delta}^3 + 1} = 3$.

1.4. Вычисление пределов

В простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Но такая подстановка часто приводит к неопределенным выражениям вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 * \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$. Нахождением предела функции в таком случае называют раскрытие неопределенностей. При раскрытии неопределенностей, прежде чем перейти к пределу, необходимо провести преобразование данного выражения.

Пример 1. Вычислить $\lim_{\tilde{\delta} \rightarrow 1/2} \frac{2\tilde{\delta}^2 - 7\tilde{\delta} + 3}{8\tilde{\delta}^3 - 1}$.

Решение. Так как при подстановке $x = \frac{1}{2}$ в числитель и знаменатель они обращаются в нуль, то мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Разложим числитель и знаменатель на множители и перейдем к пределу. В полученном выражении будем иметь

$$\lim_{\tilde{\delta} \rightarrow 1/2} \frac{2\tilde{\delta}^2 - 7\tilde{\delta} + 3}{8\tilde{\delta}^3 - 1} = \lim_{\tilde{\delta} \rightarrow 1/2} \frac{2(\tilde{\delta} - 1/2)(\tilde{\delta} - 3)}{2(\tilde{\delta} - 1/2)(4\tilde{\delta}^2 + 2\tilde{\delta} + 1)} = \lim_{\tilde{\delta} \rightarrow 1/2} \frac{\tilde{\delta} - 3}{4\tilde{\delta}^2 + 2\tilde{\delta} + 1} = \frac{1/2 - 3}{4 * 1/4 + 1 + 1} = -\frac{5}{6}$$

В этом примере неопределенность $\frac{0}{0}$ при $x \rightarrow 1/2$ уничтожена после сокращения на $(x - 1/2)$.

В общем случае для того, чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ дробно-рациональной функции, нужно в числителе выделить сомножитель вида $(\tilde{\delta} - \tilde{\delta}_0)^e$, а в знаменателе

$(\tilde{\delta} - \tilde{\delta}_0)^l$, где $\kappa, l > 0$ – целые числа. Далее нужно сократить числитель и знаменатель на выражение $(\tilde{\delta} - \tilde{\delta}_0)^m$, где $m = \min(\kappa, l)$, и воспользоваться формулой

$$\lim_{\tilde{\delta} \rightarrow \tilde{\delta}_0} \frac{(\tilde{\delta} - \tilde{\delta}_0)^{\hat{e}}}{(\tilde{\delta} - \tilde{\delta}_0)^l} = \begin{cases} \infty, & \hat{e} < l; \\ 1, & \hat{e} = l; \\ 0, & \hat{e} > l \end{cases}$$

Метод выделения множителя $(\tilde{\delta} - \tilde{\delta}_0)$ применяется и при раскрытии неопределенностей вида $\frac{0}{0}$, содержащих иррациональные выражения. Один способ выделения множителя $(\tilde{\delta} - \tilde{\delta}_0)$ связан с преобразованием домножения на сопряженное выражение.

Пример 2. Вычислить $\lim_{\tilde{\delta} \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{\tilde{\delta}}}{4 - \sqrt{2\tilde{\delta} - 2}}$.

Решение. Данный пример представляет из себя неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Умножим числитель и знаменатель на произведение $(3 + \sqrt{\tilde{\delta}})(4 + \sqrt{2\tilde{\delta} - 2})$, а затем сократим на множитель $(9 - x)$. Получим

$$\lim_{\tilde{\delta} \rightarrow 9} \frac{(3 - \sqrt{\tilde{\delta}})(3 + \sqrt{\tilde{\delta}})(4 + \sqrt{2\tilde{\delta} - 2})}{(4 - \sqrt{2\tilde{\delta} - 2})(3 + \sqrt{\tilde{\delta}})(4 + \sqrt{2\tilde{\delta} - 2})} = \lim_{\tilde{\delta} \rightarrow 9} \frac{(9 - \tilde{\delta})(4 + \sqrt{2\tilde{\delta} - 2})}{2(9 - \tilde{\delta})(3 + \sqrt{\tilde{\delta}})} = \lim_{\tilde{\delta} \rightarrow 9} \frac{(4 + \sqrt{2\tilde{\delta} - 2})}{2(3 + \sqrt{\tilde{\delta}})} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Пример 3. Вычислить $\lim_{\tilde{\delta} \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\tilde{\delta}^3 + 5} + \sqrt{\tilde{\delta}}}{\sqrt[4]{\tilde{\delta}^2 + 3\tilde{\delta}} - \tilde{\delta}^2}$

Данный пример представляет из себя неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Поделим числитель и знаменатель на старшую степень x , содержащуюся в них. В данном случае это $\tilde{\delta}^2$. Будем иметь

$$\lim_{\tilde{\delta} \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\tilde{\delta}^3 + 5} + \sqrt{\tilde{\delta}}}{\sqrt[4]{\tilde{\delta}^2 + 3\tilde{\delta}} - \tilde{\delta}^2} = \lim_{\tilde{\delta} \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{\tilde{\delta}^3 + 5}}{\tilde{\delta}^2} + \frac{\sqrt{\tilde{\delta}}}{\tilde{\delta}^2}}{\frac{\sqrt[4]{\tilde{\delta}^2 + 3\tilde{\delta}}}{\tilde{\delta}^2} - \frac{\tilde{\delta}^2}{\tilde{\delta}^2}} = \lim_{\tilde{\delta} \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{\tilde{\delta}^3 + 5}{\tilde{\delta}^4}} + \sqrt{\frac{\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^4}}}{\sqrt[4]{\frac{\tilde{\delta}^2 + 3\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^8}} - 1} = \lim_{\tilde{\delta} \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{\tilde{\delta}} + \frac{5}{\tilde{\delta}^4}} + \sqrt{\frac{1}{\tilde{\delta}^3}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{\tilde{\delta}^6} + \frac{3}{\tilde{\delta}^7}} - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$

В общем случае, когда переменная величина x бесконечно велика, а дробь представляет из себя неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, данный метод пригоден, если дробь можно представить в

виде $\frac{\tilde{o}^l h(\tilde{o})}{\tilde{o}^\beta g(\tilde{o})}$ и существует конечный предел $\lim_{\tilde{o} \rightarrow \infty} \frac{h(\tilde{o})}{g(\tilde{o})}$ (l и β - вещественные числа).

Неопределенность вида $\frac{0}{0}$ встречается также в примерах, решение которых связано с применением первого замечательного предела

$$\lim_{\tilde{o} \rightarrow 0} \frac{\sin \tilde{o}}{\tilde{o}} = 1.$$

Пример 4. Вычислить $\lim_{\tilde{o} \rightarrow 4} (4 - \tilde{o}) \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \tilde{o}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0 \rightarrow \infty$. Сделаем замену $x - 4 = z$, тогда $z \rightarrow 0$ при $\tilde{o} \rightarrow 4$. После ряда преобразований при $z \rightarrow 0$ получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, раскрытие которой достигается использованием первого замечательного предела. Проведем тождественные преобразования с учетом равенства $x = z + 4$:

$$(4 - \tilde{o}) \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \tilde{o} = z \cdot \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{8} (4 + z) \right] = z \cdot \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{8} (4 + z) \right] = z \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} z \right) = z \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} z = \frac{z}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} z}$$

Теперь имеем

$$\lim_{\tilde{o} \rightarrow 4} (4 - \tilde{o}) \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \tilde{o} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} z} = \frac{8}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{8} z \cdot \cos \frac{\pi}{8} z}{\sin \frac{\pi}{8} z} = \frac{8}{\pi} \lim_{z \rightarrow 0} \cos \frac{\pi}{8} z = \frac{8}{\pi}$$

Часто для вычисления предела степени, основание которой стремится к единице, а показатель к бесконечности, при $\tilde{o} \rightarrow a$ или при $\tilde{o} \rightarrow \infty$ используется второй замечательный предел

$$\lim_{\tilde{o} \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\tilde{o}} \right)^{\tilde{o}} = \lim_{L \rightarrow 0} (1 + L)^{1/L} = e$$

Пример 5. Вычислить $\lim_{\tilde{o} \rightarrow 4} (3\tilde{o} - 11)^{1/(\tilde{o}-4)}$.

Для решения данного примера необходимо раскрыть неопределенность вида 1^∞ . Сделаем замену $x - 4 = y$. Тогда $\acute{o} \rightarrow 0$ при $\tilde{o} \rightarrow 4$ и $x = 4 + y$.

Получим

$$\lim_{\tilde{o} \rightarrow 4} (3\tilde{o} - 11)^{1/(\tilde{o}-4)} = \lim_{\acute{o} \rightarrow 0} [3(4 + \acute{o}) - 11]^{1/\acute{o}} = \lim_{\acute{o} \rightarrow 0} (1 + \acute{o})^{1/\acute{o}} = \acute{a}.$$

При вычислении пределов функций часто оказывается полезным использование равенств

$$\lim_{\tilde{o} \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tilde{o})}{\tilde{o}} = 1 ; \quad \lim_{\tilde{o} \rightarrow 0} \frac{\acute{a}^{\tilde{o}} - 1}{\tilde{o}} = \ln \acute{a}.$$

Пример 6. Вычислить $\lim_{\tilde{o} \rightarrow 0} \frac{5^{\tilde{o}} - 4^{\tilde{o}}}{\tilde{o}^2 + \tilde{o}}$

Имеем

$$\lim_{\tilde{o} \rightarrow 0} \frac{5^{\tilde{o}} - 4^{\tilde{o}}}{\tilde{o}^2 + \tilde{o}} = \lim_{\tilde{o} \rightarrow 0} \frac{4^{\tilde{o}} \left[\left(\frac{5}{4} \right)^{\tilde{o}} - 1 \right]}{\tilde{o}(\tilde{o} + 1)} = \lim_{\tilde{o} \rightarrow 0} \frac{4^x}{(\tilde{o} + 1)} \ln \frac{5}{4} = \ln \frac{5}{4}.$$

Иногда в примерах, для решения которых нужно раскрыть неопределенность вида 1^∞ , используется и первый замечательный предел.

Пример 7. Вычислить $\lim_{\tilde{o} \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi}{2} \tilde{o} \right)^{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} \tilde{o}}$

Решение. Сделаем замену $x - 1 = y$. Тогда $x = 1 + y$ и $\acute{o} \rightarrow 0$ при $\tilde{o} \rightarrow 1$. Имеем

$$\left(\sin \frac{\pi}{2} \tilde{o} \right)^{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} \tilde{o}} = \left[\sin \frac{\pi}{2} (1 + \acute{o}) \right]^{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} (1 + \acute{o})} = \left[\cos \frac{\pi}{2} \acute{o} \right]^{(-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \acute{o})^2} = \left[1 + (-1 - \cos \frac{\pi}{2} \acute{o}) \right]^{\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2} \acute{o}}$$

Далее

$$\lim_{\tilde{o} \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi}{2} \tilde{o} \right)^{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} \tilde{o}} = \lim_{\tilde{o} \rightarrow 0} \left[\left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{4} \tilde{o} \right)^{\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{4} \tilde{o}}} \right]^{-\sin^2 \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2} \tilde{o}} = \overset{\circ}{a} \lim_{\tilde{o} \rightarrow 0} \left(-\sin^2 \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2} \tilde{o} \right) = \overset{\circ}{a} \frac{-\lim_{\tilde{o} \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{4} y^* \cos^2 \frac{\pi}{2} y}{\sin^2 \frac{\pi}{2} y}}{\overset{\circ}{a}} =$$

$$\overset{\circ}{a} \frac{-\frac{1}{4} \lim_{\tilde{o} \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2} y}{\cos^2 \frac{\pi}{4} y}}{\overset{\circ}{a}} = \overset{\circ}{o} \frac{1}{4}$$

1.5. Непрерывность функции

При исследовании функции на непрерывность следует учесть, что элементарная функция может иметь разрыв только в отдельных точках, где она не определена. Если функция задана несколькими аналитическими выражениями для различных интервалов изменения аргумента, то она может иметь разрывы и в тех, где меняется ее аналитическое выражение.

Пример 1. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{\tilde{o} - 8}{\tilde{o}^2 - 11\tilde{o} + 24}$ и построить график.

Решение. Точками разрыва в данном случае могут быть точки, где знаменатель обращается в нуль, т.е. $x = 8$ и $x = 3$. В точке $x = 8$ функция $f(x)$ не определена, так как при подстановке $x = 8$ в дробь имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Вычислим предел функции $f(x)$ при $\tilde{o} \rightarrow 8$

$$\lim_{\tilde{o} \rightarrow 8} \frac{\tilde{o} - 8}{\tilde{o}^2 - 11\tilde{o} + 24} = \lim_{\tilde{o} \rightarrow 8} \frac{1}{\tilde{o} - 3} = \frac{1}{5}$$

Следовательно, точка $x = 8$ является точкой устранимого разрыва. Исследуем точку $x = 3$. Для этого находим пределы функции $f(x)$ при $\tilde{o} \rightarrow 3 + 0$ и $\tilde{o} \rightarrow 3 - 0$. Получаем

$$\lim_{\tilde{o} \rightarrow 3-0} \frac{\tilde{o} - 8}{\tilde{o}^2 - 11\tilde{o} + 24} = \lim_{\tilde{o} \rightarrow 3-0} \frac{\tilde{o} - 8}{(\tilde{o} - 8)(\tilde{o} - 3)} = -\infty$$

$$\lim_{\tilde{o} \rightarrow 3+0} \frac{\tilde{o} - 8}{\tilde{o}^2 - 11\tilde{o} + 24} = \lim_{\tilde{o} \rightarrow 3+0} \frac{\tilde{o} - 8}{(\tilde{o} - 8)(\tilde{o} - 3)} = +\infty$$

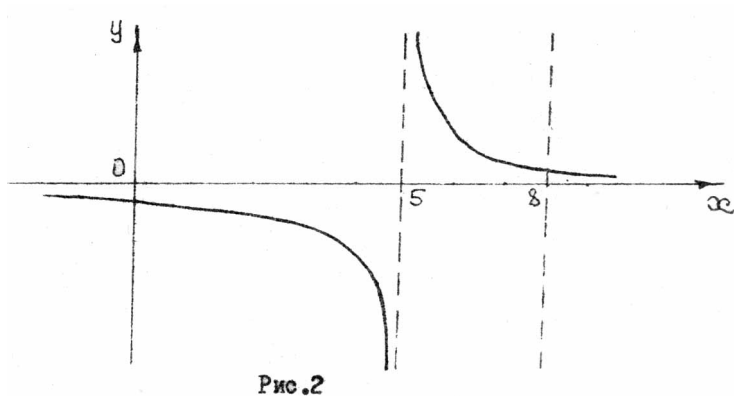
Делаем вывод, что точка $x = 3$ является точкой бесконечного разрыва. Для построения графика вычислим пределы функции при $\tilde{o} \rightarrow \pm\infty$ и найдем точки пересечения графика с

осями координат. При $x = 0$ и $x = 1$ значения y соответственно равны $-\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{2}$. Имеют место равенства

$$\lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\sigma} - 8}{\tilde{\sigma}^2 - 11\tilde{\sigma} + 24} = +0;$$

$$\lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow -\infty} \frac{\tilde{\sigma} - 8}{\tilde{\sigma}^2 - 11\tilde{\sigma} + 24} = -0$$

График функции изображен на рис.2.



