

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
Строительная механика**

Направление подготовки
Направленность (профиль)

08.03.01 Строительство
Промышленное и гражданское
строительство

Ставрополь

Содержание

Практическое занятие 1

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

Практическое занятие 2

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Практическое занятие 3

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ

Практическое занятие 4

ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ В ОДНОПРОЛЕТНЫХ И КОНСОЛЬНЫХ БАЛКАХ

Практическое занятие 5

ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ И ВНУТРЕННИХ СИЛ В ТРЕХШАРНИРНЫХ АРКАХ И ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ УСИЛИЙ

Практическое занятие 6

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УПРУГИХ СИСТЕМАХ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

Практическое занятие 7

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ. МЕТОД СИЛ. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР M , Q и N

Практическое занятие 8

РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК МЕТОДОМ СИЛ

Практическое занятие 9

МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Практическое занятие 10

МАТРИЧНАЯ ФОРМА РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Практическое занятие 11

УСТОЙЧИВОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

Практическое занятие 12

ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ

Рекомендуемая литература

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

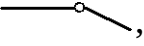
КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СООРУЖЕНИЙ

Теоретическая часть

Важнейшим свойством стержневой системы является *геометрическая неизменяемость*. Такие системы (сооружения) могут воспринимать нагрузку лишь в том случае, если они сохраняют заданную им при возведении внутреннюю структуру, т.е. геометрическую форму и положение. Изменяемые системы не в состоянии уравновесить внешние силы и под их действием приходят в движение, меняют свою форму. Естественно, что такие системы нельзя использовать в качестве сооружений. Другими словами, сооружение должно быть *с т р у к т у р н о* или *геометрически неизменяемым* (т.е. изменение формы возможно лишь за счет деформации элементов) и неподвижным относительно основания. Для выяснения того, обладает ли данная система этой способностью, какими условиями она обеспечена, а также для уяснения роли, которую играют отдельные элементы в работе сооружения, служит *кинематический анализ*, который должен предшествовать расчету.

Изменяемость внутренней структуры и подвижность сооружения относительно основания характеризуется его *степенью свободы* – числом независимых геометрических параметров (координат линейных и угловых), однозначно определяющих положение всех элементов сооружения в пространстве в любой момент времени.

Каждый структурно (геометрически) неизменяемый элемент сооружения, называемый *д и с к о м*, имеет на плоскости три степени свободы, так как он может перемещаться поступательно в двух направлениях и поворачиваться вокруг любой точки. Простейшим диском является стержень. Для обеспечения неизменяемости структуры и неподвижности сооружения диски соединяют различными устройствами, ограничивающими степень свободы. Всякое устройство, отнимающее у тела одну степень свободы, называется *кинемати-*

ческой связью. В качестве связей используют шарниры и опоры, шарниры бывают *простыми* и *кратными*. Простой шарнир соединяет два диска , кратный  – более двух и эквивалентен $(n-1)$ простым шарнирам, где n – число соединенных дисков.

Каждый опорный стержень эквивалентен одной связи, так как препятствует перемещению диска в направлении стержня.

Из сказанного следует, что степень свободы W сооружения, состоящего из D дисков, соединенных III простыми шарнирами и имеющего C_0 опорных стержней, может быть определена по формуле П.Л.Чебышева:

$$W = 3D - 2III - C_0. \quad (1.1)$$

Для определения числа D необходимо предварительно отбросить все шарниры и опоры, а для определения числа III – все опоры.

Для шарнирно-стержневых систем (ферм), т.е. систем, состоящих из стержней, соединенных между собой по концам шарнирами (причем каждый стержень прикрепляется к соседним только двумя шарнирами), степень свободы может быть определена по более простой формуле:

$$W = 2U - C - C_0, \quad (1.2)$$

где U – число узлов фермы; C – число внутренних стержней фермы; C_0 – число опорных стержней.

Степень свободы системы, не имеющей опорных стержней, складывается из двух частей: *степени изменяемости* внутренней структуры системы и *степени подвижности* её относительно основания, которая равна трем. Обозначая степень изменяемости структуры через I , можно записать

$$I = W - 3 = 3D - 2III - 3$$

или для шарнирно-стержневых систем

$$I = 2U - C - 3.$$

Для системы, имеющей опорные стержни, не делают различия между степенью свободы и степенью изменяемости, рассматривая основание в качестве диска, связанного с сооружением опорными стержнями.

При определении степени свободы или степени изменяемости системы возможны следующие три качественно различных результата:

1. $W > 0$ или $I > 0$ – система геометрически изменяемая, так как не имеет достаточно связей. Система, для которой $W=1$ или $I=1$, называется *механизмом*.

2. $W = 0$ или $I = 0$ – система обладает необходимым минимумом связей, чтобы быть неподвижной и неизменяемой.

3. $W < 0$ или $I < 0$ – система имеет лишние связи, т.е. статически неопределима.

Аналитические условия $W \leq 0$ или $I \leq 0$ являются необходимыми, но недостаточными для суждения о неизменяемости и неподвижности сооружения, так как эти характеристики зависят не только от числа связей, наложенных на диски, но и от их расположения. Для того чтобы узнать, является ли сооружение действительно неизменяемым и неподвижным, а также выяснить, какую роль играют отдельные элементы в его работе, необходимо произвести *анализ структуры* сооружения, для чего нужно знать *принципы образования структурно неизменяемых систем*. Перечислим основные из них:

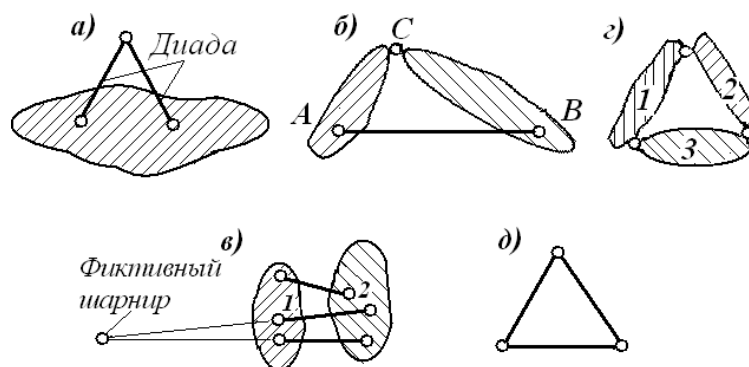


Рисунок 1.3

1. Присоединение к неизменяемой системе двухстержневого звена (диады) не изменяет степени свободы системы (рис.1.3а).

2. Два диска могут быть соединены жестко с помощью шарнира C и стержня AB , ось которого не проходит через центр шарнира (рис.1.3б).

3. Два диска могут быть соединены жестко тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке (рис. 1.3в).

4. Три диска можно соединить жестко с помощью трех шарниров, не лежащих на одной прямой (рис.1.3г).

Все перечисленные принципы могут быть сведены к одному: шарнирно-стержневой треугольник – фигура геометрически неизменяемая (рис.1.3д).

Если в структурно неизменяемой системе изменять длину стержней или угол наклона связей, то можно получить систему, которая обладает некоторой структурной изменяемостью.

Рассмотрим, например, вариации простой балки, опирающейся на три опорных стержня. Эта система, очевидно неподвижна и неизменяема до тех пор, пока ось правого стержня не проходит через центр шарнира A (рис. 1.4а). Если же эту опору повернуть в горизонтальное положение (рис. 1.4б), система станет изменяемой на какое-то мгновение, пока узел B не переместится на бесконечно малую величину по общей касательной к дугам 1 и 2. Как только это перемещение произойдет, три шарнира A , B , C перестанут находиться на одной прямой и, следовательно, система станет неизменяемой.

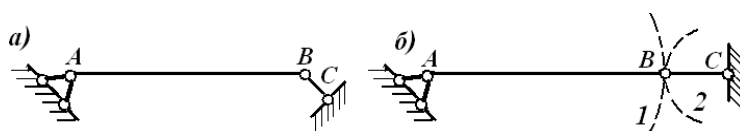


Рисунок 1.4

Такие системы называются *мгновенно изменяемыми*. Как и изменяемые системы, их нельзя использовать в качестве инженерных сооружений. Также следует избегать систем, близких к мгновенно изменяемым. Поэтому кинематический анализ должен содержать проверку на мгновенную изменяемость.

Для анализа несложных систем достаточно знать принципы образования неизменяемых систем. Все исключения из них приводят к мгновенно изменяемым системам. Например (рис. 1.5), два диска, соединенные тремя и бо-

лее пересекающимися в одной точке O (или параллельными) стержнями (рис. 1.5а), или три диска 1, 2 и 3, соединенные тремя шарнирами O_1 , O_2 и O_3 , лежащими на одной прямой (рис. 1.5б).

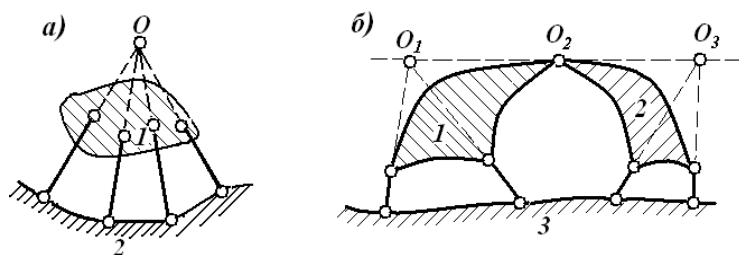


Рисунок 1.5

Статическим признаком мгновенно изменяемых систем является то, что в их элементах при действии конечных нагрузок или даже без них могут возникать бесконечно большие усилия или усилия неопределенной величины, что можно видеть на примере той же балки (см. рис. 1.4).

Пример 1.1

Произвести кинематический анализ системы, показанной на рис. 1.6.

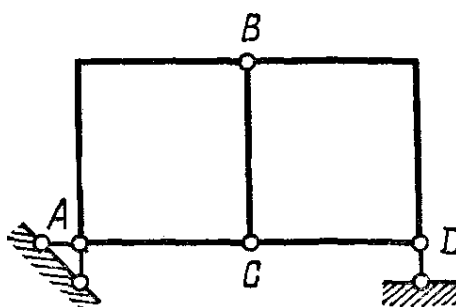


Рисунок 1.6

Решение

Вначале определяем степень свободы системы. Отбросив все шарниры и опорные стержни, находим, что система состоит из пяти дисков, т. е. $D = 5$. Отбросив все опорные стержни, определяем число шарниров, приведенное к простым, $Ш = 6$ — по два в точках B и C , по одному в точках A и D . Число опорных стержней $C_0 = 3$, следовательно,

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 3 = 0,$$

т. е. система может быть структурно неизменяемой и статически определимой. Чтобы убедиться, что это так, производим анализ ее структуры. Так как три диска AB , BC и AC связаны тремя шарнирами A , B , C , не лежащими на одной прямой, они образуют диск, к которому жестко присоединен диск BD с помощью шарнира B и стержня CD , ось которого не проходит через центр шарнира. Это неизменяемая фигура в соответствии с третьим принципом жестко присоединена к земле с помощью трех опорных стержней, не пересекающихся в одной точке. Поскольку система образована в соответствии с принципами образования структурно неизменяемых систем, она неизменяема и не является мгновенно изменяемой.

Пример 1.2

Произвести кинематический анализ системы, изображенной на рис. 1.7.

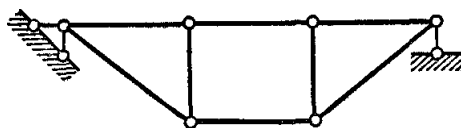


Рисунок 1.7

Решение

Поскольку система является шарнирно-стержневой, для определения ее степени свободы используем формулу $W = 2U - C - C_0$. Число узлов системы $U = 6$, число стержней $C = 8$, $C_0 = 3$, следовательно,

$$W = 2 \cdot 6 - 8 - 3 = 1.$$

Система имеет одну степень свободы, т. е. является механизмом и не может быть использована в качестве строительной конструкции.

Задание

Произвести кинематический анализ систем, изображенных на рис. 1.8.

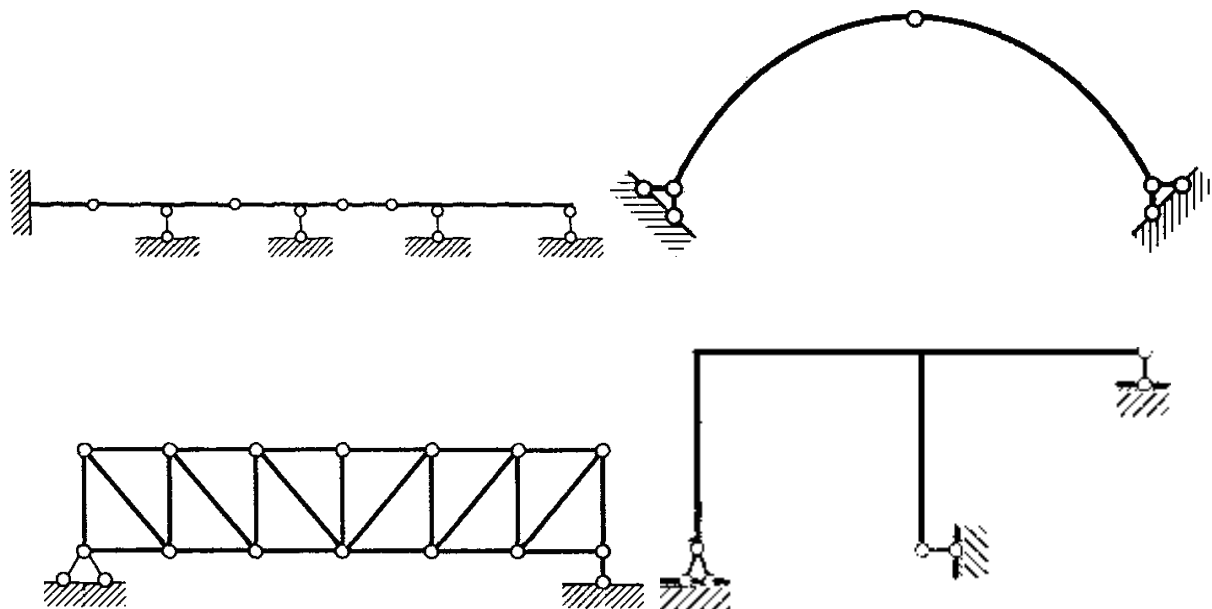


Рисунок 1.8

Вопросы к практическому занятию

1. Цель кинематического анализа заданной системы?
2. Дайте определение геометрической неизменяемости заданной системы.
3. Что понимают под степенью свободы сооружения?
4. Напишите формулу Чебышева для определения степени свободы системы.
5. Перечислите основные принципы образования структурно неизменяемых систем.
6. Какие системы называются мгновенно изменяемыми?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

2.1. РАСЧЕТ МНОГОПРОЛЕТНЫХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

Теоретическая часть

Многопролетной шарнирно-консольной балкой называется совокупность простых балок, имеющих консоли и связанных между собой промежуточными шарнирами. В зависимости от расположения шарниров могут применяться различные схемы, примеры которых приведены на рис. 2.1, а–в.

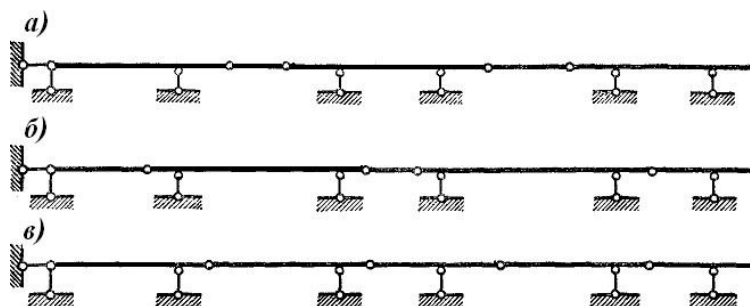


Рисунок 2.1

Для структурной неизменяемости и статической определимости многопролетной шарнирно-консольной балки число шарниров, введенных в пролеты, должно удовлетворять условию

$$\Pi = C_0 - 3, \quad (2.1)$$

где C_0 — число опорных стержней.

Из этого следует, что при крайних шарнирных опорах число шарниров в пролетах должно быть равно числу промежуточных опор.

Условие (2.1) является необходимым, но недостаточным для структурной неизменяемости балки. Для обеспечения неизменяемости балки размещение шарниров в пролетах должно еще подчиняться следующим правилам:

1. В каждом пролете должно быть не более двух шарниров.
2. Пролеты с двумя шарнирами должны чередоваться с пролетами без шарниров.
3. Пролеты с одним шарниром могут следовать один за другим при условии, что один пролет остается без шарнира.

С точки зрения оптимизации конструкции шарниры целесообразно располагать так, чтобы наибольшие изгибающие моменты в пролетах и на опорах были равны между собой по абсолютному значению или находились в определенном соотношении.

Большим преимуществом шарнирно-консольных балок является то, что благодаря статической определимости в них не возникает усилий от теплового воздействия и осадок опор. Недостаток – меньшая жесткость по сравнению с неразрезными балками и конструктивные трудности при устройстве шарниров.

Для лучшего уяснения взаимодействия отдельных частей многопролетной шарнирно-консольной балки ее заменяют «этажной схемой». На рис. 2.2 показаны этажные схемы, соответствующие балкам, изображенным на рис. 2.1.

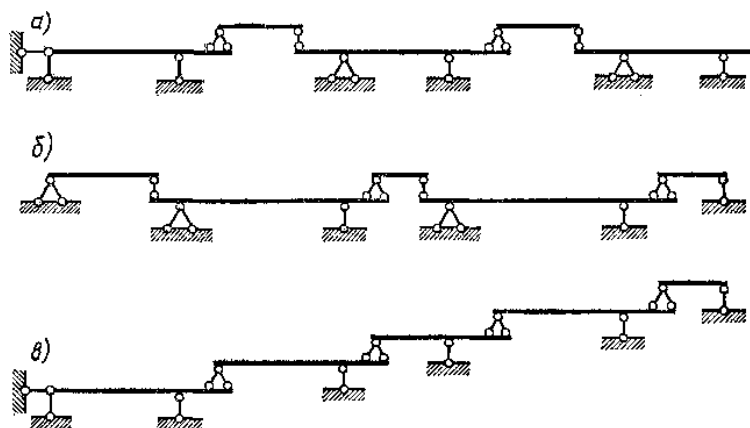


Рисунок 2.2

На схемах 2.2*а* и 2.2*б* отчетливо различается основная часть многопролетной балки, на которую опираются подвесные части, оказавшиеся на этажной схеме во втором этаже. На схеме 2.2*в* все балки, кроме крайней левой, являются подвесными, причем каждая нижележащая балка служит опорой для всех вышележащих.

Нагрузка, действующая на основную часть балки, не передается на вышележащую подвесную; нагрузка же, действующая на подвесные части балки, передается на основную, которая служит опорой.

Расчет многопролетной шарнирно-консольной балки удобно вести по частям, начиная от самых «верхних» балок и последовательно переходя к нижележащим. При расчете нижележащих балок следует учитывать не только ту нагрузку, которая к ним непосредственно приложена, но и опорные давления от вышележащих балок, равные опорным реакциям последних, но имеющих обратное направление.

Расчет многопролетной шарнирно-консольной балки сводится к построению эпюр поперечных сил и изгибающих моментов, которые связаны между собой и с нагрузкой дифференциальными зависимостями, установленными Д. И. Журавским.

Эти принципы распространяются и на более сложные балочные системы.

Пример 2.1.1

Построить эпюры M и Q в шарнирно-консольной балке от заданной неподвижной нагрузки (рис. 2.3).

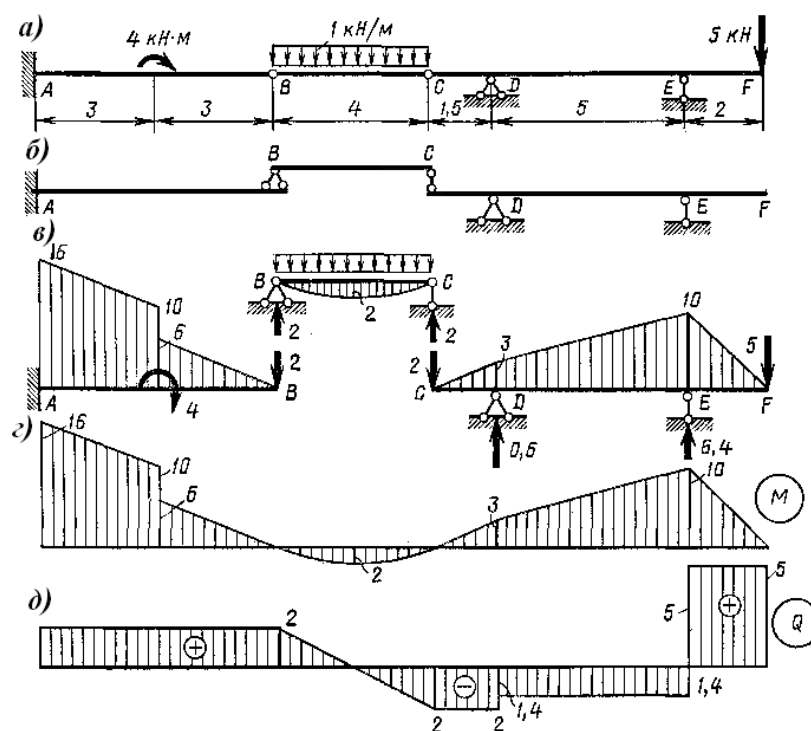


Рисунок 2.3

Решение

Для построения эпюр изгибающих моментов M и поперечных сил Q для многопролетной статически определимой балки необходимо отдельно построить эпюры для каждой балки (основной и дополнительных), а затем их совместить.

При этом определение ординат изгибающих моментов и поперечных сил вначале проводить для таких дополнительных балок, опорные реакции которых не зависят от нагрузок на других балках.

По расчетной («этажной») схеме (рис. 2.3б) видно, что такой балкой является балка BC .

1. Построение эпюр M и Q для дополнительной балки BC .

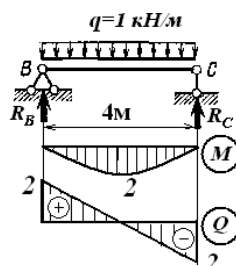


Рисунок 2.4

Опорные реакции (рис. 2.4) по условию загрузки

$$R_B = R_C = \frac{q \cdot 4}{2} = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2 \text{ кН}.$$

Поперечная сила под опорой B $Q = 2 \text{ кН}$, а под опорой C $Q = -2 \text{ кН}$. Изгибающий момент изменяется по закону $M = R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2}$. Момент изменяется по закону квадратной параболы, а максимальное значение будет посередине балки

$$M_{\max} = 2 \text{ кН} \cdot 4 \text{ м}.$$

По полученным значениям M и Q в характерных сечениях участка строим эпюры.

2. Построение эпюр M и Q для основной балки AB .

Данная консоль имеет 2 участка (рис. 2.5). На конце консоли в точке B от дополнительной балки BC действует сила $R'_B = 2 \text{ кН}$. Используя свойства консоли, построим эпюры без определения опорных реакций.

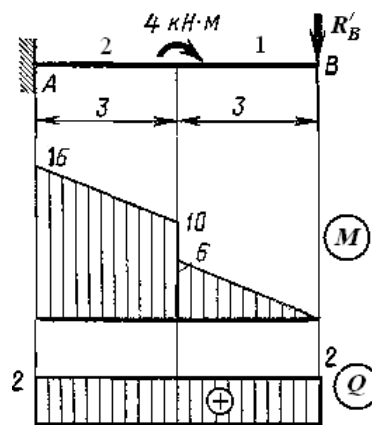


Рисунок 2.5

На участке 1 момент изменяется по закону $M_1 = -R'_B x_1$. При $x_1 = 0$ $M_1 = 0$, а при $x_1 = 3 \text{ м}$ $M_1 = -6 \text{ кНм}$.

Поперечная сила на протяжении участков 1 и 2 остается постоянной и равной $Q = 2 \text{ кН}$.

На участке 2 момент изменяется по закону $M_2 = -R'_B x_2 - M$. При $x_2 = 3 \text{ м}$ $M_2 = -2 \cdot 3 - 4 = 10 \text{ кНм}$, а при $x_2 = 6 \text{ м}$ $M_2 = -2 \cdot 6 - 4 = 16 \text{ кНм}$.

По полученным значениям M и Q в характерных сечениях участков строим эпюры.

3. Построение эпюр M и Q для основной балки CDF (рис 2.6).

Опорные реакции определяем из уравнений равновесия балки:

$$\sum M_D = -5 \cdot 7 + R_E \cdot 5 + R'_C \cdot 1,5 = 0,$$

откуда

$$R_E = \frac{5 \cdot 7 - R'_C \cdot 1,5}{5} = \frac{5 \cdot 7 - 2 \cdot 1,5}{5} = 6,4 \text{ кН.}$$

$$\sum Y = -R'_C + R_D + R_E - 5 = 0,$$

откуда

$$R_D = R'_C - R_E + 5 = 2 - 6,4 + 5 = 0,6 \text{ кН.}$$

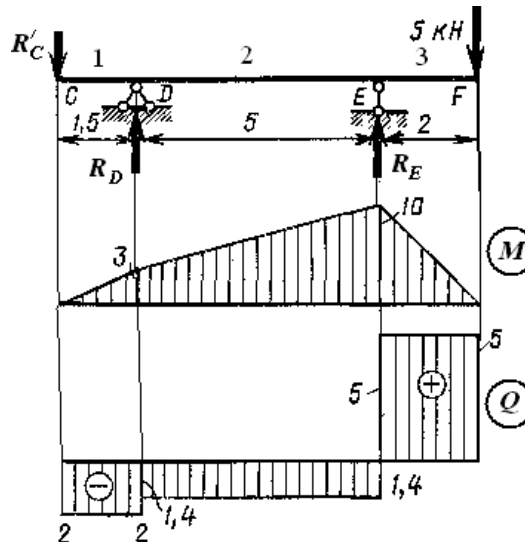


Рисунок 2.6

Проверим правильность определения опорных реакций. В нашем случае

$$\sum M_E = R'_C \cdot 6,5 - R_D \cdot 5 - 5 \cdot 2 = 2 \cdot 6,5 - 0,6 \cdot 5 - 5 \cdot 2 = 0.$$

Следовательно, реакции определены правильно.

Для построения эпюр M и Q разделим балку на три участка – 1, 2 и 3. На рис. 2.3 приводятся окончательные эпюры изгибающих моментов и поперечных сил. Окончательная эпюра изгибающих моментов строится путем объединения соответствующих эпюр, построенных для каждого пролета в от-

дельности; окончательная эпюра поперечных сил — непосредственно по общей эпюре M с учетом $Q = dM/dx$.

При передаче нагрузки на шарнирно-консольную балку не непосредственно, а через узлы балки сначала строят эпюру M для случая передачи нагрузки непосредственно на заданную балку. После этого на эпюру сносят точки, соответствующие узлам передачи нагрузки, и эти точки соединяют прямыми линиями. Совершенно также поступают и при построении эпюры Q .

Задания

1. Проверить геометрическую неизменяемость системы (рис. 2.7) и построить эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q от заданной нагрузки при $d=3$ м для сечения 1.

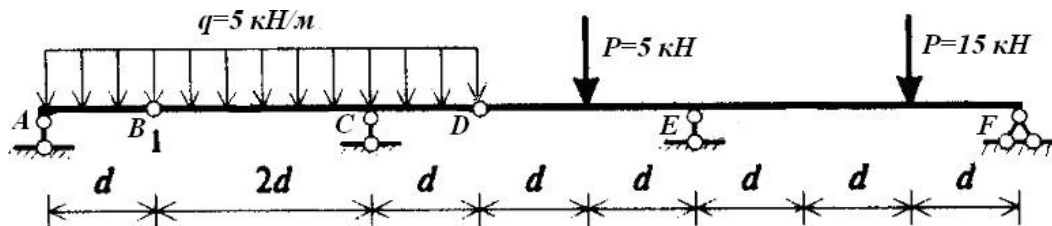


Рисунок 2.7

Вопросы к практическому занятию

1. Какую стержневую систему называют многопролетной шарнирно-консольной балкой?
2. Каким правилам должно подчиняться размещение шарниров в пролетах для обеспечения неизменяемости балки?
3. Какими преимуществами обладают многопролетные шарнирно-консольные балки?

4. Перечислите недостатки многопролетных шарнирно-консольных балок.
5. Поясните порядок построения «этажной схемы».
6. К чему сводится расчет многопролетной шарнирно-консольной балки?
7. Какие части многопролетной балки относят к основным, а какие к подвесным?

2.2. РАСЧЕТ ТРЁХШАРНИРНЫХ АРОК И РАМ

Теоретическая часть

Арочными называются системы криволинейного или ломаного очертания, в опорах которых от вертикальной нагрузки возникают наклонные реакции, направленные, как правило, внутрь пролета.

