

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»**

Направление подготовки/специальность	11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи
Направленность (профиль)/специализация	Интеллектуальная обработка данных в инфокоммуникационных системах и сетях

Ставрополь, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

- Практическое занятие № 1. Основы векторной алгебры
- Практическое занятие № 2. Скалярное поле и его градиент
- Практическое занятие № 3. Векторное поле и его характеристики
- Практическое занятие №4. Вихрь и циркуляция векторного поля

Практическое занятие №1. Основы векторной алгебры

Цель занятия: рассмотреть вопросы векторной алгебры; векторы и простейшие действия над ними; скалярное произведение и его основные свойства; векторное произведение и его основные свойства; смешанное произведение и его основные свойства

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенции УК-1; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

1. Теоретические вопросы к практическому занятию:

1. Прямоугольные координаты в пространстве
2. Векторы и простейшие действия над ними
3. Скалярное произведение и его основные свойства
4. Векторное произведение и его основные свойства
5. Смешанное произведение и его основные свойства

Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек). К векторам относится также и **нулевой** вектор, начало и конец которого совпадают.

Длиной (модулем) вектора называется расстояние между началом и концом вектора. $|\vec{AB}| = |\vec{a}|$

Векторы называются **коллинеарными**, если они расположены на одной или параллельных прямых. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Векторы называются **компланарными**, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Векторы называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Линейными операциями над векторами называется сложение и умножение на число.

Суммой векторов является вектор - $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Произведение - $\vec{b} = \alpha \vec{a}$; $|\vec{b}| = \alpha |\vec{a}|$, при этом $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

Вектор $\vec{a}$ сонаправлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a} \uparrow \vec{b}$), если $\alpha > 0$.

Вектор $\vec{a}$ противоположно направлен с вектором $\vec{b}$ ($\vec{a} \downarrow \vec{b}$), если $\alpha < 0$.

Свойства векторов.

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность.
- 2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- 4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$
- 5) $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность
- 6) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивность
- 7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
- 8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$

- 1) **Базисом** в пространстве называются любые 3 некопланарных вектора, взятые в определенном порядке.
- 2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.
- 3) **Базисом** на прямой называется любой ненулевой вектор.

Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - базис в пространстве и $\vec{a} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3$, то числа α, β и γ называются **компонентами или координатами** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:

равные векторы имеют одинаковые координаты,

при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$$\lambda \vec{a} = \lambda(\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3) = (\lambda \alpha) \vec{e}_1 + (\lambda \beta) \vec{e}_2 + (\lambda \gamma) \vec{e}_3.$$

при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3; \quad \vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3;$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \vec{e}_3.$$

Линейная зависимость векторов.

Определение. Векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если существует такая линейная комбинация $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$, при не равных нулю одновременно α_i , т.е. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$.

Если же только при $\alpha_i = 0$ выполняется $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$, то векторы называются **линейно независимыми**.

Свойство 1. Если среди векторов $\vec{a}_i$ есть нулевой вектор, то эти векторы линейно зависимы.

Свойство 2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Свойство 3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Свойство 4. Любые 2 коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 2 линейно зависимые векторы коллинеарны.

Свойство 5. Любые 3 компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые векторы компланарны.

Свойство 6. Любые 4 вектора линейно зависимы.

Система координат.

Для определения положения произвольной точки могут использоваться различные системы координат. Положение произвольной точки в какой-либо системе координат должно однозначно определяться. Понятие системы координат представляет собой совокупность точки начала отсчета (начала координат) и некоторого базиса. Как на плоскости, так и в пространстве возможно задание самых разнообразных систем координат. Выбор системы координат зависит от характера поставленной геометрической, физической или технической задачи. Рассмотрим некоторые наиболее часто применяемые на практике системы координат.

Декартова система координат.

Зафиксируем в пространстве точку О и рассмотрим произвольную точку М.

Вектор $\vec{OM}$ назовем радиус-вектором точки М. Если в пространстве задать некоторый базис, то точке М можно сопоставить некоторую тройку чисел – компоненты ее радиус-вектора.

Определение. Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат называются **осями координат**.

1-я ось – ось **абсцисс**

2-я ось – ось **ординат**

3-я ось – ось **аппликат**

Чтобы найти компоненты вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.

Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Определение. Базис называется **ортонормированным**, если его векторы попарно ортогональны и равны единице.

Определение. Декартова система координат, базис которой ортонормирован называется **декартовой прямоугольной системой координат**.

Пример. Даны векторы $\vec{a}(1; 2; 3)$, $\vec{b}(-1; 0; 3)$, $\vec{c}(2; 1; -1)$ и $\vec{d}(3; 2; 2)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Векторы образуют базис, если они линейно независимы, другими словами, если уравнения, входящие в систему:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + 0 \cdot \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 3\beta - \gamma = 0 \end{cases} \quad \text{линейно независимы.}$$

Тогда $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

Это условие выполняется, если определитель матрицы системы отличен от нуля.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + (-2 - 3) + 12 = 4 \neq 0$$

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 = d_1 \\ \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 = d_2 \\ \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3 = d_3 \end{cases} \quad \text{Для решения этой системы воспользуемся методом Крамера.}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(-3) + (-2 - 2) + 12 = -1.$$

$$\alpha = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1/4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2 - 2) - 3(-2 - 3) + 2(4 - 6) = -4 + 15 - 4 = 7;$$

$$\beta = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 7/4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6 + (4 - 6) + 18 = 10;$$

$$\gamma = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 5/2;$$

Итого, координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$: $\vec{d} \in \{-1/4, 7/4, 5/2\}$.

Длина вектора в координатах определяется как расстояние между точками начала и конца вектора. Если заданы две точки в пространстве $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, то $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Если точка $M(x, y, z)$ **делит отрезок АВ в соотношении λ/μ** , считая от А, то координаты этой точки определяются как:

$$x = \frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\mu + \lambda}; \quad y = \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\mu + \lambda}; \quad z = \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\mu + \lambda}.$$

В частном случае координаты **середины отрезка** находятся как:

$$x = (x_1 + x_2)/2; \quad y = (y_1 + y_2)/2; \quad z = (z_1 + z_2)/2.$$

Линейные операции над векторами в координатах.

Пусть заданы векторы в прямоугольной системе координат $\vec{a}(x_A, y_A, z_A); \vec{b}(x_B, y_B, z_B)$, тогда линейные операции над ними в координатах имеют вид:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(x_A + x_B; y_A + y_B; z_A + z_B); \quad \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha x_A; \alpha y_A; \alpha z_A)$$

Скалярное произведение векторов.