Пример 2. Найти точки разрыва и исследовать их характер для $f(x) = a^{\frac{2}{4-\tilde{\sigma}}}$. Построить график.

Решение. Исследуем точку разрыва $x = 4$. Так как

$$\lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow 4-0} \frac{2}{4-\tilde{\sigma}} = \infty ; \quad \lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow 4+0} \frac{2}{4-\tilde{\sigma}} = -\infty,$$

то

$$\lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow 4-0} a^{\frac{2}{4-\tilde{\sigma}}} = \infty ; \quad \lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow 4+0} a^{\frac{2}{4-\tilde{\sigma}}} = 0$$

Поэтому $x = 4$ есть точка бесконечного разрыва. Чтобы построить график, вычислим пределы функции $f(x)$ при $\tilde{\sigma} \rightarrow \pm\infty$.

$$\lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow +\infty} \tilde{a}^{\frac{2}{\tilde{\sigma}-4}} = 1 ; \quad \lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow -\infty} \tilde{a}^{\frac{2}{4-\tilde{\sigma}}} = 1 .$$

Отметим, что при $x = 0$ значение $\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{a}} \approx 1,6$. График функции изображен на рис. 3.

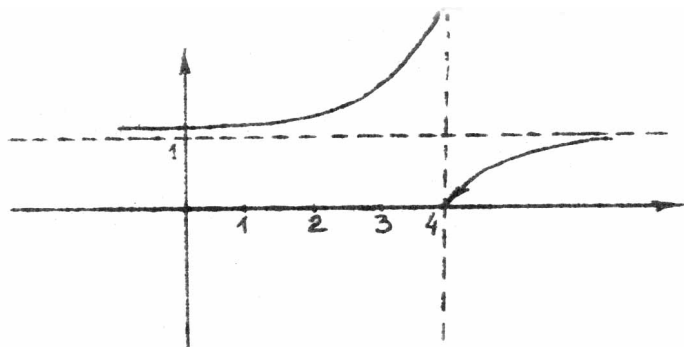


Рис.3

Пример 3. Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(\tilde{\sigma}) = \begin{cases} 3^{-\tilde{\sigma}}, & \tilde{\sigma} \leq -1; \\ 2, & -1 < \tilde{\sigma} \leq 0; \\ 1 + \cos \tilde{\sigma}, & \tilde{\sigma} > 0. \end{cases}$$

Решение. Внутри каждого из трех промежутков $]-\infty; -1[$, $]-1, 0[$, $]0, \infty[$, соответствующие им функции определены и непрерывны. Остается исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность только в точках $\tilde{\sigma}_1 = -1$ и $\tilde{\sigma}_2 = 0$, в которых “стыкуется” графики функций, составляющих $f(x)$. Исследуем точку $\tilde{\sigma}_1 = -1$. Имеем $\lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow -0} f(x) = \lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow -1-0} 3^{-\tilde{\sigma}} = 3$. Так как $f(x)=2$ при $-1 < x < 0$, то $\lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow -1+0} f(\tilde{\sigma}) = \lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow -1+0} 2 = 2$. Односторонние пределы конечны, но не равны между собой, поэтому $x = -1$ есть точка разрыва первого ряда. В ней функция претерпевает скачок, равный -1 . Исследуя точку $\tilde{\sigma}_2 = 0$. Справедливы равенства

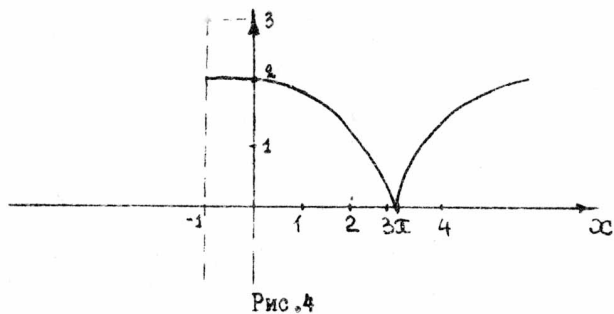
$$\lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow -0} f(\tilde{\sigma}) = \lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow -0} 2 = 2;$$

$$\lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow +0} f(\tilde{\sigma}) = \lim_{\tilde{\sigma} \rightarrow +0} (1 + \cos \tilde{\sigma}) = 2 .$$

Односторонние пределы в точке $\tilde{\sigma}_2 = 0$ равны. Поэтому точка $\tilde{\sigma}_2$ есть точка непрерывности функции $f(x)$ и

$$f(0) = \lim_{\delta \rightarrow -0} f(x) = \lim_{\delta \rightarrow +0} f(\delta) = 2.$$

График функции имеет вид, представленный на рис. 4



4.4. Установить, в каких точках и какого рода разрывы имеют следующие функции. Построить графики данных функций.

Вариант 1

$$a) f(x) = \frac{x+4}{x^2+x-20};$$

$$b) f(x) = 6^{\frac{1}{x-5}};$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \cos x & x \leq 0; \\ x^2 + 1 & 0 < x < 1; \\ x & x \geq 1. \end{cases}$$

Вариант 2

$$a) y = \frac{x-1}{x^2+x-2};$$

$$b) f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}};$$

$$c) f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{3} & x \leq 0; \\ \sin x & 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ x - \frac{\pi}{2} & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вариант 3

$$a)y = \frac{1-4x}{x^2-4x-5};$$

$$\acute{a})\acute{o} = 7^{\frac{1}{\tilde{\delta}-1}};$$

$$\hat{a})\acute{o} = \begin{cases} \tilde{\delta}^2 & \ddot{i}\partial\grave{e} & \tilde{\delta} \neq 0; \\ 2 & \ddot{i}\partial\grave{e} & \tilde{\delta} = 0. \end{cases}$$

Вариант 4

$$a)y = \frac{1+4x}{x^2-3x-10};$$

$$\acute{a})\acute{o} = 6^{\frac{1}{\tilde{\delta}+4}};$$

$$\hat{a})\acute{o} = \begin{cases} \sqrt{1-\tilde{\delta}} & \ddot{i}\partial\grave{e} & \tilde{\delta} \leq 0; \\ \operatorname{tg} x & \ddot{i}\partial\grave{e} & 0 < x < \frac{\pi}{4}; \\ 1 & \ddot{i}\partial\grave{e} & x > \frac{\pi}{4}; \\ 0 & \ddot{i}\partial\grave{e} & x = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Вариант 5

$$a)y = \frac{x-1}{x^2+2x-3};$$

$$\acute{a})\acute{o} = 6^{\frac{1}{4-\tilde{\delta}}};$$

$$\hat{a})\acute{o} = \begin{cases} 2\tilde{\delta}^2 & \ddot{i}\partial\grave{e} & \tilde{\delta} \leq 0; \\ \cos x & \ddot{i}\partial\grave{e} & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ x - \frac{\pi}{2} & \ddot{i}\partial\grave{e} & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Вариант 6

$$\grave{a})\acute{o} = \frac{1+5\tilde{\delta}}{\tilde{\delta}^2-8\tilde{\delta}+15};$$

$$\acute{a})\acute{o} = 8^{\frac{1}{4-\tilde{\delta}}};$$

$$\acute{o} = \begin{cases} \tilde{\delta}+1 & \ddot{i}\partial\grave{e} & \tilde{\delta} \leq 0; \\ \tilde{\delta}^2 & \ddot{i}\partial\grave{e} & 0 < x < 2; \\ 2 & \ddot{i}\partial\grave{e} & x = 2; \\ \frac{1}{2}\tilde{\delta}+3 & \ddot{i}\partial\grave{e} & x > 2. \end{cases}$$

Вариант 7

$$\dot{a}) \acute{o} = \frac{\tilde{o} - 2}{\tilde{o}^2 + \div - 6};$$

$$\acute{a}) \acute{o} = 2^{\frac{1}{\tilde{o}+5}};$$

$$\acute{o} = \begin{cases} \tilde{o}^2 + 1 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x < 0; \\ 1 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & 0 < x \leq 2; \\ \tilde{o} - 2 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x > 2. \end{cases}$$

Вариант 8

$$\dot{a}) \acute{o} = \frac{1 - 7\tilde{o}}{\tilde{o}^2 - \tilde{o} - 12};$$

$$\acute{a}) \acute{o} = 9^{\frac{1}{\tilde{o}-2}};$$

$$y = \begin{cases} x + 1 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x < 0; \\ 2 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x = 0; \\ x^2 + 1 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & 0 < x < 1; \\ 1 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x \geq 1. \end{cases}$$

Вариант 9

$$\dot{a}) \acute{o} = \frac{\tilde{o} + 2}{\tilde{o}^2 + \tilde{o} - 2};$$

$$\acute{a}) \acute{o} = 7^{\frac{1}{\tilde{o}-3}};$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 1 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & \tilde{o} \leq 0; \\ x & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & 0 < x < 2; \\ 2x - 2 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x \geq 2. \end{cases}$$

Вариант 10

$$\dot{a}) \acute{o} = \frac{8\tilde{o} + 3}{\tilde{o}^2 - 3\tilde{o} - 4};$$

$$\acute{a}) \acute{o} = 3^{\frac{1}{\tilde{o}+6}};$$

$$y = \begin{cases} -2x & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x < 0; \\ 1 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x = 0; \\ \sqrt{x} & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & 0 < x < 4; \\ 3 & \ddot{o}\grave{o}\grave{e} & x \geq 4. \end{cases}$$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме. **Основная: 1-7**

Практическое занятие № 22-27

Тема Определение производной функции

Производная сложной и обратной функции

Дифференцирование неявных функций. Логарифмическое дифференцирование

1.1 Дифференцирование неявных функций

Формируемые компетенции: ОПК-3

Изучение теоретического материала должно сопровождаться практическим применением его. Поэтому мы решим ряд типичных примеров и задач по всей теме и дадим упражнения для самостоятельной работы.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пользуясь определением производной, найти производные следующих функций:

а) $y = \sin(3x + 2)$;

б) $y = a^{3x}, a > 0$;

в) $y = \sqrt[3]{x}$;

г) $y = \frac{1}{x^2 + 2}$;

д) $y = x^\alpha, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$;

е) $y = \ln 2x$.

Чтобы вычислить производную функции $y = f(x)$ в некоторой точке x_0 , исходя из ее определения, необходимо:

1/ значению аргумента $x = x_0$ дать некоторое приращение и получить новое значение аргумента $x = x_0 + \Delta x$;

2/ найти соответствующее приращение функции

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

3/ составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приращения функции к вызывающему его приращению аргумента;

4/ вычислить предел этого отношения при $\Delta x \rightarrow 0$, если он существует.

РЕШЕНИЕ. а/ Дадим значению аргумента x_0 приращение Δx и получим $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}_0 + \Delta \tilde{\delta}$. Тогда соответствующее приращение функции примет вид:

$$\begin{aligned}\Delta y &= \sin(3(x_0 + \Delta x) + 2) - \sin(3x_0 + 2) = \\ &= 2 \sin \frac{3\Delta x}{2} \cos(3x_0 + 2 + \frac{3\Delta x}{2})\end{aligned}$$

Разделим обе части этого равенства на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$.

Получим:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [\cos(3x_0 + 2 + \frac{3\Delta x}{2}) \frac{2 \sin \frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x}]$$

Заменим бесконечно малую величину $\sin \frac{3\Delta x}{2}$ эквивалентной бесконечно малой $\frac{3\Delta x}{2}$ и воспользуемся тем, что в силу непрерывности косинуса

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(3x_0 + 2 + \frac{3\Delta x}{2}) = \cos(3x_0 + 2).$$

Получим:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(3x_0 + 2 + \frac{3\Delta x}{2}) = 3 \cos(3x_0 + 2).$$

Таким образом,

$$(\sin(3x + 2))' = 3 \cos(3x + 2).$$

б/ Дадим x_0 приращение Δx . Тогда получим:

$$\Delta y = a^{3(x_0 + \Delta x)} - a^{3x_0} = a^{3x_0} (a^{3\Delta x} - 1).$$

Разделим обе части этого равенства на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{3x_0} (a^{3\Delta x} - 1)}{\Delta x} = 3a^{3x_0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{3\Delta x} - 1}{3\Delta x} = 3a^{3x_0} \ln a, \\ (a^{3x})' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3a^{3x_0} \ln a,\end{aligned}$$

так как
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Остальные примеры решить самостоятельно.

Напомним основные правила дифференцирования:

$$(\tilde{n})' = 0,$$

$$(uv)' = u'v + uv',$$

$$(u + v)' = u' + v', \quad \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

$$(cu)' = cu',$$

где c – постоянная, u и v – функции от x , имеющие производные.

Применение таблицы производных и правил дифференцирования.

2. Найти y' , если $y = 5\sqrt[4]{x} + \frac{2}{x^5}$.