Трёхшарнирной аркой называется трёхшарнирная система из двух криволинейных брусьев.

Трёхшарнирные арки относятся к распорным системам, которые характеризуются тем, что вертикальные нагрузки вызывают горизонтальные опорные реакции – *распор*.

Трёхшарнирная арка является системой геометрически неизменяемой и статически определимой. Устройство арки представлено на рисунке 2.8.

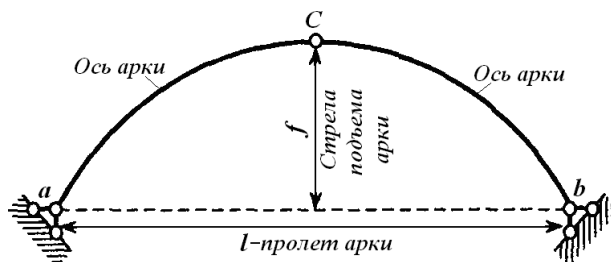


Рисунок 2.8

В практике встречаются различные по форме и виду арки. В том случае, когда каждая половина представляет сплошной брус криволинейного очертания, ее называют аркой со сплошной стенкой (рис. 2.8). При ломаном очертании оси сооружение обычно называется трёхшарнирной рамой (рис. 2.9).

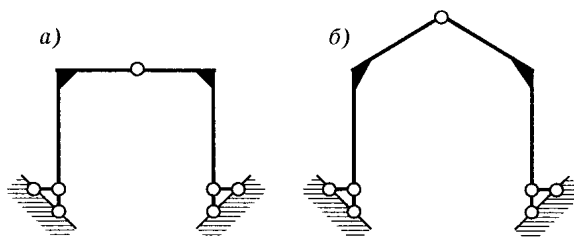


Рисунок 2.9

Арочные системы в сравнении с балочными оказываются экономически более выгодными.

При действии внешней нагрузки на трёхшарнирную арку (рис. 2.10а) в каждой её опоре возникает по две реакции; всего, таким образом, имеется четыре неизвестных реакции. Вертикальные обозначим через V_A и V_B , а горизонтальные – через H_A и H_B (рис. 2.10б).

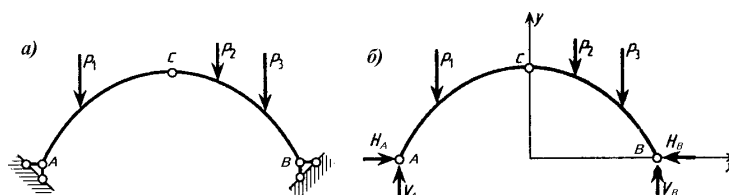


Рисунок 2.10

Кроме трех уравнений равновесия, которые дает статика для системы сил, расположенных в одной плоскости, для расчета трёхшарнирной арки можно составить четвертое уравнение, основанное на том, что равнодействующая всех сил, приложенных к левой (или правой) половине арки, должна пройти через средний шарнир C , так как в противном случае левая (или правая) половина арки вращалась бы вокруг точки C . Так как момент равнодействующей равен алгебраической сумме моментов составляющих ее сил, то

четвертое уравнение статики можно сформулировать следующим образом: *алгебраическая сумма моментов сил, действующих на левую или правую половину арки относительно точки C (среднего шарнира), равняется нулю, т.е.*

$$\sum M_C^{слева} = 0 \text{ или } \sum M_C^{справа} = 0.$$

Таким образом, при расчете трёхшарнирной арки можно составить следующие четыре уравнения:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M = 0 \text{ и } \sum M_C^{слева} = 0 \text{ или } \sum M_C^{справа} = 0.$$

Внутренними усилиями являются: изгибающий момент M , поперечная сила Q и продольная сила N , действующие в поперечных сечениях арки.

Изгибающий момент, действующий в сечении, равен алгебраической сумме моментов всех внешних левых сил относительно центра тяжести данного сечения или же сумме моментов правых сил, взятой с обратным знаком. Изгибающий момент считается положительным, если левые силы стремятся вращать арку относительно данного сечения по часовой стрелке (или если растягивается нижнее волокно).

Поперечная сила, действующая в сечении, равна алгебраической сумме проекций всех внешних левых сил (или правых сил с обратным знаком) на нормаль к оси бруса в данном сечении.

Поперечная сила считается положительной, если сумма проекций левых сил направлена вверх от оси арки (или если она поворачивает часть конструкции, на которую действует, по часовой стрелке).

Продольная сила, действующая в сечении, равна алгебраической сумме проекций всех левых внешних сил (правых сил с обратным знаком) на касательную к оси бруса в данном сечении. Продольную силу считают положительной, если она в сечении вызывает растяжение.

Пример 2.2.1

Для сплошной трёхшарнирной арки (рис. 2.11) определить моменты, поперечные и нормальные силы в сечении $k-k$ от действия постоянной нагрузки. Ось арки описана уравнением $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$.

Решение

Предварительно необходимо начертить строго в масштабе расчетную схему оси арки, ординаты которой должны быть вычислены по уравнению

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x).$$

В нашем случае:

при $x = 3\text{ м}$, $y = \frac{4 \cdot 6}{24^2} 3(24-3) = 2,625\text{ м}$;

при $x = 6\text{ м}$, $y = \frac{4 \cdot 6}{24^2} 6(24-6) = 4,5\text{ м}$;

при $x = 9\text{ м}$, $y = \frac{4 \cdot 6}{24^2} 9(24-9) = 5,625\text{ м}$; и т.д.

Результаты расчета сведем в таблицу:

x	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	0	2,625	4,5	5,625	6,0	5,625	4,5	2,625	0

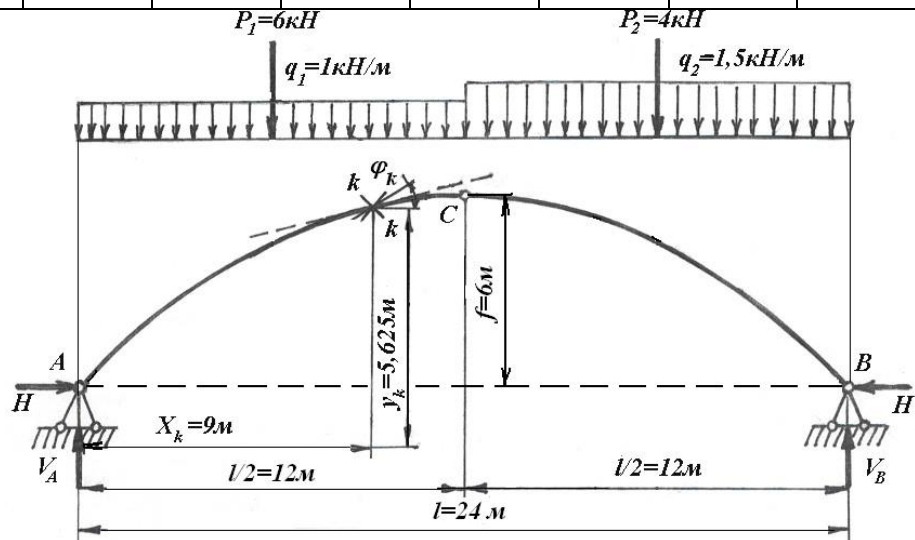


Рисунок 2.11

Вертикальные опорные реакции V_A, V_B и горизонтальные опорные реакции (распор) H_A и H_B вычисляем из уравнений равновесия системы. В данном примере имеем:

$$\sum M_A = 0, V_B \cdot 24 - q_2 \cdot 12 \cdot 18 - P_2 \cdot 18 + q_1 \cdot 12 \cdot 6 - P_1 \cdot 6 = 0;$$

$$V_B = \frac{1,5 \cdot 12 \cdot 18 + 4 \cdot 18 + 1 \cdot 12 \cdot 6 + 6 \cdot 6}{24} = 21 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, -V_A \cdot 24 + q_1 \cdot 12 \cdot 18 + P_1 \cdot 18 - q_2 \cdot 12 \cdot 6 + P_2 \cdot 6 = 0;$$

$$V_A = \frac{1 \cdot 12 \cdot 18 + 6 \cdot 18 + 1,5 \cdot 12 \cdot 6 + 4 \cdot 6}{24} = 19 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{\text{лев}} = 0, -V_A \cdot 12 + H_A \cdot 6 + q_1 \cdot 12 \cdot 6 + P_1 \cdot 6 = 0, \quad H_A = \frac{19 \cdot 12 - 1 \cdot 12 \cdot 6 - 6 \cdot 6}{6} = 20 \text{ кН};$$

$$\sum X = 0, \quad H_A - H_B = 0, \quad H_A = H_B = 20 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составим следующие неиспользованные уравнения равновесия системы:

$$\sum Y = 0, \quad V_A - q_1 \cdot 12 - P_1 - q_2 \cdot 12 - P_2 + V_B = 0, \quad 19 - 1 \cdot 12 - 6 - 1,5 \cdot 12 - 4 + 21 = 0;$$

$$\sum M_C^{\text{прав}} = 0, \quad V_B \cdot 12 - H_B \cdot 6 - q_2 \cdot 12 \cdot 6 - P_2 \cdot 6 = 0, \quad 21 \cdot 12 - 20 \cdot 6 - 1,5 \cdot 12 \cdot 6 - 4 \cdot 6 = 0.$$

Уравнения тождественно удовлетворяются. Следовательно, вертикальные опорные реакции и распор определены верно.

Внутренние усилия M_k, Q_k и N_k , возникающие в заданном сечении от нагрузок q и P , вычисляем по формулам:

$$M_k = M_k^0 - H_A y_k, \quad (2.2)$$

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi_k - H_A \sin \varphi_k, \quad (2.3)$$

$$N_k = -Q_k^0 \sin \varphi_k - H_A \cos \varphi_k, \quad (2.4)$$

где M_k^0, Q_k^0 - изгибающий момент и поперечная сила в сечении $k-k$ двухопорной балки с пролетом, равным пролету трёхшарнирной арки и загруженной той же нагрузкой; y_k - ордината оси трёхшарнирной арки в сечении $k-k$; φ_k - угол наклона касательной к оси трёхшарнирной арки в сечении $k-k$.

В рассматриваемом примере

$$M_k^0 = V_A x_k - \frac{1}{2} q x_k^2 - P_1 \cdot 3; \quad Q_k^0 = V_A - q x_k - P_1$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_k) = \frac{4 \cdot 6}{24^2} (24 - 2 \cdot 9) = 0,25;$$

$$\sin \varphi_k = 0,242; \quad \cos \varphi_k = 0,968; \quad y_k = 5,625 \text{ м}.$$

Подставим найденные значения $M_k^0, Q_k^0, \sin \varphi_k, \cos \varphi_k, y_k$ в формулы, получим величины внутренних усилий, возникающих в сечении $k-k$ от нагрузок q и P :

$$M_k = V_A x_k - \frac{q_1 x_k^2}{2} - P_1 \cdot 3 - H_A y_k = 19 \cdot 9 - \frac{1 \cdot 9^2}{2} - 6 \cdot 3 - 20 \cdot 5,625 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_k = (V_A - q_1 x_k - P_1) \cos \varphi_k - H_A \sin \varphi_k = (19 - 1 \cdot 9 - 6) \cdot 0,968 - 20 \cdot 0,242 = -0,968 \text{ кН};$$

$$N_k = -(V_A - q_1 x_k - P_1) \sin \varphi_k - H_A \cos \varphi_k = -(19 - 1 \cdot 9 - 6) \cdot 0,242 - 20 \cdot 0,968 = -20,328 \text{ кН}.$$

Задание

Задание 2.2.1

Для трёхшарнирной арки или рамы (рис. 2.12) требуется определить аналитически опорные реакции, поперечную и продольную силы, изгибающий момент в сечении k (с координатой x_k) от заданной нагрузки. Исходные данные взять из таблицы:

Схема (рис. 2.12)	$l,$ м	$\frac{f}{l} = \frac{h}{l}$	$\frac{x_k}{l}$	β	α только для рам	$q,$ кН/м	u_1	u_2	u_3
1	24	0,3	0,75	2,0	0,75	9	0,25	0,25	0,75
2	30	0,3	0,25	2,5	0,50	12	0,25	0,50	0,75
3	28	0,4	0,25	2,4	0,60	11	0,50	0,25	0,50
4	16	0,3	0,25	1,2	0,80	5	0,25	0,50	1,00

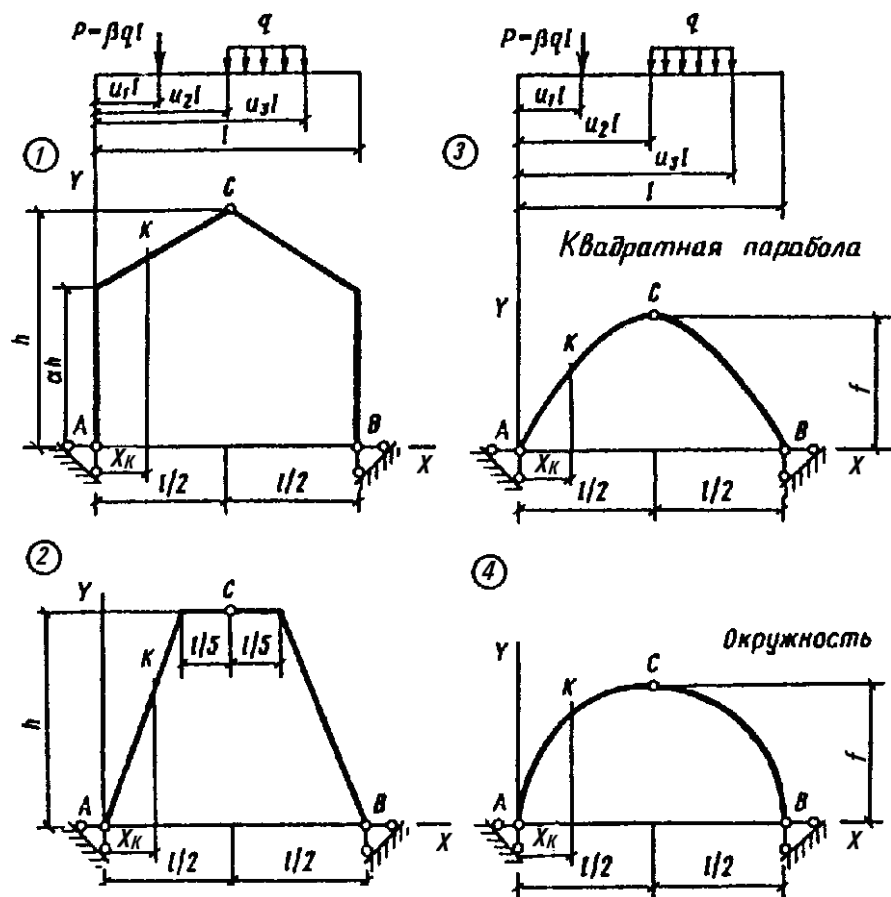


Рисунок 2.12

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение трёхшарнирной арки и рамы соответственно.
2. Дайте пояснения, что такое распор.
3. Напишите уравнения равновесия для трёхшарнирных арок и рам.
4. Как определить изгибающий момент в сечении арки?
5. Какие правила присвоения знаков применяются при определении моментов в сечениях арки?
6. Как определить поперечную силу в сечении арки?
7. Правила присвоения знаков при определении поперечных сил?
8. Как определить продольную силу в сечении арки?
9. Какие правила присвоения знаков применяются при определении продольных сил в сечениях арки?
10. Перечислите преимущества арочных систем в сравнении с балочными.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 3

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ

Теоретическая часть

Фермой называется стержневая система, остающаяся геометрически неизменяемой после условной замены ее жестких узлов шарнирами. Фермы имеют такое же назначение как и балки сплошного сечения, но применяются для перекрытия значительных пролетов, когда проектирование сплошных балок становится экономически невыгодным вследствие неполного использования материала стенки.

Применяют плоские и пространственные фермы. Расчет пространственных ферм во многих случаях удастся свести к расчету нескольких плоских ферм.

Расстояние между опорами фермы (рис. 2.13) называется *пролетом*; стержни, расположенные по внешнему контуру фермы, называются *поясными* и образуют *верхний* и *нижний пояса*; стержни, соединяющие пояса, образуют решетку фермы и называются: вертикальные – *стойками*, наклонные – *раскосами*. Расстояние между соседними узлами любого пояса фермы (обычно измеряемое по горизонтали) называется *панелью*.

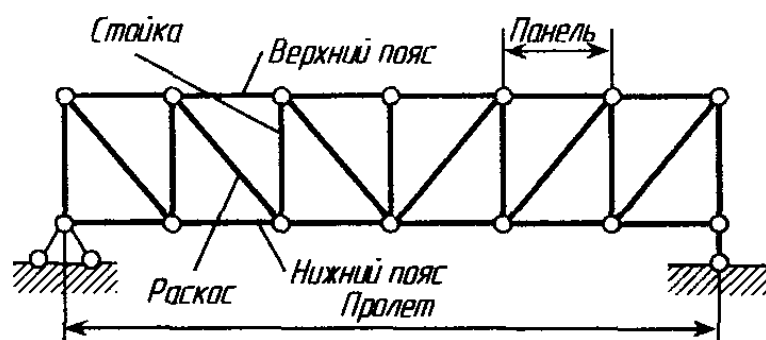


Рисунок 2.13

Таким образом, в шарнирно-стержневой системе элементами являются стержни, шарнирно скрепленные между собой по концам.

Точки соединения стержней называются *узлами*.

Условимся усилия в элементах верхнего пояса фермы обозначать буквой O , усилия в элементах нижнего пояса – буквой U , усилия в раскосах – буквой D , усилия в стойках – буквой V . У этих букв внизу будем ставить цифру, соответствующую узлам фермы, к которым присоединен данный стержень.

Способ моментной точки применяется главным образом в тех случаях, когда удастся расsection ферму на две части так, чтобы при этом перерезанными оказались три ее стержня, направления осей которых не пересекаются в одной точке (см., например, сечение 1-1 на рис.2.14, слева). Направления осей трех таких перерезанных стержней пересекаются попарно в трех точках, не лежащих на одной прямой (рис. 2.14, справа).

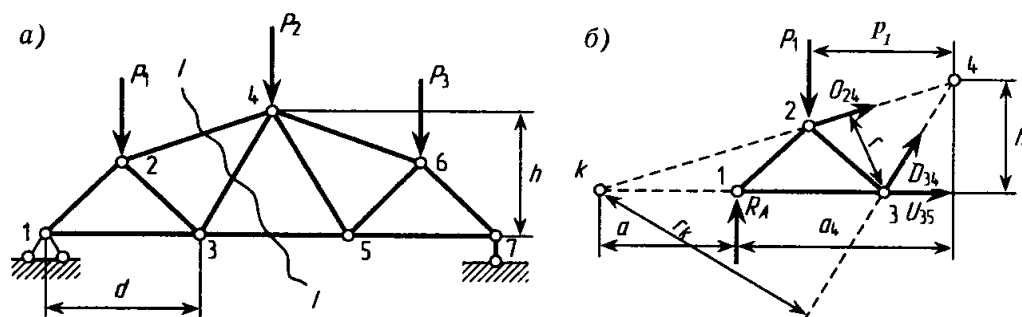


Рисунок 2.14

Составляя последовательно уравнения моментов всех сил (внешних и внутренних), действующих на отсеченную часть фермы, относительно этих точек, будем каждый раз получать уравнение с одним неизвестным, представляющим собой усилие в рассеченном стержне, не проходящим через рассматриваемую точку пересечения стержней. Таким образом, для определения усилия в каком-либо стержне необходимо разрезать ферму так, чтобы в разрез кроме данного стержня попали еще два других (оси которых не сходятся с ним в общей точке), после чего из уравнения моментов относительно точки пересечения этих двух стержней можно легко определить усилие в данном стержне.

Точка пересечения осей двух стержней, относительно которой составляется уравнение моментов, называется *моментной*.

Способ проекций применяется главным образом в следующих двух случаях:

1) рассматривается равновесие части фермы (как и при способе моментной точки), когда два из трех рассеченных стержней параллельны друг другу;

2) рассматривается равновесие выделяемых из фермы узлов (способ вырезания узлов).

Следует отметить, что при расчете фермы пользуются и способом моментной точки и способом проекций, применяя каждый раз тот из них, с помощью которого более быстро определяется усилие в данном элементе.

Усилия в стержнях ферм способом моментной точки определяется по формуле

$$N = \frac{M}{r},$$

где M – момент левых или правых сил относительно моментной точки,

r – плечо искомого усилия N относительно той же точки.

Из этой формулы видно, что чем больше r , тем меньше (при прочих равных условиях) усилие N .

Увеличение высоты фермы приводит к увеличению плеч r и уменьшению усилий в ее элементах.

По конструктивным соображениям удобно располагать раскосы фермы так, чтобы они составляли со стойками и поясами углы, близкие к 45° . Поэтому увеличение высоты ферм приводит к увеличению длины панелей. Так, например, для соблюдения этого условия панели фермы с параллельными поясами должны быть примерно равны высоте фермы.

Устройство больших панелей вызывает увеличение массы проезжей части моста — поперечных балок, опирающихся на узлы фермы, и главным об-

разом вспомогательных балок, опирающихся на поперечные балки. Экономия материала на поясах фермы, достигаемая при увеличении высоты фермы, может оказаться меньше дополнительного его расхода на устройство проезжей части моста. Задача увеличения высоты фермы может быть рационально решена при введении в состав каждой панели дополнительных двухопорных фермочек — шпренгелей, опирающихся на узлы основной фермы.

Стержни таких фермочек работают лишь на местную нагрузку, т. е. на нагрузку, приложенную в пределах их пролетов. Вертикальная местная нагрузка, действующая на шпренгель, передается вертикально в узлы основной фермы, которые являются для шпренгеля опорами.

Шпренгели позволяют поставить поперечные балки не только в основных узлах фермы, но и в дополнительных и уменьшить за счет этого сечения вспомогательных балок; в результате существенно облегчается проезжая часть моста. Применение шпренгелей позволяет избежать увеличения массы проезжей части моста при возрастании длины панели и добиться уменьшения усилий в поясах фермы путем увеличения ее высоты.

Шпренгели, передающие местную вертикальную нагрузку, приложенную к верхним дополнительным узлам, называют *одноярусными*. Применяются также шпренгели, которые местную нагрузку, приложенную к верхним узлам, передают на нижние узлы основной фермы, или такие, которые нагрузку, приложенную к дополнительным узлам нижнего пояса, передают на верхние узлы основной фермы. Такие шпренгели будем называть *двухъярусными*.

Элементы ферм, в состав которых входят одноярусные шпренгели, можно разбить на следующие три категории:

- 1) элементы, принадлежащие только основной ферме. Усилия в этих элементах определяются расчетом основной фермы; эти усилия не меняются при включении в ферму шпренгелей;
- 2) элементы, принадлежащие только дополнительным фермам (шпренгелям). Усилия в них могут быть найдены из условий равновесия, со-

ставляемых для отдельных частей шпренгеля, который при этом можно рассматривать как самостоятельную двухопорную ферму;

3) элементы, принадлежащие одновременно основной ферме и шпренгелю. Усилие в каждом из них равно сумме двух усилий, одно из которых возникает в элементе основной фермы, а другое – в слившемся с ним элементе шпренгеля.

Пример 2.3.1

Определить усилия в стержнях третьей панели слева фермы, изображенной на рис. 2.15.

Решение

Определим опорные реакции: $R_A = R_B = 100 \text{ кН}$. Разрежем ферму сечением 1-1, отбросим правую часть и будем рассматривать равновесие левой части (рис. 2.16). Всегда проще рассматривать ту часть фермы, на которую действует меньше сил, а потому в данном случае рассмотрим ее левую часть. Она должна оставаться в равновесии под действием внешних сил R_A , две силы P и две силы P_1 и внутренних усилий O_{46} , D_{47} и U_{57} в рассеченных элементах; эти усилия заменяют собой действие отброшенной правой части фермы на левую. Для определения усилия в стержне O_{46} выбираем моментную точку 7.

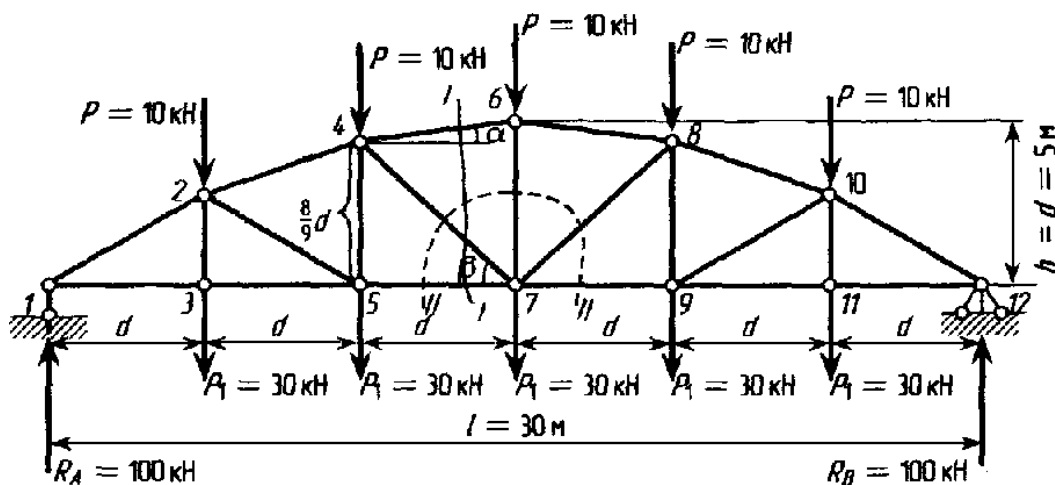


Рисунок 2.15

Сумма моментов всех сил, действующих на левую часть фермы, относительно точки 7 (рис.2.16) имеет вид:

$$\sum M_7 = R_A \cdot 3d - P \cdot 2d - P \cdot d - P_1 \cdot 2d - P_1 \cdot d + O_{46}r = 0,$$

откуда
$$O_{46} = \frac{-R_A \cdot 3d + P \cdot 2d + P \cdot d + P_1 \cdot 2d + P_1 \cdot d}{r};$$

здесь $r = (a + 3d) \sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{9}$ (рис. 2.16), с другой стороны $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{8}{9}d}{a + 2d}$, тогда:

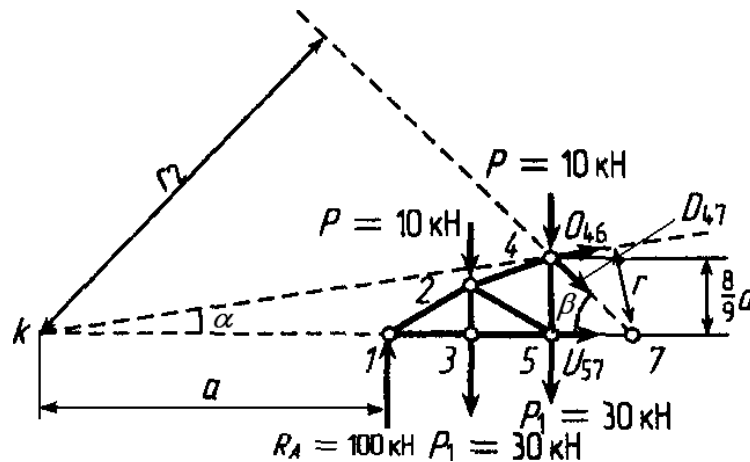


Рисунок 2. 16

$$a = 6d \text{ и } \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \sin \alpha = 0,1104.$$

$$r = (6d + 3d) \sin \alpha = 9 \cdot 5 \cdot 0,1104 = 4,97 \text{ м.}$$

$$O_{46} = \frac{-100 \cdot 3 \cdot 5 + 10 \cdot 2 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 30 \cdot 2 \cdot 5 + 30 \cdot 5}{4.97} = -181.1 \text{ кН.}$$

При определении усилия в стержне D_{47} моментной точкой будет точка k , тогда

$$\sum M_k = -R_A \cdot a + 2P(a + 1,5d) + 2P_1(a + 1,5d) + D_{47} \cdot r_2 = 0,$$

откуда

$$D_{47} = \frac{R_A \cdot a - 2P(a + 1,5d) + 2P_1(a + 1,5d)}{r_2},$$

здесь $r_2 = (a + 3d) \sin \beta$; $\operatorname{tg} \beta = \frac{8}{9}$ и $\sin \beta = 0,6644$,

$$r_2 = (6d + 3d) \sin \beta = (6 \cdot 5 + 3 \cdot 5) 0,6644 = 29,9 \text{ м.}$$

$$D_{47} = \frac{100 \cdot 30 - 2 \cdot 10(30 + 1,5 \cdot 5) - 2 \cdot 30(30 + 1,5 \cdot 5)}{29,9} = 0.$$

При определении усилия в стержне U_{57} моментной точкой будет точка 4 и $\sum M_4 = R_A 2d - Pd - P_1 d - U_{57} \frac{8}{9} d = 0$,

откуда

$$U_{57} = \frac{(R_A 2d - Pd - P_1 d) 9}{8d} = \frac{(100 \cdot 2 \cdot 5 - 10 \cdot 5 - 30 \cdot 5) 9}{8 \cdot 5} = 180 \text{ кН.}$$

Для определения усилия в стойке V_{76} вырежем узел 7 (рис.2.17) и составим уравнение равновесия для узла 7. Этим уравнением будет сумма проекций сил на ось Y.