Определение. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих сторон на косинус угла между ними.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

Свойства скалярного произведения:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \text{ если } \vec{a} \perp \vec{b} \text{ или } \vec{a} = 0 \text{ или } \vec{b} = 0.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c};$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot m = \vec{a} \cdot (m \vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b}); m = \text{const}$$

Если рассматривать векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a); \vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b;$$

Используя полученные равенства, получаем формулу для вычисления угла между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|};$$

Пример. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$$10\vec{a} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13,$$

$$\text{т.к. } \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4, \quad \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$,
 $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

$$\text{Т.е. } \vec{a} = (1, 2, 3), \quad \vec{b} = (6, 4, -2)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}.$$

$$\cos \varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}; \quad \varphi = \arccos \frac{2}{7}.$$

Пример. Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 6\vec{b})$, если
 $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = \pi/3$.

$$15\vec{a} \cdot \vec{a} - 18\vec{a} \cdot \vec{b} - 10\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{b} \cdot \vec{b} = 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos \frac{\pi}{3} + 12|\vec{b}|^2 = 15 \cdot 16 - 28 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} +$$

$$+ 12 \cdot 36 = 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$$

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$,
 $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

$$\text{Т.е. } \vec{a} = (3, 4, 5), \quad \vec{b} = (4, 5, -3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 + 20 - 15 = 17;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}; \quad |\vec{b}| = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50}.$$

$$\cos \varphi = \frac{17}{\sqrt{50}\sqrt{50}} = \frac{17}{50}; \quad \varphi = \arccos \frac{17}{50}.$$

Пример. При каком m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ перпендикулярны.

$$\vec{a} = (m, 1, 0); \quad \vec{b} = (3, -3, -4)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3m - 3 = 0; \quad \Rightarrow m = 1.$$

Пример. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ и $5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$, если
 $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c} = \frac{\pi}{3}$.

$$(2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c})(5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}) = 10\vec{a} \cdot \vec{a} + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 14\vec{a} \cdot \vec{c} + 15\vec{a} \cdot \vec{b} + 18\vec{b} \cdot \vec{b} + 21\vec{b} \cdot \vec{c} +$$

$$+ 20\vec{c} \cdot \vec{a} + 24\vec{b} \cdot \vec{c} + 28\vec{c} \cdot \vec{c} = 10\vec{a} \cdot \vec{a} + 27\vec{a} \cdot \vec{b} + 34\vec{a} \cdot \vec{c} + 45\vec{b} \cdot \vec{c} + 18\vec{b} \cdot \vec{b} + 28\vec{c} \cdot \vec{c} = 10 +$$

$$+ 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547.$$

Векторное произведение векторов.

Определение. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

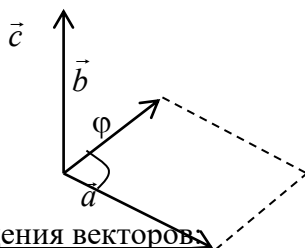
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$$\sin \varphi \geq 0; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.



Свойства векторного произведения векторов

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;

3) $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$;

4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

5) Если заданы векторы $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

6) Геометрическим смыслом векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$$\vec{a} = (2, 5, 1); \quad \vec{b} = (1, 2, -3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

Пример. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

$$\overrightarrow{AC} = (0 - 2; 1 - 2; 0 - 2) = (-2; -1; -2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 2; 0 - 2; 3 - 2) = (2; -2; 1)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1 - 4) - \vec{j}(-2 + 4) + \\ &+ \vec{k}(4 + 2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}. \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = \sqrt{25 + 4 + 36} = \sqrt{65}.$$

$$S_{\Delta} = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Пример. Доказать, что векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарны.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \text{ т.к. векторы линейно зависимы, то они компланарны.}$$

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$; $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $\vec{a} \wedge \vec{b} = 30^\circ$.

$$(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} = 8\vec{b} \times \vec{a}$$

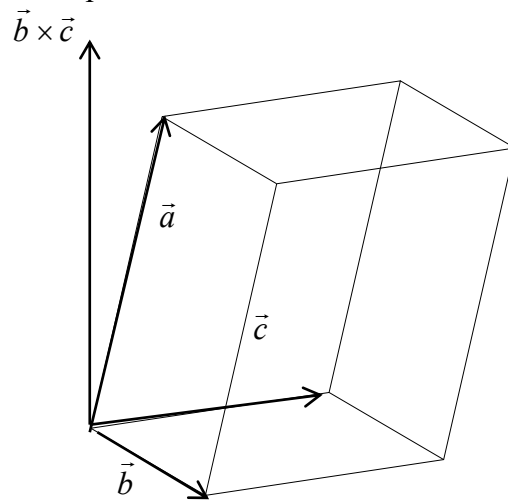
$$S = 8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^\circ = 4(\text{ед}^2).$$

Смешанное произведение векторов.

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ или $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Смешанное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



Свойства смешанного произведения:

1) Смешанное произведение равно нулю, если:

- а) хоть один из векторов равен нулю;
- б) два из векторов коллинеарны;
- в) векторы компланарны.

$$2) (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$3) (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$$

$$4) (\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda(\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + \mu(\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$$

5) Объем треугольной пирамиды, образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$\frac{1}{6} |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

6) Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Пример. Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; -1), C(9; 4; -4), D(1; 5; 0) лежат в одной плоскости.

$$\overrightarrow{AB} = (-2; -6; 1)$$

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{AC} = (4; -3; -2)$

$$\overrightarrow{AD} = (-4; -2; 2)$$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

$$\overrightarrow{BA} = (-2; -3; -4)$$

Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{BD} = (1; 4; -3)$

$$\overrightarrow{BC} = (4; -1; -2)$$

$$\begin{aligned} \text{Объем пирамиды } V &= \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} (-2(-8-3) + 3(-2+12) - 4(-1-16)) = \\ &= \frac{1}{6} (22 + 30 + 68) = 20(\text{ед}^3) \end{aligned}$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(-8-3) - \vec{j}(-2+12) + \vec{k}(-1-16) = -11\vec{i} - 10\vec{j} - 17\vec{k}.$$

$$|\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC}| = \sqrt{11^2 + 10^2 + 17^2} = \sqrt{121 + 100 + 289} = \sqrt{510}$$

$$S_{\text{осн}} = \sqrt{510} / 2 (\text{ед}^2)$$

$$\text{Т.к. } V = \frac{S_{\text{осн}} \cdot h}{3}; \quad h = \frac{3V}{S_{\text{осн}}} = \frac{120}{\sqrt{510}} = \frac{4\sqrt{510}}{17} (\text{ед})$$

Домашнее задание:

Задача 1. Написать разложение вектора **x** по векторам **p**, **q**, **r**.

$$\mathbf{x} = \{-2, 4, 7\}, \quad \mathbf{p} = \{0, 1, 2\}, \quad \mathbf{q} = \{1, 0, 1\}, \quad \mathbf{r} = \{-1, 2, 4\}.$$

Задача 2. Коллинеарны ли векторы **c**₁ и **c**₂, построенные по векторам **a** и **b**?