РЕШЕНИЕ. Перепишем данное выражение. Используя дробные и отрицательные показатели:

$$y = 5x^{\frac{1}{4}} + 2x^{-5}.$$

Применяя правила дифференцирования суммы, вынесения постоянной за знак производной и формулы производной степенной функции, получаем:

$$y' = \frac{5}{4}x^{-\frac{3}{4}} - 10x^{-6},$$

или, после очевидных преобразований,

$$y' = \frac{5}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{10}{x^6}.$$

3. Найти y' , если $y = x^5 \cos x$

РЕШЕНИЕ. По правилу дифференцирования произведения получаем:

$$y' = 5x^4 \cos x + x^5 (-\sin x),$$

или

$$y' = 5x^4 \cos x - x^5 \sin x.$$

4. Найти y' , если $y = \operatorname{arctg} x / x^3$

Применяя правило дифференцирования дроби и формулы из таблицы производных основных элементарных функций, находим:

$$y' = \frac{\frac{1}{1+x^2}x^3 - \operatorname{arctg} x \cdot 3x^2}{x^6}$$

или, после очевидных преобразований,

$$y' = \frac{x - 3(1+x^2)\operatorname{arctg} x}{x^4(1+x^2)}.$$

5. Найти производные от следующих функций:

а/ $y = x^5 \operatorname{ctg} x$;

б/ $y = 3^x \arcsin x$;

в/ $y = \frac{\arccos x}{1+x^2}$;

г/ $y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[7]{x^2}}$;

д/ $y = e^x \ln x$;

е/ $y = e^x (\sin x - \cos x)$.

Производные сложных функций

Знания формул и правил дифференцирования недостаточно для нахождения производных сложных функций, например, таких как $y = \sqrt[3]{\sin x}$, $y = e^{\operatorname{arctg}^2 x}$ и т.д. В подобных случаях пользуются более общими формулами дифференцирования,

основанными на теореме о производной функции от функции /суперпозиции двух функций/. Напомним её.

Пусть $y = f(\varphi(x))$ - сложная функция, т.е. $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. Если для соответствующих друг другу значений x и u существуют производные $f'(u)$ и $u' = \varphi'(x)$, то существует и производная от y по x , причём

$$y' = f'(u) \cdot u'.$$

6. Найти y' , если $y = (x^3 + 5x + 3)^4$.

РЕШЕНИЕ. Полагая $u = x^3 + 5x + 3$, имеем $y = u^4$. По формуле дифференцирования сложной функции получим:

$$y' = 4u^3 u' = 4u^3 (3x^2 + 5).$$

или, окончательно заменяя u на его значение, имеем:

$$y' = 4(x^3 + 5x + 3)^3 \cdot (3x^2 + 5).$$

Следует заметить, что к такой подробной записи прибегают только в самой начальной стадии освоения техники дифференцирования, а обычно вспомогательная функция вводится мысленно, что и рекомендуется делать в дальнейшем.

7. Найти y' , если $y = \ln(\operatorname{arctg} x)$.

РЕШЕНИЕ. В данном случае роль u играет $\operatorname{arctg} x$.

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

или

$$y' = \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}.$$

8. Найти y' , если $y = (\arccos \sqrt{x})^5$.

РЕШЕНИЕ. Данная функция состоит из трех суперпозиций. Получаем последовательно:

$$\begin{aligned} y' &= 5(\arccos \sqrt{x})^4 (\arccos \sqrt{x})' = 5(\arccos \sqrt{x})^4 \cdot \left(-\frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-x}}\right) = \\ &= -5(\arccos \sqrt{x})^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}, \end{aligned}$$

или

$$y' = -\frac{5 (\arccos \sqrt{x})^4}{2 \sqrt{x}(1-x)}.$$

9. Найти y' , если $y = 7^{\lg^3(x^2+5x)}$.

РЕШЕНИЕ. При подробной записи будем иметь:

$$\begin{aligned}
y' &= 7^{tg^3(x^2+5x)} \cdot \ln 7 \cdot [tg^3(x^2+5x)]' = \\
&= 7^{tg^3(x^2+5x)} \cdot \ln 7 \cdot 3tg^2(x^2+5x)[tg(x^2+5x)]' = \\
&= 7^{tg^3(x^2+5x)} \cdot \ln 7 \cdot 3tg^2(x^2+5x) \cdot \frac{(x^2+5x)'}{\cos^2(x^2+5x)} = \\
&= 3 \cdot 7^{tg^3(x^2+5x)} \cdot \ln 7 \cdot tg^2(x^2+5x) \cdot \frac{2x+5}{\cos^2(x^2+5x)}.
\end{aligned}$$

При достаточном навыке следует писать сразу

$$y' = 3 \cdot 7^{tg^3(x^2+5x)} \cdot \ln 7 \cdot tg^2(x^2+5x) \cdot \frac{2x+5}{\cos^2(x^2+5x)}.$$

10. Найти y' , если $y = \ln(ch x^3) + \frac{1}{2ch^2 x}$.

РЕШЕНИЕ. Последовательно получаем:

$$y' = \frac{1}{ch x^3} sh x^3 \cdot 3x^2 + \left(-\frac{ch x sh x}{ch^4 x}\right) = 3th x^3 \cdot x^2 - th x \cdot \frac{1}{ch^2 x},$$

или

$$y' = 3x^2 th x^3 - th x \frac{1}{ch^2 x}.$$

11. Найти производные следующих функций.

а/ $y = \sqrt{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x};$

б/ $y = \sqrt[3]{2e^x + 2^x + 1};$

в/ $y = \arctg \ln x + \ln(\arctg x);$

г/ $y = \ln^5(ctg 3x);$

д/ $y = \sin^3 \arctg \sqrt[5]{1-2^x};$

е/ $y = \arcsin \frac{1-x}{1+x^2};$

ж/ $y = x^5 (\arccos \sqrt{x})^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin \sqrt{x} - 5tgx;$

з/ $y = 2^{\frac{\ln 1}{x}};$

и/ $y = \sin 2x \cdot \sin^3 x \cdot \cos 2x;$

к/ $y = \ln \cos(\sin 3x);$

л/ $y = e^{\arctg^3 \sqrt{x+4}};$

м/ $y = \ln \ln ctgx;$

н/ $y = \sqrt[3]{x^3 + \sqrt{x}}.$

Логарифмическое дифференцирование

Иногда бывает целесообразно, прежде, чем находить производную от заданной сложной функции, предварительно преобразовать ее так, чтобы процесс дифференцирования упростился. В частности, если приходится вычислять производную от логарифма произведения, дроби, степени или корня, следует провести предварительное преобразование, пользуясь обычными правилами логарифмирования. Во многих случаях оказывается выгодным, прежде чем дифференцировать заданную функцию, взять ее логарифм, определить затем производную от этого логарифма и по производной от логарифма отыскать производную заданной функции. Такой прием называют способом логарифмического дифференцирования.

Таким образом, $y' = y(\ln y)'.$

Этот метод позволяет легко найти производную от сложной функции $y = u^v$, где u и v - функции аргумента x . А именно:

$$y' = (u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \ln u \cdot v'. \quad (*)$$

Функцию вида u^v часто называют показательно-степенной.

12. Найти y' , если $y = \ln \sqrt[4]{\frac{x^3(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}}$.

РЕШЕНИЕ. Предварительное преобразование значительно упрощает нахождение производной, а именно:

$$y = \ln \sqrt[4]{\frac{x^3(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}} = \frac{3}{4} \ln x + \frac{1}{4} \ln(x-1) - \frac{1}{8} \ln(x^2+1).$$

Далее находим

$$y' = \frac{3}{4x} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{x}{4(x^2+1)}.$$

13. Найти y' , если $y = \frac{x^3(x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}}$.

РЕШЕНИЕ. В данном случае целесообразнее применить способ логарифмического дифференцирования.

Логарифмируем обе части исходного равенства:

$$\begin{aligned} \ln y &= 3 \ln x + 4 \ln(x^2+1) - \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln(x-1) = \\ &= \frac{5}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln(x-1) + 4 \ln(x^2+1). \end{aligned}$$

Дифференцируя полученное соотношение, имеем:

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{x^2+1}.$$

Умножая теперь обе части последнего равенства на y и заменяя затем y , получаем:

$$y' = \frac{x^3(x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}} \cdot \left(\frac{5}{2x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{8x}{x^2+1} \right).$$

14. Найти y' , если $y = (\operatorname{ctg} x)^{x^5}$.

РЕШЕНИЕ. Для показательно-степенной функции необходимо применять метод логарифмического дифференцирования или применять формулу (*)

$$\ln y = x^5 \ln \operatorname{ctg} x;$$

$$\frac{y'}{y} = 5x^4 \ln \operatorname{ctg} x + x^5 \frac{-1}{\operatorname{ctg} \sin^2 x} = 5x^4 \ln \operatorname{ctg} x - \frac{2x^5}{\sin 2x};$$

$$y' = (\operatorname{ctg} x)^{x^5} \cdot \left(5x^4 \ln \operatorname{ctg} x - \frac{2x^5}{\sin 2x} \right).$$

15. Найти производные следующих функций:

а/ $y = \sqrt[5]{x^4 \sqrt{x^2} \sqrt{x}};$

б/ $y = \ln \frac{\sqrt{7} + \operatorname{ctg} \frac{x}{5}}{\sqrt{7} - \operatorname{ctg} \frac{x}{5}};$

в/ $y = \sqrt{\frac{1 - \sin 3x}{1 + \sin 3x}};$

г/ $y = \ln \sqrt{1 + \operatorname{tg}^4 x};$

$$д/ y = \frac{\sqrt[4]{x^3 + 3x - 5}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}};$$

$$ж/ y = x^9 (x^3 - 1)^{11} (x^5 + 7);$$

$$и/ y = x^{\cos x};$$

$$л/ y = \sqrt[3]{\arctg^2 x};$$

$$е/ y = \ln \frac{(x^7 - 9)^3}{(x^3 + 5)^4};$$

$$з/ y = e^{x^3} \operatorname{tg}^5 x \arccos^2 x;$$

$$к/ y = (\sin x)^{\arctg x^2};$$

$$м/ y = (1 + x^2)^{\arcsin x}.$$

Дифференциалы функций.

Дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал независимого переменного, то есть

$$dy = f'(x)dx.$$

Поэтому для нахождения дифференциала функции достаточно найти производную этой функции и полученное выражение умножить на dx .

Таким образом, техника вычисления дифференциала может быть сведена к технике отыскания производной. Следует заметить, однако, что можно вычислять дифференциалы и непосредственно, не находя предварительно производной, а пользуясь таблицей формул и правил, подобных тем, которые давались для производных, и свойствам инвариантности формы записи дифференциала. Покажем на примерах.

17. Найти дифференциалы от функций:

$$а/ y = (1 + \operatorname{tg} x)^7;$$

$$б/ y = \ln \operatorname{arctg}(\sin x).$$

РЕШЕНИЕ. а/ Первый способ. Воспользуемся формулой

$$dy = y' dx.$$

Находим производную от заданной функции:

$$y' = 7(1 + \operatorname{tg} x)^6 \frac{1}{\cos^2 x}$$

тогда

$$dy = 7(1 + \operatorname{tg} x)^6 \frac{dx}{\cos^2 x}$$

Второй способ. Находим непосредственно дифференциал:

$$dy = 7(1 + \operatorname{tg} x)^6 d(1 + \operatorname{tg} x) = 7(1 + \operatorname{tg} x)^6 \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

б/ Решаем вторым способом:

$$dy = \frac{d[\operatorname{arctg}(\sin x)]}{\operatorname{arctg}(\sin x)} = \frac{-\frac{1}{1 + \sin^2 x} d(\sin x)}{\operatorname{arctg}(\sin x)} = -\frac{\cos dx}{(1 + \sin^2 x) \operatorname{arctg}(\sin x)}.$$

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме. **Основная: 1-7**

Практическое занятие № 28-34

Тема: Дифференциал функции

Дифференцирование функций, заданных параметрически. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница

Правило Лопиталя

Формируемые компетенции: ОПК-3

Эту тему, как и тему 1, можно изучать по любому из учебников [1-6]. Но мы рекомендуем учебники [1, глава 3, § 27-30], [3, глава 9, § 1-5].

Вопросы для самопроверки

1. Что называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$?
2. Зависит ли величина определенного интеграла от способа разбиения $[a, b]$? А от выбора промежуточных точек ξ_i ?
3. Каков геометрический смысл интегральной суммы и определенного интеграла?
4. Сформируйте необходимое условие интегрируемости функции.
5. Как составляются суммы Дарбу, и какими свойствами они обладают?
6. Какая связь существует между суммами Дарбу и интегральными суммами при определенном разбиении?
7. Сформируйте основные свойства определенного интеграла.
8. Сформулируйте и докажите теорему о среднем. Каков ее геометрический смысл?
9. Используя теорему о среднем, докажите непрерывность определенного интеграла с переменным верхним пределом как функции верхнего предела.
10. Запишите основную формулу интегрального исчисления.
11. Установите связь между определенным и неопределенным интегралом.
12. При каких условиях применима формула замены переменной в определенном интеграле?
13. Выведите указанную формулу.
14. Приведите пример определенного интеграла, который можно вычислить по формуле замены переменной. Вычислите его.
15. Почему при вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной нет необходимости за тем возвращаться к старой переменной как мы это делали при вычислении неопределенного интеграла?
16. Определите логарифмическую функцию через интеграл.
17. Выведите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла.
18. Вычислите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ и $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, где n - целое неотрицательное число.
19. Как можно вычислить интеграл от четной функции по отрезку $[-a, a]$? В чем геометрический смысл его?
20. Чему равен интеграл от нечетной функции по отрезку $[-a, a]$? Дайте геометрическую интерпретацию.
21. Может ли интеграл от положительной функции по отрезку $[a, b]$ $a < b$, быть отрицательным?

§1. Определение и основные свойства определенного интеграла.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

На каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i, \quad \text{где } \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ - длина частичного отрезка,}$$

которая называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Определение. Предел интегральной суммы при условии, что число частичных отрезков неограниченно увеличивается, а длина наибольшего из них стремится к нулю, называется определенным интегралом функции $f(x)$ в пределах от $x=a$ до $x=b$ и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\max \Delta x \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Если функция непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке, т.е. вышеуказанный предел существует и не зависит от способа разбиения промежутка интегрирования $[a, b]$ на частичные отрезки и от выбора точек ξ_i при каждом таком разбиении.

Основные свойства

$$1. \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$2. \quad \int_a^b [A \cdot f_1(x) + B \cdot f_2(x)] dx = A \int_a^b f_1(x) dx + B \int_a^b f_2(x) dx.$$

(A и B - постоянные).

$$3. \quad \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{где } c \text{ - некоторая точка, лежащая внутри отрезка } [a, b].$$

4. Если $f(x) \leq \varphi(x)$ при $a \leq x \leq b$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

5. Если m – наименьшее, а M – наибольшие значения функции $f(x)$ на отрезке $a \leq x \leq b$, то

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a).$$

6. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке найдется такая точка ξ , что

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a).$$

Число $f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке от $[a, b]$.