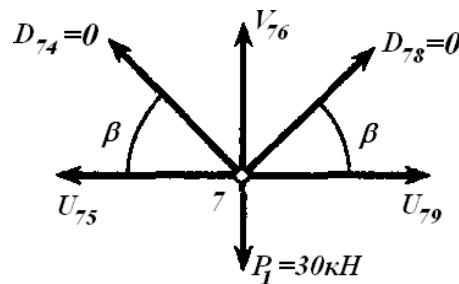


Рисунок 2.17

$$\sum Y = V_{76} - P_1 = 0 \text{ и } V_{76} = P_1 = 30 \text{ кН.}$$

Таким образом, можно определить усилия во всех стержнях, применяя методы моментной точки или способ проекций.

Пример 2.3.2

Определить усилия в стержнях второй панели слева шпренгельной фермы, изображенной на рис. 2.18

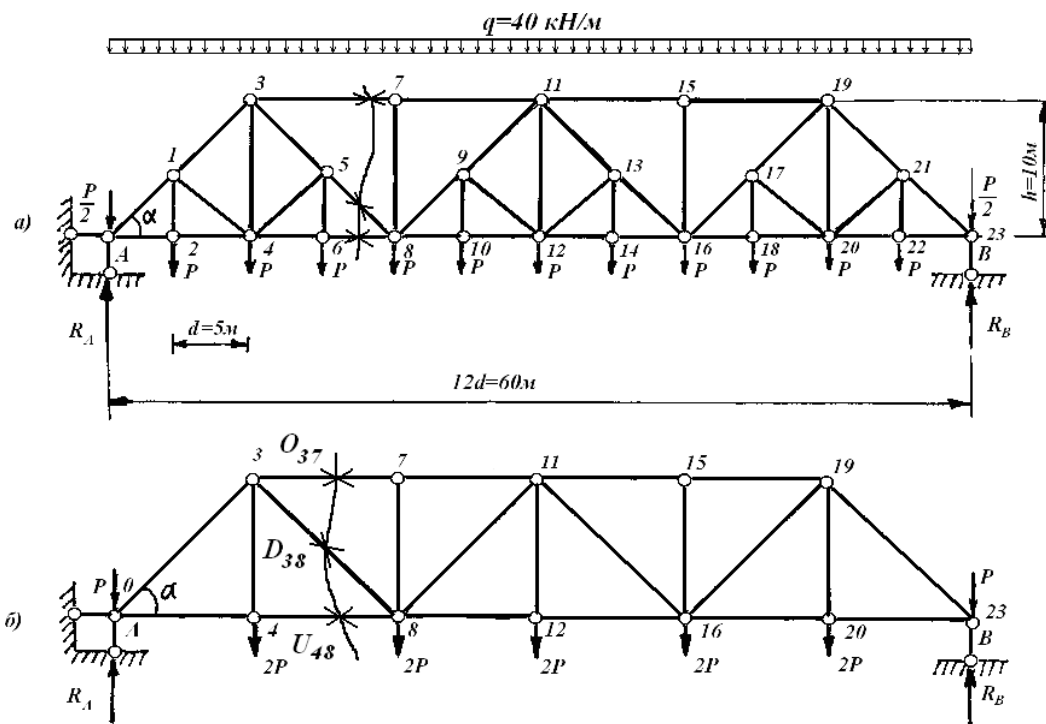


Рисунок 2.18

Решение

Равномерно распределенную нагрузку фермы приведем к узловой (рис.2.18а). Тогда во всех промежуточных узлах заданной фермы будет передаваться узловая нагрузка $P = qd = 40 \cdot 5 = 200 \text{ кН}$. А на опорные узлы нагрузка $\frac{qd}{2} = \frac{40 \cdot 5}{2} = 100 \text{ кН}$.

Основная ферма (без шпренгелей) и узловая нагрузка, приложенная к ней, показаны на рис. 2.18б.

Из условия симметрии опорные реакции равны:

$$R_A = R_B = \frac{12P}{2} = \frac{12 \cdot 200}{2} = 1200 \text{ кН}.$$

Для определения усилия O_{37} в стержне 3–7 заданной фермы (рис. 2.18б), являющимся элементом первой категории, проведем в основной ферме – сечение 1–1. Моментной точкой для определяемого усилия является точка 8 (рис. 2.18б).

Составим уравнение равновесия левой отсеченной части фермы $\sum M_8 = 0$, получим:

$$-R_A \cdot 4d + P \cdot 4d + 2P \cdot 2d - O_{37} \cdot h = 0,$$

откуда

$$O_{37} = \frac{-R_A 4d + P 4d + 2P 2d}{h} = -\frac{(-1200 \cdot 4 + 200 \cdot 4 + 2 \cdot 200 \cdot 2) \cdot 5}{10} = -1600 \text{ кН}.$$

Усилие D_{38}^O стержня 3–8 основной фермы находим из уравнения равновесия $\sum Y = 0$ левой отсеченной части фермы (сечение 1–1):

$$R_A - P - 2P - D_{38}^O \sin \alpha = 0;$$

$$D_{38}^O = \frac{R_A - 3P}{\sin \alpha} = \frac{1200 - 3 \cdot 200}{0,7071} = 848,54 \text{ кН},$$

где $\alpha = 45^\circ$.

Усилие D_{58} стержня 5–8, элементе третьей категории, определяем как сумму усилий, одно из которых D_{38}^O действует в элементе основной фермы, а другое D_{58}^{III} – в элементе шпренгеля.

Выделим шпренгель из заданной фермы и определим усилие D_{58}^{III} в раскосе 5–8 (рис. 2.19). Проведя сечение $a-a$, составим уравнение равновесия $\sum Y = 0$ левой отсеченной части шпренгеля:

$$D_{58}^{III} \sin \alpha + \frac{P}{2} = 0, \quad D_{58}^{III} = -\frac{P}{2 \sin \alpha} = -141,4 \text{ кН}.$$

Таким образом, усилие D_{38} в раскосе 3–8 равно:

$$D_{58} = D_{58}^{III} + D_{38}^O = -141,4 + 848,54 = 707,14 \text{ кН}.$$

Усилие U_{68} в стержне нижнего пояса 6–8, в элементе третьей категории равно

$$U_{68} = U_{48}^O + U_{68}^{III}.$$

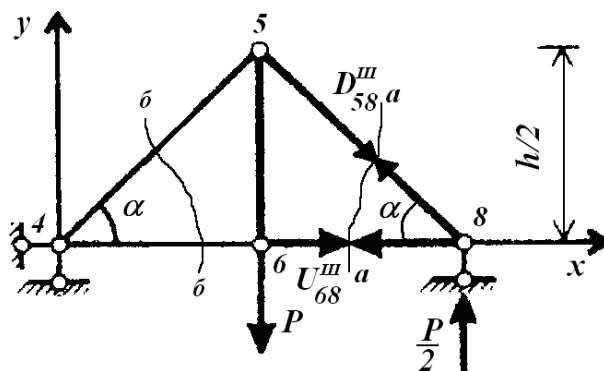


Рисунок 2.19

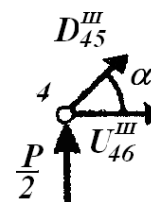


Рисунок 2.20

Моментной точкой для определения усилия U_{48}^O является точка 3 (рис. 2.18). Составим уравнение равновесия левой отсеченной части фермы $\sum M_3 = 0$, получим:

$$R_A \cdot 2d - P \cdot 2d - O_{48}^O h = 0,$$

$$U_{48}^O = \frac{R_A 2d - P 2d}{h} = \frac{1200 \cdot 2 \cdot 5 - 200 \cdot 2 \cdot 5}{10} = 1000 \text{ кН}.$$

Чтобы найти усилие U_{68}^{III} в стержне нижнего пояса 6–8 шпренгеля, проведем сечение $a-a$ (рис. 2.19). Составив и решив уравнение равновесия левой отсеченной части шпренгеля $\sum M_5 = 0$, получим:

$$\frac{P}{2} d - U_{68}^{III} \frac{h}{2} = 0, \quad U_{68}^{III} = P \frac{d}{h} = 200 \frac{5}{10} = 100 \text{ кН}.$$

Таким образом, суммарное усилие U_{810} в элементе 8–10 нижнего пояса

$$U_{68} = U_{48}^O + U_{68}^{III} = 1000 + 100 = 1100 \text{ кН}.$$

Усилие в стержне $U_{46} = U_{68} = 1100 \text{ кН}$.

Усилие D_{45}^{III} в раскосе 4–5, элементе второй категории, определим из условия равновесия $\sum Y = 0$ узла 4, вырезанного сечением $\delta-\delta$ (см. рис. 2.20):

$$D_{45}^{III} \sin \alpha + \frac{P}{2} = 0; \quad D_{45}^{III} = - \frac{P}{2 \sin \alpha} = - \frac{200}{2 \cdot 0,7071} = -141,4 \text{ кН}.$$

Для определения усилия V_{1112} в стойке 11–12, элементе первой категории, вырежем узел 12 в основной ферме (см. рис. 2.21) и составим уравнение его равновесия $\sum Y = 0$:

$$V_{1112} - 2P = 0.$$

Решив это уравнение, получим $V_{1112} = 2P = 2 \cdot 200 = 400 \text{ кН}$.

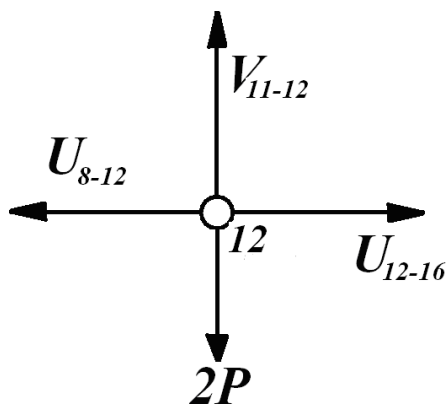


Рисунок 2.21

Задания

Задание 2.3.1

Определить усилия в стержнях фермы, показанной на рис. 2.22

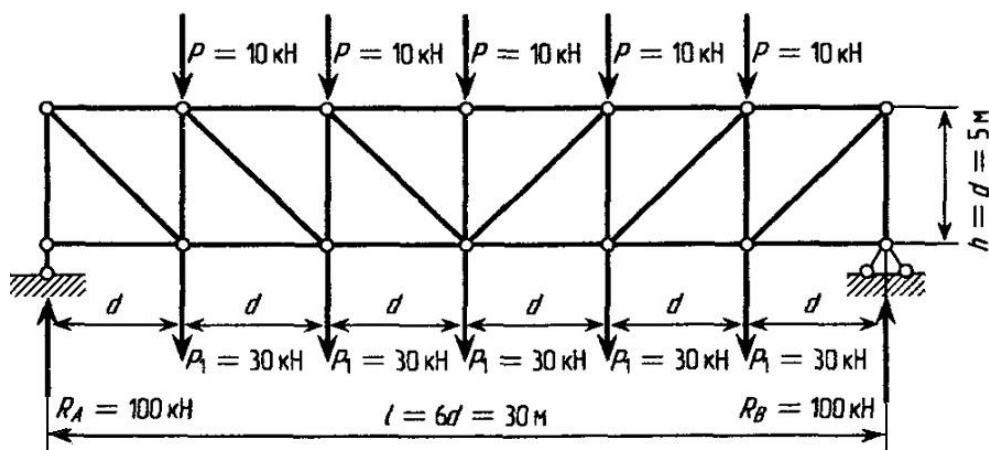


Рисунок 2.22

Задание 2.3.2

Определить усилия в стержнях фермы, показанной на рис. 2.23

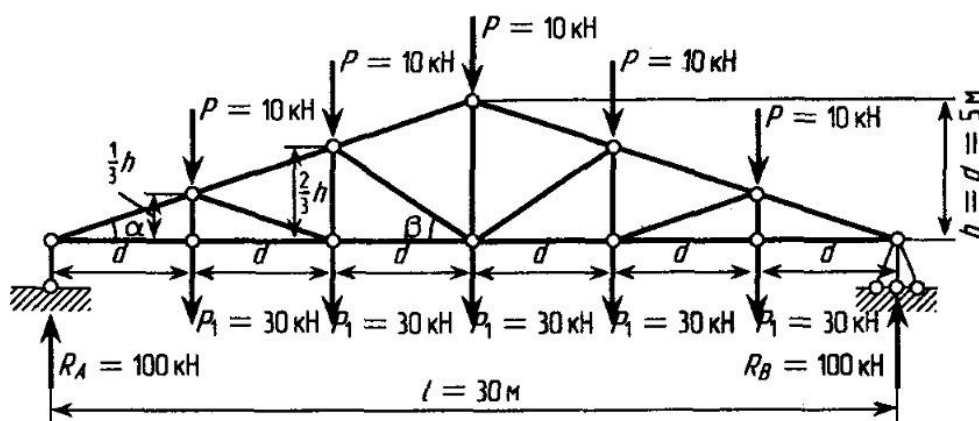


Рисунок 2.23

Задание 2.3.3

Определить усилия в стержнях фермы (третья панель слева), показанной на рис. 2.24. $h=d=5$ м.

Задание 2.3.4

Определить усилия в стержнях фермы (третья панель слева), показанной на рис. 2.25. $h=d=5$ м.

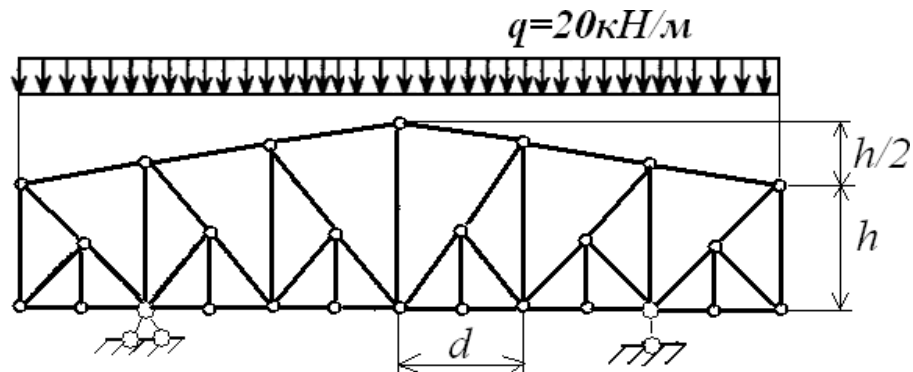


Рисунок 2.24

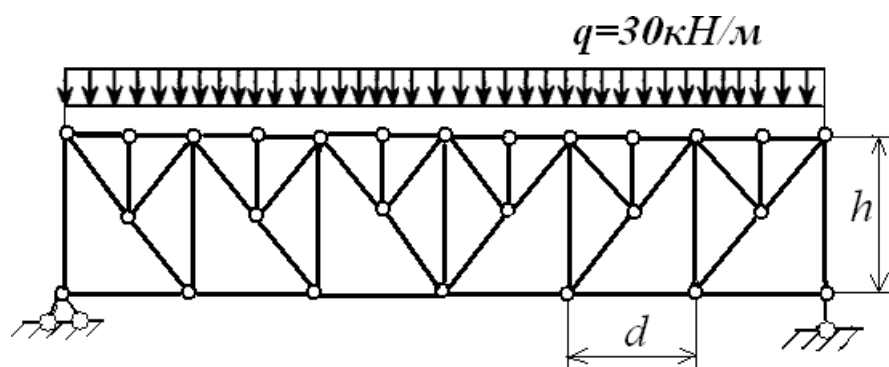


Рисунок 2.25

Вопросы к практическому занятию

1. Какие стержневые системы называют фермами?
2. Для каких целей применяются фермы?
3. Какие системы называются балочными и консольно-балочными?
- ферм. 4. Перечислите основные методы расчета статически определимых
5. Поясните, что такое шпренгельная ферма?
6. Какие элементы ферм называют шпренгелями? Какова цель их применения?
7. На какие категории делят элементы ферм, в состав которых входят одноярусные шпренгели?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4

ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ В ОДНОПРОЛЕТНЫХ И КОНСОЛЬНЫХ БАЛКАХ

Теоретическая часть

Линией влияния (л.в) называют график, изображающий закон изменения какого либо фактора (например, изгибающего момента в сечении) при передвижении по сооружению груза $\bar{P} = 1$, сохраняющего постоянное направление.

Необходимость в линиях влияния возникает при расчете сооружений на подвижные нагрузки.

В статически определимых системах линии влияния можно строить с использованием уравнений равновесия. Если характеризовать положение груза какой-нибудь переменной координатой, например X , то момент (опорная реакция, прогиб) можно выразить из уравнений статики через X . Такой метод расчета и построение линии влияния называется *статическим* или *аналитическим*.

Пусть по балке (рис.3.1) перемещается нагрузка, распределенная равномерно на отрезке c . Следует выяснить, при каком положении этой нагрузки (при каком значении переменной x) изгибающий момент в сечении D , например, будет иметь наибольшее значение. Для ответа на этот вопрос необходимо рассмотреть все возможные положения заданной нагрузки. Для этого распределенную нагрузку заменяют одной сосредоточенной вертикальной силой $\bar{P} = 1$. Величина искомого изгибающего момента зависит от положения единичной силы на балке. Эту зависимость можно выразить в виде закона (функции) и построить его график, изображающий влияние силы $\bar{P} = 1$ на величину изгибающего момента (опорной реакции, поперечной силы или перемещений) в рассматриваемом сечении. После этого задача по определению максимального значения искомого усилия от заданной нагрузки q (рис. 3.1) или любой другой легко решается.

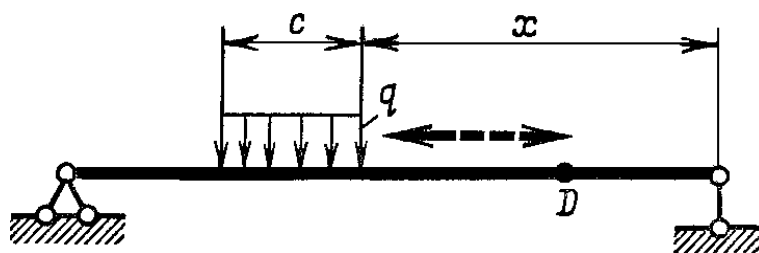


Рисунок 3.1

Линии влияния обычно строят в прямоугольных осях координат. Ось абсцисс удобно выбирать перпендикулярно линии действия силы $\bar{P} = 1$. По оси ординат откладывают значение искомого усилия (фактора).

Статический способ основан на рассмотрении условий равновесия всего сооружения в целом или любой его отсеченной части.

Вычисления усилий с помощью линий влияния выполняется следующим образом: рассмотрим действие неподвижных нагрузок двух видов: 1. Сосредоточенных сил; 2. Равномерно распределенной нагрузки.

Чтобы вычислить какой либо фактор (опорную реакцию, изгибающий момент, поперечную силу, усилие в каком-либо элементе фермы и т.д.) от нескольких сосредоточенных сил, надо на построенной для этого фактора

л.в. измерить ординаты под грузом и найти алгебраическую сумму произведений числовых величин грузов на соответствующие им ординаты л.в.

1. Действие сосредоточенных сил (рис.3.2).

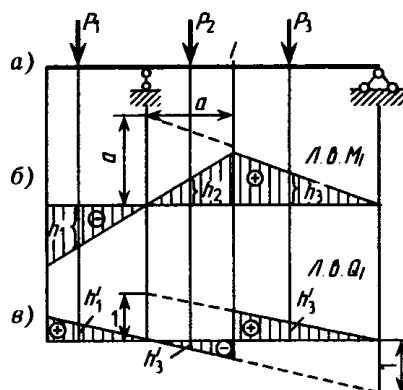


Рисунок 3.2

Поперечная сила в сечении I от действия грузов P_1, P_2 и P_3 (л.в. Q_1 построена на рис. 3.2в) будет равна:

$$Q_1 = P_1 h'_1 + P_2 h'_2 + P_3 h'_3,$$

где h'_1, h'_2 и h'_3 – ординаты линии влияния Q_1 соответственно под грузами P_1, P_2 и P_3 .

Ординаты л.в. Q_1 – величины отвлеченные. Следовательно, произведения Ph' , дающие числовые величины поперечной силы, будут иметь такую же размерность, как и сила P . Подобным же образом можно найти и величины опорных реакций с помощью соответствующих л.в.

Изгибающий момент M_1 от действия грузов P_1, P_2 и P_3 (рис.3.2б) будет равен:

$$M_1 = \sum Ph = -P_1 h_1 + P_2 h_2 + P_3 h_3.$$

Ординаты л.в. M_1 измеряются в масштабе длин. Если единица силы – ньютон (Н), а ординаты M_1 – метр (м), то единица изгибающего момента Ph будет ньютон-метр (Нм).

2. Действие равномерно распределенной нагрузки (рис. 3.3а).

Для определения числовой величины усилия от равномерно распределенной нагрузки надо найти площадь соответствующей части л.в. этого усилия

(в пределах расположения распределенной нагрузки) и умножить её на интенсивность нагрузки.

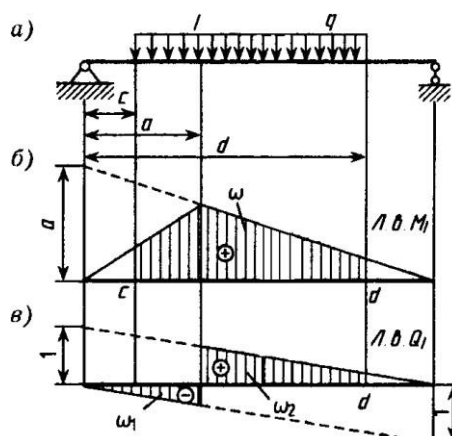


Рисунок 3.3

$$Q_1 = q(\omega_1 + \omega_2).$$

$$M_1 = q\omega.$$

Если распределенная нагрузка расположена над л.в., состоящей из нескольких участков разных знаков, то числовая величина усилия равна произведению интенсивности нагрузки на алгебраическую сумму площадей отдельных участков л.в. Так, для определения поперечной силы в сечении I, л.в. которой построена на рис.3.3в, надо найти числовые величины площадей ω_1 и ω_2 заштрихованных на рис. 3.3в, и подставить в выражение $Q_1 = q(\omega_1 + \omega_2)$.

Знаки площадей берут соответственно знакам ординат на тех участках, где вычисляются эти площади; в данном случае площадь ω_1 надо взять со знаком минус.

Пример 3.1

Построить линии влияния опорных реакций R_A и R_B , изгибающего момента M_1 и поперечной силы Q_1 в сечении 1(рис. 3.4). Найти опорные реакции, изгибающий момент и поперечную силу в сечении 1 с помощью линий влияния.

Решение

Линию влияния опорной реакции R_A можно построить по определенному порядку выведенному из анализа статического метода построения не выполняя промежуточных расчетов. Это можно сделать так: в масштабе под опорой откладывают положительную ординату равную единице и соединяют вершину этой ординаты с нулевой под опорой B . Линию влияния R_B строят также.

Чтобы построить линию влияния изгибающего момента M_1 для сечения 1 необходимо:

- 1) под опорой A откладывают положительную ординату, равную расстоянию сечения 1 от опоры A (можно в том же масштабе, что и схема);
- 2) соединяют вершину этой ординаты с нулевой под опорой B ;
- 3) сносят сечение 1 по вертикали до пересечения с проведенной линией и точку пересечения соединяют с нулевой ординатой под опорой A .

Линию влияния поперечной силы строят так:

- 1) под опорой A откладывают в масштабе положительную ординату равную 1;
- 2) под опорой B откладывают в масштабе отрицательную ординату равную 1;
- 3) сносят сечение 1 по вертикали до пересечения с проведенными линиями и получают правую и левую прямые линии влияния.

Определим опорные реакции (рис. 3.4б и в).

$$R_A = P \cdot h + q\omega = 10 \cdot 0,85 + 5 \cdot 2,45 = 20,75 \text{ кН};$$

$$R_B = P \cdot h + q\omega = 10 \cdot 0,15 + 5 \cdot 4,55 = 24,25 \text{ кН}.$$

Определим изгибающий момент для сечения 1 (рис. 3.4г).

$$M_1 = P \cdot h + q\omega = 10 \cdot 1,05 + 5 \cdot 7,35 = 47,35 \text{ кНм}.$$

Определим поперечную силу в сечении 1 (рис. 3.4д).

$$Q_1 = P \cdot h + q\omega = 10 \cdot 0,15 + 5 \cdot 2,45 = 20,75 \text{ кН}.$$

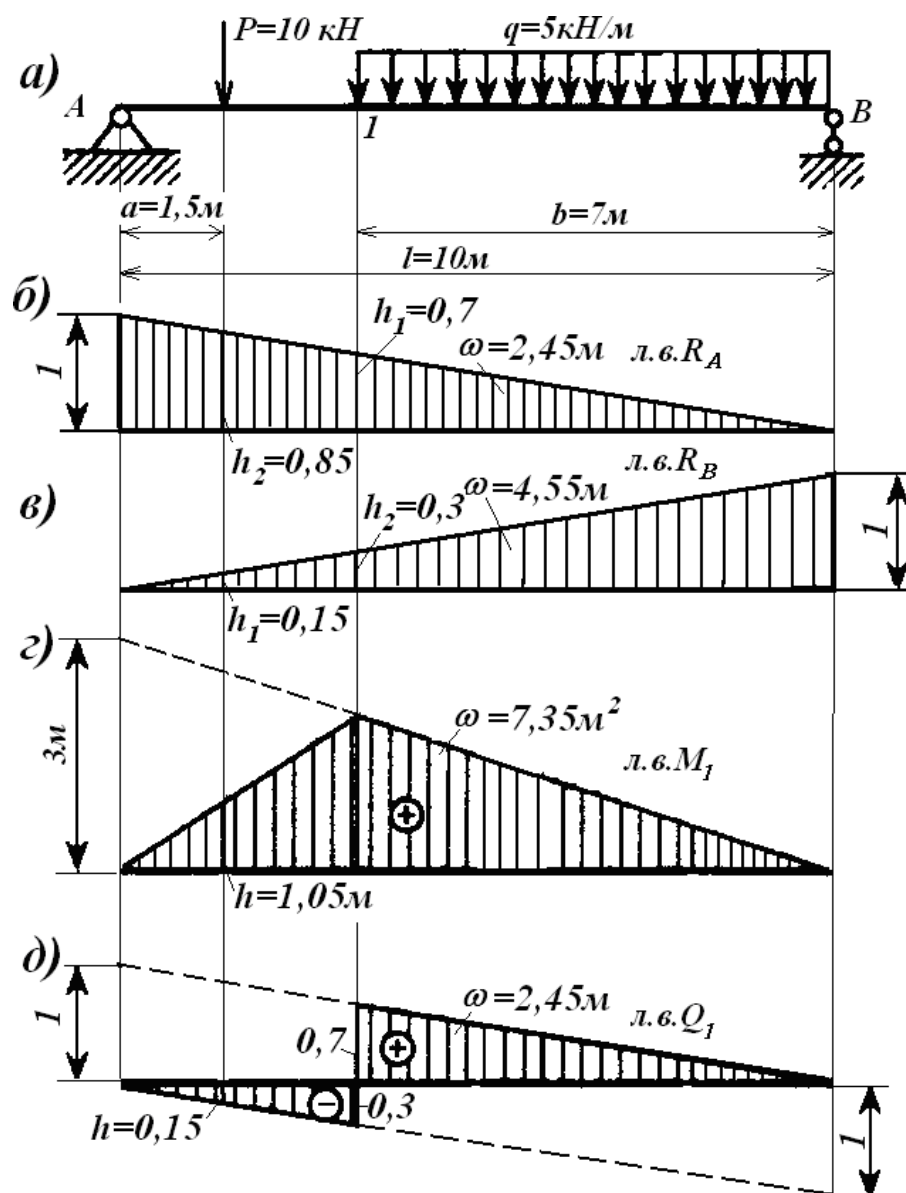


Рисунок 3.4

Задание

Задание 3.1

Для балки (рис. 3.5), загруженной равномерно распределенной нагрузкой, с помощью линий влияния определить опорную реакцию R_A , изгибающий момент и поперечную силу в середине балки.