$$\mathbf{a} = \{1, -2, 3\}, \quad \mathbf{b} = \{3, 0, -1\}, \quad \mathbf{c}_1 = 2\mathbf{a} + 4\mathbf{b}, \quad \mathbf{c}_2 = 3\mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

Задача 3. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

$$A(1, -2, 3), \quad B(0, -1, 2), \quad C(3, -4, 5).$$

Задача 4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах **a** и **b**.

$$\mathbf{a} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{p} + 2\mathbf{q}; \quad |\mathbf{p}| = 1, \quad |\mathbf{q}| = 2, \quad (\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) = \pi/6.$$

Задача 5. Компланарны ли векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$?

$$\mathbf{a} = \{2, 3, 1\}, \quad \mathbf{b} = \{-1, 0, -1\}, \quad \mathbf{c} = \{2, 2, 2\}.$$

Рекомендуемая литература

1. Веретенников, В. Н.
Элементы векторной алгебры : учебное пособие / В.Н. Веретенников. - Москва|Берлин : Директ-Медиа, 2022. - 73 с. : ил. - <http://biblioclub.ru/>. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-4475-9597-5

2. Назарова, Т. М.
Основы векторного анализа Электронный ресурс / Назарова Т. М. : учебное пособие. - Новосибирск : НГТУ, 2026. - 56 с. - ISBN 978-5-7782-2834-4

Практическое занятие №2. Скалярное поле и его градиент

Цель занятия: рассмотреть скалярные и векторные поля: основные понятия; производная по направлению; градиент скалярного поля и его свойства

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенции УК-1; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности .

1. Теоретические вопросы к практическому занятию:

1. Скалярные и векторные поля: основные понятия.
2. Производная по направлению.
3. Градиент скалярного поля и его свойства.

Теория поля – раздел физики, механики, математики, в котором изучаются скалярные, векторные, тензорные поля.

К рассмотрению скалярных и векторных полей приводят многие задачи физики, электротехники, математики, механики и других технических дисциплин.

Поле называется область V пространства, в каждой точке которой определено значение некоторой величины. Если каждой точке M этой области соответствует определенное число $U = U(M)$, говорят, что в области определено (задано) скалярное поле. Иначе говоря, скалярное поле – это скалярная функция $U(M)$ вместе с ее областью определения.

Если же каждой точке M области пространства соответствует некоторый вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, то говорят, что задано векторное поле (или векторная функция точки).

Примерами скалярных полей могут быть поля температуры (воздуха, тела, ...), атмосферного давления, плотности (массы, воздуха, ...), электрического потенциала и т.д.

Примерами векторных полей являются поле силы тяжести, поле скоростей частиц текущей жидкости (ветра), магнитное поле, поле плотности электрического поля и т.д.

Если функция $U(M)$ ($\vec{a}(M)$) не зависит от времени, то скалярное (векторное) поле называется стационарным; поле, которое меняется с течением времени, называется нестационарным.

Мы будем рассматривать только стационарные поля.

Если V – область трехмерного пространства, то скалярное поле U можно рассматривать как функцию трех переменных x, y, z (координат точки M):

$$U = U(x, y, z)$$

Наряду с обозначением $U = U(M)$, $U = U(x, y, z)$, используется запись $U = U(\vec{r})$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки M .

Если скалярная функция $U(M)$ зависит только от двух переменных, то соответствующее скалярное поле $U = U(x, y)$ называют плоским.

Аналогично: вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$, определяющий векторное поле, можно рассматривать как векторную функцию трех скалярных аргументов x, y, z : $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ (или $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$).

Вектор $\vec{a} = \vec{a}(M)$ можно представить (разложив его по ортам координатных осей) в виде

$$\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

где $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – проекции вектора $\vec{a}(M)$ на оси координат. Если в выбранной системе координат $Oxyz$ одна из проекций вектора $\vec{a}(M)$ равна нулю, а две другие зависят только от двух переменных, то векторное поле называется плоским.

Векторное поле называется однородным, если $\vec{a}(M)$ – постоянный вектор.

В дальнейшем будем предполагать, что скалярные функции $U = U(x, y, z)$ – определяющие скалярное поле, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – задающие векторное поле непрерывны вместе со своими частными производными.

Рассмотрим скалярное поле, задаваемое функцией $U = U(x, y, z)$. Для наглядного представления скалярного поля используются поверхности и линии уровня.

Поверхностью уровня скалярного поля называется геометрическое место точек, в которых функция $U(M)$ принимает постоянное значение, т.е.

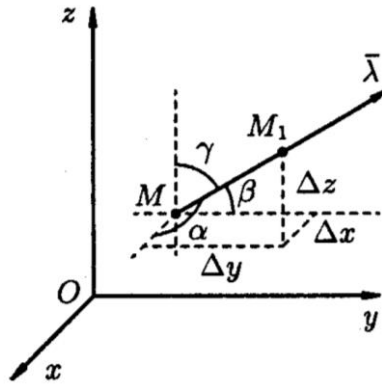
$$U(x, y, z) = C$$

Давая в этом уравнении величине C различные значения, получим различные поверхности уровня, которые в совокупности как бы расстилают поле. Через каждую точку поля проходит только одна поверхность уровня. Ее уравнение можно найти путем подстановки координат точки в рассматриваемое уравнение.

В случае плоского поля $U = U(x, y)$ равенство $U(x, y) = C$ представляет собой уравнение линии уровня, т.е. линия уровня – это линия на плоскости Oxy , в точках которой функция $U(x, y)$ сохраняет постоянное значение.

Производная по направлению.

Для характеристики скорости изменения поля $U = U(M)$ в заданном направлении вводится понятие “производная по направлению”. Возьмем в пространстве, где задано поле $U = U(x, y, z)$, некоторую точку M и найдем скорость изменения функции U при движении точки M в произвольном направлении $\vec{\lambda}$. Пусть вектор $\vec{\lambda}$ имеет начало в точке M и направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.



Приращение функции U , возникающее при переходе от точки M к некоторой близко лежащей точке M_1 в направлении вектора $\vec{\lambda}$ определяется как

$$\Delta U = U(M_1) - U(M)$$

или

$$\Delta U = U(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y, z).$$

Тогда

$$\Delta \lambda = |MM_1| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Производной от функции $U = U(M)$ в точке M по направлению $\vec{\lambda}$ называется предел

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta \lambda} = \lim_{M_1 \rightarrow M} \frac{U(M_1) - U(M)}{|MM_1|}.$$

Производная по направлению $\vec{\lambda}$ и характеризует скорость изменения функции (поля) в точке M по этому направлению. Если $\frac{\partial U}{\partial \lambda} > 0$, то функция U возрастает в

направлении $\vec{\lambda}$, если $\frac{\partial U}{\partial \lambda} < 0$, то функция U в направлении $\vec{\lambda}$ убывает. Кроме того,

величина $\left| \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right|$ представляет собой мгновенную скорость изменения функции U в

направлении $\vec{\lambda}$ в точке M : чем больше $\left| \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right|$, тем быстрее изменяется функция U . В этом

состоит физический смысл производной по направлению.