Пример 1. Вычислим интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, используя определение определенного интеграла как предела интегральной суммы.

РЕШЕНИЕ. Разобьем отрезок $[1, 2]$ точками $x_0 = 1, x_1, x_2, \dots, x_n = 2$ на n частичных сегментов так, чтобы точки деления составляли геометрическую прогрессию, (для удобства вычислений). Обозначим через q знаменатель прогрессии, точки разбиения будут $1, q, q^2, \dots, q^n = 2$ и, следовательно,

$$q = \sqrt[n]{2} > 1.$$

Тогда Δx_i будут равны

$$q - 1, q^2 - q, q^3 - q^2, \dots, q^n - q^{n-1}.$$

Выберем точки ξ_i , совпадающие с правыми концами отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, т.е.

$$q, q^2, q^3, \dots, q^n = 2$$

Поэтому

$$f(\xi_i) = \frac{1}{q^i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Интегральная сумма имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \frac{1}{q}(q-1) + \frac{1}{q^2}(q^2-q) + \frac{1}{q^3}(q^3-q^2) + \dots + \frac{1}{q^n}(q^n-q^{n-1}) = \\ &= \frac{1}{q}(q-1) + \frac{1}{q}(q-1) + \dots + \frac{1}{q}(q-1) = \frac{n}{q}(q-1) = \frac{n(\sqrt[n]{2}-1)}{\sqrt[n]{2}} = \frac{n(2^{1/n}-1)}{2^{1/n}}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{n(2^{1/n}-1)}{2^{1/n}} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} n(2^{1/n}-1) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{(2^{1/n}-1)}{1/n} = \ln 2.$$

Здесь использовались известные пределы:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{a^{1/n}-1}{1/n} = \ln a, \quad a > 0, \quad \lambda = \max \Delta x_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Таким образом:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2.$$

Пример 2. Вычислим интеграл $\int_0^1 x^2 dx$.

РЕШЕНИЕ. Поступая аналогично примеру 1, получим:

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

Длина каждого полученного частичного отрезка

$$\left[0; \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}; \frac{n}{n}\right] \text{ равна } \frac{1}{n}.$$

Правые концы этих отрезков выберем за ξ_i , а именно:

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sigma &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot \frac{3}{n} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \cdot \frac{n}{n} = \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Самостоятельно вычислите интегралы:

$$\text{а) } \int_1^2 x^2 dx, \quad \text{б) } \int_0^2 e^x dx, \quad \text{в) } \int_1^3 \frac{dx}{x^2}, \quad \text{г) } \int_0^1 x^3 dx,$$

Пример 3. Выясним, какой из интегралов больше (не вычисляя).

$$\int_0^1 e^{x^2} dx, \quad \text{или} \quad \int_0^1 e^x dx, \quad \text{или} \quad \int_1^2 e^{x^2} dx, \quad \text{или} \quad \int_1^2 e^x dx.$$

РЕШЕНИЕ.

а) Так как $e^{x^2} \leq e^x$ при $x \in [0,1]$ то по свойству 4, второй интеграл больше.

Пример 4. Оценим интегралы:

$$\text{а) } \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2x + 4} dx; \quad \text{б) } \int_{\pi/6}^{-\pi/2} \frac{\cos^2 x}{x} dx.$$

РЕШЕНИЕ. а) Функция $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$ монотонно возрастает на отрезке $x \in [0,1]$. Поэтому наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах отрезка.

$$m = f(0) = 2, \quad M = f(1) = \sqrt{7} \approx 2,65$$

Длина отрезка интегрирования $b - a = 1$ по свойству 5 мы получаем оценку

$$2 \leq \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2x + 4} dx \leq 2,65.$$

б) Функции $\cos^2 x$ и $\frac{1}{x}$ монотонно убывают на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ поэтому произведение их также монотонно. Следовательно,

$$M = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{9}{2\pi}, \quad m = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad b - a = \frac{\pi}{3}.$$

Итак, по свойству 5 имеем:

$$0 \leq \int_{\pi/6}^{-\pi/2} \frac{\cos^2 x}{x} dx \leq \frac{3}{2}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Оцените интегралы:

$$151. \int_0^2 \sqrt{9+x^4} dx$$

$$152. \int_0^3 \frac{x^2+2}{x^2+3} dx$$

$$153. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{x} dx$$

$$154. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$$

$$155. \int_0^{\pi/2} x \sin x dx$$

$$156. \int_1^e x^2 \ln x dx.$$

Пример 5. Найдем среднее значение функции на указанном отрезке:

а) $f(x) = \cos^2 x, \quad x \in [0, \pi]$

б) $f(x) = 7x + 3, \quad x \in [-1, 1]$.

РЕШЕНИЕ. а) по определению среднего значения функции на заданном отрезке (смотрите свойство б) имеем:

$$f(\xi) = \frac{1}{\pi - 0} \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} dx + \int_0^{\pi} \cos 2x dx \right].$$

Из геометрических соображений ясно, что

$$\int_0^{\pi} dx = \pi, \quad \int_0^{\pi} \cos 2x dx = 0, \quad (\text{см. рис. 1})$$

Следовательно,

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} [\pi + 0] = \frac{1}{2}$$

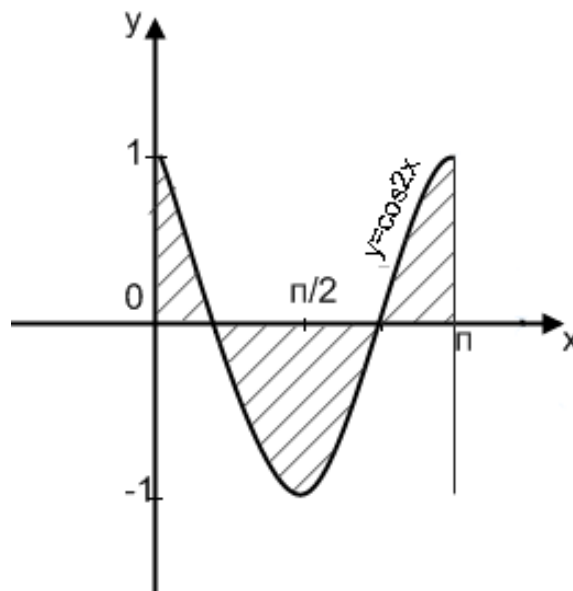
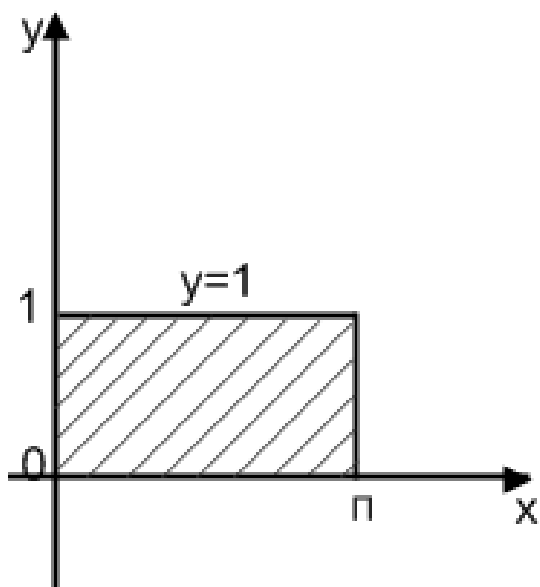


Рис. 1

б) Аналогично получаем:

$$f(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (7x + 3) dx = \frac{7}{2} \int_{-1}^1 x dx + \frac{3}{2} \int_{-1}^1 dx.$$

$$\int_{-1}^1 x \, dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-1}^1 dx = 2 \quad (\text{см. рис. 2}).$$

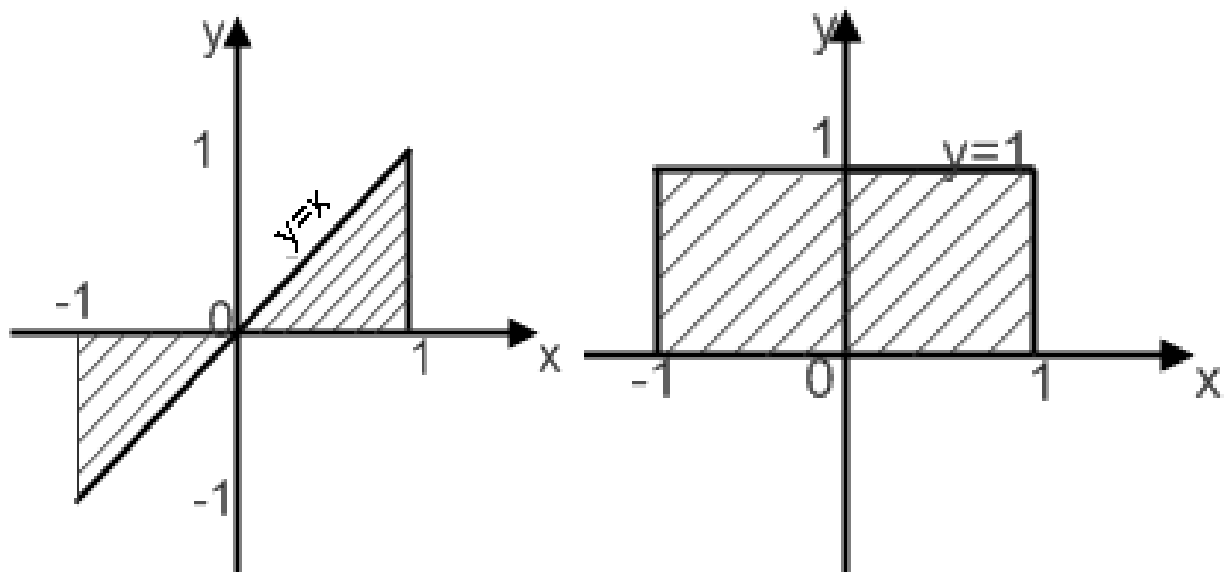


Рис. 2

Следовательно, $f(\xi) = 3$.

Пример 6. Найдем производную функции:

$$F(x) = \int_x^{x^5} \ln t \, dt.$$

РЕШЕНИЕ. Из теоремы нам известно, что производная интеграла с постоянным нижним пределом и переменным верхним пределом равна подынтегральной функции при значении ее аргумента, равном верхнему пределу.

Вначале, используя свойства 3 и, преобразуем данный интеграл:

$$F(x) = \int_x^a \ln t \, dt + \int_a^{x^5} \ln t \, dt = \int_a^{x^5} \ln t \, dt - \int_a^x \ln t \, dt.$$

Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдем производную заданной функции:

$$F' = 5x^4 \ln x^5 - \ln x = (25x^4 - 1) \ln x.$$

Пример 7. Найдем производную $\frac{dx}{dy}$ функции, заданной параметрическими уравнениями:

$$x = \int_1^{t^2} \frac{e^2}{x^2} dx, \quad y = \int_0^{2t^2} e^x dx.$$

РЕШЕНИЕ. Как мы уже знаем из предыдущей части математического анализа, что если функция задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

$$\text{то} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}, \quad \text{найдем} \quad \frac{dy}{dx} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = 4te^{2t^2} \quad \frac{dx}{dt} = 2t \frac{e^{t^2}}{t^4} = \frac{2e^{t^2}}{t^3}$$

Таким образом,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t \cdot e^{2t^2} \cdot t^3}{2e^{t^2}} = 2t^4 \cdot e^{t^2}.$$

Пример 8. Найдем точки экстремума и точки перегиба функции

$$y = F(x) = \int_0^x (t-1)(t-2)^2 dt, \quad x \in (0; +\infty)$$

РЕШЕНИЕ. Найдем критические точки функции $y = F(x)$ на заданном промежутке $(0; +\infty)$, для чего продифференцируем её (см. пример 6).

$$F'(x) = (x-1)(x-2)^2.$$

Тогда $F'(x) = 0$, если $x = 1$ или $x = 2$. Получили две критические точки $x = 1$ и $x = 2$, принадлежащие интервалу $(0; +\infty)$.

Найдем вторую производную функции $F(x)$ на промежутке $(0; +\infty)$.

$$F''(x) = (x-1)(x-2) + 2(x-1)(x-2) = (x-2)(3x-4).$$

Тогда $F''(x) = 0$ если $x = 1$ или $x = \frac{4}{3}$.

Получили две точки «подозрительные на перегиб».

Составим таблицу:

x	$(0,1)$	1	$\left(1, \frac{4}{3}\right)$	$\frac{4}{3}$	$\left(\frac{4}{3}, 2\right)$	2	$(2, +\infty)$
y'	-	0	+	+	+	0	+
y''	+	+	+	0	-	0	+

Следовательно, $x = 1$ является точкой минимума, а $x = \frac{4}{3}$ и $x = 2$ — точками перегиба заданной функции.

Пример 9. Найдем предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctgt)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

РЕШЕНИЕ. При $x \rightarrow \infty$ имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Очевидно, все условия для использования правила Лопиталья выполняются.

Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\arctgt)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x (\arctgt)^2 dt \right)'}{\left(\sqrt{x^2 + 1} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\arctgx)^2}{x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Здесь использовали равенство:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1.$$

Пример 10. Найдем предел

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{tgt} dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt} = 1.$$

РЕШЕНИЕ. При $x \rightarrow +0$ имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Применяя правило Лопиталья, получаем:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{tgt} dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t} dt} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\cos \sqrt{\operatorname{tg} \sin x}}{\frac{1}{\cos^2 x} \sqrt{\sin \operatorname{tg} x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} \sin x}}{\sqrt{\sin \operatorname{tg} x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}} = 1.$$

Пример 11. Найдем радиус кривизны линии:

$$x = \int_0^t \cos e^z dz,$$

$$y = \int_0^t \sin e^z dz.$$

РЕШЕНИЕ. Кривизну кривой вычисляем по известной формуле:

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

В нашем случае кривая задана параметрическими уравнениями. Дифференцируем ее (см. пример 7) уравнения:

$$x_t' = \cos e^t, \quad y_t' = \sin e^t.$$

Следовательно,

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\sin e^t}{\cos e^t} = \operatorname{tg} e^t, \quad y_x'' = \frac{(y_t')_t'}{x_t'} = \frac{e^t}{\cos^3 e^t}.$$

Поэтому кривизна

$$K = \frac{e^t}{\cos^3 e^t (1 + \operatorname{tg}^2 e^t)^{3/2}} = e^t.$$

Тогда радиус кривизны заданной линии

$$\rho = \frac{1}{K} = e^{-t}.$$

Пример 12. Продифференцируем функцию, заданную неявно:

$$\int_0^y e^t dt + \int_0^x \cos t dt = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Считая $y = y(x)$ продифференцируем заданное равенство по переменной x

$$\left(\int_0^y e^t dt \right)'_x + \left(\int_0^x \cos t dt \right)'_x = 0.$$

Или

$$e^y y' + \cos x = 0.$$

Отсюда имеем: $y' = -\frac{\cos x}{e^y}$

УПРАЖНЕНИЯ

157. Найдите среднее значение функции $f(x)$ на указанных сегментах:

а). $f(x) = 2x^2 + 5, \quad x \in [0, 1]$

б). $f(x) = \sin x, \quad x \in [0, 2\pi]$

в). $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, 2]$.

158. Не вычисляя интегралов, установите, какой из интегралов больше:

а) $\int_1^2 x dx$ или $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ б) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ или $\int_0^{\pi/2} x^2 dx$.

В задачах 159-163 найдите производные следующих функций:

159. $y = \int_2^{\sqrt{x}} \frac{2 \sin t}{t} dt \quad (x > 0)$

160. $z = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 2 \sin t^2 dt \quad (x > 0)$

161. $x = \int_1^t \frac{\cos x}{x} dx, \quad y = \int_1^t \frac{\sin x}{x} dx$

162. $y = \int_0^y e^{-t^2} dt + \int_0^{x^2} \sin^2 t dt = 0$

163. $\int_{\pi/2}^x \sqrt{3 - 2 \sin^2 z} dz + \int_0^y \cos 2t dt = 0$

164. Найдите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{x} dx}{x^3}$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}$

165. Найдите экстремум функции

$$\hat{O}(x) = \int_1^x e^{\frac{-t^2}{2}} (1 - t^2) dt$$

166. Найдите радиус кривизны линии:

$$x = \int_0^t \frac{e^t}{1+t^2} dt \qquad y = \int_0^t \frac{e^{2t}}{1+t^2} dt$$

167. Найдите значение второй производной по z от функции

$$y = \int_0^{z^2} \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{при } z=1.$$

§2. Формула Ньютона-Лейбница

В §1, используя определение определенного интеграла, мы вычислили интегралы в примерах 65 и 66 и убедились в том, что этот способ вызывает некоторые трудности и громоздкие выкладки. Еще в средней школе мы познакомились с формулой Ньютона-Лейбница, которая носит название основной формулы интегрального исчисления. Она является самым простым и эффективным средством вычисления определенного интеграла и имеет вид:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{1}$$

т.е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Замечание. Прежде чем приступить к применению формулы Ньютона-Лейбница к заданному определенному интегралу, надо посмотреть, не имеет ли подынтегральная функция особых точек. Если она на данном промежутке интегрирования непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода, то формулу Ньютона-Лейбница можно применять. Если же в промежутке интегрирования подынтегральная функция имеет хотя бы одну точку разрыва II рода, то применять эту формулу нельзя.

Например, рассмотрим интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$. Применяя формулу Ньютона-Лейбница, мы получаем результат

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2,$$

который, безусловно, является неверным, т.к. определенный интеграл от положительной во всем промежутке интегрирования функции, не может быть отрицательным. Ошибка

заключается в том, что подынтегральная функция $\frac{1}{x^2}$ в точке $x=0$, принадлежащей промежутку интегрирования, имеет разрыв II рода. Поэтому формулу Ньютона-Лейбница для данного интеграла применять нельзя. Об этом интеграле мы поговорим позже, при изучении темы 4, (см. стр.134-135)

Замечание. При вычислении определенных интегралов следует помнить, что если $f(x)$ является четной функцией, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx,$$

а если $f(x)$ является нечетной функцией, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Пример 13. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{2}} dx$.

РЕШЕНИЕ. Используя известную формулу

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \cos x$$

получаем:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{2}} dx = \int_0^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi} = 0.$$

Однако, подынтегральная функция $\frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sqrt{2}}$ на промежутке $[0, \pi]$ лишь в точке

$x = \frac{\pi}{2}$ равна нулю, а в остальных точках отрезка $[0, \pi]$ положительна. Следовательно, наш результат неверный. Где допущена ошибка? Подумайте самостоятельно.

Примеры. Вычислим следующие интегралы:

$$14. \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx; \quad 15. \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}; \quad 16. \int_0^3 \frac{x^2}{x^6+1} dx.$$

РЕШЕНИЕ

14. Используя формулу (1) Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx &= - \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) d(\cos x) = \left[-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^{\pi/2} = \\ &= -\cos \frac{\pi}{2} + \frac{\cos^3 \frac{\pi}{2}}{3} + \cos 0 - \frac{\cos^3 0}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}15. \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} &= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \arcsin \ln x \Big|_1^{\sqrt{e}} = \\ &= \arcsin \ln \sqrt{e} - \arcsin \ln 1 = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

$$16. \int_0^3 \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{d(x^3)}{(x^3)^2 + 1} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 \Big|_0^3 = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 27 - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 0 = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 27.$$

17. Вычислим интегралы:

$$\text{a) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nxdx, \quad \text{б) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nxdx, \quad \text{в) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nxdx$$

где m и n – целые, положительные числа.

РЕШЕНИЕ. а) Подынтегральная функция $\sin mx \cos nx$ является нечетной, следовательно, при любых m и n имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nxdx = 0.$$

б) Подынтегральная функция $\sin mx \sin nx$ является четной, следовательно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nxdx = 2 \int_0^{\pi} \sin mx \sin nxdx.$$

Используя формулы $\sin \alpha \cdot \cos \beta$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nxdx = \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right] \Big|_0^{\pi}, m \neq n \right\} =$$

$$\left\{ \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2nx}{2n} \right] \Big|_0^{\pi}, m = n \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\pi}{m+n} \right]_0^\pi, m \neq n \\ &\frac{1}{2} \left[\pi - \frac{\sin 2n\pi}{2n} \right]_0^\pi, m = n \end{aligned} \right\}.$$

Так как $\sin k\pi = 0$ при целом k , то имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \pi, m = n \end{cases}.$$

в) Поступая по аналогии с примером б), находим:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= 2 \int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_0^\pi, m \neq n \\ &\left[x + \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_0^\pi, m = n \end{aligned} \right\} = \\ &= \begin{cases} 0, m \neq n \\ \pi, m = n \end{cases} \end{aligned}$$

Замечание. Полученные равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \pi, m = n \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \pi, m = n \end{cases}$$

Называются условиями ортогональности последовательностей тригонометрических функций

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin mx \dots$$

$$\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \cos mx \dots$$

18. Вычислим интегралы:

$$\text{а) } \int_{-3}^3 (9x^5 + 7x^4 - \sqrt{3}x^3 + 2x) dx \quad \text{б) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (3\cos^2 x - 2x^8 \sin^3 x) dx.$$

РЕШЕНИЕ. а) Представим данный интеграл в виде суммы двух интегралов, один из которых от нечетной функции (равен нулю), а другой от четной функции. Имеем :

$$\int_{-3}^3 (9x^5 + 7x^4 - \sqrt{3}x^3 + 2x)dx + 7 \int_{-3}^3 x^4 dx = 14 \int_0^3 x^4 dx = 14 \frac{x^5}{5} = \frac{3402}{5} = 680 \frac{2}{5}.$$

б) Аналогично учитывая, что $2x^8 \sin^3 x$ нечетная функция, а $3 \cos^3 x$ четная, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (3 \cos^2 x - 2x^8 \sin^3 x) dx &= 2 \cdot 3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx = 3 \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЯ

Применяя формулу (1) Ньютона-Лейбница, вычислите следующие интегралы:

$$\begin{array}{lll} 162. \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx & 163. \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}} & 164. \int_0^1 \sqrt{1+x} dx \\ 165. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{(x^2+1)^2} & 166. \int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} & 167. \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx \\ 168. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} & 169. \int_0^1 \frac{x dx}{x^2+3x+2} & 170. \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos x} \\ 171. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x} & 172. \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} & 173. \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} \end{array}$$

§3. Замена переменной в определенном интеграле

Замена переменной осуществляется по формуле:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\beta}^{\alpha} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt \quad (2)$$

где, $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$.

Эта формула справедлива, в частности, если $f(x)$ – непрерывная функция, подстановка $x = \varphi(t)$ сама непрерывна и имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Заметим, что при вычислении определенного интеграла методом замены переменной, в отличие от неопределенного интегрирования, возврат к старой переменной не требуется.

На практике замену переменной, как правило, производят с помощью монотонных непрерывных функций, так как они гарантируют однозначность как прямой, так и обратной функции и при изменении переменной t в промежутке $[\alpha, \beta]$.

ПРИМЕРЫ

В следующих задачах, с помощью подходящих подстановок вычислим интегралы:

$$19. \int_0^8 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$$

РЕШЕНИЕ. Положим $x = t^2$, $t > 0$, получаем $t = 0$, а при $x = 8$ имеем $t = 2\sqrt{2}$; поэтому, по формуле (2) находим:

$$\int_0^8 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{2t dt}{1 + t} = 2 \int_0^{2\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + t} \right) dt = \left(2t - \ln|1 + t| \right) \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 2(2\sqrt{2} - \ln(1 + 2\sqrt{2}))$$

$$20. \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = 2 \sin t, \quad x \mid y \\ dx = 2 \cos t dt, \quad 0 \mid 0 \\ 1 \mid \pi/6 \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{\pi/6} \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} 2 \cos t dt = 4 \int_0^{\pi/6} \cos^2 t dt = \\ &= 2 \int_0^{\pi/6} (1 + \cos 2t) dt = 2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Обоснуйте возможность указанной подстановки самостоятельно.

УПРАЖНЕНИЯ

Применяя соответствующую замену переменной, вычислите интеграл:

$$\begin{array}{lll}
174. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} & 175. \int_0^1 \sqrt{x^2+2x} dx & 176. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx \\
177. \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1+e^{2x}} dx & 178. \int_5^{10} \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}} dx & 179. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{1-\sin x} \\
180. \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}} & 181. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x} & 182. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx \\
183. \int_{-1}^1 (e^x e^{-x}) \lg x dx & 184. \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x + \sin x} & 185. \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1} \\
186. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x^7-3x^3+2x^3-x+4}{\cos^2 x} dx & 187. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x} & 188. \int_0^1 \frac{5dx}{e^x + e^{-x}}.
\end{array}$$

§4. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если функция $u(x)$ и $v(x)$ – непрерывна вместе со своими производными в промежутке $[a, b]$, то имеет место формула интегрирования по частям для определенного интеграла:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du, \quad (3)$$

где символ $u \cdot v \Big|_a^b$ обозначает разность $u(b) \cdot v(b) - u(a) \cdot v(a)$.

Все сказанное по поводу применения формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла относится так же и к формуле (3).

Пример. Вычислим следующие интегралы:

$$21. \int_0^3 x \cdot \arctg x dx$$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} \int_0^3 x \cdot \arctg x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arctg x, du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x dx, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \arctg x \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{x^2 dx}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{9}{2} \arctg 3 - \frac{1}{2} \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx = \\ &= \frac{9}{2} \arctg 3 - \frac{1}{2} (x - \arctg x) \Big|_0^3 = 5 \arctg 3 - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

22. $\int_0^1 x e^{-x} dx$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{-x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = e^{-x} dx, v = -e^{-x} \end{array} \right| = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = \\ &= -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЯ

Вычислите интегралы:

189. $\int_0^{1/2} \arcsin x dx$

190. $\int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$

191. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}$

192. $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$

193. $\int_2^1 x \ln x dx$

194. $\int_1^e \sin(\ln x) dx$

195. $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx$

196. $\int_0^1 \arctg \sqrt{x} dx$

197. $\int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx$

198. $\int_{-1}^1 x 2^x dx$

199. $\int_{-a\sqrt{a^2+x^2}}^a \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

200. $\int_1^2 x^2 (\ln x)^2 dx$

В теории доказываются (см., например, [3, глава 9, §9, пример 3]) рекуррентные формулы для интегралов:

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx,$$

где n – целое неотрицательное число, а именно:

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2},$$

Тогда

$$J_n = \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\dots 1}{n(n-2)(n-4)\dots 2} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{если } n \text{ нечетное} \\ \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\dots 2}{n(n-2)(n-4)\dots 3}, & \text{если } n \text{ четное} \end{cases} = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{если } n \text{ нечетное} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{если } n \text{ четное} \end{cases}. \quad (4)$$

23. Используя формулу (4), вычислим интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx, \quad \text{б) } \int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx, \quad \text{в) } \int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx.$$

РЕШЕНИЕ.

$$\text{а) } n=3 \text{ (нечетное)}, \quad J_3 = \frac{2}{3} \quad (\text{сравни пример 9});$$

$$\text{б) } n=4 \text{ (четное)} \quad J_4 = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16} \pi;$$

$$\text{в) } n=5 \quad J_5 = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

201. Составьте рекуррентную формулу для интеграла $\int_0^{\pi} \cos^n x dx$ и вычислите

$$\int_0^{\pi} \cos^8 x dx \quad \text{и} \quad \int_0^{\pi} \cos^{11} x dx.$$

202. Выведите рекуррентную формулу для интеграла $J_n = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx$

и вычислите

$$\int_0^{2\pi} \cos^{10} x dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin^7 x dx$$

Из предыдущего раздела «дифференциальное исчисление» нам известно, какие замечательные и разнообразные приложения имеет математический анализ, как в самой математике, так и в смежных областях знания. В следующей теме мы покажем подробные приложения определенного интеграла.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме:

Основная литература:

Альсевич, Л. А. Пределы. Предел последовательности: пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики / Л. А. Альсевич, С. Г. Красовский, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович - Минск: БГУ, 2015. - 58 с.