Задание 3.2

Определить с помощью линий влияния изгибающий момент и поперечную силу в сечении 1 консольной балки от заданной нагрузки (рис. 3.6).

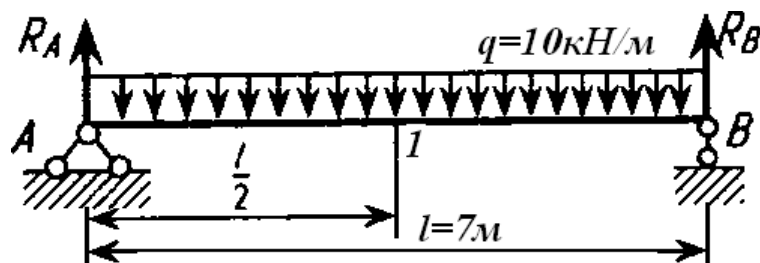


Рисунок 3.5

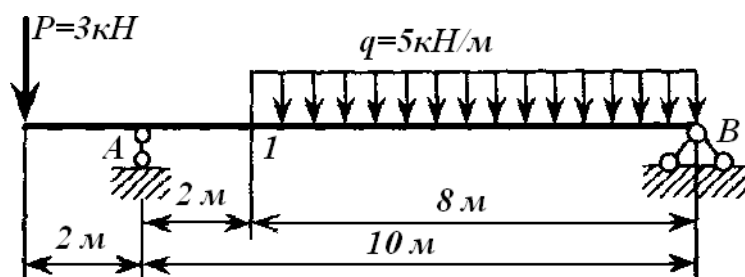


Рисунок 3.6

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение линии влияния.
2. Какие задачи можно решать с применением линий влияния?
3. Что представляют собой ординаты линии влияния?
4. Какие методы применяются при построении линий влияния?
5. Какой вид имеют линии влияния опорных реакций в шарнирно опертой балке?
6. Какой вид имеют линии влияния M и Q в шарнирно опертой и консольной балках?
7. Каков порядок вычисления усилий с помощью линий влияния при неподвижной нагрузке?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 5

**ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ И ВНУТРЕННИХ СИЛ В
ТРЕХШАРНИРНЫХ АРКАХ И ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ УСИЛИЙ
В СТЕРЖНЯХ ПЛОСКИХ ФЕРМ**

Теоретическая часть

Линии влияния вертикальных составляющих опорных реакций V_A и V_B в трёхшарнирной арке имеют такой же вид, как и линии влияния опорных реакций для простой однопролетной балки.

Значения распора определяют по формуле $H = \frac{M_C^o}{f}$, а поэтому линия влияния распора будет иметь тот же вид, что и линия влияния момента для балки в сечении C (M_C^o), но будет отличаться от нее постоянным множителем $1/f$ (рис. 4.16).

Линии влияния M_k , Q_k и N_k без предварительных построений можно построить *способом нулевой точки*.

Построение линии влияния M_k

1. Определяем положение нулевой точки O_M линии влияния M_k на ее оси абсцисс. Для этого проводим на схеме арки прямые Ak и BC и точку их пересечения O_M сносим по вертикали на ось абсцисс линии влияния – точка d . Расстояние этой точки от левой опоры находим по формуле:

$$x_{O_M} = l \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

2. Зная положение нулевой точки d , проводим прямую линию, соединяя точку d с концом ординаты $x_k(a_1)$, отложенной вверх от оси абсцисс по вертикали, проходящей через опору A .

3. На проведенную прямую a_1d и ее продолжение сносим по вертикалям сечение k и средний шарнир C (точки k_1 и c_1). Отрезок прямой k_1c_1 является средней прямой линии влияния.

4. Соединяя точку k_1 с нулевой ординатой под опорой A , а точку c_1 с нулевой ординатой под опорой B , получаем левую (ak_1) и правую (c_1b) прямые линии влияния M_k .

Построение линии влияния Q_k

1. Определяем положение нулевой точки линии влияния Q_k . Для этого проводим из точки A прямую, параллельную касательной к оси трёхшарнирной арки в сечении $k-k$, до пересечения с прямой, соединяющей точки B и C (рис.4.1,а), а затем точку их пересечения O_Q проектируем на ось абсцисс линии влияния (рис. 4.1г). Полученная точка d и является нулевой точкой линии влияния Q_k . Расстояние её от левой опоры определяется по формуле:

$$x_{OQ} = l \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \varphi_k + \operatorname{tg} \beta}.$$

2. Откладываем на левой опорной вертикали положительную ординату $aa_1 = \cos \varphi_k$ и проводим прямую a_1d .

3. Через нулевую ординату под опорой A (точка a) проводим прямую ak_2 , параллельную a_1d .

4. На параллельные прямые проектируем сечение $k-k$ (точки k_1 и k_2), получаем левую прямую ak_2 и правую прямую k_1d линии влияния. На линию k_1d проектируем шарнир C и получаем точку c . Соединив точку c с нулем под опорой B (точка b), получим правую прямую (cb) линии влияния Q_k . Прямая линия, соединяющая точки k_1 и c , является средней прямой линии влияния Q_k , а прямая k_1k_2 носит название соединительной прямой линии влияния Q_k .

Построение линии влияния N_k

1. Нулевую точку O_N линии влияния N_k находим как точку пересечения прямой, проведенной из точки A перпендикулярно касательной к оси арки в сечении $k-k$ (AO_N), с прямой, проведенной через правую опорную точку B и

средний шарнир C (рис. 4.1а), а затем точку их пересечения O_N проектируем на ось абсцисс линии влияния – точка d . Расстояние этой точки от левой опоры определяем по формуле:

$$x_{ON} = l \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \varphi_k - \operatorname{tg} \beta},$$

где $\operatorname{ctg} \varphi_k = 1/\operatorname{tg} \varphi_k$.

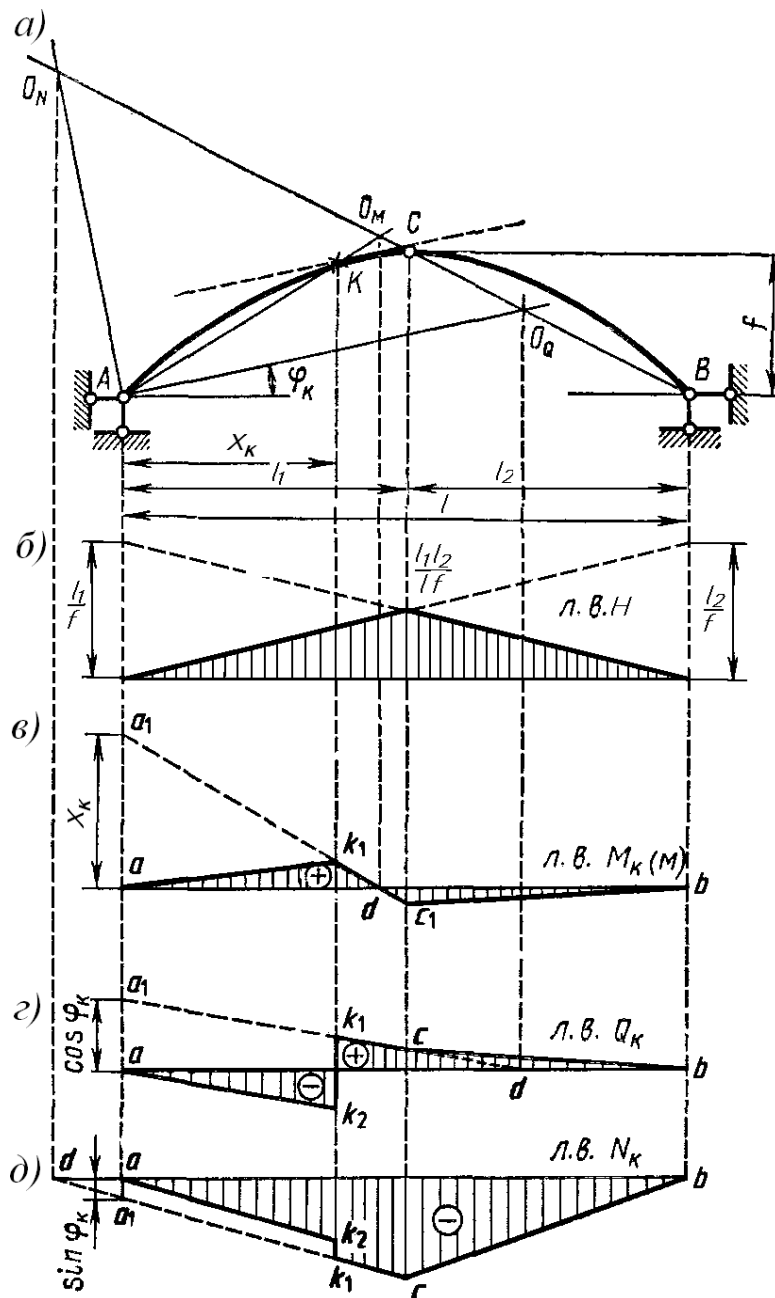


Рисунок 4.1

2. Откладываем вниз на левой опорной вертикали ординату $aa_1 = \sin \varphi_k$.

Соединив точку a_1 с нулевой точкой d прямой линией и продолжив её (если

это необходимо) до пересечения с вертикалью, проходящей через средний шарнир (точка c), получаем прямую da_1c .

3. Через нуль опорной вертикали (точка a) проводим линию, параллельную прямой da_1c .

4. На эти параллельные прямые проектируем сечение $k-k$ (точки k_2 и k_1). Полученная прямая ak_2 носит название левой прямой, k_2k_1 – соединительной прямой, а отрезок k_1c – средней прямой линии влияния.

5. Соединив точку c с нулем под правой опорой, получаем правую прямую (прямая cb) линии влияния N_k .

Линии влияния усилий в стержнях фермы являются графиками, характеризующими закон изменения усилий в рассматриваемых стержнях в зависимости от положения сосредоточенного груза $\bar{P} = 1$; при этом предполагается, что груз устанавливается последовательно в узлах нижнего или верхнего пояса. Линии влияния усилий могут быть построены статическим или кинематическим способами. Ниже рассмотрен только статический способ как более эффективный. Статический способ построения линий влияния состоит в том, что груз $\bar{P} = 1$ устанавливают в произвольном узле фермы и для определения усилия составляют уравнения статики, которые являются аналитическим выражением линии влияния. Для получения уравнений статики могут быть использованы как способ моментной точки (способ сечений), так и способ проекций (вырезания узлов). Обычно используют тот способ, который дает более простые выражения.

Линии влияния опорных реакций балочных ферм имеют точно такой же вид, как и в балках и не зависят от внутренней структуры, а лишь от взаиморасположения ее опор.

При построении линий влияния способом моментной точки исходят из того, что линии влияния опорных реакций известны, считают известными также линии влияния «балочных» моментов для моментных точек фермы. Линии влияния опорных реакций и балочных моментов принимают исходными, для них определяют, исходя из структуры фермы, поправочные коэффи-

циенты, с учетом которых и могут быть получены ветви линии влияния, расположенные слева или справа от рассекаемой панели грузового пояса. Поскольку в ферме приложение нагрузки узловое, то левую и правую ветвь линии влияния в рассекаемой панели соединяют прямой.

Шпренгельные устройства в фермах предназначены для уменьшения длины панелей нагруженного пояса и по существу являются фермочками, заменяющими стержни грузового пояса. Шпренгельные устройства работают только на местную нагрузку.

В шпренгельных фермах различают три основных категории стержней: 1) стержни, принадлежащие только основной ферме; на их работу шпренгельные устройства влияния не оказывают; 2) стержни, принадлежащие только шпренгелям; они работают только на местную нагрузку; 3) стержни, принадлежащие одновременно основной ферме и шпренгелям; шпренгельные устройства при местной нагрузке вызывают в них дополнительные усилия.

При построении линий влияния в стержнях 1-й категории нужно отбросить шпренгельные устройства и строить линии влияния усилий без их учета (основная ферма).

Для построения линий влияния усилий в стержнях 2-ой категории следует пользоваться способом вырезания узлов, местный характер работы этих стержней будет сразу виден по линиям влияния.

В стержнях 3-й категории линии влияния усилий строят обычно способом сечений, влияние шпренгельных устройств учитывается в большинстве случаев автоматически вследствие изменения границ разрезанной панели.

Пример 4.1

Построить способом нулевых точек линии влияния M_k , Q_k и N_k для сечения $k-k$ параболической арки, изображенной на рис. 4.2а и по ним найти значения M_k , Q_k и N_k от той же постоянной нагрузки. Исходные данные и результаты аналитического расчета усилий возьмем из практической работы 2.1.

Решение

Сечение $k-k$ расположено от левой опоры на расстоянии $x = a = 9$ м, $\cos \varphi_k = 0,968$, $\sin \varphi_k = 0,242$. Линии влияния построены на рис.4.2 б–г.

Точка O_M расположена на пересечении прямых BC и AK , так как при расположении силы $P = 1$ в точке O_M правая опорная реакция совпадает с прямой BC , а левая проходит через сечение $k-k$ и поэтому момент в сечении $k-k$ равен нулю. Положение нулевой точки определим и аналитически

$$x_{O_M} = l \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = 24 \frac{0,5}{0,625 + 0,5} = 10,67 \text{ м.}$$

Точка O_Q расположена на пересечении прямой BC с прямой, проведенной из точки A параллельно касательной к оси арки в сечении $k-k$. Положение нулевой точки определим по формуле

$$x_{O_Q} = l \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \varphi_k + \operatorname{tg} \beta} = 24 \frac{0,5}{0,25 + 0,5} = 16 \text{ м.}$$

Аналогично этому точка O_N , будет расположена на пересечении прямой BC и прямой, проведенной из точки A перпендикулярно касательной к оси арки в сечении $k-k$. Положение нулевой точки O_N определим аналитически

$$x_{O_N} = l \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \varphi_k - \operatorname{tg} \beta} = 24 \frac{0,5}{4 - 0,5} = 3,42 \text{ м.}$$

Загрузив каждую линию влияния заданной нагрузкой P_1, P_2 и q_1, q_2 (см. рис. 4.2б–г), величины внутренних усилий M_k, Q_k и N_k находим по формуле :

$$L = q\omega + Ph, \quad (4.1)$$

где L - внутренние усилия соответственно M_k, Q_k и N_k , возникающие в сечении $k-k$;

q – интенсивность заданной равномерно распределенной нагрузки;

ω – алгебраическая сумма площадей участков линий влияния соответственно M_k, Q_k и N_k , расположенных под равномерно распределенной нагрузкой;

P – величина заданной сосредоточенной нагрузки;

h – ординаты линий влияния M_k, Q_k и N_k под сосредоточенной нагрузкой P .

Следует подчеркнуть, что все характерные ординаты линий влияния и ординаты под нагрузками необходимо всегда определять аналитически из подобия треугольников.

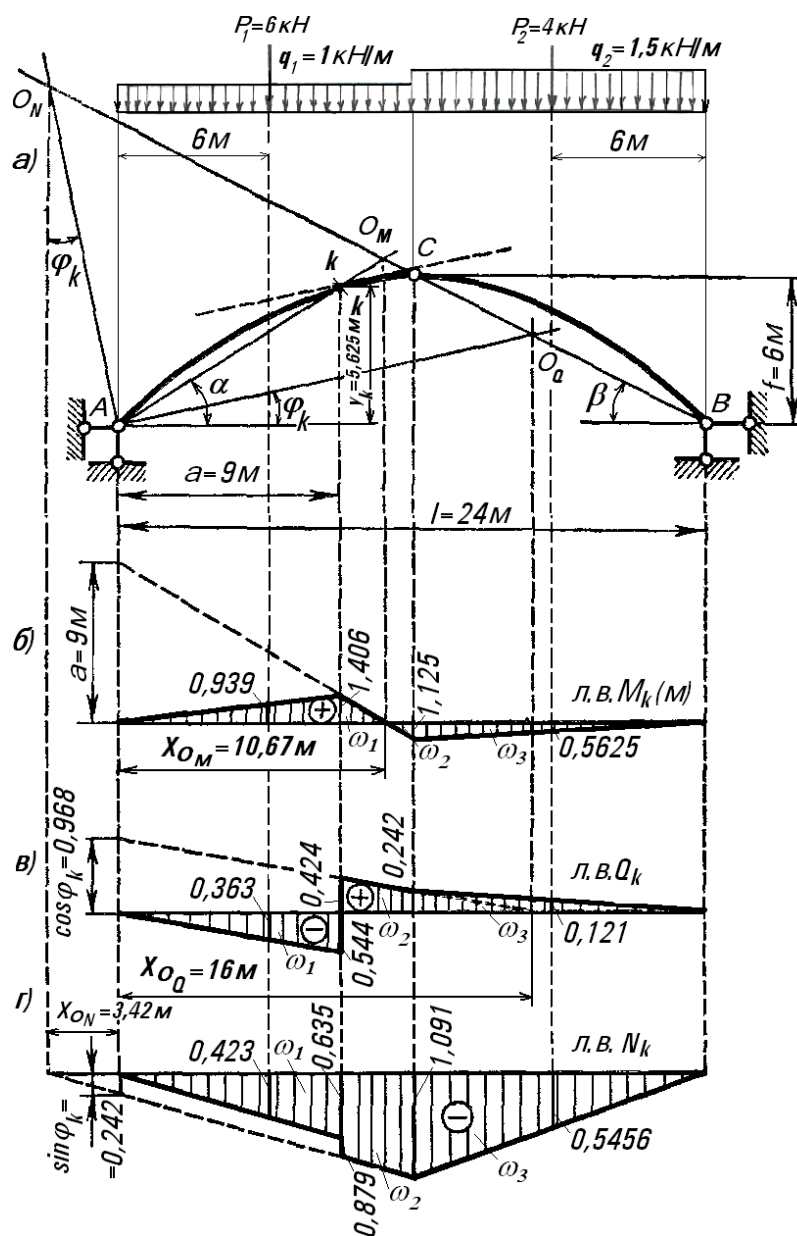


Рисунок 4.2

Подставив в формулу (4.1) числовые значения P, q, ω и h для каждой из линий влияния, вычислим величины M_k, Q_k и N_k :

$$M_k = q_1\omega_1 + P_1h_1 + q_1\omega_2 + q_2\omega_3 + P_2h_2 =$$

$$= 1 \cdot 7,5149 + 6 \cdot 0,939 - 1 \cdot 0,7460 - 1,5 \cdot 6,7380 - 4 \cdot 0,5625 = 0,0459 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

где $h_1 = 0,939 \text{ м}$, $h_2 = -0,561 \text{ м}$, $\omega_1 = 7,5149 \text{ м}^2$, $\omega_2 = -0,7460 \text{ м}^2$, $\omega_3 = -6,7380 \text{ м}^2$.

$$Q_k = q_1\omega_1 + P_1h_1 + q_1\omega_2 + q_2\omega_3 + P_2h_2 =$$

$$= -1 \cdot 2,4502 - 6 \cdot 0,363 + 1 \cdot 0,9982 + 1,5 \cdot 2,1780 + 4 \cdot 0,1210 = -0,968 \text{ кН},$$

где $h_1 = -0,3630$, $h_2 = 0,1210$, $\omega_1 = -2,4502 \text{ м}$, $\omega_2 = 0,9982 \text{ м}$, $\omega_3 = 2,1780 \text{ м}$.

$$N_k = q_1\omega_1 + P_1h_1 + q_1\omega_2 + q_2\omega_3 + P_2h_2 = -1 \cdot 2,8656 - 6 \cdot 0,4245 -$$

$$- 1 \cdot 2,9547 - 1,5 \cdot 6,5466 - 4 \cdot 0,5455 = -20,369 \text{ кН}.$$

где $h_1 = -0,4245$, $h_2 = -0,5455$, $\omega_1 = -2,8656 \text{ м}$, $\omega_2 = -2,9547 \text{ м}$, $\omega_3 = -6,5466 \text{ м}$.

Сравнение величин M_k , Q_k и N_k , полученных аналитическим способом и с применением линий влияния, приведено в таблице:

Усилие	Значение усилий, полученных аналитически	Значение усилий, полученных при помощи линий влияния	Процент расхождения
$M_k, \text{кН} \cdot \text{м}$	0	0,0459	-
$Q_k, \text{кН}$	-0,968	-0,968	0%
$N_k, \text{кН}$	-20,328	-20,369	0,2%

Из таблицы видно, что результаты практически совпадают.

Пример 4.2

Построить линии влияния усилий для фермы, представленной на рис. 4.3а и определить усилия в стержнях второй слева панели, загрузив линии влияния.

Решение

Груз $P=1$ перемещается по нижнему поясу. Линии влияния R_A и R_B имеют аналитическое выражение $R_A = \frac{x}{l}$, $R_B = \frac{l-x}{l}$ и строятся точно также как для простой балки.

Для построения линии влияния усилия O_{3-7} в стержне верхнего пояса 3–7, элементе первой категории, проведем сечение 1–1 в основной ферме (см. рис. 4.3б).

Рассмотрим левую отсеченную часть фермы, когда груз $P=1$ находится справа от сечения. Для этого составим уравнение равновесия $\sum M_8^{лев} = 0$:

$$-R_A 4d - O_{3-7} h = 0, \quad O_{3-7} = -\frac{4d}{h} R_A, \quad (\text{правая прямая}).$$

При $P=1$ слева от сечения составим уравнение равновесия правой отсеченной части фермы $\sum M_8^{прав} = 0$:

$$R_B 8d + O_{3-7} h = 0, \quad O_{3-7} = -\frac{8d}{h} R_B, \quad (\text{левая прямая}).$$

По полученным уравнениям строим правую и левую прямые линии влияния усилия O_{3-7} . При этом они должны пересекаться под моментной точкой 8 (см. рис 4.3, е).

Для построения линии влияния усилия D_{5-8} в раскосе 5–8, элементе третьей категории, воспользуемся сечением 1–1 (см. рис. 4.3а). Отметим, что в этом стержне усилие возникает от работы в составе основной фермы и шпренгеля. Это можно записать так:

$$D_{5-8} = D_{3-8}^O + D_{5-8}^{III}.$$

Т.е. надо построить линии влияния D_{3-8}^O и D_{5-8}^{III} и сложить их графически.

Построим линию влияния D_{3-8}^O . Если груз находится справа от сечения, то уравнение правой прямой линии влияния усилия D_{3-8}^O находим из условия равновесия левой отсеченной части фермы $\sum F_{ky}^{лев} = 0$:

$$R_A - D_{3-8}^O \sin \alpha = 0; \quad D_{3-8}^O = R_A \frac{1}{\sin \alpha}, \quad (\text{правая прямая}).$$

Рассмотрим второй случай, когда груз $P=1$ находится слева от сечения. Тогда уравнение левой прямой линии влияния усилия D_{3-8}^O определим из условия равновесия правой отсеченной части фермы $\sum F_{ky}^{прав} = 0$:

$$R_B + D_{3-8}^O \sin \alpha = 0, \quad D_{3-8}^O = -R_B \frac{1}{\sin \alpha}, \quad (\text{левая прямая}).$$

Уравнения прямых линии влияния усилия D_{3-8}^O могут быть получены умножением ординат линии влияния опорной реакции R_A на постоянный ко-

эффицент $-1/\sin\alpha$, а левая прямая – умножением ординат линии влияния опорной реакции R_B на коэффициент $1/\sin\alpha$.

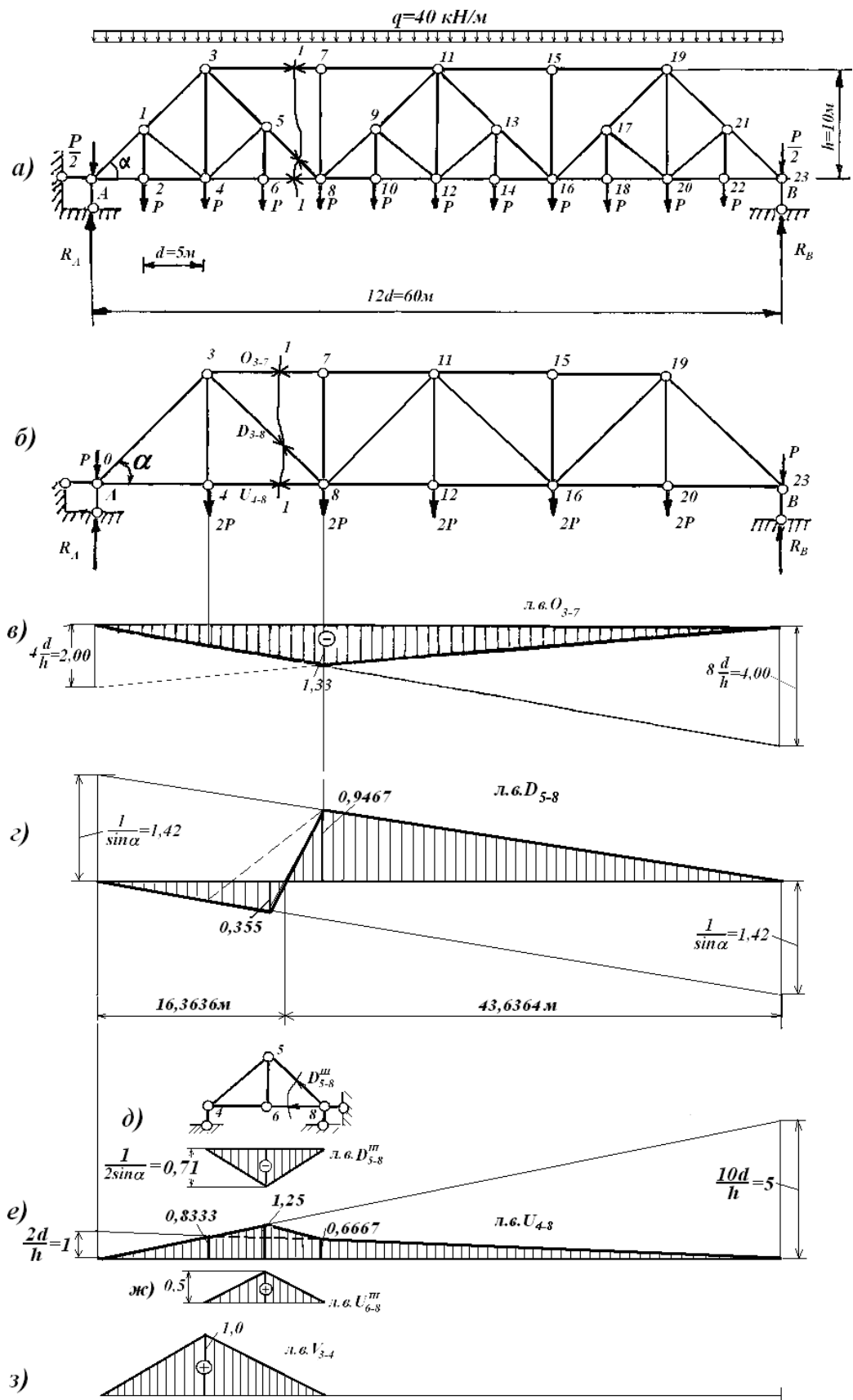


Рисунок 4.3

Пунктирной линией показана передаточная прямая линии влияния усилия D_{3-8}^O в раскосе 3–8 основной фермы (рис. 4.3г).

Линию влияния D_{5-8}^{III} в раскосе 5–8 шпренгеля строим, рассматривая отдельно работающую «фермочку» (рис. 4.3д). Вырежем узел 8 и составим уравнение равновесия $\sum F_{ky} = 0$

$$D_{5-8}^{III} \sin \alpha + \frac{P}{2} = 0, \text{ откуда } D_{5-8}^{III} = \frac{P}{2 \sin \alpha} = \frac{1}{2 \sin \alpha}.$$

Линия влияния D_{5-8}^{III} представлена на рис. 4.3д.

Для получения линии влияния графически складываются линии влияния D_{3-8}^O и D_{5-8}^{III} . Линия влияния D_{5-8} показана на рис. 4.3г.

Для построения линии влияния усилия U_{6-8} в стержне 6–8 нижнего пояса, элемента третьей категории, вначале проведем сечение 1–1 в основной ферме (рис. 4.3б) и построим линию влияния усилия U_{4-8}^O в стержне 4–8 нижнего пояса основной фермы. Составив и решив уравнение равновесия левой отсеченной части фермы $\sum M_3^{лев} = 0$, когда груз $P=1$ находится справа от сечения, получим уравнение правой прямой линии влияния

$$R_A 2d - U_{4-8}^O h = 0, \quad U_{4-8}^O = R_A \frac{2d}{h}, \quad (\text{правая прямая}).$$

Рассматривая равновесие правой отсеченной части основной фермы $\sum M_3^{прав} = 0$ при грузе $P=1$, расположенном слева от сечения, получим уравнение левой прямой линии влияния

$$R_B 10d - U_{4-8}^O h = 0, \quad U_{4-8}^O = R_B \frac{10d}{h}, \quad (\text{левая прямая}).$$

Построив правую и левую прямые (они должны обязательно пересекаться под моментной точкой 3), получим линию влияния усилия U_{4-8}^O (см. рис. 4.3е). Она имеет вид треугольника с положительной ординатой в вершине.