Выведем формулу для вычисления производной по направлению, считая, что функция $U(x, y, z)$ дифференцируема в точке M . Тогда ее полное приращение в этой точке M можно записать так:

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \Delta z + \xi_1 \Delta x + \xi_2 \Delta y + \xi_3 \Delta z,$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 – бесконечно малые функции при $\Delta \lambda \rightarrow 0$.

Поскольку $\Delta x = \Delta \lambda \cdot \cos \alpha$, $\Delta y = \Delta \lambda \cdot \cos \beta$, $\Delta z = \Delta \lambda \cdot \cos \gamma$, то

$$\frac{\Delta U}{\Delta \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \cos \gamma + \xi_1 \cos \alpha + \xi_2 \cos \beta + \xi_3 \cos \gamma.$$

Переходя к пределу при $\Delta\lambda \rightarrow 0$, получим следующую формулу для вычисления производной по направлению

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \cos \gamma. \quad (1)$$

В случае плоского поля $U(x, y)$ данная формула примет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \cos \beta$$

Градиент скалярного поля и его свойства.

Градиент скалярного поля указывает направление $\vec{\lambda}$, где производная $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ имеет наибольшее значение.

Можно заметить, что правая часть равенства (1) представляет собой скалярное произведение единичного вектора

$$\vec{e} = (\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$$

и некоторого вектора $\vec{g} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z} \right)$.

Вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $U(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$, называют градиентом функции:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}. \quad (2)$$

Отметим, что $\text{grad } U$ есть векторная величина. Говорят: скалярное поле U порождает векторное поле градиента U . Теперь выражение для производной по направлению можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \vec{e} \cdot \text{grad } U = \frac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|} \cdot \text{grad } U = |\text{grad } U| \cdot \cos \varphi$$

где φ – угол между вектором $\text{grad } U$ и направлением $\vec{\lambda}$. Из последней формулы сразу следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения, когда $\cos \varphi = 1$, т.е. при $\varphi = 0$. Таким образом, направление градиента совпадает с направлением $\vec{\lambda}$, вдоль которого функция (поле) меняется быстрее всего, т.е. градиент функции указывает направление наибо́льшего возрастания функции. В этом состоит физический смысл градиента.

Приведем важные свойства градиента функции.

1. Градиент направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через данную точку.

2. $\text{grad } (U + V) = \text{grad } U + \text{grad } V$;

3. $\text{grad } (c \cdot U) = c \cdot \text{grad } U$, $c = \text{const}$;

4. $\text{grad } (U \cdot V) = U \cdot \text{grad } V + V \cdot \text{grad } U$;

5. $\text{grad } \left(\frac{U}{V} \right) = \frac{V \cdot \text{grad } U - U \cdot \text{grad } V}{V^2}$;

$$6. \operatorname{grad} F(U) = \frac{\partial F}{\partial U} \cdot \operatorname{grad} U.$$

Пример 1. Найти величину и направление наибольшего изменения функции $U(M) = 5x^2yz - 7xy^2z + 5xyz^2$ в точке $M_0(1, 1, 1)$.

Решение. Находим частные производные функции $U(M)$ в любой точке $M(x, y, z)$ и в точке M_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(M)}{\partial x} &= 10xyz - 7y^2z + 5yz^2, & \frac{\partial U(M_0)}{\partial x} &= 10 - 7 + 5 = 8, \\ \frac{\partial U(M)}{\partial y} &= 5x^2z - 14xyz + 5xz^2, & \frac{\partial U(M_0)}{\partial y} &= 5 - 14 + 5 = -4, \\ \frac{\partial U(M)}{\partial z} &= 5x^2y - 7xy^2 + 10xyz, & \frac{\partial U(M_0)}{\partial z} &= 5 - 7 + 10 = 8. \end{aligned}$$

Тогда в точке $M_0(1, 1, 1)$ имеем $\overline{\operatorname{grad} U}(M_0) = 8\bar{i} - 4\bar{j} + 8\bar{k}$. Наибольшая скорость изменения поля в точке M_0 достигается в направлении $\overline{\operatorname{grad} U}(M_0) \left| \overline{\operatorname{grad} U}(M_0) \right|$:

$$\frac{\partial U(M_0)}{\partial \overline{\operatorname{grad} U}} = \max \frac{\partial U(M_0)}{\partial S} = \left| \overline{\operatorname{grad} U}(M_0) \right| = \sqrt{8^2 + (-4)^2 + 8^2} = 12.$$

Домашнее задание:

Задача 1. Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению нормали к поверхности S , образующей острый угол с положительным направлением оси Oz .

$$1.1. u = 4\ln(3 + x^2) - 8xyz, \quad S: x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1, \quad M(1, 1, 1).$$

$$1.2. u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}, \quad S: 4z + 2x^2 - y^2 = 0, \quad M(2, 4, 4).$$

$$1.3. u = -2\ln(x^2 - 5) - 4xyz, \quad S: x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1, \quad M(1, 1, 1).$$

Найти производную скалярного поля $u(x, y, z)$ в точке M по направлению вектора $\mathbf{l}$.

$$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2},$$

$$u = x + \ln(z^2 + y^2),$$

$$1.4. \mathbf{l} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$1.5. \mathbf{l} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k},$$

$$M(1, 1, 1).$$

$$M(2, 1, 1).$$

$$u = x^2y - \sqrt{xy + z^2},$$

$$u = y\ln(1 + x^2) - \operatorname{arctg} z,$$

$$1.6. \mathbf{l} = 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$

$$1.7. \mathbf{l} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$

$$M(1, 5, -2).$$

$$M(0, 1, 1).$$

Задача 2. Найти угол между градиентами скалярных полей $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ в точке M .

$$2.1. \nu = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3, \quad u = \frac{yz^2}{x^2}, \quad M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$2.2. \nu = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}, \quad u = x^2yz^3, \quad M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

$$2.3. \nu = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}, \quad u = \frac{z^3}{xy^2}, \quad M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

$$2.4. \nu = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}, \quad u = \frac{z}{x^3y^2}, \quad M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$2.5. \nu = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3, \quad u = \frac{x^2}{yz^2}, \quad M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Рекомендуемая литература

1. Веретенников, В. Н.
Элементы векторной алгебры : учебное пособие / В.Н. Веретенников. - Москва|Берлин : Директ-Медиа, 2022. - 73 с. : ил. - <http://biblioclub.ru/>. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-4475-9597-5

2. Назарова, Т. М.
Основы векторного анализа Электронный ресурс / Назарова Т. М. : учебное пособие. - Новосибирск : НГТУ, 2026. - 56 с. - ISBN 978-5-7782-2834-4

Практическое занятие №3. Векторное поле и его характеристики

Цель занятия: рассмотреть векторное поле; векторные линии; поток векторного поля; дивергенция; теорема Остроградского- Гаусса

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенции УК-1; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности .

1. Теоретические вопросы к практическому занятию:

1. Векторное поле. Векторные линии.
2. Поток векторного поля. Дивергенция
3. Теорема Остроградского- Гаусса

Рассмотрим векторное поле, задаваемое вектором $\vec{a} = \vec{a}(M)$.

Векторной линией поля $\vec{a}$ называется линия, касательная к которой в каждой ее точке М имеет направление соответствующего ей вектора $\vec{a}(M)$.

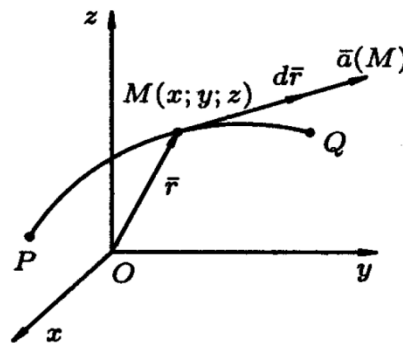
Это понятие для конкретных полей имеет ясный физический смысл. Например, в поле скоростей текущей жидкости векторными линиями будут линии, по которым движутся частицы жидкости (линии тока); для магнитного поля векторными линиями (силовыми) линиями будут линии, выходящие из северного полюса и оканчивающиеся в южном.

Совокупность всех векторных линий поля, проходящих через некоторую замкнутую кривую, называется векторной трубкой.

Векторные линии поля $\vec{a} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ описываются системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

Покажем это. Пусть PQ – векторная линия поля, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радиус-вектор точки M. Тогда вектор $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ направлен по касательной к линии PQ в точке M. В силу коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $d\vec{r}$ следует пропорциональность их проекций.



Поток вектора через поверхность.

Пусть в некоторой области D имеем векторное поле

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

причем $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – проекции вектора $\vec{a}(M)$ на оси координат непрерывны (поле $\vec{a}(M)$ непрерывно) в области D . Рассмотрим поверхность S , целиком лежащую в области G . Пусть в каждой точке этой поверхности определен единичный вектор нормали

$$\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k},$$

направляющие косинусы которого являются непрерывными функциями координат точки поверхности.

Потоком вектора $\vec{a}$ через поверхность S называется интеграл по поверхности от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали, т.е.

$$\Pi = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} ds = \iint_S (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dS.$$

Если вектор $\vec{a}(M)$ рассматривать как скорость жидкости в точке M , то интеграл выражает количество жидкости, протекающей через поверхность S в единицу времени. По этой причине его называют потоком векторного поля через поверхность S .

Так как поверхностные интегралы 1 и 2 рода связаны между собой, то поток векторного поля можно выразить через поверхностный интеграл 2 рода:

$$\Pi = \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} ds = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iint_S P dydz + Q dx dz + R dx dy.$$

.Дивергенция векторного поля и ее физическая интерпретация.

Дивергенцией (или расходимостью) векторного поля

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

в точке М называется скаляр

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Свойства дивергенции

- 1) Линейность. $\operatorname{div}(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) = \lambda_1 \operatorname{div} \vec{a}_1 + \lambda_2 \operatorname{div} \vec{a}_2$
- 2) $\operatorname{div} \vec{C} = 0$, где $\vec{C} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ - постоянное векторное поле.
- 3) $\operatorname{div}(U \cdot \vec{a}) = U \cdot \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} U$, где $U(x, y, z)$ - скалярная функция.

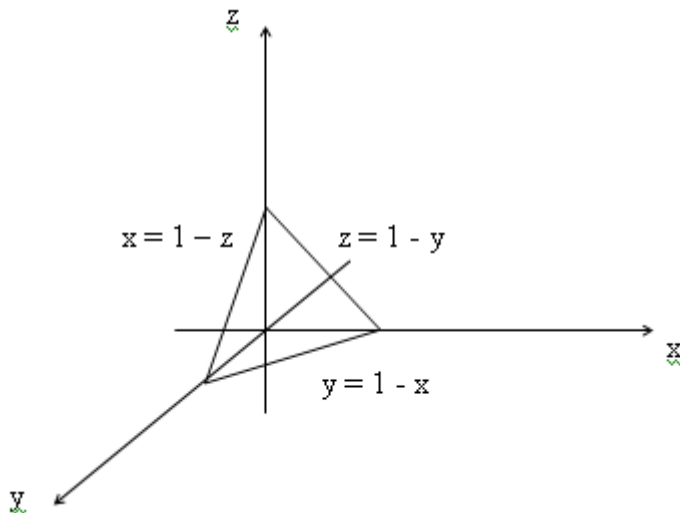
С помощью определения дивергенции формула Остроградского– Гаусса в векторной форме примет следующий вид

$$\Pi = \oiint_S \vec{a} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dv, \quad (3)$$

т.е. интеграл от дивергенции векторного поля по некоторому объему V равен потоку вектора через поверхность, ограничивающую данный объем.

Дивергенция векторного поля в точке является скалярной величиной. Она образует скалярное поле в данном векторном поле. Величина $\operatorname{div} \vec{a}(M)$ характеризует мощность источника или стока в точке М. В этом состоит физический смысл дивергенции.

Пример. Найти поток векторного поля $\vec{F} = (y-x)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + y\vec{k}$ через сторону треугольника S, вырезанного из плоскости $x+y+z-1=0$ координатными плоскостями.



$$\begin{aligned} \Pi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_S (y-x) dydz + (x+y) dx dz + y dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (y+y+z-1) dz + \\ &+ \int_0^1 dz \int_0^{1-z} (x+1-z-x) dx + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y dy = \int_0^1 \left[2yz + \frac{z^2}{2} - z \right]_0^{1-y} dy + \int_0^1 \left[x - zx \right]_0^{1-z} dz + \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \left[2y - 2y^2 + \frac{1}{2} - y + \frac{y^2}{2} - 1 + y \right] dy + \int_0^1 [1 - z - z + z^2] dz + \int_0^1 \left[\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right] dx = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{3y^2}{2} + 2y - \frac{1}{2} \right] dy + \left[z - z^2 + \frac{z^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_0^1 = \left[-\frac{y^3}{2} + y^2 - \frac{y}{2} \right]_0^1 + 1 - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Пример . Найти $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$, если $u = e^{x+y+z}$.

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = e^{x+y+z} [\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}]$$

$$P = Q = R = e^{x+y+z};$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 3e^{x+y+z} = 3u.$$

Домашнее задание:

Задача 3. Найти векторные линии в векторном поле $\mathbf{a}$.