Основы компьютерного моделирования: учебное пособие / К. А. Катков, И. П. Хвостова, В. И. Лебедев, Е. Н. Косова, А. А. Плехина, О. Л. Серветник, О. В. Вельц, М. Г. Крамаренко. – Ставрополь : Изд-во СКФУ, 2013. – 273 с.

Альсевич Л. А. Пределы. Предел функции: пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики / Л. А. Альсевич, С. Г. Красовский, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович. - Минск: БГУ, 2015

Дополнительная литература:

Кожевников П.А. О равномерной непрерывности функций / П.А. Кожевников. - М.: МФТИ, 2015.

Иванова С.В. Формула Тейлора и её применение при вычислении пределов функций / С.В. Иванова. - М.: МФТИ, 2014.

Балдин, К.В. Математический анализ: Учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукоусев. - М.: Флинта, МПСУ, 2013. - 368 с.

Боярчук, А.К. Справочное пособие по высшей математике. Т. 3. Часть 2: Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы / А.К. Боярчук, И.И. Ляшко, Я.Г. Гай. - М.: ЛИБРОКОМ, 2015. - 256 с.

Будаев, В.Д. Математический анализ. Функции одной переменной: Учебник / В.Д. Будаев, М.Я. Якубсон. - СПб.: Лань, 2014. - 544 с.

Гаврилов, В.И. Математический анализ: Учебное пособие для студентов учреждений высшего профессионального образования / В.И. Гаврилов, Ю.Н. Макаров, В.Г. Чирский. - М.: ИЦ Академия, 2013. - 336 с.

Горлач, Б.А. Математический анализ: Учебное пособие / Б.А. Горлач. - СПб.: Лань, 2013. - 308 с.

Лейнартас, Е.К. Математический анализ: Учебное пособие для бакалавров / А.М. Кытманов, Е.К. Лейнартас, В.Н. Лукин; Под ред. А.М. Кытманов. - М.: Юрайт, 2015. - 607 с.

Методическая литература:

учебное пособие
сборник практических заданий

Интернет-ресурсы:

Белов Е.Б. Основы информационной безопасности. Учебное пособие для вузов/Е.Б. Белов, В.П. Лось, Р.В. Мещеряков, А.А. Шелупанов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2015, - 544 с. – Доступно: <http://www.alleng.ru/d/comp/comp51.htm>

Воройский Ф. С. Информатика. Энциклопедический словарь-справочник: введение в современные информационные и телекоммуникационные технологии в терминах и фактах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. - 768 с. – Доступно: <http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/slovar.zip>

Информатика: Практикум по технологии работы на компьютере /Под ред. Н.В. Макаровой. - 3-е изд., перераб. - М.: Финансы и статистика, 2013. - 256 с. – Доступно: http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/makarova_3.zip

Могилев А. В., Пак Н. И., Хеннер Е. К. Информатика: Учеб. Пособие для студ. пед. вузов. / Под ред. Е. К. Хеннера. – М.: Изд. центр «Академия», 2014. – 848 с. – Доступно: http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/mogilev_uchebn.zip

Могилев А. В. Практикум по информатике: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / А.В.Могилев, Н.И.Пак, Е.К.Хеннер; Под ред. Е.К.Хеннера. – 2-е изд.,стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 608 с. – Доступно: http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/mogilev_praktik.zip

Романова Ю.Д. Информатика и информационные технологии. Конспект лекций: учеб. пособие / Ю.Д. Романова, И.Г. Лесничная. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Эксмо, 2014, – 320 с. – Доступно: http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/romanova_2.rar

Симонович С.В. Информатика. Базовый курс. 2-е издание / Под ред. С. В. Симоновича. – СПб.: Питер, 2014. – 640 с. – Доступно: http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/kurs_informat.rar

Савельев А. Я. Основы информатики: Учеб. для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – 328 с. – Доступно: <http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/saveliev.zip>

Соболь Б.В. Информатика: учебник/ Б.В. Соболь [и др.] – Изд. 3-е, дополн. и перераб. – Ростов н/Д: Феникс, 2013. – 446 с. – Доступно: <http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/Sobol.rar>

Степанов А.Н. Информатика: учебник для вузов. – 4-е изд. – СПб.: Питер, 2014. – 684 с. – Доступно: <http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/stepanov.rar>

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «Математический анализ»
для студентов направления подготовки
10.03.01 Информационная безопасность
Направленность (профиль)
«Организация и технологии защиты информации (по отрасли или в сфере
профессиональной деятельности)»

Ставрополь
2026

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Общая характеристика самостоятельной работы студента
2. Технологическая карта самостоятельной работы студента
3. Самостоятельное изучение тем лекций
4. Паспорт фонда оценочных средств для проверки самостоятельной работы
5. Список рекомендуемой литературы

ВВЕДЕНИЕ

Целью изучения дисциплины «Математический анализ» является научное обоснование, фундаментальных понятий: теории комплексных и вещественных чисел; основных методов вычисления пределов, производных, неопределенных, определенных интегралов, рядов; обучение методам работы с непрерывными функциями; методам дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной; основам теории числовых и функциональных рядов, а также приобретение набора общекультурных и общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 10.03.01 Информационная безопасность.

Задачами дисциплины являются:

1. Расширение и углубление знаний, умений и навыков, определяемых содержанием базовых дисциплин.
2. Умение проводить обработку и анализ полученных результатов при проведении экспериментов по заданной методике.
3. Формирование исследовательской позиции и исследовательского поведения.
4. Развитие мыслительных операций.
5. Воспитание математической и профессиональной культуры.
6. Обучение решению учебных и жизненных проблем путем анализа информации.
7. Расширение математического кругозора студентов.

1. Общая характеристика самостоятельной работы студента при изучении дисциплины

Самостоятельная работа включает те разделы курса, которые не получили достаточного освещения на лекциях по причине ограниченности лекционного времени и большого объема изучаемого материала.

Методическое обеспечение самостоятельной работы по дисциплине состоит из:

- 1) Определения учебных вопросов, которые студенты должны изучить самостоятельно;
- 2) Подбора необходимой учебной литературы, обязательной для проработки и изучения;
- 3) Поиска дополнительной научной литературы, к которой студенты могут обращаться по желанию, если у них возникает интерес в данной теме;
- 4) Определения контрольных вопросов, позволяющих студентам самостоятельно проверить качество полученных знаний;
- 5) Организации консультаций преподавателя со студентами для разъяснения вопросов, вызвавших у обучающихся затруднения при самостоятельном освоении учебного материала.

Самостоятельная работа студента – это особым образом организованная деятельность, включающая в свою структуру такие компоненты, как:

- уяснение цели и поставленной учебной задачи;
- четкое и системное планирование самостоятельной работы;
- поиск необходимой учебной и научной информации;
- освоение собственной информации и ее логическая переработка;
- использование методов исследовательской, научно-исследовательской работы для решения поставленных задач;
- выработка собственной позиции по поводу полученной задачи;
- представление, обоснование и защита полученного решения;
- проведение самоанализа и самоконтроля

К основным видам самостоятельной работы студентов относится:

- работа с понятийным аппаратом;
- конспектирование первоисточников;
- проектирование фрагментов исследовательской деятельности;
- анализ научных исследований по психологической проблематике;
- подготовка доклада по теме.

Контроль знаний студентов включает формы текущего и итогового контроля. Текущий контроль осуществляется в процессе изучения курса и включает в себя оценку работы студентов на практических занятиях (круглый стол, собеседование, групповые научные проекты, тестирование), а также подготовку домашнего задания.

2. Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реализуемых компетенций, индикатора(ов)	Вид деятельности студентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе		
			СРС	Контактная работа с преподавателем	Всего
1 семестр					
ИД-2 ОПК-3 ИД-3 ОПК-3	Подготовка к лекциям	Конспект	2.00	2.00	4.00
ИД-2 ОПК-3 ИД-3 ОПК-3	Подготовка к практическим занятиям	Письменный отчет с решением разноуровневых задач	3.00	2.00	5.00
ИД-2 ОПК-3 ИД-3 ОПК-3	Самостоятельное изучение литературы	Конспект	3.00	2.00	5.00
ИД-2 ОПК-3 ИД-3 ОПК-3	Подготовка доклада	Письменный отчет	2.00	2.00	4.00
Итого за 1 семестр			10.00	8.00	18.00
2 семестр					
ИД-2 ОПК-3 ИД-3 ОПК-3	Подготовка к экзамену	Вопросы к экзамену	14.00	2.00	16.00
ИД-2 ОПК-3 ИД-3 ОПК-3	Подготовка к лекциям	Конспект	14.00	2.00	16.00
ИД-2 ОПК-3 ИД-3 ОПК-3	Подготовка к практическим занятиям	Письменный отчет с решением разноуровневых задач	14.00	2.00	16.00
ИД-2 ОПК-3 ИД-3 ОПК-3	Самостоятельное изучение литературы	Конспект	14.00	2.00	16.00

ИД-2 ОПК-3	Подготовка	Письменный	14.00	2.00	16.00
ИД-3 ОПК-3	доклада	отчет			
Итого за 2 семестр			70.00	10.00	80.00
Итого			80.00	18.00	98.00

3. Порядок выполнения самостоятельной работы

3.1 Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Комплексное изучение предлагаемой студентам учебной дисциплины «Математический анализ» предполагает овладение материалами лекций, учебников, программы, творческую работу студентов в ходе проведения практических занятий, а также систематическое выполнение заданий для самостоятельной работы.

В ходе лекций раскрываются основные вопросы в рамках рассматриваемых тем, делаются акценты на наиболее сложные и интересные положения изучаемого материала, которые должны быть приняты студентами во внимание. Материалы лекций являются основой для подготовки студентов к практическим занятиям.

Работа с конспектом лекций

Просмотрите конспект сразу после занятий. Отметьте материал конспекта лекций, который вызывает затруднения для понимания. Попытайтесь найти ответы на затруднительные вопросы, используя предлагаемую литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, сформулируйте вопросы и обратитесь на текущей консультации или на ближайшей лекции за помощью к преподавателю.

Каждую неделю отводите время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам и тестам.

Выполнение практических занятий по дисциплине «Математический анализ»

На первом занятии получите у преподавателя задания по курсу, планы подготовки к практическим занятиям. Обзаведитесь всем необходимым методическим обеспечением.

Перед практическими занятиями изучите теорию вопроса, предполагаемого к исследованию, ознакомьтесь с опытом других исследователей в этом направлении.

Целью практических занятий является:

- **закрепление методов приложения теории к решению практических задач анализа и синтеза психологического знания;**
- проверка уровня понимания студентами вопросов, рассмотренных на лекциях и по учебной литературе, степени и качества усвоения материала;
- обучение навыкам освоения методики эксперимента и работы с нормативно-справочной литературой;
- **восполнение пробелов в пройденной теоретической части курса и оказание помощи в его усвоении.**

3.2 Методические рекомендации по написанию и оформлению доклада

1. Общие положения

1.1. Доклад, как вид самостоятельной работы в учебном процессе, способствует формированию навыков исследовательской работы, расширяет познавательные интересы, учит критически мыслить.

1.2. При написании доклада по заданной теме студент составляет план, подбирает основные источники.

1.3. В процессе работы с источниками систематизирует полученные сведения,

делает выводы и обобщения.

1.4. К докладу по крупной теме могут привлекать несколько студентов, между которыми распределяются вопросы выступления.

2. Выбор темы доклада

2.1. Тематика доклада обычно определяется преподавателем, но в определении темы инициативу может проявить и студент.

2.2. Прежде чем выбрать тему доклада, автору необходимо выявить свой интерес, определить, над какой проблемой он хотел бы поработать, более глубоко ее изучить.

3. Этапы работы над докладом

3.1. Формулирование темы, причем она должна быть не только актуальной по своему значению, но и оригинальной, интересной по содержанию.

3.2. Подбор и изучение основных источников по теме (как правильно, при разработке доклада используется не менее 8-10 различных источников).

3.3. Составление списка использованных источников.

3.4. Обработка и систематизация информации

3.5. Разработка плана доклада.

3.6. Написание доклада.

3.7. Публичное выступление с результатами исследования.

4. Структура доклада:

- титульный лист

- оглавление (в нем последовательно излагаются названия пунктов доклада, указываются страницы, с которых начинается каждый пункт);

- введение (формулирует суть исследуемой проблемы, обосновывается выбор темы, определяются ее значимость и актуальность, указываются цель и задачи доклада, дается характеристика используемой литературы);

- основная часть (каждый раздел ее, доказательно раскрывая отдельную проблему или одну из ее сторон, логически является продолжением предыдущего; в основной части могут быть представлены таблицы, графики, схемы);

- заключение (подводятся итоги или дается обобщенный вывод по теме доклада, предлагаются рекомендации);

- список использованных источников

5. Структура и содержание доклада

5.1. Введение - это вступительная часть научно-исследовательской работы. Автор должен приложить все усилия, чтобы в этом небольшом по объему разделе показать актуальность темы, раскрыть практическую значимость ее, определить цели и задачи эксперимента или его фрагмента.

5.2. Основная часть. В ней раскрывается содержание доклада.

Как правило, основная часть состоит из теоретического и практического разделов. В теоретическом разделе раскрываются история и теория исследуемой проблемы, дается критический анализ литературы и показываются позиции автора. В практическом разделе излагаются методы, ход, и результаты самостоятельно проведенного эксперимента или фрагмента.

В основной части могут быть также представлены схемы, диаграммы, таблицы, рисунки и т.д.

5.3. В заключении содержатся итоги работы, выводы, к которым пришел автор, и рекомендации. Заключение должно быть кратким, обязательным и соответствовать поставленным задачам.

5.4. Список использованных источников представляет собой перечень использованных книг, статей, фамилии авторов приводятся в алфавитном порядке, при этом все источники даются под общей нумерацией литературы. В исходных данных источника указываются фамилия и инициалы автора, название работы, место и год издания.

5.5. Приложение к докладу оформляются на отдельных листах, причем каждое должно иметь свой тематический заголовок и номер, который пишется в правом верхнем углу, например: «Приложение 1»

6. Требования к оформлению доклада

6.1. Объем доклада может колебаться в пределах 5-15 печатных страниц; все приложения к работе не входят в ее объем.

6.2. Доклад должен быть выполнен грамотно, с соблюдением культуры изложения.

6.3. Обязательно должны иметься ссылки на используемую литературу.