К полученной линии влияния U_{4-8}^O в основной ферме следует прибавить усилия в пределах панели 4-8 шпренгеля U_{6-8}^{III} , изображенную на рис. 4.3ж.

Для построения линии влияния U_{6-8}^{III} проведем сечение 1–1 в шпренгеле (рис. 4.3д). Составим уравнение равновесия для правой отсеченной части шпренгеля $\sum F_{kx} = 0$:

$$U_{6-8}^{III} + D_{5-8}^{III} \cos \alpha = 0, \quad U_{6-8}^{III} = -D_{5-8}^{III} \cos \alpha = \frac{1}{2 \sin \alpha} \cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

Линия влияния U_{4-8} для заданной (шпренгельной) фермы изображена на рис. 4.3е.

Теперь построим линию влияния усилия V_{3-4} в стойке 3–4. Стойка – элемент первой категории. Поэтому для построения линии влияния усилия в ней следует рассматривать только основную ферму (см. рис. 4.3б). Вырезав узел основной фермы (см. рис. 4.4), составим для него уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил на вертикальную ось $\sum F_{ky} = 0$.

При приложении нагрузки $P=1$ в узле 4 получим

$$V_{3-4} - P = 0, \quad V_{3-4} = P = 1.$$

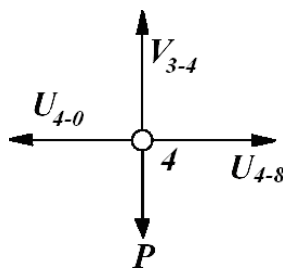


Рисунок 4.4

Если груз $P=1$ расположен в узлах 8 или 0 основной фермы, то уравнение равновесия примет вид: $V_{3-4} = 0$.

Отложив под узлом 4 ординату (вверх), равную 1, и соединив ее вершину с нулевыми точками под узлами 8 и 0 прямыми, получим линию влияния усилия V_{3-4} стойки 3–4 (см. рис. 4.3з). Она имеет вид треугольника с

наибольшей ординатой, равной единице. Положительный знак указывает на то, что стойка работает на растяжение.

Задания

Задание 4.1

Для трехшарнирной арки или рамы (рис. 4.5) требуется:

1. Построить линии влияния изгибающего момента M_k , поперечной Q_k и продольной N_k сил в сечении k .
2. Вычислить величины M_k , Q_k и N_k от заданной нагрузки по линиям влияния и сравнить их с полученными в задании 2.1.

Исходные данные взять из таблицы:

Схема (рис. 4.5)	l , м	$\frac{f}{l} = \frac{h}{l}$	$\frac{x_k}{l}$	β	α только для рам	q , кН/м	u_1	u_2	u_3
1	24	0,3	0,75	2,0	0,75	9	0,25	0,25	0,75
2	30	0,3	0,25	2,5	0,50	12	0,25	0,50	0,75
3	28	0,4	0,25	2,4	0,60	11	0,50	0,25	0,50
4	16	0,3	0,25	1,2	0,80	5	0,25	0,50	1,00

Задание 4.2

Взяв условия задания 2.4 построить линии влияния усилий для фермы, представленной на рис. 4.6 и определить усилия в стержнях третьей слева панели, загрузив линии влияния. Сравнить полученные значения усилий с заданием 2.4.

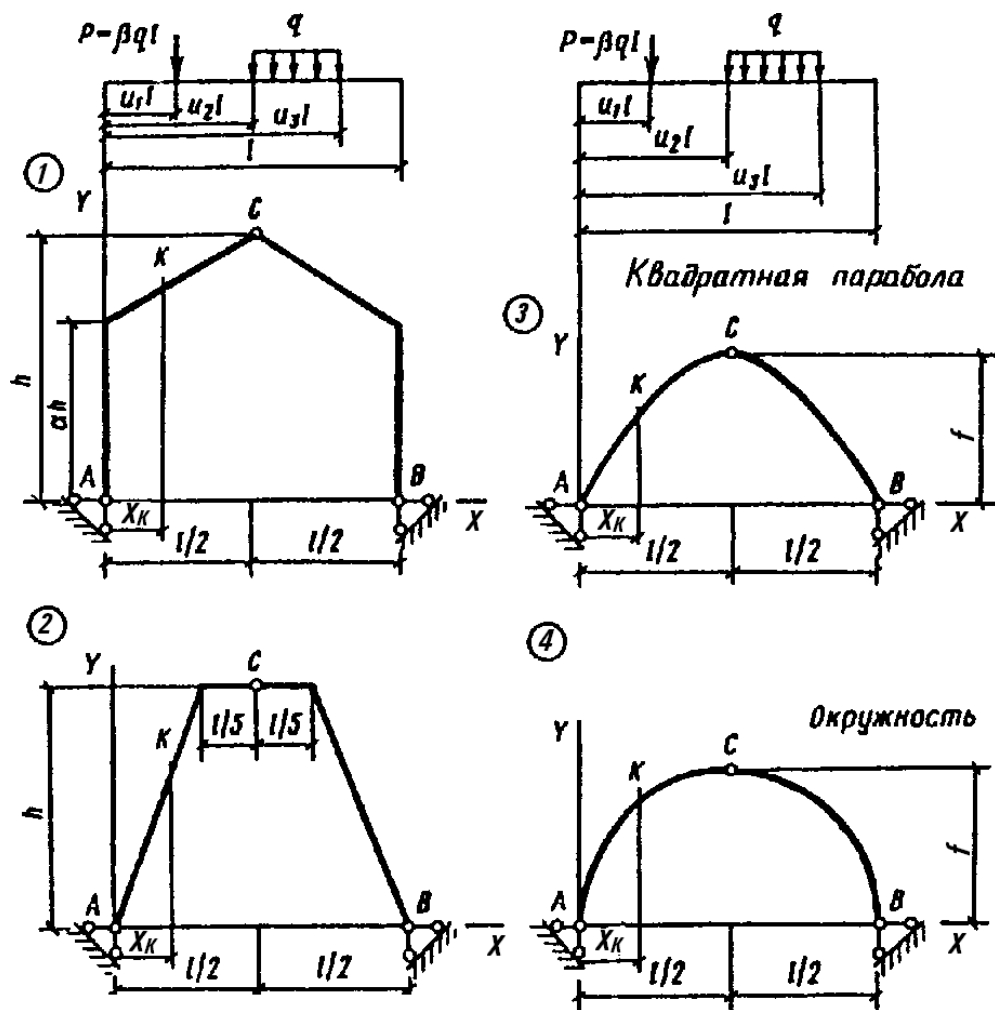


Рисунок 4.5

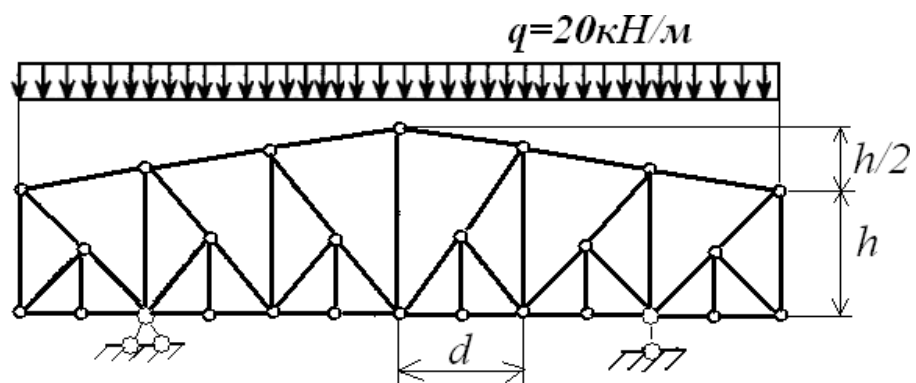


Рисунок 4.6

Задание 4.3

Взяв условия задания 2.5 построить линии влияния усилий для фермы, представленной на рис. 4.7 и определить усилия в стержнях третьей слева панели, загрузив линии влияния. Сравнить полученные значения усилий с заданием 2.5.

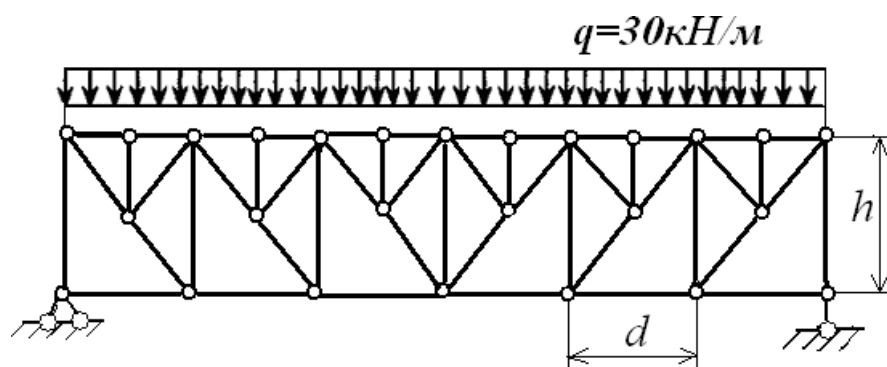


Рисунок 4.7

Вопросы к практическому занятию

1. Чем отличаются линии влияния вертикальных составляющих опорных реакций V_A и V_B в трёхшарнирной арке от линий влияния опорных реакций для простой однопролетной балки?
2. Как построить линию влияния распора арки?
3. Какие способы применяются для построения линий влияния внутренних сил в сечениях арки?
4. Что называют нулевыми точками в трёхшарнирных арках, рамах и как их найти?
5. Перечислите действия построения линий влияния M_k , Q_k и N_k методом нулевой точки.
6. Поясните порядок построения линий влияния усилий в стержнях фермы разных категорий.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБ УПРУГИХ СИСТЕМАХ И

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

Теоретическая часть

Все перемещения следует определять по формуле Мора с использованием правила Верещагина. Построение эпюр моментов (грузовых и еди-

ничных) следует сопровождать расчетами. Сами эпюры надо строить со стороны растянутых волокон.

Сложные эпюры для «умножения» их на единичные рекомендуется делить на части с тем, чтобы обеспечить определение их площадей и положений центров тяжести. Можно определять перемещения отдельно от силы P и нагрузки q с последующим сложением результатов.

Все эпюры должны быть четкими, иначе трудно подсчитывать их площади и положения центров тяжести отдельных площадей.

При расчете статически неопределимых систем, кроме уравнения равновесия, как известно, приходится составлять и решать уравнения совместности деформаций системы. Для составления таких уравнений необходимо уметь определять перемещения заданной системы. Это приходится часто делать и при расчете статически определимых систем, которые должны обладать не только достаточной прочностью, но и жесткостью, так как в процессе их эксплуатации нормируются не только напряжения, но и перемещения конструкций.

Таким образом, изучение общих методов определения перемещений упругих систем является одной из составных задач строительной механики.

Пусть рассматриваемая заданная стержневая система под влиянием внешнего воздействия деформируется и требуется определить перемещение в i -й произвольной точке (рис. 5.1) в заранее заданном направлении.

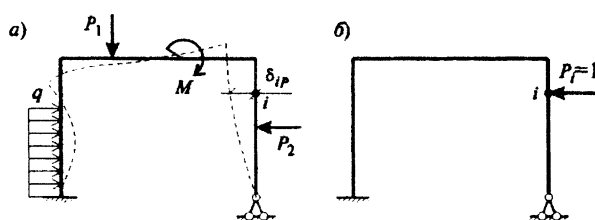


Рисунок 5.1

Примем следующую последовательность нагружения: вначале действует заданная нагрузка, а затем единичная сила. Определим работу постоянной по величине единичной силы на перемещении по ее направлению от действия

заданных нагрузок, т.е. на искомом перемещении точки i . На основании теоремы Бетти она равна

$$A_{1P} = P_1 \Delta_{1P} = 1 \cdot \Delta_{1P}.$$

Выразив работу A_{1P} через внутренние усилия в раме в единичном и грузовом состояниях, получим формулу для определения искомого перемещения

$$\Delta_{iP} = \int_0^l \frac{N_1 N_P}{EF} dx + \int_0^l \frac{Q_1 Q_P}{GF} \eta dx + \int_0^l \frac{M_1 M_P}{EJ} dx.$$

Это выражение носит название *формулы Мора*. Замечательной особенностью вычисления перемещений по формуле Мора является то обстоятельство, что в качестве второго состояния можно использовать любую систему, образованную из заданной путем отбрасывания лишних связей, т.е. брать в качестве вспомогательного состояния любую статически определимую систему, полученную из заданной. Это в значительной степени упрощает процедуру вычисления перемещений по формуле Мора.

В рамках обычно пренебрегают влиянием первого и второго членов формулы Мора, так как эти члены незначительно влияют на величину перемещений

$$\Delta_{kP} = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \frac{M_k M_P}{EJ} dx.$$

Интеграл Мора наряду с методом начальных параметров является достаточно мощным инструментом для определения перемещений стержневых систем.

Пример 5.1

Вычислить прогиб (вертикальное перемещение) шарнира C и угол поворота сечения 1 в раме, если $q=20$ кН/м, $J_1:J_2=1:2$, $EJ_1=90$ МН·м².

Решение

Перемещения вычисляем по формуле Мора. Поскольку жесткость на различных участках не постоянна – вычислим приведенную жесткость $J_2 = 2J_1$. Составим интегралы Мора для определения прогиба шарнира C и угла поворота сечения 1 .

$$\Delta_{CP} = \sum \int \frac{M_1 M_P}{EJ} dx \text{ и } \Delta_{1P} = \sum \int \frac{M_2 M_P}{EJ} dx.$$

При вычислении интегралов на разных участках нужно учитывать жесткости каждого из них.

Для решения интегралов Мора необходимо построить грузовую и единичные эпюры изгибающих моментов рамы (рис. 5.1б-г). При построении единичных эпюр необходимо в точке C приложить вертикальную силу $\bar{P} = 1$, а в сечении 1 единичный момент $\bar{M} = 1$. Построив эпюры, определяем искомые величины, используя правило Верещагина.

$$\Delta_{CP} = \frac{1}{EJ_1} \frac{270 + 450}{2} 6 \cdot 3 + \frac{1}{2EJ_1} \frac{1}{2} 270 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} 3 - \frac{1}{2EJ_1} \frac{20 \cdot 3^3}{12} \frac{1}{2} 3 = 0,076125 \text{ м};$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EJ_1} \frac{6}{6} (2 \cdot 450 \cdot 1 - 2 \cdot 270 \cdot 1 - 450 \cdot 1 + 270 \cdot 1) = \frac{180}{EJ_1} = 0,002 \text{ рад.}$$

Задания

Задание 5.1

Для рамы (рис. 5.2) требуется определить горизонтальное смещение (сечение 1) и угол поворота (сечение 2).

$$l = 9 \text{ м}, q = 1 \text{ кН / м}, P = 9 \text{ кН}, h = 6 \text{ м}, J_2 : J_1 = 1 : 2$$

Задание 5.3

Для рамы (рис. 5.3) определить вертикальное перемещение (сечение 1) и угол поворота (сечение 2).

$$l = 6 \text{ м}, q = 3 \text{ кН / м}, P = 7 \text{ кН}, h = 8 \text{ м}, J_2 : J_1 = 1 : 3.$$

Вопросы к практическому занятию

1. Поясните порядок определения перемещения точки стержневой системы.
2. Какие перемещения наблюдаются в загруженной системе?
3. Сформулируйте понятие работы внешних сил на возможных перемещениях.

4. Дайте определение теоремы о взаимности перемещений.

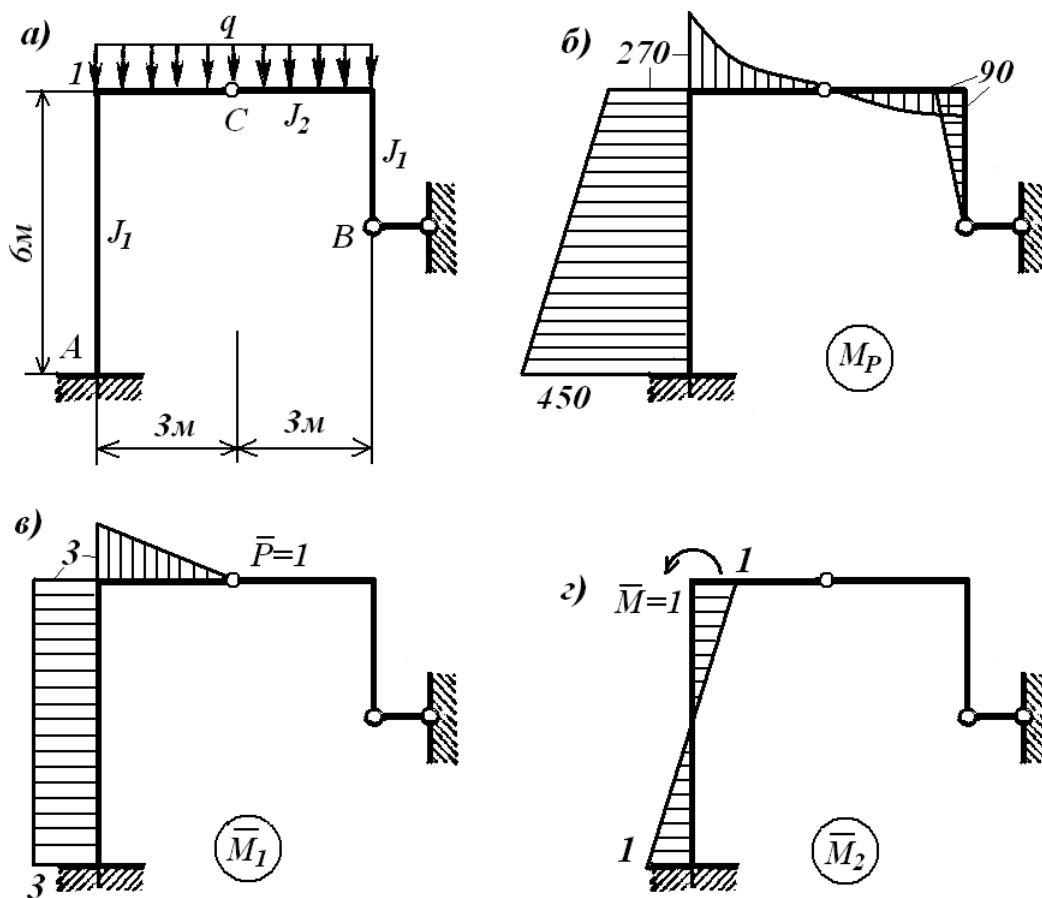


Рисунок 5.1

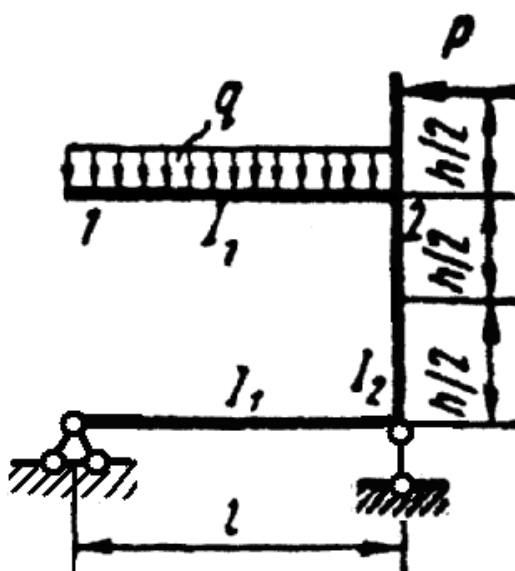


Рисунок 5.2

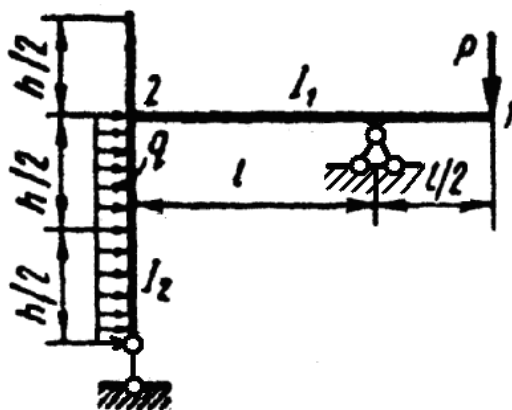


Рисунок 5.3

5. Перечислите методы расчета перемещений стержневых систем и дайте соответствующее пояснение, раскрывающее их суть.
6. Напишите формулу (интеграл) Мора для плоской системы.
7. Поясните сущность правила Верещагина.
8. Какие ограничения накладываются на применение правила Верещагина?
9. Какие правила используют для присвоения знаков при перемножении эпюр.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7

СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ. МЕТОД СИЛ. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР M , Q и N

Теоретическая часть

Для конструкций со сложным внутренним образованием можно указать на следующий общий прием определения статической неопределимости. Степень статической неопределимости плоской стержневой системы равна по величине и противоположна по знаку числу ее степени свободы. В соответствии с формулой П.Л. Чебышева имеем

$$n = -W = -(3D - 2Ш - C_0),$$

где D – число жестких элементов(стержней ,блоков, «дисков»); $Ш$ – число простых шарниров; C_0 – число опорных стержней.

Используя эту формулу для рамы на рис. 6.1а, получим:

$$n = -(3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 5) = 2.$$

Таким образом, при $n \geq 1$ стержневая система является статически неопределимой.

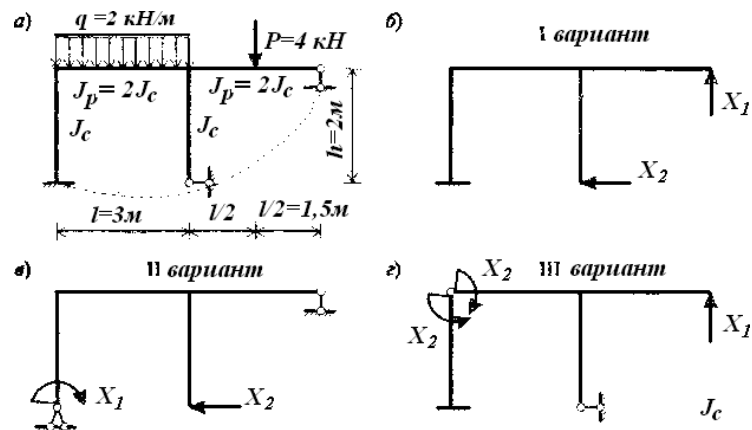


Рисунок 6.1

Метод расчета статически неопределимых систем, элементы которых испытывают изгиб, по существу не отличаются от рассмотренных ранее методов расчета статически неопределимых систем при растяжении и кручении.

Сначала в заданной системе отбрасываются лишние связи, а вместо них прикладываются лишние неизвестные $X_1, X_2, \dots, X_n$. При отбрасывании лишних связей нужно следить за тем, чтобы новая система была геометрически неизменяемой.

Полученная таким образом статически определимая система называется *основной системой*.

Поскольку за неизвестные в дальнейшем принимаются усилия в лишних связях, то такой метод расчета статически неопределимых систем получил название *метода сил*.

Рассмотрим в качестве примера дважды статически неопределимую систему (рис. 6.1а). Разрезав опорные стержни опор и заменив их влияние силами X_1 и X_2 , получим один из возможных вариантов основной системы (рис. 6.1б). Второй вариант получим путем замены в жесткой заделке реактивного момента на момент X_1 и разреза опоры правой стойки, замены ее влияния силой X_2 (рис. 6.1в). Третий вариант получим введением шарнира (X_1) и замены опоры силой X_2 (рис. 6.1г).

- не требуется предварительное вычисление опорных реакций;
- эпюры изгибающих моментов, построенные в этой системе от воздействия на нее каждого из усилий $X_1=1, X_2=1, P$ и q , будут распространены на меньшем количестве участков системы и представлены простейшими геометрическими фигурами. Это значительно облегчает процесс определения коэффициентов канонических уравнений.

[illegible]

Каждое из этих уравнений выражает условие, что перемещения по направлению каждой неизвестной обобщенной силы, от всех неизвестных и от заданной нагрузки должны равняться нулю, так как в заданной системе по каждому из этих направлений имеются связи.

Входящие в канонические уравнения коэффициенты при неизвестных $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{22}, \dots, \delta_{nn}$ являются перемещениями основной системы по направлению неизвестных от единичных сил $X_1, X_2, \dots, X_n$, действующих по направлению неизвестных $X_1, X_2, \dots, X_n$. Свободные же члены уравнений $(\Delta_{1P}, \Delta_{2P}, \dots, \Delta_{nP})$ — это перемещения основной системы по направлению неизвестных от заданной нагрузки.

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений определяют с помощью интеграла Максвелла — Мора; они выражаются формулами:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EJ} dx, \quad \delta_{iP} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_P}{EJ} dx,$$

где $\bar{M}_i$ и $\bar{M}_k$ — изгибающие моменты в основной системе от действия единичных сил или моментов $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$, приложенных по направлению неизвестных; M_P — изгибающий момент в основной системе от действия заданных нагрузок.

Предварительно должны быть построены эпюры $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ от единичных сил $X_1, X_2, \dots, X_n$ и эпюра M_P от заданной нагрузки.

Для нахождения этих интегралов в случае прямолинейных стержней с постоянной по длине жесткостью применяют «перемножение» эпюр изгибающих моментов по способу А. Н. Верещагина.

Коэффициенты при неизвестных с одинаковыми индексами называют главными, а с разными — побочными. Как это следует из приведенных выше формул, главные коэффициенты (или главные перемещения), содержащие величину $\bar{M}_k^2$, всегда положительны и не равны нулю. Побочные же коэффициенты (перемещения), содержащие произведение $\bar{M}_i \bar{M}_k$, могут быть положи-

тельными, отрицательными или равными нулю. Одно из важнейших требований к основной системе состоит в том, чтобы возможно большее число ее побочных перемещений было равно нулю.

Вычисленные коэффициенты при неизвестных и свободные члены перед решением уравнений следует проверить. Универсальная, т.е. одновременная, проверка всех коэффициентов при неизвестных состоит в том, что их сумма $\sum \delta = \sum \delta_{ii} + 2\sum \delta_{ik}$, представляющая собой условное перемещение по направлению всех неизвестных от всех единичных сил $X_1, X_2, \dots, X_n$, должна быть равна величине

$$\delta_{SS} = \sum \int \frac{M_S M_S}{EI} dx.$$

При этом эпюра $\bar{M}_S$, называемая суммарной единичной эпюрой, получается в результате сложения всех единичных эпюр:

$$\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n.$$

Чтобы не перенести на эпюру $\bar{M}_S$ какую-либо случайную ошибку, вкрадшуюся в одну из единичных эпюр, и не свести тем самым на нет всю проверку, следует строить эпюру $\bar{M}_S$ независимо от уже построенных эпюр $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$, т. е. непосредственно от единичных сил $X_1, X_2, \dots, X_n$, действующих на основную систему одновременно.

Если универсальная проверка коэффициентов при неизвестных приводит к недопустимо большому расхождению (более 1%) между величинами, которые должны быть равны между собой, то для нахождения ошибки в вычислениях нужно произвести построчные проверки, которые состоят в том, что сумма коэффициентов при неизвестных каждого уравнения

$\sum \delta_i = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{in}$ должна быть равна величине

$$\delta_{iS} = \sum \int \frac{M_i M_S}{EI} dx.$$

Если построчные проверки дают расхождение только в одной строке, то ошибку следует искать в вычислении главного перемещения этой строки. Ес-

ли же расхождения обнаруживаются одновременно в двух строках, то ошибка вероятнее всего допущена при вычислении того побочного перемещения, которое присутствует в обеих строках.

Проверка свободных членов уравнений состоит в том, что их сумма $\sum \Delta_{iP} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} + \dots + \Delta_{nP}$ должна быть равна величине

$$\Delta_{SP} = \sum \int \frac{M_S M_P}{EI} dx.$$

Для вычисления интегралов в случае прямолинейных стержней постоянного поперечного сечения может быть применен способ А. Н. Верещагина.