3.1. $\mathbf{a} = 4y\mathbf{i} - 9x\mathbf{j}$.

3.2. $\mathbf{a} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$.

3.3. $\mathbf{a} = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$.

3.4. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}$.

3.5. $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$.

3.6. $\mathbf{a} = 3x\mathbf{i} + 6z\mathbf{k}$.

Задача 4. Найти поток векторного поля $\mathbf{a}$ через часть поверхности S , вырезаемую плоскостями P_1, P_2 (нормаль внешняя к замкнутой поверхности, образуемой данными поверхностями).

$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$.

1. $S: x^2 + y^2 = 1,$

4.2. $S: x^2 + y^2 = 1,$

$P_1: z = 0, P_2: z = 2.$

$P_1: z = 0, P_2: z = 4.$

$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$.

$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$.

4.3. $S: x^2 + y^2 = 1,$

4.4. $S: x^2 + y^2 = 1,$

$P_1: z = 0, P_2: z = 3.$

$P_1: z = 0, P_2: z = 1.$

$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$.

$\mathbf{a} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$.

4.5. $S: x^2 + y^2 = 1,$

4.6. $S: x^2 + y^2 = 1,$

$P_1: z = 0, P_2: z = 5.$

$P_1: z = 0, P_2: z = 2.$

Рекомендуемая литература

1. Веретенников, В. Н. Элементы векторной алгебры : учебное пособие / В.Н. Веретенников. - Москва|Берлин : Директ-Медиа, 2022. - 73 с. : ил. - <http://biblioclub.ru/>. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-4475-9597-5

2. Назарова, Т. М. Основы векторного анализа Электронный ресурс / Назарова Т. М. : учебное пособие. - Новосибирск : НГТУ, 2026. - 56 с. - ISBN 978-5-7782-2834-4

Практическое занятие №4. Вихрь и циркуляция векторного поля

Цель занятия: линейный интеграл и циркуляция вектора; вихрь векторного поля; свойства вихря; теорема Стокса.

Актуальность занятия заключается в том, что при его проведении у студентов формируются компетенции УК-1; знания, умения и навыки, которые станут основой их профессиональной деятельности.

1. Теоретические вопросы к практическому занятию:

1. Линейный интеграл и циркуляция вектора.
2. Вихрь векторного поля. Свойства вихря.
3. Теорема Стокса.

Линейным интегралом векторного поля $\vec{a}$ по дуге L называется криволинейный интеграл $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$.

Линейный интеграл имеет смысл работы векторного поля при перемещении по дуге.

Циркуляцией векторного поля называется линейный интеграл по замкнутому контуру.

$$C_\gamma(\vec{a}) = \oint_\gamma Pdx + Qdy + Rdz.$$

Циркуляция имеет простой физический смысл: если кривая γ расположена в силовом поле, то циркуляция – это работа силы $\vec{a}(M)$ поля при перемещении материальной точки вдоль γ .

Назовем **ротором** векторного поля $\vec{a}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ вектор

$$\overrightarrow{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Свойства ротора

- 1) Линейность $\overrightarrow{rot}(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) = \lambda_1 \overrightarrow{rot} \vec{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{rot} \vec{a}_2$
- 2) $\overrightarrow{rot} \vec{C} = 0$, $\vec{C}$ - постоянное векторное поле.

$$\overrightarrow{rot(U \cdot \vec{a})} = U \overrightarrow{rot \vec{a}} + \overrightarrow{grad U} \times \overrightarrow{rot \vec{a}}$$

Пример. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a}(M) = (x+y)\vec{i} + (z-y)\vec{j} + 2(x+z)\vec{k}$ потенциальным.

Решение. Векторное поле $\vec{a}(M)$ – потенциально, если в каждой точке M из области определения поля $rot \vec{a}(M) = \vec{0}$. Находим

$$rot \vec{a}(M) = [\nabla, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k},$$

В этой формуле для удобства запоминания метода вычисления ротора использован формальный оператор Гамильтона «набла»:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

действующий по правилу нахождения векторного произведения в прямоугольных декартовых координатах.

Для других типов полей, исследуемых в задании 8, приведем их определения:
Соленоидальное поле $\vec{a}(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ в каждой точке M области V удовлетворяет условию

$$div \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M) = 0.$$

Гармоническое поле $\vec{a}(M)$ является в каждой точке области V одновременно потенциальным и соленоидальным, то есть $rot \vec{a}(M) = \vec{0}$ и $div \vec{a}(M) = 0$

В нашем случае $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial P}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial R}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial R}{\partial y} = 0$. Тогда

$rot \vec{a}(M) = (0-1)\vec{i} + (0-2)\vec{j} + (0-1)\vec{k} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k} \neq \vec{0}$, следовательно, поле $\vec{a}(M)$ не является потенциальным.

Домашнее задание:

Задача 1. Найти модуль циркуляции векторного поля $\mathbf{a}$ вдоль контура Γ .

$$\mathbf{a} = (x^2 - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} = xz\mathbf{i} - \mathbf{j} + y\mathbf{k},$$

$$1.1. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

$$1.2. \quad \Gamma: \begin{cases} z = 5(x^2 + y^2) - 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = yz\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} = x\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - x\mathbf{k},$$

$$1.3. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25, \\ x^2 + y^2 = 9 \quad (z > 0). \end{cases}$$

$$1.4. \quad \Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = (x - y)\mathbf{i} + x\mathbf{j} - z\mathbf{k},$$

1.5. $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$

$$\mathbf{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k},$$

1.6. $\Gamma: \begin{cases} z = 3(x^2 + y^2) + 1, \\ z = 4. \end{cases}$

$$1.6. \quad \Gamma: \begin{cases} z = 3(x^2 + y^2) + 1, \\ z = 4. \end{cases}$$

Рекомендуемая литература

- Веретенников, В. Н.
 Элементы векторной алгебры : учебное пособие / В.Н. Веретенников. - Москва|Берлин : Директ-Медиа, 2022. - 73 с. : ил. - <http://biblioclub.ru/>. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-4475-9597-5
- Назарова, Т. М.
 Основы векторного анализа Электронный ресурс / Назарова Т. М. : учебное пособие. - Новосибирск : НГТУ, 2026. - 56 с. - ISBN 978-5-7782-2834-4

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
для самостоятельной работы студентов
по дисциплине «Векторное исчисление»

для студентов направления подготовки
11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи
Направленность (профиль) «Интеллектуальная обработка данных в
инфокоммуникационных системах и сетях»

Ставрополь, 2026

Методические указания по организации самостоятельной работы студентов составлено в соответствии с требованиями программы дисциплины «Векторное исчисление» для бакалавров направления подготовки 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи. Учебно-методическое пособие посвящено планируемой учебной работе студентов, выполняемой во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, при частичном, непосредственном участии преподавателя.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	26
1. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА КАК ВАЖНЕЙШАЯ ФОРМА УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА	26
2. ЦЕЛИ И ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ СРС	28
3. ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	28
4. ОРГАНИЗАЦИЯ СРС	30
5. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.....	31
6. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТА - НЕОБХОДИМОЕ ЗВЕНО СТАНОВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЯ.....	34
7. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ОТДЕЛЬНЫМ ФОРМАМ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	35

ВВЕДЕНИЕ

Цель и задачи освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины: формирование у студентов универсальных и профессиональных компетенций, основанных на освоении особенностей построения процесса обучения по направлению «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», понимании истории, состояния, применения и перспектив развития инфокоммуникационных технологий.