6.4. Должна быть соблюдена последовательность написания библиографического аппарата.

7. Критерии оценки доклада

- актуальность темы исследования;
- соответствие содержания теме;
- глубина проработки материала; правильность и полнота использования источников;
- соответствие оформления доклада стандартам.

По усмотрению преподавателя доклады могут быть представлены на семинарах, научно-практических конференциях, а также использоваться как зачетные работы по пройденным темам.

3.3 Методические рекомендации по конспектированию первоисточников

Изучение и анализ литературных источников является обязательным видом самостоятельной работы студентов. Изучение литературы по избранной теме имеет своей

задачей проследить характер постановки и решения определенной проблемы различными авторами, аргументацию их выводов и обобщений, провести анализ и систематизировать полученный материал на основе собственного осмысления с целью выяснения современного состояния вопроса.

Проработка отобранного материала обязательно должна идти с одновременным ведением записей прочитанного и своих замечаний. Запись может иметь как форму конспекта, так и выписок, а также картотеку положений, тезисов, идей, методик, что в дальнейшем облегчит классификацию и систематизацию полученного материала. Такого рода записи являются лучшим способом накопления и первичной обработки материал, одной из обязательных форм организации умственного труда.

Планом удобно пользоваться при подготовке к устному выступлению по выбранной теме. Каждый пункт плана должен раскрывать одну из сторон избранной темы, а весь план должен охватывать ее целиком.

Тезисы предполагают сжатое изложение основных положений текста в форме утверждения или отрицания. Они являются более совершенной формой записей и представляют основу для дискуссии. К тому же их легко запомнить.

Конспектирование – процесс мысленной переработки и письменной фиксации информации, в виде краткого изложения основного содержания, смысла какого-либо текста.

Результат конспектирования – запись, позволяющая конспектирующему немедленно или через некоторый срок с нужной полнотой восстановить полученную информацию. Конспект в переводе с латыни означает «обзор». По существу его и составлять надо как обзор, содержащий основные мысли текста без подробностей и второстепенных деталей. Конспект носит индивидуализированный характер: он рассчитан на самого автора и поэтому может оказаться малопонятным для других.

Для того чтобы осуществлять этот вид работы, в каждом конкретном случае необходимо грамотно решить следующие задачи:

1. Сориентироваться в общей композиции текста (уметь определить вступление, основную часть, заключение).
2. Увидеть логико-смысловую канву сообщения, понять систему изложения автором информации в целом, а также ход развития каждой отдельной мысли.
3. Выявить «ключевые» мысли, т. е. основные смысловые вехи, на которые «нанизано» все содержание текста.
4. Определить детализирующую информацию.
5. Лаконично сформулировать основную информацию, не перенося на письмо все целиком и дословно.

Во всяком научном тексте содержится информация 2-х видов: основная и вспомогательная. Основной является информация, имеющая наиболее существенное значение для раскрытия содержания темы или вопроса. К ней относятся: определения научных понятий, формулировки законов, теоретических принципов и т. д. Назначение вспомогательной информации – помочь читателю лучше усвоить предлагаемый материал. К этому типу информации относятся разного рода комментарии. Основную – записываем как можно полнее, вспомогательную, как правило, опускаем. Содержание конспектирования составляет переработка основной информации в целях ее обобщения и сокращения. Обобщить – значит представить ее в более общей, схематической форме, в виде тезисов, выводов, отдельных заголовков, изложения основных результатов и т. п.

Читая, мы интуитивно используем некоторые слова и фразы в качестве опорных. Такие опорные слова и фразы называются ключевыми. Ключевые слова и фразы несут основную смысловую и эмоциональную нагрузку содержания текста.

Выбор ключевых слов – это первый этап смыслового свертывания, смыслового сжатия материала.

Важными требованиями к конспекту являются наглядность и обозримость записей и такое их расположение, которое давало бы возможность уяснить логические связи и иерархию понятий.

По форме конспекты подразделяются на формализованные и графические.

1. Формализованные (все записи вносятся в заранее подготовленные таблицы).

Это удобно, во-первых, при конспектировании материалов, когда перечень характеристик описываемых предметов или явлений более или менее постоянен, во-вторых, при подготовке единого конспекта по нескольким источникам. Особенно если есть необходимость сравнения отдельных данных. Разновидностью формализованного конспекта является запись, составленная в форме ответов на заранее подготовленные вопросы, обеспечивающие исчерпывающие характеристики однотипных предметов или явлений.

2. Графические (элементы конспектируемой работы располагаются в таком виде, при котором видна иерархия понятий и взаимосвязь между ними).

По каждой работе может быть не один, а несколько графических конспектов, отображающих книгу в целом и отдельные ее части. Ведение графического конспекта – наиболее совершенный способ изображения внутренней структуры книги, а сам этот процесс помогает усвоению ее содержания.

Можно выделить следующие основные **типы конспектов: плановый, текстуальный, сводный, тематический.**

Плановый – легко получить с помощью предварительно сделанного плана произведения, каждому вопросу плана отвечает определенная часть конспекта:

а) вопросно-ответный (на пункты плана, выраженные в вопросительной форме, конспект дает точные ответы);

б) схематичный плановый конспект (отражает логическую структуру и взаимосвязь отдельных положений).

Текстуальный – это конспект, созданный в основном из цитат.

Сводный конспект – сочетает выписки, цитаты, иногда тезисы; часть его текста может быть снабжена планом.

Тематический – дает более или менее исчерпывающий ответ (в зависимости из числа привлеченных источников и другого материала, например, своих же записей) на поставленный вопрос – тему: обзорный; хронологический.

Роль конспекта – чисто учебная: он помогает зафиксировать основные понятия и положения первичного текста и в нужный момент их воспроизвести, например, при написании реферата или подготовке к экзамену.

Способы конспектирования.

- **Тезисы** – это кратко сформулированные основные мысли, положения изучаемого материала. Тезисы лаконично выражают суть читаемого, дают возможность раскрыть содержание. Приступая к освоению записи в виде тезисов, полезно в самом тексте отмечать места, наиболее четко формулирующие основную мысль, которую автор доказывает (если, конечно, это не библиотечная книга). Часто такой отбор облегчается шрифтовым выделением, сделанным в самом тексте.

- **Линейно-последовательная запись текста.** При конспектировании линейно – последовательным способом целесообразно использование плакатно-оформительских средств, которые включают в себя следующие:

- сдвиг текста конспекта по горизонтали, по вертикали;
- выделение жирным (или другим) шрифтом особо значимых слов;
- использование различных цветов;
- подчеркивание;
- заключение в рамку главной информации.

- **Способ «вопросов – ответов».** Он заключается в том, что, поделив страницу тетради пополам вертикальной чертой, конспектирующий в левой части страницы самостоятельно формулирует вопросы или проблемы, затронутые в данном тексте, а в правой части дает ответы на них.

Одна из модификаций способа «вопросов – ответов» - таблица, где место вопроса занимает формулировка проблемы, поднятой автором (лектором), а место ответа – решение данной проблемы. Иногда в таблице могут появиться и дополнительные графы: например, «мое мнение» и т. п.

- **Схема с фрагментами** – способ конспектирования, позволяющий ярче выявить структуру текста, - при этом фрагменты текста (опорные слова, словосочетания, пояснения всякого рода) в сочетании с графикой помогают созданию рационально - лаконичного конспекта.

- **Простая схема** – способ конспектирования, близкий к схеме с фрагментами, объяснений к которой конспектирующий не пишет, но должен уметь давать их устно. Этот способ требует высокой квалификации конспектирующего. В противном случае такой конспект нельзя будет использовать.

- **Параллельный способ** конспектирования. Конспект оформляется на двух листах параллельно или один лист делится вертикальной чертой пополам и записи делаются в правой и в левой части листа.

Однако лучше использовать разные способы конспектирования для записи одного и того же материала.

Комбинированный конспект – вершина овладения рациональным конспектированием. При этом умело используются все перечисленные способы, сочетая их в одном конспекте (один из видов конспекта свободно перетекает в другой в зависимости от конспектируемого текста, от желания и умения конспектирующего). Именно при комбинированном конспекте более всего проявляется уровень подготовки и

индивидуальность студента.

Принципы составления конспекта прочитанного.

1. Записать все выходные данные источника: автор, название, год и место издания. Если текст взят из периодического издания (газеты или журнала), то записать его название, год, месяц, номер, число, место издания.

2. Выделить поля слева или справа, можно с обеих сторон. Слева на полях отмечаются страницы оригинала, структурные разделы статьи или книги (названия параграфов, подзаголовки и т. п.), формулируются основные проблемы. Справа – способы фиксации прочитанной информации.

Один из видов чтения – углубленное – предполагает глубокое усвоение прочитанного и часто сохранение информации в целях последующего обращения к ней. Эффективность такого чтения повышается, если прочитанное зафиксировано не только в памяти, но и на бумаге. Психологи утверждают, что записанное лучше и полнее усваивается, прочнее откладывается в памяти. Установлено, что если прочитать 1000 слов и затем записать 50, подытоживающих прочитанное, то коэффициент усвоения будет выше, чем, если прочитать 10000 слов, не записав ни одного. Кроме того, при записи прочитанного формируется навык свертывания информации. И, наконец, чередование чтения и записывания уменьшает усталость, повышает работоспособность и производительность умственного труда.

1. Резюмирование.

Резюме – краткий итог прочитанного, содержащий его оценку. Резюме характеризует основные выводы книги, главные итоги.

Выбор языковых средств для построения резюме-выводов подчинен основной задаче свертывания информации: минимум языковых средств – максимум информации. Это обычно одно – три четких, кратких, выразительных предложения, раскрывающих, по мнению автора, самую суть описываемого объекта.

2. Аннотация.

Аннотация – краткая обобщенная характеристика печатной работы (книги, статьи), включающая иногда и его оценку. Это наикратчайшее изложение содержания первичного документа, дающее общее представление о теме.

Основное ее назначение – дать некоторое представление о книге (статье, научной работе) с тем, чтобы рекомендовать ее определенному кругу читателей или воспользоваться своими записями при выполнении работы исследовательского, реферативного характера. Поэтому аннотации не требуются изложения содержания произведения, в ней лишь перечисляются вопросы, которые освещены в первоисточнике (содержание этих вопросов не раскрывается). Аннотация отвечает на вопрос: «О чем говорится в первичном тексте?», дает представление только о главной теме и перечне вопросов, затрагиваемых в тексте первоисточника.

Текст аннотации не стандартизирован. В научной литературе можно встретить различные требования к составлению аннотаций. Например, текст справочной аннотации может включать следующие сведения:

- тип и название аннотируемого документа (монография, диссертация, сборник, статья и т. п.)
- задачи, поставленные автором аннотируемого документа
- метод, которым пользовался автор (эксперимент, сравнительный анализ, компиляция других источников)
- принадлежность автора к определенной научной школе или направлению
- структуру аннотируемого документа
- предмет и тему произведения, основные положения и выводы автора
- характеристику вспомогательных иллюстративных материалов, дополнений, приложений, справочного аппарата, включая указатели и библиографию.

Вопросы для собеседования по практическим занятиям

Базовый уровень:

1. Что называется числовым рядом?
2. Как определяются частичные суммы числового ряда?
3. Что означает сходимость или расходимость числового ряда?
4. Исследуйте на сходимость или расходимость ряд, составленный из членов геометрической прогрессии в зависимости от знаменателя q этой прогрессии.
5. Что называется остатком числового ряда? От чего он зависит?
6. Сформулируйте теоремы о необходимых условиях сходимости числовых рядов. Какие из этих условий не являются достаточными для сходимости числовых рядов? Приведите соответствующие примеры.
7. Какой ряд называется гармоническим?
8. Какой ряд называется положительным?
9. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии сходимости положительных рядов.

Повышенный уровень:

10. Сформулируйте признак сравнения положительных рядов.
 11. Сформулируйте предельный признак сравнения положительных рядов.
 12. Сформулируйте признак Даламбера сходимости положительных рядов.
 13. Сформулируйте радикальный признак Коши сходимости положительных рядов.
- Сформулируйте интегральный признак Коши сходимости положительных рядов. Приведите примеры числовых рядов, когда этот признак неприменим для исследования сходимости положительных рядов.

Вопросы для собеседования по самостоятельному изучению

Базовый уровень:

1. Множества и операции над ними
2. Комплексные числа, основные понятия
3. Операции над комплексными числами.
4. Метод математической индукции
5. Простейшая классификация функций действительной переменной: монотонные четные и нечетные, периодические, ограниченные и неограниченные функции
6. Способы задания функций
7. Арифметические действия над функциями
8. Числовые последовательности их свойства
9. Предел числовой последовательности и его геометрический смысл
10. Теорема об эквивалентности определений предела функций по Коши и по Гейне
11. Предел функции по множеству. Односторонние пределы
12. Непрерывность функции в точке и на множестве
13. Классификация точек разрыва функции, Локальные свойства непрерывных функций
14. Задачи, приводящие к понятию производной функции одной действительной переменной

Повышенный уровень:

15. Определение производной, геометрический и механический смысл производной
16. Дифференцируемость функции
17. Дифференциал функции, его геометрический смысл
18. Дифференциал алгебраической суммы, частного и произведения дифференцируемых функций
19. Основные принципы создания автоматизированных информационных систем
20. Теоремы: Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши их геометрический смысл
21. Первообразная и неопределенный интеграл

Комплект разноуровневых задач и заданий

1. Тема 1. Множества, комплексные и вещественные числа.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Изучить логическую символику.
- 2) Рассмотреть определение множества и основные предпосылки канторовой теории множеств.
- 3) Изучить основные операции над множествами .
- 4) Изучить обозначения множества.
- 5) Изучить модуль действительного числа и его свойства.
- 6) Рассмотреть свойства модуля действительного числа.
- 7) Модуль действительного числа и его свойства.
- 8) Изучить конечные промежутки множества действительных чисел.
- 9) Изучить бесконечные промежутки множества действительных чисел.

Задания повышенного уровня:

- 1) Доказать неравенство Бернулли

2. Тема 2. Действительная функция действительного аргумента.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Изучить определения действительной функцией действительного аргумента x .
- 2) Изучить Элементарные функции их область определения и график
- 3) Изучить Аналитический способ задания функций.
- 4) Изучить графический способ задания функций.
- 5) Изучить Табличный способ задания функций.
- 6) Изучить Арифметические действия над функциями
- 7) Изучить строго возрастающие функции.
- 8) Изучить строго убывающие функции.
- 9) Изучить возрастающие или не убывающие функции.
- 10) Изучить убывающие или не возрастающие функции.