После определения и проверки всех коэффициентов при неизвестных и свободных членов канонических уравнений последние решают совместно и находят значения $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Для построения окончательной эпюры изгибающих моментов в раме (эпюры M) все ординаты единичных эпюр умножают на соответствующие значения $X_1, X_2, \dots, \text{или } X_n$ и складывают с ординатами эпюры M_P от заданной нагрузки:

$$M = \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n + M_P.$$

Проверкой правильности выполнения последней операции служит условие равновесия окончательных моментов во всех узлах рамы.

Итоговой проверкой окончательной эпюры изгибающих моментов рамы является *кинематическая* проверка, состоящая в проверке равенства нулю условного перемещения основной, или заданной системы по направлению всех неизвестных от всех неизвестных и нагрузки, т. е. выполнения условия

$$\Delta_S = \sum \int \frac{M_S M}{EI} dx.$$

Таким образом, суммарная единичная эпюра $\bar{M}_S$ будет использована уже третий раз.

Точно так же должно выполняться любое из условий

$$\Delta_i = \sum \int \frac{\overline{M}_i M}{EI} dx \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $\overline{M}_i$ – любая единичная эпюра; n – число неизвестных в раме.

Эпюры поперечных сил (эпюры Q) и продольных сил (эпюры N) строят так же, как в статически определимых системах. При этом для построения эпюры Q исходной может служить заданная нагрузка или построенная эпюра M , а для построения эпюры N — заданная нагрузка или построенная эпюра Q . При этом в последнем случае применяют способ вырезания узлов.

Проверка эпюр Q и N состоит в том, что для любой отсеченной части рамы сумма проекций на две оси всех действующих сил – внешних и внутренних – должна быть равна нулю.

Пример 6.1

Для рамы, показанной на рис. 6.1а, построить эпюры M , Q и N и произвести промежуточные и окончательные верки расчета.

Решение

Расчет статически неопределимой рамы методом сил целесообразно проводить в следующей последовательности:

1. Определение степени статической неопределимости.
2. Выбор основной системы.
3. Составление системы канонических уравнений.
4. Вычисление коэффициентов канонических уравнений.
5. Проверка правильности подсчета коэффициентов канонических уравнений.
6. Решение системы канонических уравнений и проверка ее правильности.
7. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов $M_{ок}$.
8. Проверка правильности построения эпюры $M_{ок}$ и построение эпюры Q .
9. Построение эпюры N .
10. Статическая и деформационная проверка рамы в целом.

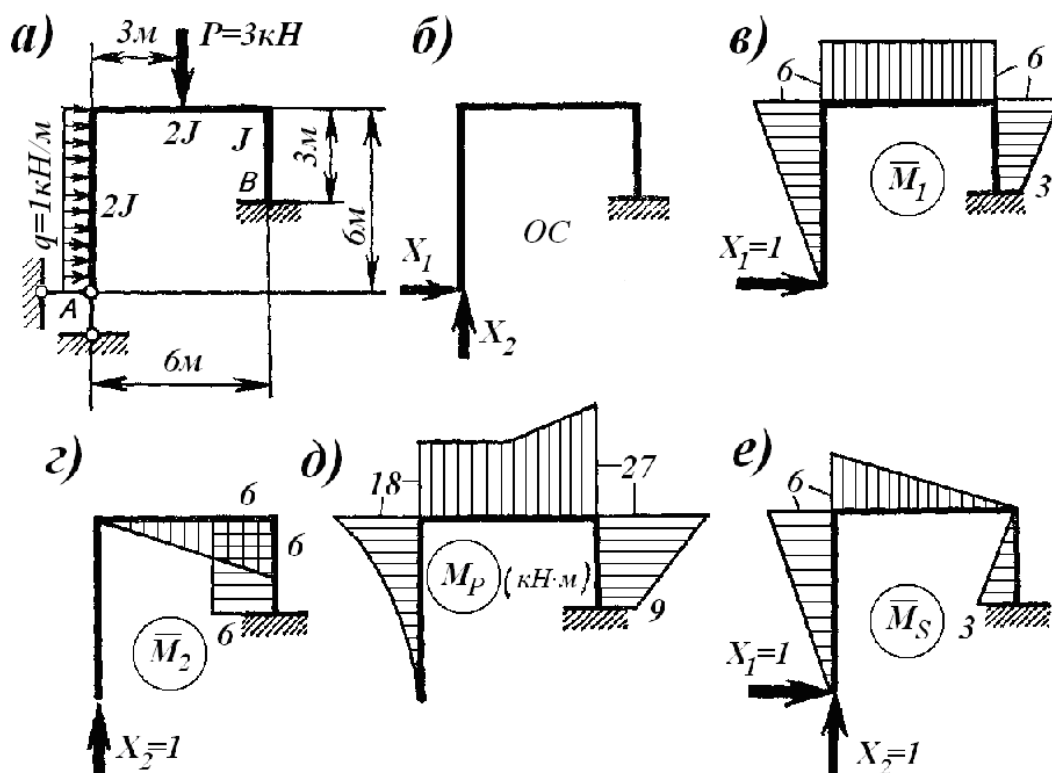


Рисунок 6.1

1. Степень статической неопределимости может быть определена по формуле

$$W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 5 = -2.$$

Таким образом, система геометрически неизменяема и дважды статически неопределима.

Рама имеет в своих опорных закреплениях пять связей (две в опоре *A* и три в опоре *B*), из которых две оказываются лишними.

2. На рис. 6.1б показана наиболее удобная для расчетов основная система с неизвестными X .

3. Канонические уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

4. Для вычисления перемещений, входящих в эту систему уравнений в виде коэффициентов при неизвестных и свободных членов, необходимо по-

строить для основной системы эпюры изгибающих моментов от сил $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$, действующих по направлению неизвестных, а также от заданной нагрузки. Эти эпюры, обозначенные соответственно $\bar{M}_1, \bar{M}_2$ и M_P , показаны на рис. 6.1 в–д. Так как эпюры $\bar{M}_1, \bar{M}_2$ ограничены прямыми линиями, то для нахождения перемещений можно воспользоваться «перемножением» эпюр по правилу А. Н. Верещагина. Индексы у перемещений показывают, какие эпюры перемножаются.

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EJ} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2EJ} 6 \cdot 6 \cdot 6 + \frac{1 \cdot 3}{EJ \cdot 6} (2 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 3 \cdot 6) = \frac{207}{EJ}.$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{2EJ} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 - \frac{1}{EJ} \frac{6+3}{2} \cdot 3 \cdot 6 = -\frac{135}{EJ}.$$

По теореме о взаимности перемещений $\delta_{12} = \delta_{21}$.

$$\delta_{22} = \frac{1}{2EJ} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EJ} 6 \cdot 3 \cdot 6 = \frac{144}{EJ}.$$

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{2EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{1 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \right) + \frac{1}{2EJ} \left(18 \cdot 3 \cdot 6 + \frac{18+27}{2} \cdot 3 \cdot 6 \right) + \frac{1 \cdot 3}{EJ \cdot 6} (2 \cdot 27 \cdot 6 + 2 \cdot 9 \cdot 3 + 27 \cdot 3 + 9 \cdot 6) = \frac{702}{EJ}.$$

$$\Delta_{2P} = -\frac{1}{2EJ} \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 18 - \frac{1 \cdot 3}{2EJ \cdot 6} (2 \cdot 3 \cdot 18 + 2 \cdot 6 \cdot 27 + 18 \cdot 6 + 27 \cdot 3) - \frac{1}{EJ} \frac{27+9}{2} \cdot 3 \cdot 6 = -\frac{519,75}{EJ}.$$

5. Для проверки вычисленных коэффициентов при неизвестных и свободных членов уравнений строят суммарную единичную эпюру $\bar{M}_S$ от постоянного действия сил $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$ (рис. 6.1е). В начале целесообразно провести универсальную проверку. Проверка коэффициентов при неизвестных состоит в том, что результат умножения эпюры $\bar{M}_S$ на эту же эпюру должен равняться сумме всех коэффициентов при неизвестных. Действительно

$$\delta_{SS} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{207}{EJ} - \frac{135}{EJ} - \frac{135}{EJ} + \frac{144}{EJ} = \frac{81}{EJ} \text{ и}$$

$$\delta_{ss} = \sum \int \frac{M_s \overline{M}_s}{EJ} dx = -\frac{1}{2EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = -\frac{81}{EJ}.$$

Проверку свободных членов канонических уравнений производят путем умножения эпюры M_P на $\overline{M}_S$:

$$\Delta_{SP} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} = \frac{702}{EJ} - \frac{519,75}{EJ} = \frac{182,25}{EJ} \text{ и}$$

$$\Delta_{SP} = \frac{1}{2EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 18 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{1 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \right) + \frac{1}{2EJ} \left[\frac{6+3}{2} \cdot 3 \cdot 18 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{6} (2 \cdot 18 \cdot 3 + 2 \cdot 27 \cdot 0 + 18 \cdot 0 + 27 \cdot 3) \right] -$$

$$- \frac{1 \cdot 3}{EJ \cdot 6} (2 \cdot 9 \cdot 3 + 2 \cdot 27 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 27 \cdot 3) = \frac{182,25}{EJ}.$$

6. Подставляя полученные и проверенные значения коэффициентов в канонические уравнения, получаем:

$$207X_1 - 135X_2 + 702 = 0; \quad -135X_1 + 144X_2 - 519,75 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$X_1 = -2,67 \text{ кН}; \quad X_2 = 1,11 \text{ кН}.$$

7. Окончательную эпюру изгибающих моментов строят согласно выражению:

$$M_{ок} = \overline{M}_1 X_1 + \overline{M}_2 X_2 + M_P.$$

Чтобы не ошибиться при вычислении изгибающих моментов в отдельных сечениях стержней рамы, строят исправленные эпюры $\overline{M}_1 X_1, \overline{M}_2 X_2$ путем умножения соответствующих единичных эпюр $\overline{M}_1, \overline{M}_2$ на найденные значения неизвестных. Эпюры $\overline{M}_1 X_1, \overline{M}_2 X_2$ показаны на рис. 6.2а,б, а окончательная эпюра $M_{ок}$ — на рис. 6.2в.

8. Построенная окончательная эпюра изгибающих моментов проверяется. Применяют статическую и кинематическую проверки. Статическая проверка необходима, но недостаточна, так как может лишь служить контролем правильности суммирования отдельных эпюр. Кинематическая проверка со-

стоит в том, что при умножении эпюры $M_{ок}$ на эпюру $\overline{M}_S$ должен получиться нуль:

$$\begin{aligned}\Delta_S = & \frac{1}{2EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{1 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \right) + \\ & + \frac{1 \cdot 3}{2EJ \cdot 6} (2 \cdot 2 \cdot 6 - 2 \cdot 3 \cdot 1,3 - 6 \cdot 1,3 + 2 \cdot 3) + \\ & + \frac{1 \cdot 3}{2EJ \cdot 6} (-2 \cdot 3 \cdot 1,3 + 2 \cdot 0 \cdot 4,4 + 1,3 \cdot 0 + 4,4 \cdot 3) + \\ & + \frac{1 \cdot 3}{EJ \cdot 6} (2 \cdot 5,6 \cdot 3 - 2 \cdot 4,4 \cdot 0 + 5,6 \cdot 0 - 4,4 \cdot 3) = -\frac{15}{EJ} + \frac{15,15}{EJ} = 0,15.\end{aligned}$$

Погрешность составляет всего

$$\frac{0,15 \cdot 100}{15} = 1\%.$$

Допустимой можно считать погрешность до 1%.

Для построения эпюр поперечных и продольных сил можно воспользоваться тем же способом, который был применен для построения окончательной эпюры изгибающих моментов, но для этого пришлось бы дополнительно построить эпюры Q_{lt} , Q_2 , Q_p , N_{lt} , N_2 , N_p . Поэтому более простым оказывается другой путь, основанный на использовании дифференциальной зависимости между изгибающим моментом и поперечной силой $\frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$ и

формулы для определения поперечной силы в нагруженном пролете:

$$Q(x) = Q^0(x) + \frac{(M_{прав} - M_{лев})}{l},$$

где $Q^0(x)$ – поперечная сила в сечениях с координатой x по длине участка (стержня), имеющего расчетную схему в виде простой двухопорной балки, нагруженной заданной внешней нагрузкой.

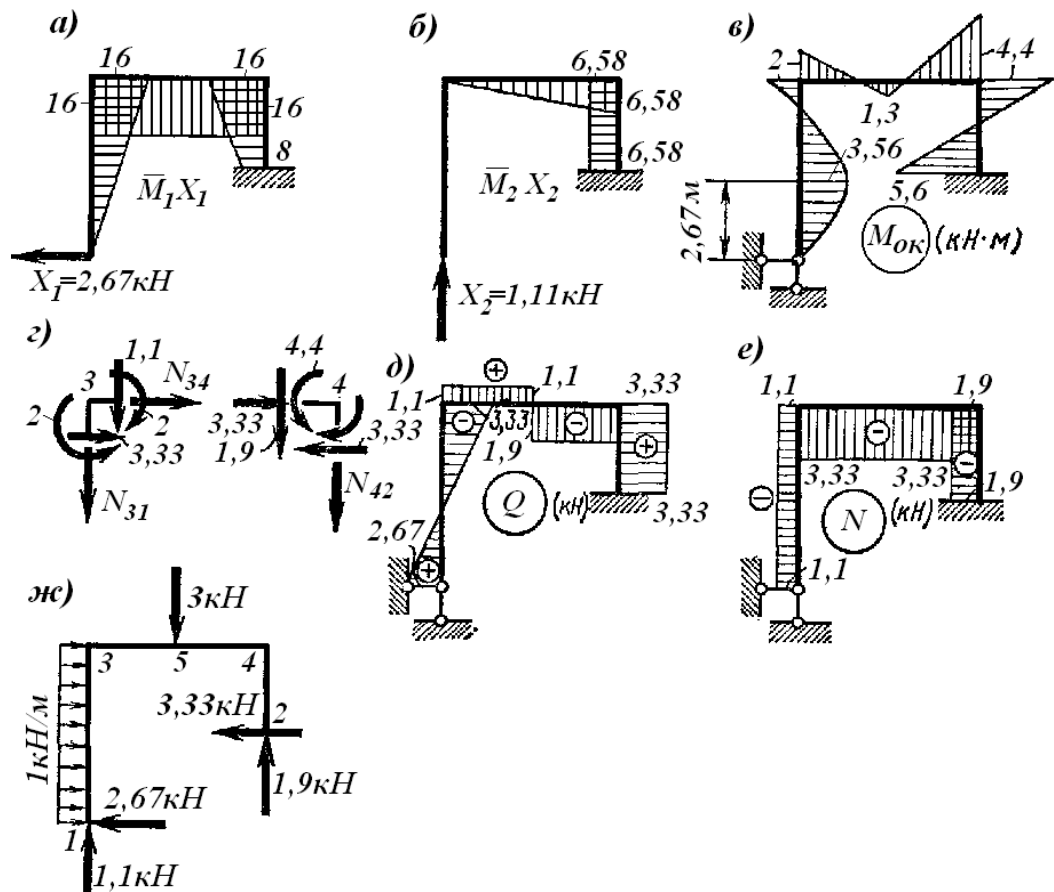


Рисунок 6.2

Рассмотрим каждый стержень отдельно.

На стержень 1–3 (участок 1–3) (рис. 6.2ж) действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью 1 кН/м:

$$Q_{13} = \frac{1 \cdot 6}{2} + \frac{-2 - 0}{6} = 2,67 \text{ кН}; \quad Q_{31} = -3 - 0,33 = -3,33 \text{ кН}.$$

На левой половине стержня 3—4 поперечная сила оказывается равной:

$$Q_{35} = Q_{53} = \frac{1,3 + 2}{3} = 1,10 \text{ кН},$$

на правой половине

$$Q_{54} = Q_{45} = \frac{-4,4 - 1,3}{3} = -1,90 \text{ кН}.$$

На всем протяжении стержня 2—4 поперечная сила постоянна и равна

$$Q_{24} = Q_{42} = \frac{5,6 + 4,4}{3} = 3,33 \text{ кН}.$$

Эпюра поперечных сил показана на рис. 6.2 д.

9. Для построения эпюры продольных сил вырезают узлы 3 и 4 и к ним взамен отброшенных стержней прикладывают известные поперечные силы и неизвестные продольные силы (см. рис. 6.2г). При этом положительные поперечные силы направляют так, чтобы они вращали узлы по часовой стрелке. Искомые продольные силы направляют от узла, т. е. предварительно принимают растягивающими. Получение результатов со знаком минус означает, что тот или другой стержень сжат.

Для узла 3:

$$\sum X = 3,33 + N_{34} = 0; \quad N_{34} = -3,33 \text{ кН (сжатие)};$$

$$\sum Y = -1,1 - N_{31} = 0; \quad N_{31} = -1,1 \text{ кН (сжатие)}.$$

Для узла 4:

$$\sum Y = -1,9 - N_{42} = 0; \quad N_{42} = -1,9 \text{ кН (сжатие)}.$$

Продольная сила $N_{43} = 3,33 \text{ кН}$ в этом узле уже показана сжимающей.

Эпюра N изображена на рис. 6.2 е.

10. Проверкой построенных эпюр Q и N служит проверка равновесия сил для всей рамы.

На рис. 6.2 ж показана рама с отброшенными связями и с приложенными взамен силами, взятыми из эпюр Q и N :

$$\sum X = 1 \cdot 6 - 2,67 - 3,33 = 0; \quad \sum Y = -3 + 1,1 + 1,9 = 0.$$

Следовательно, эпюры построены правильно.

Необходимо еще вычислить максимальные изгибающие моменты в пролетах ригеля и левой стойки. Положение сечений, в которых возникают эти моменты, определяем по эпюре поперечных сил.

В ригеле поперечная сила меняет знак под сосредоточенной силой P . Пользуясь интегральной зависимостью Д. И. Журавского между изгибающим моментом и поперечной силой, найдем:

$$M_{\max} = Q \frac{l}{35 \cdot 2} = 1,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На стойке сечение, в котором изгибающий момент достигает наибольшей величины, определяем исходя из дифференциальной зависимости между нагрузкой и поперечной силой:

$$x_0 = \frac{Q_{13}}{q} = \frac{2,67}{1} = 2,67 \text{ м.}$$

Для определения наибольшего изгибающего момента в пролете стойки служит зависимость между изгибающим моментом и поперечной силой:

$$M_{\max} = \frac{Q_{13} \cdot x_0}{2} = \frac{2,67 \cdot 2,67}{2} = 3,56 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Задания

Задание 6.1

Для статически неопределимой рамы (рис.6.3 – 6.6) **требуется:**

1. Определить степень статической неопределимости.
2. Выбрать основную систему.
3. Составить систему канонических уравнений метода сил.
4. Вычислить коэффициенты канонических уравнений.
5. Проверить правильность подсчета коэффициентов канонических уравнений.
6. Решить систему канонических уравнений и проверить правильность ее решения.
7. Построить окончательную эпюру изгибающих моментов $M_{ок}$.
8. Проверить правильность построения эпюры $M_{ок}$ и построить эпюру $Q(z)$.
9. Построить эпюру N .
10. Провести статическую и деформационную проверку рамы в целом.

Сведения для расчета взять из таблицы.

Схема	$l, \text{ м}$	$h, \text{ м}$	$P, \text{ кН}$	$q, \text{ кН/м}$	$\frac{J_P}{J_C}$
рис.6.3	5,0	3,0	30	8	2,00
рис. 6.4	4,5	3,2	35	10	1,80
рис. 6.5	4,2	3,4	40	12	1,60
рис. 6.6	4,0	3,5	45	14	1,50

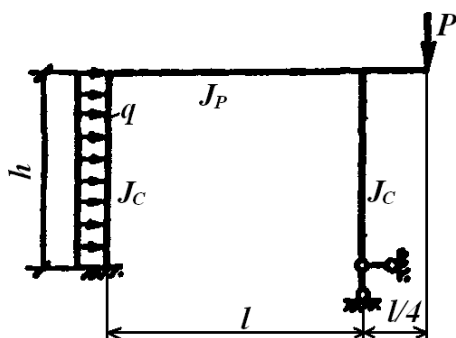


Рисунок 6.3

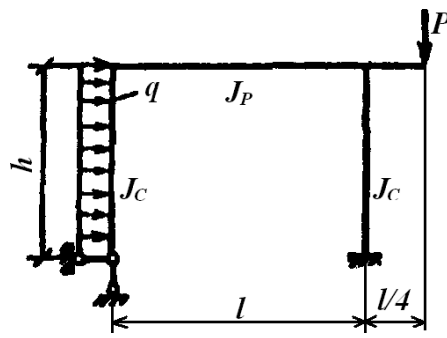


Рисунок 6.4

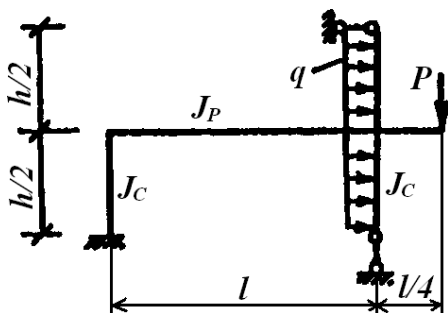


Рисунок 6.5

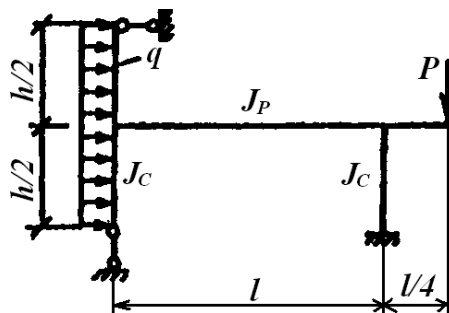


Рисунок 6.6

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение статически неопределимых систем.
2. Что означают внешние и внутренние статически неопределимые системы?
3. Перечислите классические методы расчетов статически неопределимых стержневых систем.
4. Дайте определение основной и эквивалентной системы по методу сил.
5. Раскройте суть канонических уравнений метода сил.
6. Поясните суть коэффициентов при неизвестных в канонических уравнениях метода сил.
7. Поясните суть свободных членов в канонических уравнениях метода сил.
8. Поясните порядок построения единичных и грузовых эпюр метода сил.

9. Поясните порядок проверки правильности вычисления коэффициентов канонических уравнений метода сил.

10. Поясните порядок проверки правильности вычисления свободных членов в канонических уравнениях метода сил.

11. Раскройте порядок построения окончательной эпюры изгибающих моментов.

12. Поясните порядок проверки правильности определения окончательной эпюры изгибающих моментов.

13. В чем суть статической проверки заданной системы в целом?

14. Поясните суть деформационной проверки заданной системы с применением окончательной эпюры моментов.

15. Раскройте порядок построения эпюр поперечных и продольных сил.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 8

РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК МЕТОДОМ СИЛ

Теоретическая часть

Неразрезной называется статически неопределимая сплошная балка, имеющая более двух вертикальных опор. На рис. 7.1а изображена неразрезная балка.

7.1. Уравнения трех моментов

Уравнения трех моментов могут быть выведены из канонических уравнений метода сил, если основную систему получить путем введения над опорами шарниров, превратив тем самым неразрезную балку в совокупность однопролетных шарнирно опертых балок, и в качестве неизвестных принять опорные изгибающие моменты (рис. 7.1б).

Опоры и соответственно этому опорные моменты принято нумеровать слева направо, присваивая первой опоре номер 0 и далее 1,2,...; пролетам присваивается номер правой опоры.

Балки основной системы $n-1$ и $n+1$, расположенные соответственно слева и справа от опоры n (рис. 7.1в), будут деформироваться только нагрузкой и опорными моментами M_{n-1} , M_n и M_{n+1} . Опорные моменты, действующие левее опоры $n-1$ и правее опоры $n+1$, не будут деформировать балку, поэтому каждое из канонических уравнений будет содержать лишь три неизвестных:

$$\delta_{n,n-1}M_{n-1} + \delta_{n,n}M_n + \delta_{n,n+1}M_{n+1} + \Delta_{nP} = 0. \quad (7.1)$$

Это уравнение, как и любое другое каноническое уравнение метода сил, является по существу уравнением неразрывности, показывающим, что взаимный поворот сечений балки, расположенных бесконечно близко слева и справа от введенного шарнира на опоре n , равен нулю.

После умножения уравнения (7.1) на $6EJ_0$, подстановки значений $\delta_{n,n-1}, \delta_{n,n}, \delta_{n,n+1}, \Delta_{1P}$, найденных путем перемножения эпюр, показанных на рис. 7.1 в—е, и переноса свободного члена в правую часть, уравнение трех моментов примет вид:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6 \frac{\Omega_n a_n}{l_n} - 6 \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}} \text{ или}$$

$$M_{n-1}l + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -6B_n^\Phi - 6A_n^\Phi,$$

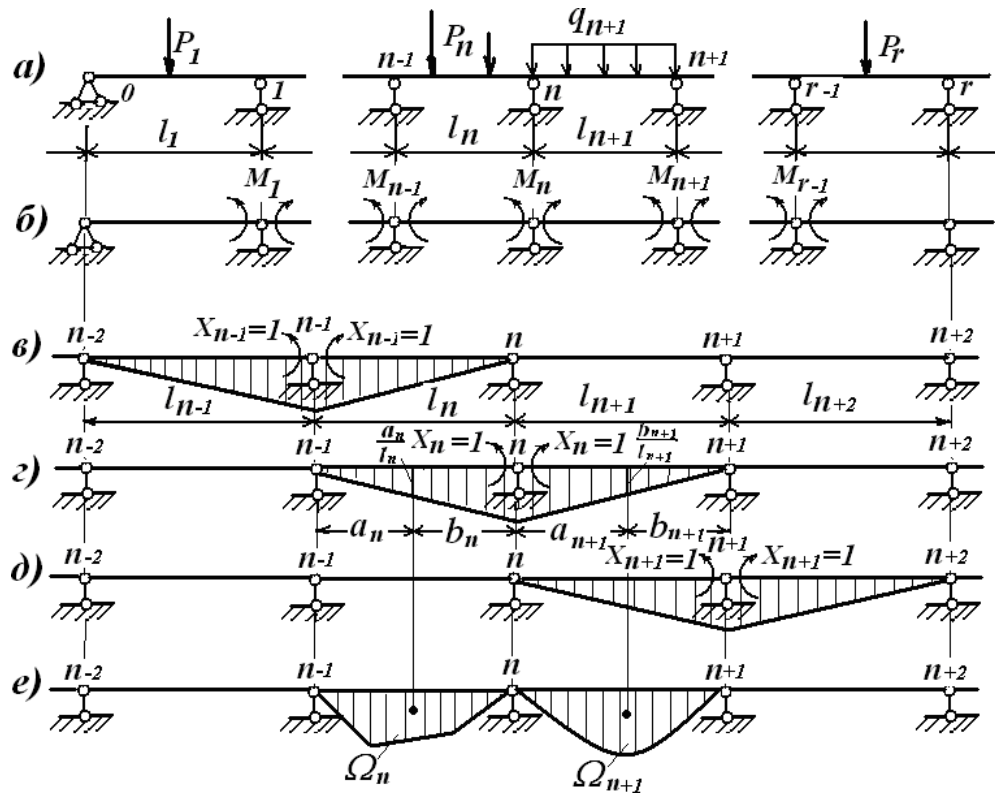


Рисунок 7.1

где $B_n^\Phi = \frac{\Omega_n a_n}{l_n}$, $A_{n+1}^\Phi = \frac{\Omega_{n+1} b_{n+1}}{l_{n+1}}$ — «фиктивные» (условные) опорные реакции

в основной системе.

«Фиктивные» опорные реакции, умноженные на 6, от различных видов нагружения пролетов приводятся в таблицах.

При использовании уравнения в расчетах следует:

а) заделки на крайних опорах балки (рис. 7.2) в основной системе условно заменять эквивалентными им дополнительными пролетами бесконечно малой длины и бесконечно большой жесткости (рис. 7.2б, слева);

б) консольные части балки в основной системе условно отбрасывать и их действие заменять известными моментами и поперечными силами (рис. 7.2б, справа); поперечная сила на опорные моменты влияния не оказывает.

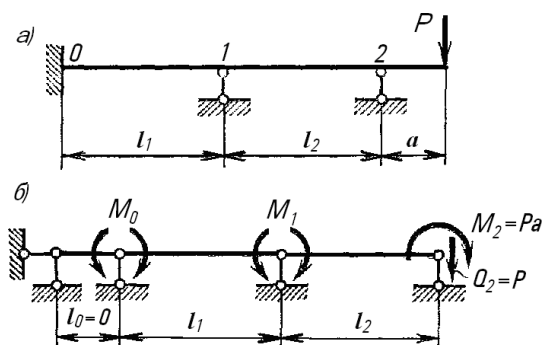


Рисунок 7.2

Составив систему уравнений трех моментов и решив ее, найдем, опорные моменты.