Задачи освоения дисциплины:

1. Формирование представления об образовательной деятельности в вузе, основных нормативных документах, регламентирующих образовательную деятельность студента, этическом кодексе студента СКФУ, принципах и формах образования, а также методах обучения.
2. Приобретение, усвоение и передача знаний. Организация и планирование самостоятельной работы студентом.
3. Изучение пакетов прикладных программ, необходимых для образовательной деятельности студентов данного направления.
4. Изучение объектов и характеристики профессиональной деятельности бакалавров по направлению подготовки «Инфокоммуникационные технологии и системы связи».
5. Знакомство студентов с основами теории передачи информации, современными системами связи, историей и перспективами их развития.
6. Формирование современных представлений о компьютерной технике и Интернете, истории развития компьютеров, Неймановской архитектуре ЭВМ и различных поколений ЭВМ.
7. Знакомство с историей развития электроники и радиоэлектроники.
8. Формирование представления о пассивных радиоэлектронных компонентах: резисторах, конденсаторах, катушках индуктивности; активных радиоэлектронных компонентах: электронных лампах, транзисторах; основах микроэлектроники, функциональной электроники и наноэлектроники.
9. Формирования представления об основах робототехники

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Векторное исчисление» относится к дисциплинам обязательной части дисциплин.

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесённых с планируемыми результатами освоения образовательной программы

1. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА КАК ВАЖНЕЙШАЯ ФОРМА УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного

участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования - "подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности".

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в лабораторных занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. По данной дисциплине «Векторное исчисление» предусмотрены следующие:

Использование материала учебно-методического комплекса дисциплины

На первом этапе необходимо ознакомиться с обязательным минимумом содержания основной образовательной программы по изучаемой дисциплине. Далее необходимо изучить рабочую программу дисциплины, в которой рассмотрено содержание тем дисциплины лекционного курса, взаимосвязь тем лекций с лабораторными занятиями, темы и виды самостоятельной работы. По каждому виду самостоятельной работы предусмотрены определённые формы отчетности, представленные в учебной программе по дисциплине «Векторное исчисление».

Работа с литературой

Для успешного освоения дисциплины, необходимо самостоятельно детально изучить представленные темы по рекомендуемым источникам информации, которые представлены в учебной программе.

Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.

2. ЦЕЛИ И ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ СРС

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и Зачет с оценкой.

3. ВИДЫ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы – аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации,

содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.):

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателя по данной дисциплине являются:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);

- подготовка к практическим работам, их оформление.

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

- текущие консультации;
- прием и защита практических работ (во время проведения).

При этом, критерии оценки:

Оценка «отлично» выставляется, если студент продемонстрировал точное выполнение заданий практической работы, правильно выполнил отчет, активно участвует в работе, владеет материалом, умеет логично и четко излагать мысли, отвечая на задаваемые вопросы, творчески подходит к решению представленных индивидуальных заданий, показывает самостоятельность мышления.

Оценка «хорошо» выставляется, если студент продемонстрировал точное выполнение заданий практической работы, правильно выполнил отчет, активно участвует в работе, владеет материалом, умеет логично и четко излагать мысли, отвечая на задаваемые вопросы, творчески подходит к решению представленных индивидуальных заданий, показывает самостоятельность мышления., при этом допустил не более одной ошибки.

Оценка «удовлетворительно» выставляется, если студент продемонстрировал точное выполнение заданий практической работы, правильно выполнил отчет, активно участвует в работе, владеет материалом, умеет логично и четко излагать мысли, отвечая на задаваемые вопросы, творчески подходит к решению представленных индивидуальных заданий, показывает самостоятельность мышления, при этом допускает более двух ошибок при ответе на поставленные вопросы.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется, если студент не продемонстрировал точное выполнение заданий практической работы, неправильно выполнил отчет, не участвует в работе, не владеет материалом, не умеет логично и четко излагать мысли, отвечая на задаваемые вопросы, не справляется с индивидуальными заданиями, демонстрирует отсутствие

самостоятельности мышления и допускает серьезные ошибки при ответах на поставленные вопросы.

Оценочный лист

Ф.И.О. студента	Оценка за ответы на контрольные вопросы	Оценка за задание по практической работе	Общая оценка

4. ОРГАНИЗАЦИЯ СРС

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей дисциплины «Векторное исчисление», объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Выполняя самостоятельную работу под контролем преподавателя студент должен:

- освоить минимум содержания, выносимый на самостоятельную работу студентов и предложенный преподавателем в соответствии с образовательными стандартами высшего образования;
- планировать самостоятельную работу в соответствии с графиком самостоятельной работы, предложенным преподавателем;
- самостоятельную работу студент должен осуществлять в организационных формах, предусмотренных учебным планом и рабочей программой преподавателя;

– выполнять самостоятельную работу и отчитываться по ее результатам в соответствии с графиком представления результатов, видами и сроками отчетности по самостоятельной работе студентов.

студент может:

сверх предложенного преподавателем (при обосновании и согласовании с ним) и минимума обязательного содержания, определяемого программой по данной дисциплине:

– самостоятельно определять уровень (глубину) проработки содержания материала;

– предлагать темы и вопросы для самостоятельной проработки;

– в рамках общего графика выполнения самостоятельной работы предлагать обоснованный индивидуальный график выполнения и отчетности по результатам самостоятельной работы;

– предлагать свои варианты организационных форм самостоятельной работы;

– использовать для самостоятельной работы методические пособия, учебные пособия, разработки сверх предложенного преподавателем перечня;

– использовать не только контроль, но и самоконтроль результатов самостоятельной работы в соответствии с методами самоконтроля, предложенными преподавателем или выбранными самостоятельно.

Самостоятельная работа студентов должна оказывать важное влияние на формирование личности будущего бакалавра, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет внеаудиторную работу по личному индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, времени и других условий.

5. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на лабораторных занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;

б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение – это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость и особенности подготовки к ним.