Задания повышенного уровня:

- 1) Изучить определение и изобразить четную функцию на множестве.
- 2) Изучить определение и изобразить нечетную функцию на множестве.
- 3) Изучить определение и изобразить периодическую функцию на множестве.
- 4) Изучить определение и изобразить ограниченную функцию на множестве.

3. Тема 3. Последовательности и их пределы.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Изучить определение пределов числовой последовательности.
- 2) Изучить геометрический смысл пределов числовой последовательности.
- 3) Рассмотреть Свойства сходящихся последовательностей.
- 4) Изучить Бесконечно малые числовые последовательности .
- 5) Изучить Бесконечно большие числовые последовательности .
- 6) Изучить теорему о Леммах о бесконечно малых числовых последовательностях.
- 7) Изучить следствия о Леммах о бесконечно малых числовых последовательностях.
- 8) Изучить Основные теоремы о пределах числовых последовательностей.

9) Правила вычисления пределов в числовой последовательности.

Задания повышенного уровня:

- 1) Доказать теорему о бесконечно большой числовой последовательности.
- 2) Доказать теорему о бесконечно малой числовой последовательности.
- 3) Изучить выводы вычисления пределов в числовой последовательности.

4. Тема 4. Предел функции и его свойства.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Определить предел функций в точке определения по Коши.
- 2) Определить Предел функций в точке определения по Гейне.
- 3) Изучить геометрическую интерпретацию определения предела функции в точке.
- 4) Изучить теорему определения предела функции по Коши.
- 5) Изучить теорему определения предела функции по Гейне.
- 6) Изучить вычисление предела функции.
- 7) Изучить правило вычисления предела функции .
- 8) Изучить способы задания функции.
- 9) Изучить замечательные пределы функции.

Задания повышенного уровня:

- 1) Доказать теорему определения предела функции по Коши.
- 2) Доказать теорему определения предела функции по Коши.
- 3) Рассмотреть предел монотонной функции .
- 4) Доказать теорему признака Больцано-Коши для функции
- 5) Сравнить бесконечно - малую и бесконечно - большую величин

5. Тема 5. Непрерывность функций и их основные свойства.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Изучить непрерывность функции в точке и на множестве.
- 2) Изучить свойства непрерывности функции в точке и на множестве.
- 3) Изучить точки устранимого разрыва.
- 4) Изучить точку разрыва первого рода
- 5) Изучить точку разрыва второго рода
- 6) Изучить теорему и доказать теорему Кантора
- 7) Изучить монотонные функции
- 8) Изучить теорему о существовании обратной функцииу монотонной функции
- 9) Изучить непрерывность элементарных функций
- 10) Изучить замечательные пределы

Задания повышенного уровня:

- 1) Доказать теорему о непрерывности точек.
- 2) Доказать теорему о непрерывности сложных функций
- 3) Доказать теорему о непрерывности функций.
- 4) доказать первую теорему Вейерштрасса.
- 5) доказать вторую теорему Вейерштрасса

6. Тема 6. Производная и дифференцируемые функции.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Определение производной функции через предел..
- 2) Изучить производные высших порядков.
- 3) Изучить способы записи производных.
- 4) Изучить производную вектор функции по параметрам
- 5) Способы задания производных.
- 6) Изучить производные постоянных функций.
- 7) Изучить производные степенной функции.
- 8) Изучить производные тригонометрических функций
- 9) Изучить производные обратных тригонометрических функций

Задания повышенного уровня:

- 1) Рассмотреть функции одной переменной дифференцируемой в точке X /
- 2) Рассмотреть функции нескольких переменных дифференцируемой в точке X /
- 3) Рассмотреть и доказать основные правила дифференцирования
- 4) Изучить физический смысл производной.
- 5) Изучить геометрический смысл производной

7. Тема 7. Дифференциал функции.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Рассмотреть определение дифференциала функции.
- 2) Изучить геометрический смысл дифференциала функции.
- 3) Изучить механический смысл дифференциала функции.
- 4) Изучить дифференциал сложной функции.
- 5) Изучение инвариантность формы дифференциала первого порядка
- 6) Изучить дифференциалы высшего порядка.

Задания повышенного уровня:

- 1) Рассмотреть и доказать первую теорему дифференциала алгебраической суммы.
- 2) Рассмотреть и доказать вторую теорему дифференциала алгебраической суммы.
- 3) Рассмотреть и доказать третью теорему дифференциала алгебраической суммы.
- 4) Рассмотреть следствие дифференциала алгебраической суммы

8. Тема 10. Первообразная и неопределенный интеграл.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Изучение первообразного интервала.
- 2) Изучить неопределенный интеграл

- 3) Рассмотреть свойства неопределенного интеграла.
- 4) Изучить геометрическую интерпретацию неопределенного интеграла.
- 5) Изучить основные методы интегрирования
- 6) Записать таблицу основных неопределенных интегралов
- 7) Изучить основное понятие первообразной
- 8) Изучить свойства первообразной.
- 9) Рассмотреть технику интегрирования

Задания повышенного уровня:

- 1) Определить интеграл через предел n -й производной.
- 2) Записать простейшие правила интегрирования
- 3) Произвести замену переменной в неопределенном интеграле.

9. Тема 11. Определенный интеграл.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Изучить определение определенного интеграла.
- 2) Изучить задачи приводящие к понятию определенного интеграла.
- 3) Изучить интегрируемость функции.
- 4) Изучить интегрируемость непрерывной функции
- 5) Изучить интегрируемость монотонной функции.
- 6) Изучить свойства определенного интеграла.

Задания повышенного уровня:

- 1) Записать необходимое условие существования определенного интеграла.
- 2) Записать необходимое и достаточное условие интегрируемости.
- 3) Рассмотреть и доказать теорему о среднем.
- 4) Изучить геометрический смысл теоремы о среднем.

10. Тема 12. Числовые ряды.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Изучить первое определение числовой последовательности в мат. Анализе.
- 2) Изучить второе определение числовой последовательности в мат. Анализе.
- 3) Сложение рядов числовой последовательности.
- 4) Умножение ряда на число в числовой последовательности
- 5) Изучить свойства сходящихся числовых рядов.
- 6) Записать первый признак сравнения .
- 7) Записать второй признак сравнения
- 8) Записать третий признак сравнения
- 9) Изучить признак Раабе.
- 10) Изучить расходимость знакопеременных рядов.

Задания повышенного уровня:

- 1) записать необходимое условие сходимости числового ряда.
- 2) Записать достаточные признаки сходимости знакоположительного ряда.
- 3) Записать необходимое и достаточное условие знакоположительного числового

ряда

- 4) Записать признак Деламбера.
- 5) Записать радикальный признак Коши.
- 6) Записать интегральный признак Коши

11. Тема 14. Ряды Фурье.

Типовые задачи:

Задания базового уровня:

- 1) Изучить основные понятия и определения .
- 2) Изучить тригонометрический ряд Фурье.
- 3) Изучить тригонометрический ряд Фурье для четных функций.
- 4) Изучить тригонометрический ряд Фурье для нечетных функций.
- 5) Изучить ряд Фурье для произвольного интервала.
- 6) Изучить ряды Фурье в гильбертовом пространстве.

Задания повышенного уровня:

- 1) Изучить сходимость ряда Фурье
- 2) Изучить убывание коэффициентов Фурье.
- 3) Изучить аналитичность функции Фурье .
- 4) Рассмотреть и доказать теорему Дирихле.
- 5) Рассмотреть и доказать теорему Стеклова.

Вопросы к экзамену

Знать:

1. Множества и операции над ними
2. Комплексные числа, основные понятия
3. Операции над комплексными числами.
4. Метод математической индукции
5. Простейшая классификация функций действительной переменной: монотонные четные и нечетные, периодические, ограниченные и неограниченные функции
6. Способы задания функций
7. Арифметические действия над функциями
8. Числовые последовательности их свойства
9. Предел числовой последовательности и его геометрический смысл
10. Теорема об эквивалентности определений предела функций по Коши и по Гейне
11. Предел функции по множеству. Односторонние пределы
12. Непрерывность функции в точке и на множестве
13. Классификация точек разрыва функции, Локальные свойства непрерывных функций

14. Задачи, приводящие к понятию производной функции одной действительной переменной
15. Определение производной, геометрический и механический смысл производной
16. Дифференцируемость функции
17. Дифференциал функции, его геометрический смысл
18. Дифференциал алгебраической суммы, частного и произведения дифференцируемых функций
19. Основные принципы создания автоматизированных информационных систем
20. Теоремы: Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши их геометрический смысл
21. Первообразная и неопределенный интеграл
22. Геометрический смысл неопределенного интеграла, его свойства
23. Задача, приводящая к понятию определенного интеграла
24. Интегрируемость функции и определенный интеграл
25. Числовые ряды и их частичные суммы; сходимость и расходимость ряда
26. Основные свойства числового ряда
27. Понятие степенного ряда
28. Радиус и интервал сходимости степенного ряда
29. Признаки сходимости степенного ряда. Задачи разложения функции в степенной ряд
30. Представление кусочно-дифференцируемой функции ее рядом Фурье
31. Разложение периодической функции в ряд Фурье
32. Теорема об эквивалентности определений предела функций по Коши и по Гейне
33. Предел функции по множеству. Односторонние пределы
34. Общая классификация программного обеспечения
35. Классификация программного обеспечения в соответствии с нормами права
36. Свойства непрерывных функций: первая и вторая теоремы Больцано-Коши, и Больцано-Вейерштрасса. Их геометрический смысл
37. Равномерно сходящиеся функциональные последовательности и ряды
38. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании равномерно сходящихся функциональных рядов

Уметь, Владеть:

Задачи для проверки умений и навыков

1. Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения.
2. Представление кусочно-дифференцируемой функции ее рядом Фурье
3. Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Преобразование Фурье
4. Теорема об эквивалентности определений предела функций по Коши и по Гейне
5. Производная и дифференцируемые функции
6. Радиус и интервал сходимости степенного ряда

Повышенный уровень:

Знать:

1. Метод математической индукции
2. Основные элементарные функции, их свойства, графики
3. Свойства сходящихся последовательностей
4. Предел и непрерывность сложной функции
5. Свойства непрерывных функций на отрезке
6. Производная алгебраической суммы произведения и частного дифференцируемых функций
7. Дифференциал сложной функции
8. Примеры автоматизированных информационных систем
9. Правило Лопиталю для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.
10. Методы интегрирования: метод непосредственного интегрирования, метод замены переменных; метод интегрирования по частям
11. Необходимое условие существования определенного интеграла
12. Остаток ряда
13. Разложение элементарных функций в ряды Тейлора и Маклорена
14. Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Преобразование Фурье
15. Предел и непрерывность сложной функции
16. Файловая система ПК и принцип ее организации
17. Существование и непрерывность обратной функции
18. Свойства степенного ряда

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме:

Основная литература:

1. Карташев, А. П. Математический анализ : учебное пособие / А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский. — 2-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 448 с.
2. Горлач, Б. А. Математический анализ : учебное пособие / Б. А. Горлач. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 608 с.

Дополнительная литература:

1. Будаев В. Д., Якубсон М.Я. Математический анализ. Функции одной переменной. Учебник. Издательство: Лань, 2014. – 544 с.
 2. Туганбаев А.А. Математический анализ: пределы. Учебное пособие. Издательство: Флинта, 2013. – 65 с.
 3. Туганбаев А.А. Математический анализ: производные и графики функций. Учебное пособие. Издательство: Флинта, 2013.
 4. Туганбаев А.А. Математический анализ: интегралы. Учебное пособие. Издательство: Флинта, 2013. – 88 с.
 5. Берман Г.Н. Решебник к сборнику задач по курсу математического анализа. Учебное пособие. Издательство: Лань, 2013. – 608 с.
- Методическая литература:**

учебное пособие
сборник практических заданий

Интернет-ресурсы:

Белов Е.Б. Основы информационной безопасности. Учебное пособие для вузов/Е.Б. Белов, В.П. Лось, Р.В. Мещеряков, А.А. Шелупанов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2015, - 544 с. – Доступно: <http://www.alleng.ru/d/comp/comp51.htm>

Воройский Ф. С. Информатика. Энциклопедический словарь-справочник: введение в современные информационные и телекоммуникационные технологии в терминах и фактах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. - 768 с. – Доступно: <http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/slovar.zip>

Информатика: Практикум по технологии работы на компьютере /Под ред. Н.В. Макаровой. - 3-е изд., перераб. - М.: Финансы и статистика, 2013. - 256 с. – Доступно: http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/makarova_3.zip

Могилев А. В., Пак Н. И., Хеннер Е. К. Информатика: Учеб. Пособие для студ. пед. вузов. / Под ред. Е. К. Хеннера. – М.: Изд. центр «Академия», 2014. – 848 с. – Доступно: http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/mogilev_uchebn.zip

Могилев А. В. Практикум по информатике: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / А.В.Могилев, Н.И.Пак, Е.К.Хеннер; Под ред. Е.К.Хеннера. – 2-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 608 с. – Доступно: http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/mogilev_praktik.zip

Романова Ю.Д. Информатика и информационные технологии. Конспект лекций: учеб. пособие / Ю.Д. Романова, И.Г. Лесничная. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Эксмо, 2014, – 320 с. – Доступно: http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/romanova_2.rar

Симонович С.В. Информатика. Базовый курс. 2-е издание / Под ред. С. В. Симоновича. – СПб.: Питер, 2014. – 640 с. – Доступно: http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/kurs_informat.rar

Савельев А. Я. Основы информатики: Учеб. для вузов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. – 328 с. – Доступно: <http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/saveliev.zip>

Соболь Б.В. Информатика: учебник/ Б.В. Соболь [и др.] – Изд. 3-е, дополн. и перераб. – Ростов н/Д: Феникс, 2013. – 446 с. – Доступно: <http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/Sobol.rar>

Степанов А.Н. Информатика: учебник для вузов. – 4-е изд. – СПб.: Питер, 2014. – 684 с. – Доступно: <http://physics-for-students.ru/bookpc/informatika/stepanov.rar>