Эпюры M и Q для каждого пролета могут быть построены по следующим формулам:

$$M = M_P^0 + M_{n-1} \frac{l_n - x}{l_n} + M_n \frac{x}{l_n} ; \quad Q = Q_P^0 + \frac{M_n - M_{n-1}}{l_n} ,$$

где M_P^0, Q_P^0 — эпюры M и Q от заданной нагрузки для простых шарнирно опертых балок основной системы.

Эпюру M можно также построить путем геометрического сложения эпюры M_P^0 с эпюрами от опорных моментов в основной системе. Для этого над опорами откладывают значения опорных моментов, ординаты которых соединяют прямыми линиями и от них откладывают ординаты M_P^0 , т. е. как бы «подвешивают» к линиям опорных моментов.

Эпюру Q после построения эпюры M можно построить также по формуле $Q = \frac{dM}{dx}$. В точках, где $Q = 0$, определяют максимальные значения пролетных изгибающих моментов.

После построения эпюры M необходимо выполнить кинематическую проверку; погрешность должна быть не более 1%.

Очевидно, что если ординаты эпюры M хотя бы на каких-либо двух смежных пролетах имеют по всей длине один знак, то в расчете следует искать ошибку.

С учетом эпюры Q могут быть найдены опорные реакции (рис. 7.3):

$$R_n = Q_{n+1} - Q_n,$$

где Q_{n+1} и Q_n – поперечные силы, действующие справа и слева от опоры n .

После определения опорных реакций необходимо сделать проверки равновесия сил и моментов.

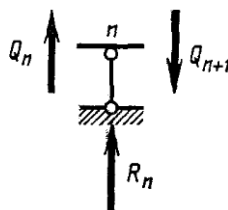


Рисунок 7.3

7.2. Метод фокусов

Если в неразрезной балке нагружен только один пролет n (рис. 7.4), то эпюра изгибающих моментов имеет вид, представленный на схеме. Установлено, что в каждом ненагруженном пролете при положении нагрузки справа (или слева) от него эпюра моментов имеет нулевую точку, причем местоположение этой точки постоянно и не зависит от интенсивности и вида нагружения пролета.

Эта точка называется *моментным фокусом*.

Различают левые и правые моментные фокусы ($F_{n-1}^{лев}, F_{n-2}^{лев}, \dots, F_{n+1}^{пр}, F_{n+2}^{пр}$).

Левым (правым) моментным фокусом называется нулевая точка эпюры моментов данного пролета при нагружении одного или нескольких пролетов, расположенных правее (левее) рассматриваемого.

Поскольку фокусные точки в каждом пролете имеют постоянное местоположение, то и отношение моментов ненагруженного пролета является постоянным.

Отношения большего по абсолютной величине опорного момента ненагруженного пролета к меньшему взятые с обратным знаком, называются фокусным отношением.

Различают соответственно левое $k_n^{лев}$ и правое k_n^{np} фокусные отношения

$$k_{n-1}^{лев} = -\frac{M_{n-1}}{M_{n-2}} = \frac{b_{n-1}^{лев}}{a_{n-1}^{лев}}; k_{n+1}^{np} = -\frac{M_n}{M_{n+1}} = \frac{a_{n+1}^{np}}{b_{n+1}^{np}}.$$

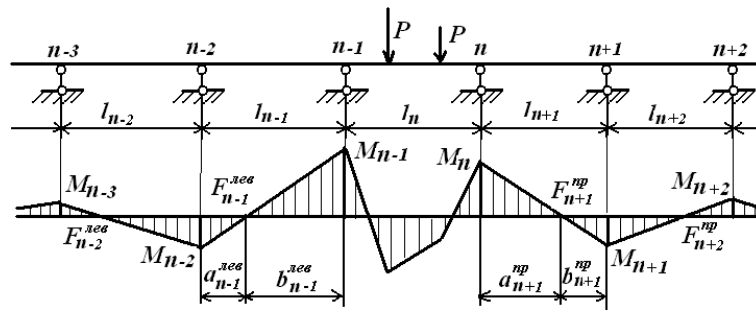


Рисунок 7.4

Рекуррентная формула для определения левых фокусных отношений получена из уравнения трех моментов, составленного для опоры n при ненагруженных пролетах l_n и l_{n+1} балки (рис. 7.5):

$$k_{n+1}^{лев} = 2 + \frac{l_n}{l_{n+1}} \left(2 - \frac{1}{k_n^{лев}} \right);$$

для определения правых фокусных отношений таким же путем получена формула:

$$k_{n-1}^{np} = 2 + \frac{l_n}{l_{n-1}} \left(2 - \frac{1}{k_n^{np}} \right).$$

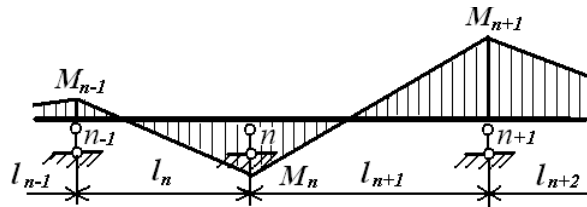


Рисунок 7.5

Для определения фокусных отношений по этим формулам необходимо знать хотя бы одно из них. Для крайних пролетов эти отношения известны. При шарнирном опирании крайнего пролета нулевая точка находится в шарнире крайнего пролета (рис. 7.6а), поэтому $k_1^{лев} = -\frac{M_1}{M_0} = \infty$; при заделанном конце балки, что эквивалентно наличию дополнительного пролета длиной $l_0 = 0$ (рис. 7.6б):

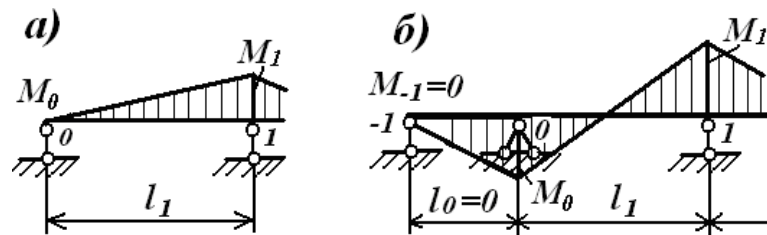


Рисунок 7.6

$$k_1^{лев} = 2 + \frac{0}{l_1} \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 2.$$

Если нагружен только один пролет n , то опорные моменты для этого пролета могут быть получены из совместного решения двух уравнений трех моментов, составленных для опор $n-1$ и n (см. рис. 7.3). Они будут равны: для левого конца нагруженного пролета

$$M_{n-1} = -6 \frac{A_n^\phi k_n^{np} - B_n^\phi}{l_n (k_n^{лев} k_n^{np} - 1)},$$

для правого его конца

$$M_n = -6 \frac{B_n^\Phi k_n^{лев} - A_n^\Phi}{l_n(k_n^{лев} k_n^{np} - 1)},$$

где $k_n^{лев}, k_n^{np}$ — соответственно левое и правое фокусные отношения пролета n ; A_n^Φ, B_n^Φ — «фиктивная» реакция соответственно на левом и правом концах нагруженного пролета n .

Если крайняя левая опора шарнирная, то $M_{n-1} = M_0 = 0, k_1^{лев} = \infty$ и поэтому

$$M_1 = -6 \frac{B_1^\Phi}{l k_1^{np}}.$$

Аналогичную формулу можно получить для крайнего правого пролета с шарнирной опорой на правом конце.

Остальные опорные моменты могут быть получены через фокусные отношения. При нагружении пролета n они будут равны:

$$M_{n-2} = -\frac{M_{n-1}}{k_{n-1}^{лев}}; M_{n-3} = -\frac{M_{n-2}}{k_{n-2}^{лев}}; \dots$$

$$M_{n+1} = -\frac{M_n}{k_{n+1}^{np}}; M_{n+2} = -\frac{M_{n+1}}{k_{n+2}^{np}}; \dots$$

Метод фокусов, как это видно, удобно и целесообразно применять, если нагружен какой-либо один пролет; он особенно эффективен при последовательном нагружении пролетов временной нагрузкой.

7.3. Построение объемлющих эпюр

Если кроме постоянной нагрузки имеется временная, которая может действовать, а может быть снята с того или иного пролета балки, то бывает необходимо находить такое сочетание постоянной и временных нагрузок, которые вызывают в различных сечениях большие и наименьшие изгибающие моменты и поперечные силы.

Для определения максимального момента M_{max} в данном сечении к моменту от постоянной нагрузки $M_{пост}$ прибавляют все положительные моменты от временной нагрузки $\sum M_{+вр}$ в данном сечении.

Для определения минимального момента M_{min} в данном сечении к моменту от постоянной нагрузки $M_{пост}$ прибавляют все отрицательные моменты от временной нагрузки $\sum M_{-вр}$:

$$M_{max} = M_{пост} + \sum M_{+вр} ;$$

$$M_{min} = M_{пост} + \sum M_{-вр} .$$

Аналогично этому находят Q_{max} и Q_{min} .

Ординаты M_{max} и M_{min} определяют обычно в табличной форме, построение Q_{max} и Q_{min} может быть выполнено без таблицы.

Пример 7.1

Неразрезную трехпролетную балку с размерами и жесткостями пролетов, указанными на рис. 7.7, рассчитать на постоянную равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q .

Решение

Составим уравнения трех моментов для заданной балки, их будет три – по числу неизвестных моментов M_0, M_1, M_2 ; момент на опоре 3 известен:

$$\left. \begin{aligned} 2M_{01} + M_{11} &= -6 \frac{I_0}{I_1} A^\Phi; \\ M_{01} + 2M_{11} + M_{22} &= -6 \frac{I_0}{I_1} B^\Phi - 6 \frac{I_0}{I_1} A_2^\Phi; \\ M_{12} + 2M_{22} + M_{33} &= -6 \frac{I_0}{I_1} B^\Phi - 6 \frac{I_0}{I_1} A_3^\Phi. \end{aligned} \right\}$$

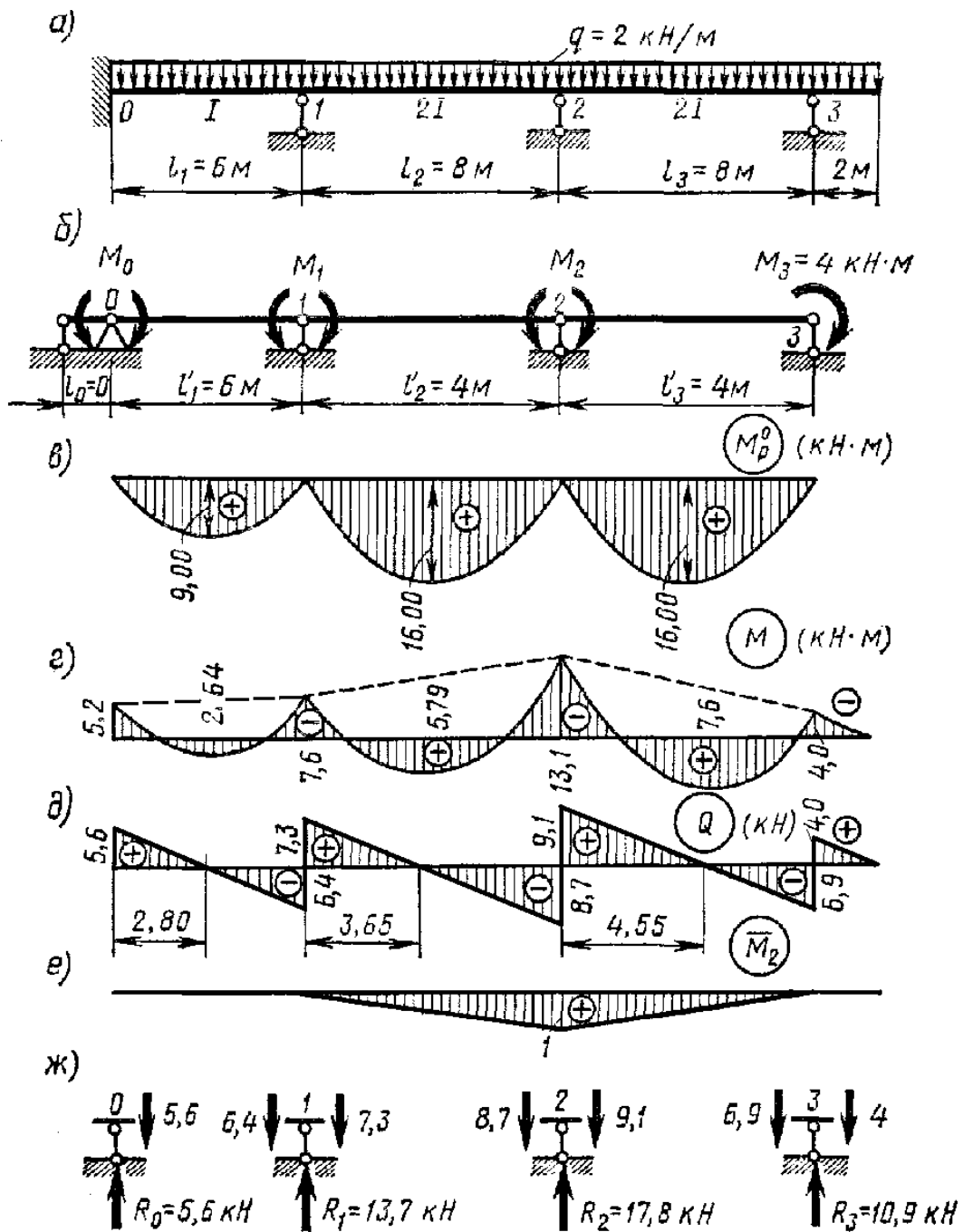


Рисунок 7.7

Приняв $I_0 = I$, найдем значения $l'_1; l'_2; l'_3; A^\Phi; B^\Phi; M_3$. Поскольку $l'_i = l'_i I_0 / I$, то $l'_1 = 6,0 \text{ м}; l'_2 = 4 \text{ м}; l'_3 = 4 \text{ м}$.

При равномерно распределенной нагрузке находим:

$$A_1^\Phi = B_1^\Phi = \frac{1}{2} \frac{ql_1^3}{12} = \frac{2 \cdot 6^3}{2 \cdot 12} = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$A_2^\Phi = B_2^\Phi = A_3^\Phi = B_3^\Phi = \frac{1}{2} \frac{ql_2^3}{12} = \frac{2 \cdot 8^3}{2 \cdot 12} = 42,67 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

На рис. 7.4в изображена эпюра изгибающих моментов в основной системе.

Момент на опоре 3 определяется нагрузкой на консоли и равен

$$M_3 = -\frac{qa^2}{2} = -\frac{2 \cdot 2^2}{2} = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Подставим значения приведенных пролетов, фиктивных опорных реакций и известное значение M_3 в систему уравнений трех моментов:

$$\left. \begin{aligned} 2M_0 \cdot 6 + M_1 \cdot 6 &= -6 \cdot 18; \\ M_0 \cdot 6 + 2(6 + 4)M_1 + 4M_2 &= -6 \cdot 18 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 42,67; \\ M_1 \cdot 4 + 2(4 + 4)M_2 + (-4) \cdot 4 &= -6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 42,67 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 42,67. \end{aligned} \right\}$$

Произведем преобразования:

$$\begin{aligned} 2M_0 + M_1 &= -18; \\ 3M_0 + 10M_1 + 2M_2 &= -118; \\ M_1 + 4M_2 &= -60. \end{aligned}$$

В результате решения этих уравнений получим:

$$M_0 = -5,2 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_1 = -7,63 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_2 = -13,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В каждом пролете окончательную эпюру M строим как сумму найденных значений опорных моментов и эпюры M_P^0 для простых однопролетных балок основной системы. Эпюру Q строим также как сумму эпюр Q_P^0 для однопролетных балок и эпюры Q от опорных моментов.

Максимальные значения моментов будут в сечениях $x_{i \max}$, где $Q = 0$.

Сечения $x_{i \max}$ могут быть найдены на основании первой части теоремы

Журавского. Поскольку $q = \frac{dQ}{dx}$, а $q = \text{const}$, то $x_{i \max} = \frac{Q^{\text{лев}}}{q}$.

На основании второй части теоремы Журавского могут быть легко найдены и значения $M_{\max}$ из выражения:

$$M_{max} = \int_0^{x_{i max}} Q dx + M_{лев}^{оп} = \Omega + M_{лев}^{оп},$$

где Ω – площадь эпюры Q между левой опорой пролета и сечением $x_{i max}$.

В данном случае

$$x_{1 max} = \frac{5,6}{2} = 2,8 м; x_{2 max} = \frac{7,3}{2} = 3,65 м; x_{3 max} = \frac{9,1}{2} = 4,55 м.$$

На основании теоремы Журавского:

$$\begin{aligned} M_{1 max} &= \frac{1}{2} 5,6 \cdot 2,8 - 5,2 = 2,64 кН \cdot м; \\ M_{2 max} &= \frac{1}{2} 7,3 \cdot 3,65 - 7,6 = 5,79 кН \cdot м; \\ M_{3 max} &= \frac{1}{2} 9,1 \cdot 4,55 - 13,1 = 7,77 кН \cdot м. \end{aligned}$$

Эпюры M и Q , построенные по результатам расчета, приведены на рис. 7.7 г, д.

По ординатам эпюры Q определяем опорные реакции (рис. 7.7 ж):

$$R_0 = 5,6 кН; R_1 = 13,7 кН; R_2 = 17,8 кН; R_3 = 10,9 кН.$$

После построения эпюры M выполняем кинематическую проверку

правильности расчета балки (эпюра $\bar{M}_2$ изображена на рис. 7.7 е):

$$\begin{aligned} EI \sum_0^{MM_2} dx &= -\frac{1}{2} 7,6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 13,1 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} 16 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 13,1 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} - \\ &- \frac{1}{2} 4 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} 16 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -5,07 - 17,47 + 21,33 - 17,47 - 2,67 + 21,33 = \\ &= -42,68 + 42,66 = -0,02. \end{aligned}$$

$$\text{Погрешность } \frac{0,02}{42,66} 100\% = 0,047\%.$$

Выполняем статические проверки правильности расчета балки:

$$\sum Y = 5,6 + 13,7 + 17,8 + 10,9 - 2 \cdot 24 = 0;$$

$$\sum M_0 = -5,2 - 13,7 \cdot 6 - 17,8 \cdot 14 - 10,9 \cdot 22 + 2 \cdot 24 \cdot 12 = -576,4 + 576 = -0,4.$$

$$\text{Погрешность } \frac{0,4}{576} 100\% = 0,07\%.$$

Пример 7.2

Трехпролетную неразрезную балку с размерами и жесткостью, такими же, как в примере 7.1, рассчитать методом фокусов на последовательное нагружение пролетов нагрузкой, показанной на рис. 7.8.

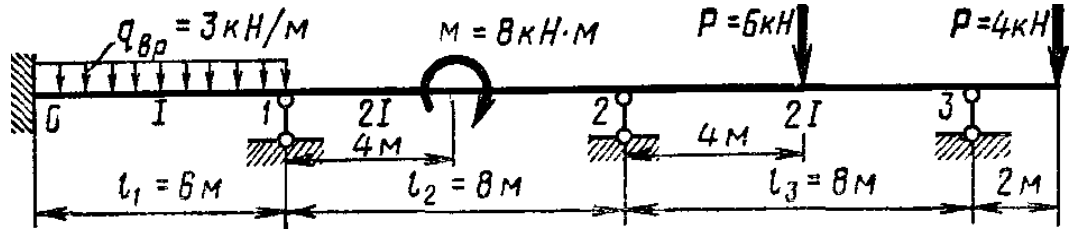


Рисунок 7.8

Решение

Предварительно определим левые и правые фокусные отношения:

$$k_1^{лев} = 2; k_2^{лев} = 2 + \frac{6}{2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 4,25; k_3^{лев} = 2 + \frac{4}{2} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 3,76;$$

$$k_3^{np} = \infty; k_2^{np} = 2 + \frac{4}{4} \left(2 - \frac{2}{2} \right) = 4; k_1^{np} = 2 + \frac{4}{6} \left(2 - \frac{1}{4} \right) = 3,17.$$

1. Расчет на нагрузку в 1-м пролете (рис. 7.8)

Определим фиктивные опорные реакции 1-го пролета:

$$A_1^\Phi = B_1^\Phi = \frac{1}{2} \frac{q_{ep} l_1^3}{12} = \frac{3 \cdot 6^3}{2 \cdot 12} = 27 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Для 1-го пролета определим опорные моменты:

$$M_0 = -6 \frac{A_1^\Phi k_1^{np} - B_1^\Phi}{l_1 (k_1^{лев} k_1^{np} - 1)} = -6 \frac{27 \cdot 3,17 - 27}{6(2 \cdot 3,17 - 1)} = -10,98 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_1 = -6 \frac{B_1^\Phi k_1^{лев} - A_1^\Phi}{l_1 (k_1^{лев} k_1^{np} - 1)} = -6 \frac{27 \cdot 2 - 27}{6(2 \cdot 3,17 - 1)} = -5,06 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = -\frac{M_1}{k_2^{np}} = -\frac{(-5,06)}{4} = 1,26 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_3 = 0.$$

M_{1max} определим так же, как и в примере 7.1:

$$x_{i \max} = \frac{9,99}{3} = 3,33 \text{ м}; M_{1 \max} = \frac{1}{2} 9,99 \cdot 3,33 - 10,98 = 5,64 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

После определения опорных моментов строим эпюры M и Q так же, как и при расчете по методу трех моментов. Эпюры M и Q приведены на рис. 7.8в,г. Определение опорных реакций показано на рис. 7.8е.

Кинематическая проверка (эпюра $\bar{M}_1$ на рис. 7.8д):

$$EI_0 \sum \int \frac{M \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot 6^2}{8} \cdot \frac{1}{2} + \frac{6}{6} \left(- \frac{1}{2} \cdot 5,06 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 10,98 \cdot 1 \right) + \frac{8}{6} \left(- 2 \cdot 5,06 + 1,26 \cdot 1 \right) \cdot \frac{1}{2} = 27 - 21,1 - 5,92 = 27 - 27,02 = -0,02.$$

$$\text{Погрешность } \frac{0,02}{27} 100\% = 0,07\%.$$

Статическая проверка:

$$\sum Y = 9,99 + 8,80 - 0,95 + 0,16 - 3 \cdot 6 = 18,95 - 18,95 = 0.$$

2. Расчет на нагрузку во 2-м пролете (рис. 7.9)

Определим «фиктивные» опорные реакции 2-го пролета (рис. 7.9 и 7.10):

$$A_2^\Phi = - \frac{1}{2} 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = -2,67 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$B_2^\Phi = \frac{1}{2} 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 2,67 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

На рис. 7.10 представлена грузовая эпюра 2-го пролета, нужная для определения «фиктивных» опорных реакций A_2^Φ и B_2^Φ .

Для 2-го пролета определим опорные моменты:

$$M_1 = -6 \frac{A_2^\Phi k_2^{np} - B_2^\Phi}{l_2(k_2^{лев} k_2^{np} - 1)} = -6 \frac{-2,67 \cdot 4 - 27}{8(4,25 \cdot 4 - 1)} = 0,625 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2 = -6 \frac{B_2^\Phi k_2^{лев} - A_2^\Phi}{l_2(k_2^{лев} k_2^{np} - 1)} = -6 \frac{2,67 \cdot 4,25 + 2,67}{8(2 \cdot 3,17 - 1)} = -0,657 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = 0; M_0 = -\frac{M_1}{k_1^{лев}} = -\frac{0,625}{2} = -0,3125 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

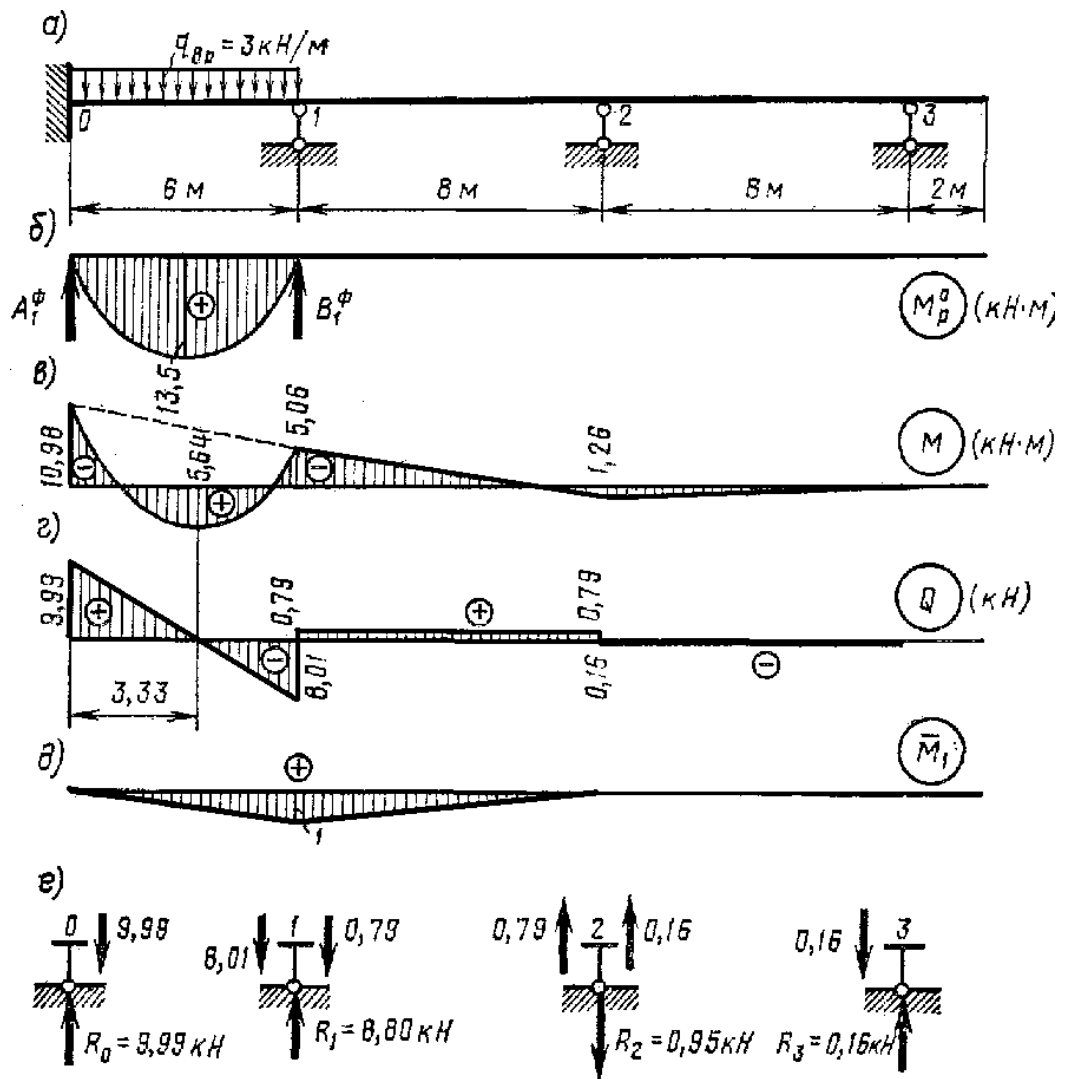


Рисунок 7.8

Эпюры M и Q приведены на рис. 7.9б,в. Определение опорных реакций показано на рис. 7.9д.