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

Работоспособность - способность человека к труду с высокой степенью напряженности в течение определенного времени. Различают внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организация рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться информацией;
- величина умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н. Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;
- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп работы;
- привычная последовательность и систематичность деятельности;
- правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменой дела. В течение дня работоспособность изменяется. Наиболее плодотворным является *утреннее время (с 8 до 14 часов)*, причем максимальная работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем *послеобеденное* - (с 16 до 19 часов) и *вечернее* (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1-1,5 часа нужны перерывы по 10 - 15 мин, через 3 - 4 часа работы отдых должен быть продолжительным - около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда.

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Самостоятельные занятия требуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

6. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТА - НЕОБХОДИМОЕ ЗВЕНО СТАНОВЛЕНИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЯ

Прогресс науки и техники, информационных технологий приводит к значительному увеличению научной информации, что предъявляет более высокие требования не только к моральным, нравственным свойствам человека, но и в особенности, постоянно возрастающие требования в области образования – обновление, модернизация общих и профессиональных знаний, умений специалиста.

Всякое образование должно выступать как динамический процесс, присущий человеку и продолжающийся всю его жизнь. Овладение научной мыслью и языком науки является необходимой составляющей в самоорганизации будущего специалиста исследователя. Под этим понимается не столько накопление знаний, сколько овладение научно обоснованными способами их приобретения. В этом, вообще говоря, состоит основная задача вуза.

Специфика вузовского учебного процесса, в организации которого самостоятельной работе студента отводятся все больше места, состоит в том, что он является как будто бы последним и самым адекватным звеном для реализации этой задачи. Ибо во время учебы в вузе происходит выработка стиля, навыков учебной (познавательной) деятельности, рациональный характер которых будет способствовать постоянному обновлению знаний высококвалифицированного выпускника вуза.

Однако до этого пути существуют определенные трудности, в частности, переход студента от синтетического процесса обучения в средней школе, к аналитическому в высшей. Это связано как с новым содержанием обучения (расширение общего образования и углубление профессиональной подготовки), так и с новыми, неизвестными до сих пор формами: обучения (лекции, семинары, лабораторные занятия и т.д.). Студент получает не только знания, предусмотренные программой и учебными пособиями, но он также должен познакомиться со способами приобретения знаний так, чтобы суметь оценить, что мы знаем, откуда мы это знаем и как этого знания мы достигли. Ко всему этому приходят через собственную самостоятельную работу.

Это и потому, что самостоятельно приобретенные знания являются более оперативными, они становятся личной собственностью, а также мотивом поведения, развивают интеллектуальные черты, внимание, наблюдательность, критичность, умение оценивать. Роль преподавателя в основном заключается в руководстве накопления знаний (по отношению к первокурсникам), а в последующие годы учебы, на старших курсах, в совместном установлении проблем и заботе о самостоятельных поисках студента, а также контролирования за их деятельностью. Отметим, что нельзя ограничиваться только приобретением знаний предусмотренных программой изучаемой дисциплины, надо постоянно углублять полученные знания, сосредотачивая их на какой-нибудь узкой определенной области, соответствующей интересам студента. Углубленное изучение всех

предметов, предусмотренных программой, на практике является возможным, и хорошая организация работы позволяет экономить время, что создает условия для глубокого, систематического, заинтересованного изучения самостоятельно выбранной студентом темы.

Конечно, все советы, примеры, рекомендации в этой области, даваемые преподавателем, или определенными публикациями, или другими источниками, не гарантируют никакого успеха без проявления собственной активности в этом деле, т. е. они не дают готовых рецептов, а должны способствовать анализу собственной работы, ее целей, организации в соответствии с индивидуальными особенностями. Учитывая личные возможности, существующие условия жизни и работы, навыки, на основе этих рекомендаций, возможно, выработать индивидуально обоснованную совокупность методов, способов, найти свой стиль или усовершенствовать его, чтобы изучив определенный материал, иметь время оценить его значимость, пригодность и возможности его применения, чтобы, в конечном счете, обеспечить успешность своей учебы с будущей профессиональной деятельности

7. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ОТДЕЛЬНЫМ ФОРМАМ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности.

Работа с литературой

При работе с литературой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно.

Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Различают два вида чтения; первичное и вторичное. *Первичное* - это внимательное, неторопливое чтение, при котором можно остановиться на трудных местах. После него не должно остаться ни одного непонятого слова. Содержание не всегда может быть понятно после первичного чтения.

Задача *вторичного* чтения - полное усвоение смысла целого (по счету это чтение может быть и не вторым, а третьим или четвертым).

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель - извлечение из текста необходимой информации. От того насколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют **четыре основные установки в чтении научного текста**:

1. информационно-поисковый (задача - найти, выделить искомую информацию)
2. усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)
3. аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)
4. творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде - как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. - использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких **видов чтения**:

1. библиографическое - просмотривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
2. просмотровое - используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со

списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;

3. ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;

4. изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;

5. аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;

2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;

3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;

4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;

5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта.

2. Выделите главное, составьте план.

3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора.

4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.

5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

Практические занятия

Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на лабораторных занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью выполнения заданий практической работы, поставленных задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном выполнении заданий нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что выполнение каждого учебного задания должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Выполнение заданий данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих заданий на лабораторных занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных материалов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при выполнении заданий у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

Подготовка к зачету по дисциплине «Векторное исчисление»

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин завершается Зачетом. Подготовка к Зачету способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к Зачету, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время сессии для систематизации знаний.

Текущая аттестация студентов проводится преподавателями, ведущими практические занятия по дисциплине в следующих формах: собеседование при выполнении практической работы с предоставлением письменного отчета. Основанием для снижения оценки являются:

- не качественно выполненная работа на персональном компьютере,
- письменный отчет выполнен в небрежной форме и с ошибками,
- студент не дает исчерпывающий ответ на вопрос преподавателя,
- путается или затрудняется в демонстрации работы на компьютере.

Отчет может быть отправлен на доработку в следующих случаях небрежного его выполнения и с ошибками.

Критерии оценивания собеседования приведены в Фонде оценочных средств по дисциплине «Векторное исчисление».

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля):

- Научная электронная библиотека e-Library – <https://elibrary.ru/>
- Электронная-библиотечная система IPRbooks – <http://iprbooks.ru>
- Электронная-библиотечная система Лань – <https://e.lanbook.com/>

Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

При чтении лекций используется компьютерная техника, демонстрации презентационных мультимедийных материалов. На занятиях студенты выполняют практические работы, предоставляя отчеты, подготовленные ими в часы самостоятельной работы.

Информационные справочные системы:

Информационно-справочные и информационно-правовые системы, используемые при изучении дисциплины:

1. Электронная-библиотечная система IPRbooks – <http://iprbooks.ru>
2. Электронная-библиотечная система Лань – <https://e.lanbook.com/>
3. Научная электронная библиотека e-Library – <https://elibrary.ru/>