Кинематическая проверка (эпюра $\bar{M}_2$, рис. 7.9г):

$$EI \sum_0^6 \frac{MM_2}{EI} dx = \frac{4}{6} (-2 \cdot 4,02 \cdot 0,5 + 0,625 \cdot 0,5) + \frac{4}{6} (2 \cdot 3,98 \cdot 0,5 - 2 \cdot 0,657 \cdot 1 + 3,98 \cdot 1 - 0,657 \cdot 0,5) - \frac{1}{2} 8 \cdot 0,657 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -1,236 + 2,106 - 0,876 = -2,112 + 2,106 = 0,006.$$

Погрешность $\frac{0,006}{2,112} 100\% = 0,286\%.$

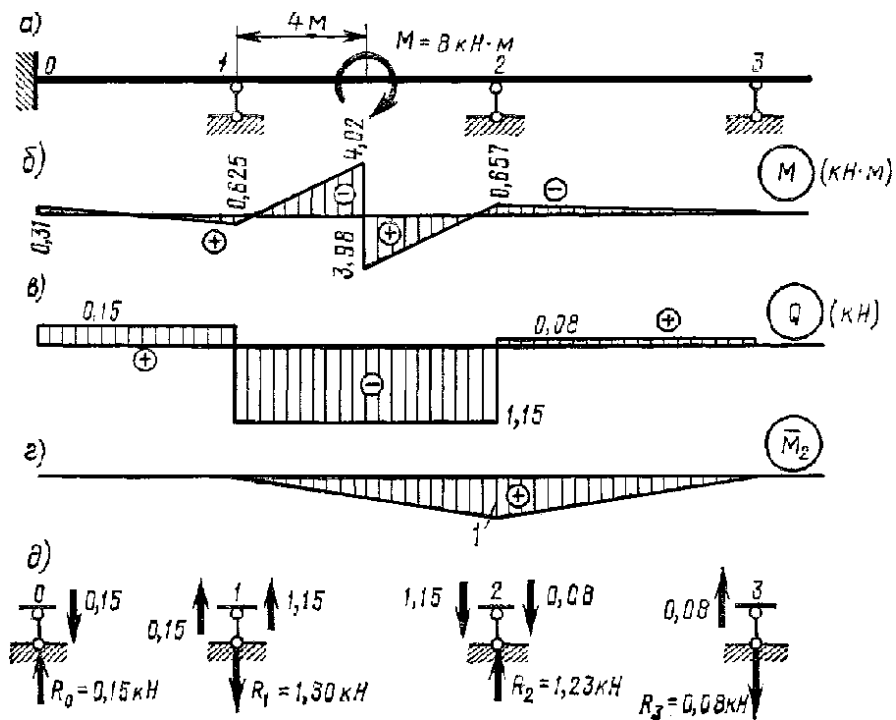


Рисунок 7.9

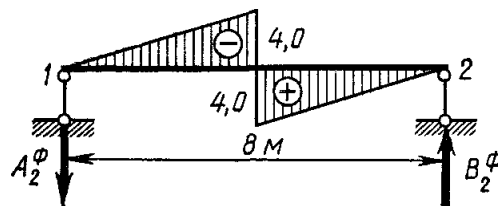


Рисунок 7.10

Статическая проверка:

$$\sum Y = 0,15 - 1,30 + 1,23 - 0,08 = 1,38 - 1,38 = 0.$$

3. Расчет на нагрузку в 3-м пролете (рис. 7.11а):

Определим «фиктивные» опорные реакции для 3-его пролета:

$$A_3^\Phi = B_3^\Phi = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}^2 \text{ (рис. 7.11 и рис. 7.12).}$$

На рисунке 7.12 показана эпюра 3-го пролета, необходимая для определения «фиктивных» опорных реакций A_3^Φ и B_3^Φ .

Для 3-го пролета определим опорные моменты:

$$M_2 = -6 \frac{A_3^\Phi k_3^{np} - B_3^\Phi}{l_3(k_3^{лев} k_3^{np} - 1)} = -6 \frac{24 \cdot \infty - 24}{8(3,76 \cdot \infty - 1)} = -4,78 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

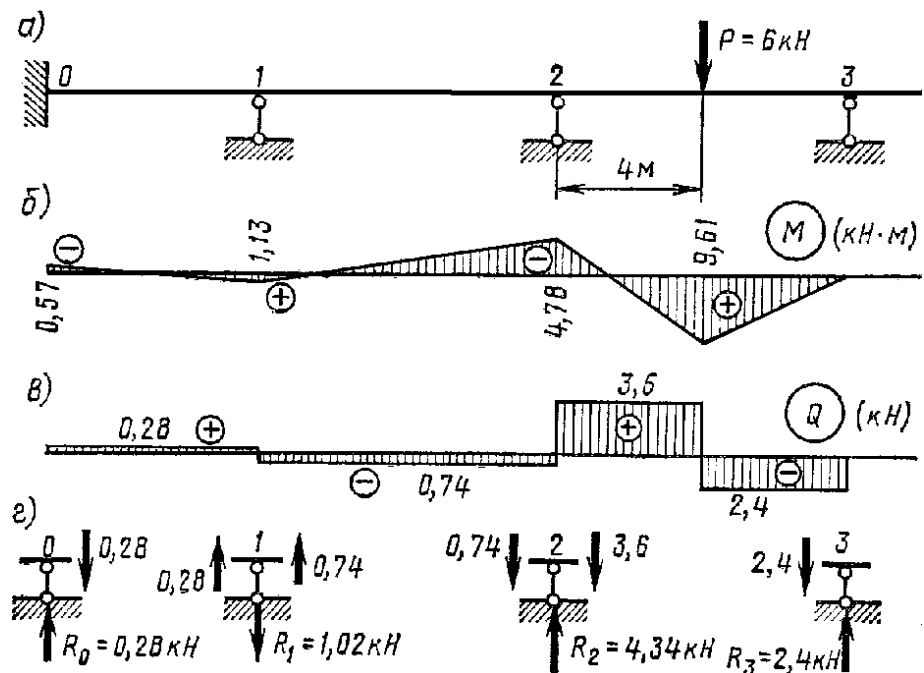


Рисунок 7.11

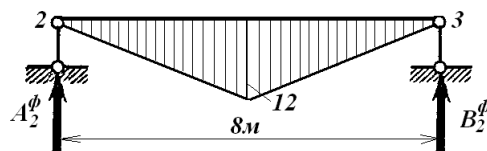


Рисунок 7.12

$$M_3 = -6 \frac{B_3^{\phi} k_3^{\text{лев}} - A_3^{\phi}}{t_3(k_3^{\text{лев}} k_3^{\text{пр}} - 1)} = -6 \frac{24 \cdot 3.76 - 2.67}{8(3.76 \cdot \infty - 1)} = 0;$$

$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2^{\text{лев}}} = -\frac{(-4.78)}{4.25} = 1.13 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_0 = -\frac{M_1}{k_1^{\text{лев}}} = -\frac{1.13}{2} = -0.57 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Эпюры M и Q приведены на рис. 7.11б, в. Определение опорных реакций показано на рис. 7.11г.

Кинематическая проверка (эпюра $\bar{M}_3$, см. рис. 7.10г):

$$EI \sum_0^{\infty} \frac{MM_3}{EI} dx = \frac{8}{6} (-2 \cdot 4.78 \cdot 1 + 1.13 \cdot 1) \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot 8 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 4.78 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= -5.62 + 12.00 - 6.38 = -12.00 + 12.00 = 0.$$

Статическая проверка:

$$\sum Y = 0.28 - 1.02 + 4.34 + 2.4 - 6 = 7.02 - 7.02 = 0.$$

4. Расчет на нагрузку консоли (рис. 7.13)

При загрузке консоли момент в опоре 3 легко определяется:

$$M_3 = -4 \cdot 2 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_2 = -\frac{M_3}{k_3^{\text{лев}}} = -\frac{(-8)}{3,76} = 2,13 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_1 = -\frac{M_2}{k_2^{\text{лев}}} = -\frac{2,13}{4,25} = -0,5 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_0 = -\frac{M_1}{k_1^{\text{лев}}} = -\frac{(-0,5)}{2} = 0,25 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

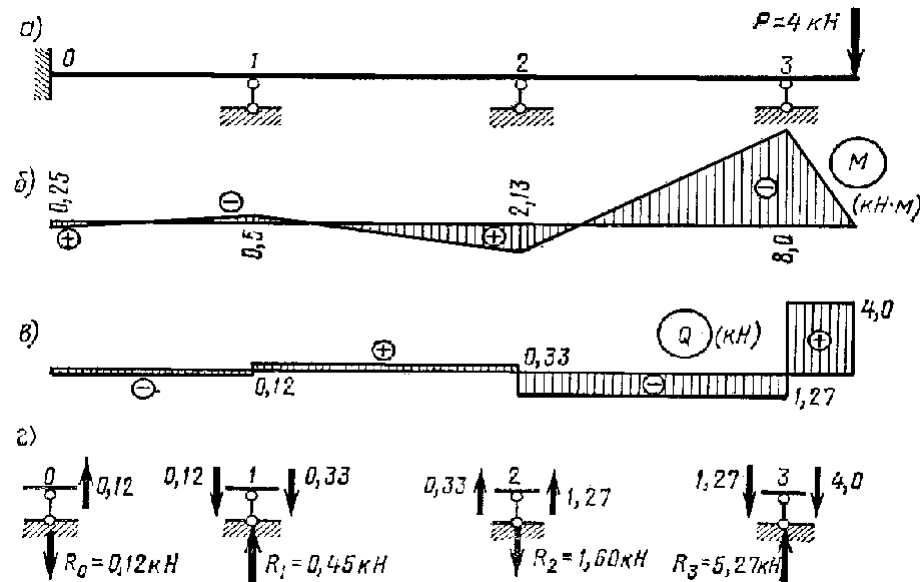


Рисунок 7.13

Эпюры M и Q приведены на рис. 7.13б, в. Определение опорных реакций показано на рис. 7.13г.

Статическая проверка:

$$\sum Y = -0,12 + 0,45 - 1,60 + 5,27 - 4,0 = 5,72 - 5,72 = 0.$$

5. Построение объемлющих эпюр

Результаты вычисления ординат $M_{\max}$ и $M_{\min}$ приведены в таблице. Ординаты определены над опорами и в серединах пролетов соответственно в точках a , b и v . Графические результаты расчета представлены на рис. 7.14.

Номер сечения	$M_{\text{пост}}, \text{ кН} \cdot \text{м}$	M от временной нагрузки, кН·м				$M_{\max}, \text{ кН} \cdot \text{м}$	$M_{\min}, \text{ кН} \cdot \text{м}$
		в 1-м пролете	во 2-м пролете	в 3-м пролете	на консоли		
0	-5,2	-10,98	-0,31	-0,57	0,25	-4,95	-17,06
a	2,6	5,48	0,15	0,28	-0,12	8,51	-2,48

1	-7,6	-5,06	0,62	1,13	-0,5	-5,85	-13,16
б	5,65	-1,90	- 4,02/3,98	-1,83	0,81	6,46/10,44	- 2,10/1,92
2	-13,1	1,26	-0,66	-4,78	2,13	-9,71	-18,54
в	7,45	0,63	-0,33	9,61	-2,93	17,69	4,19
3	-4,0	0	0	0	-8,0	-4,0	-12,0

Примечание. Числитель — значение ординаты слева от сечения, знаменатель — справа

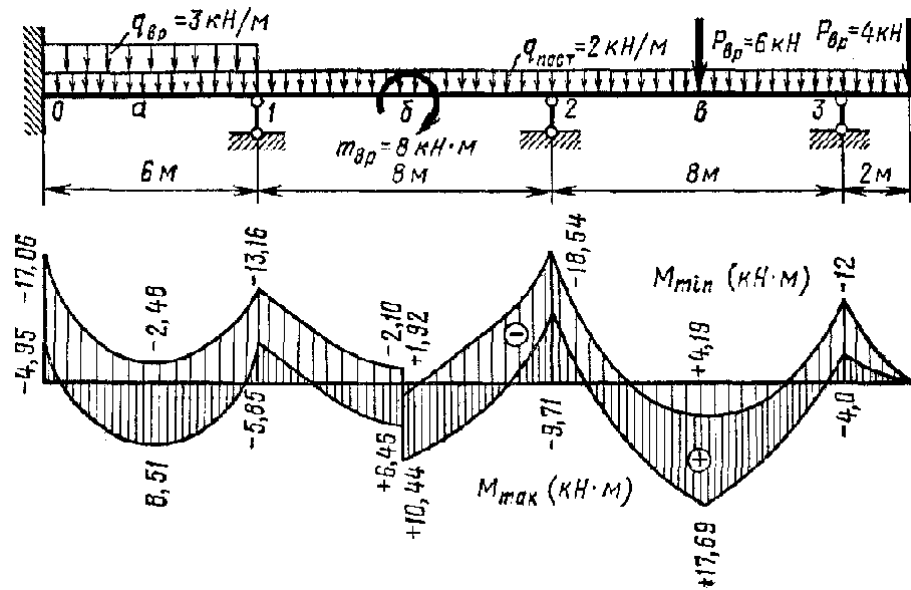


Рисунок 7.14

Задания

Задание 7.1

Для балки (рис. 7.15) требуется:

1. Построить эпюру изгибающих моментов от заданной постоянной нагрузки с помощью уравнений трех моментов и временной равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $q = 10 \text{ кН/м}$ методом фокусов.
2. От заданной постоянной и временной равномерно распределенной нагрузки построить объемлющую эпюру изгибающих моментов.

Исходные данные взять из таблицы.

Схема (рис. 7.15)	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м	P , кН	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	q_3 , кН/м
1	3,6	3,5	3,5	5,0	24,0	0	24,0	0	14,0	0
2	4,2	4,0	3,8	6,0	0	24,0	0	12,0	0	12,0

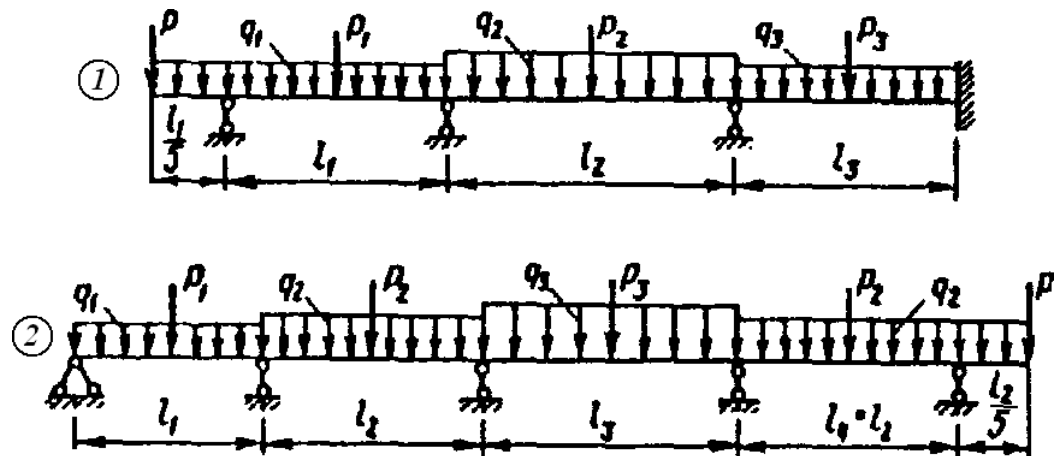


Рисунок 7.15

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение неразрезной балки.
2. Запишите уравнения трех моментов.
3. Что такое «фиктивные» опорные реакции и как они определяются?
4. Какие точки неразрезной балки называются левым (правым) моментным фокусом?
5. Что называют левым (правым) моментным фокусным отношением пролета?
6. Чему равны опорные моменты загруженного пролета?
7. Для чего и как строят объемлющие эпюры?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9

МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Теоретическая часть

Как и метод сил, метод перемещений является одним из важнейших методов расчета статически неопределимых систем. В качестве основных неизвестных в этом методе принимают упругие перемещения узлов системы: углы поворота узлов и их линейные перемещения (рис. 8.1а).

Общее число неизвестных метода перемещений n , называемое *степенью кинематической неопределимости* системы, определяют как сумму неизвестных углов поворота n_y и неизвестных линейных перемещений узлов n_l :

$$n = n_y + n_l.$$

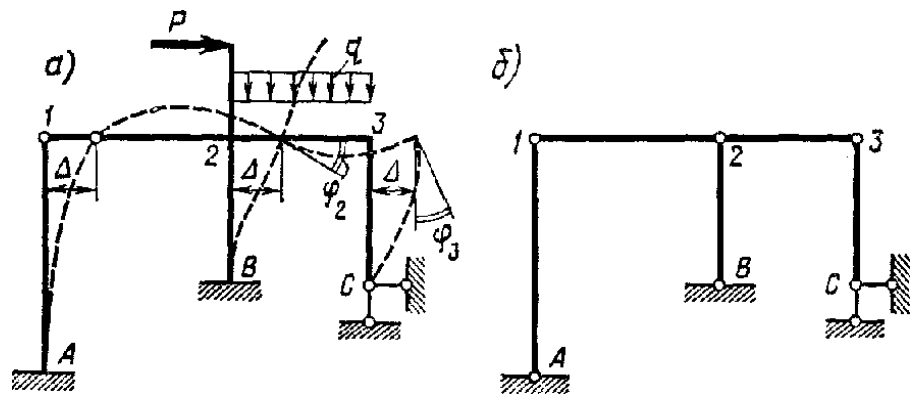


Рисунок 8.1

Число неизвестных углов поворота равно числу «жестких» узлов, вследствие чего определение n_y сводится к простому подсчету числа «жестких» узлов рамы (например, узлы 2, 3 на рис. 8.1а).

Для определения числа линейных перемещений узлов n_l вводится предположение о том, что длины хорд упругих линий прямых стержней рамы после их деформации остаются равными первоначальным длинам этих

стержней, т. е. не учитывается сближение концов прямого стержня при его изгибе и действии продольной силы. В результате этого число независимых линейных смещений узлов заданной системы будет равно степени свободы шарнирной схемы, полученной из заданной системы введением шарниров во все узлы, включая и опорные (рис. 8б). При этом все статически определимые консоли, если они имеются в заданной системе, должны быть предварительно отброшены.

Таким образом, для рамы, представленной на рис. 8.1а, число независимых линейных перемещений узлов будет равно:

$$n_{\text{л}} = 2Y - C - C_0 = 12 - 5 - 6 = 1,$$

а общее число неизвестных при $n_y = 2$ составит

$$n = 2 + 1 = 3.$$

После определения числа неизвестных образуют основную систему метода перемещений путем наложения на узлы заданной системы связей, препятствующих их перемещениям. В соответствии с принятыми неизвестными эти связи бывают двух типов: связи, препятствующие повороту узлов (защемления), и связи, препятствующие линейным перемещениям узлов (опорные стержни) (рис. 8.2). Заметим, что вводимые в основную систему метода перемещений защемляющие связи отличаются от обычной жесткой заделки тем, что оказывают препятствие лишь повороту узла и не лишают его линейной подвижности. Общее число вводимых в основную систему связей равно, естественно, числу неизвестных метода перемещений.

Все перемещения вне зависимости от их типа (угол поворота или поступательное смещение) обозначены для общности единым символом Z_i .

Для определения основных неизвестных Z_i записывают систему канонических уравнений метода перемещений:

а побочные коэффициенты, как и в методе сил, обладают свойством взаимности, т. е. $r_{ik} = r_{ki}$.

Для определения коэффициентов и свободных членов канонических уравнений необходимо предварительно построить эпюры изгибающих моментов в основной системе от единичных неизвестных перемещений узлов рамы и от внешней нагрузки. Поскольку основная система метода перемещений представляет собой совокупность независимых элементов — однопролетных статически неопределимых балок (рис. 8.2), построение указанных эпюр сводится к определению усилий в однопролетных балках от перемещений их концов и от нагрузки. Эти усилия, вычисленные для наиболее важных случаев перемещений и нагружений однопролетных балок постоянного сечения, приведены в табл. 8.1.

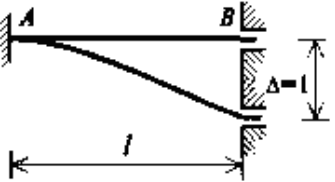
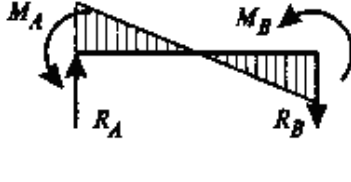
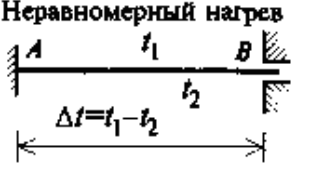
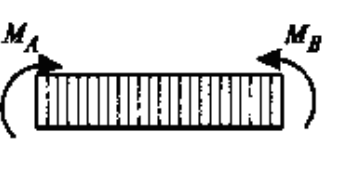
После построения единичных эпюр и грузовой эпюры моментов с помощью табл. 8.1 приступают к вычислению единичных коэффициентов r_{ik} и свободных членов R_{iP} канонических уравнений. При этом могут быть использованы два способа: статический способ и способ перемножения эпюр.

С т а т и ч е с к и й способ является основным в методе перемещений, что объясняется его простотой и наглядностью. Он основан на использовании уравнений равновесия для определения реакций введенных связей, которые и являются искомыми коэффициентами при неизвестных и свободными членами канонических уравнений. Например, коэффициенты и свободные члены, представляющие реактивные моменты во введенных защемлениях, определяются из условий равновесия вырезанных из основной системы узлов в виде $\sum M = 0$. Коэффициенты при неизвестных и свободные члены уравнений, представляющие реактивные усилия во введенных стержневых связях, могут быть определены из условий равновесия некоторой отсеченной части основной системы, содержащей эти связи. Как уже было сказано, положительное направление определяемой

Таблица 8.1

№ п/п	Схема балки и воз- действия на нее	Эпюры изгибающих моментов ¹⁾ и реакции	Формулы
1.			$M_A = -(Pl/2)v(1-v^2);$ $M_C = (Pl/2)u^2v(3-u);$ $R_A = (Pv/2)v(3-v^2);$ $R_B = Pu^2[1+(v/2)] =$ $= (Pu^2/2)(3-u)$
2.			$M_A = -ql^2/8;$ $R_A = 5ql/8;$ $R_B = 3ql/8$
3.			$M_A = 3EJ/l;$ $R_A = -R_B = -3EJ/l^2$
4.			$M_A = -3EJ/l^2;$ $R_A = -R_B = 3EJ/l^3$
5.			$M_A = 3EJ \alpha \Delta t / (2h);$ ²⁾ $R_A = -R_B = 3EJ \alpha \Delta t / (2hl)$
6.			$M_A = -uv^2 Pl;$ $M_B = u^2 v Pl;$ $M_C = 2u^2 v^2 Pl;$ $R_A = v^2(1+2u)P;$ $R_B = u^2(1+2v)P$
7.			$M_A = -M_B = -ql^2/12;$ $R_A = R_B = ql/2$
8.			$M_A = 4EJ/l;$ $M_B = 2EJ/l;$ $R_A = -R_B = -6EJ/l^2$

Продолжение таблицы 8.1

№ п/п	Схема балки и воз- действия на нее	Эпюры изгибающих моментов ¹⁾ и реакции	Формулы
9.			$M_A = M_B = -6EJ/l^2;$ $R_A = -R_B = 12EJ/l^3$
10.			$M_A = M_B = EJ \alpha \Delta t / (2h)$ ²⁾ $R_A = R_B = 0$

Примечание. 1) ординаты отложены со стороны растянутого волокна;
2) h – высота поперечного сечения; α – температурный коэффициент линейного расширения

реакции, моментной или силовой, совпадает с принятым направлением неизвестного угла поворота или линейного смещения узла.

Способ перемножения эпюр целесообразно применять, например, при расчете рамы с наклонными стойками, когда применение статического способа усложняется. Коэффициенты при неизвестных в этом способе определяют путем интегрирования (перемножения) соответствующих единичных эпюр:

$$r_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EI} dx,$$

где $\bar{M}_i, \bar{M}_k$ – эпюры от единичных перемещений, построенные в основной системе метода перемещений.

Свободные члены уравнений находят по формуле

$$R_{iP} = - \sum \int \frac{M'_P \bar{M}_i}{EI} dx,$$

где M'_P – эпюра моментов от нагрузки, построенная в любой статически определимой системе, образованной из заданной рамы.

Заметим, что способ перемножения эпюр может быть применен в качестве контроля правильности вычисления коэффициентов и свободных членов канонических уравнений, найденных статическим способом.

После определения из канонических уравнений основных неизвестных $Z_1, \dots, Z_n$ эпюра изгибающих моментов строится по формуле

$$M = \overline{M}_1 Z_1 + \overline{M}_2 Z_2 + \dots + \overline{M}_n Z_n + M_P,$$

а эпюры поперечных и продольных сил – при помощи приемов, аналогичных тем, которые используются в методе сил.

Проверкой правильности полученных эпюр является статическая проверка условий равновесия вырезанных узлов и отдельных частей рамы. Эта проверка является необходимой и достаточной при условии правильности единичных и грузовых эпюр. Наряду с ней могут быть применены и кинематические проверки (универсальная и построчная), применяемые в методе сил. Для этого необходимо окончательную эпюру моментов умножить на единичные эпюры (или их сумму), построенные в любой основной системе метода сил, образованной из заданной рамы.

Пример 8.1

Для рамы, показанной на рис. 8.3а, построить эпюру изгибающих моментов M и произвести необходимые проверки расчета при условии, что жесткости всех стержней одинаковы и равны EI .

Решение

Подсчитаем число основных неизвестных. Так как число неизвестных угловых перемещений равно числу жестких узлов рамы, то $n_y = 2$. Число линейных смещений получим из рассмотрения шарнирной схемы, образованной из заданной рамы (рис. 8.3б), по формуле

$$n = 2 \cdot 6 - 5 - 6 = 1.$$

То, что узлы рамы имеют только одно независимое линейное перемещение, можно определить и без применения формулы. Действительно,

узлы рамы 4 и 5 не могут перемещаться по вертикали из-за опорных закреплений 1 и 2 и принятой гипотезы о нерастяжимости стержней и неизменности их длины при изгибе. Им доступно только горизонтальное перемещение, которое будет одинаковым для узлов 4,5 и 3 вследствие того, что они связаны между собой стержнями 4–5 и 5–3.

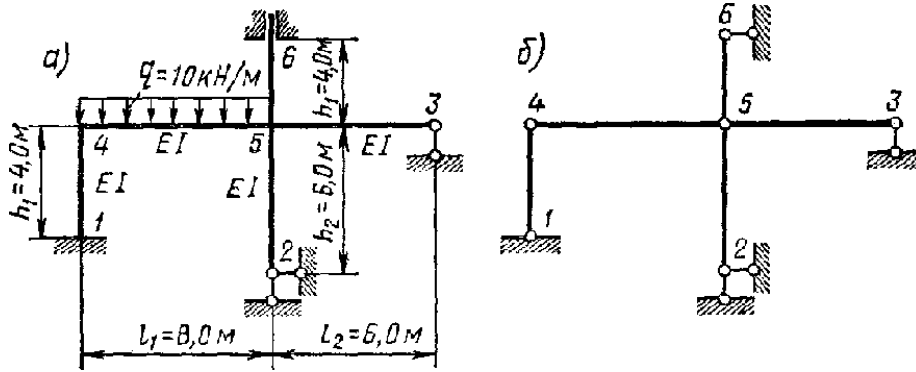


Рисунок 8.3

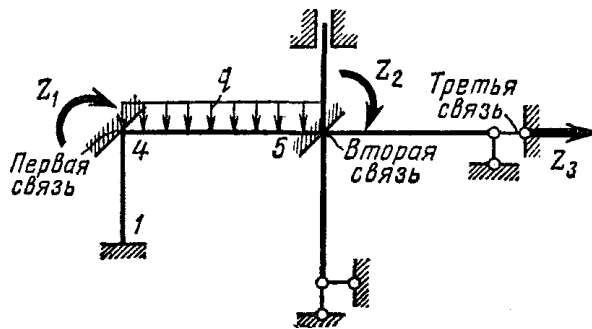


Рисунок 8.4

Образует основную систему, введя связи, препятствующие возможному угловому и линейному смещению, и обозначив предполагаемые направления трех неизвестных перемещений (рис. 8.4). Используя табл. 8.1, построим эпюры моментов $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3$ от единичных перемещений введенных связей по заданным направлениям и эпюру M_P от действия нагрузки на основную систему (рис. 8.5а–г). На рис. 8.4 и 8.5 использованы следующие обозначения:

$$i_1 = \frac{EI}{h_1} = \frac{EI}{4}, i_2 = \frac{EI}{l_1} = \frac{EI}{8}, i_3 = \frac{EI}{h_2} = \frac{EI}{6}.$$

Заметим, что при построении единичных эпюр полезно предварительно нанести на схему рамы перемещение оси каждого стержня, вызванное заданным единичным смещением (штриховая линия на рис. 8.5а–в), что позволит установить положение растянутых волокон и правильно изобразить эпюру моментов.

Система канонических уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + r_{13}Z_3 + R_{1P} &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + r_{23}Z_3 + R_{2P} &= 0, \\ r_{31}Z_1 + r_{32}Z_2 + r_{33}Z_3 + R_{3P} &= 0. \end{aligned}$$

Для определения коэффициентов и свободных членов этих уравнений – реактивных усилий в наложенных связях – применим статический способ. Для этого вырежем вначале узел 4 (рис. 8.4) и рассмотрим условие его равновесия в случаях, представленных на рис. 8.5а–г, т. е. определим коэффициенты первой строки канонических уравнений.

На рис. 8.6 а–г показан узел 4 с действующими на него моментами со стороны отброшенных частей рамы и реактивными моментами в защемлении (первой связи). Условия равновесия этого узла позволяют получить:

$$\begin{aligned} r_{11} &= 4i_1 + 4i_2 = \frac{3EI}{2}; r_{12} = 2i_2 = \frac{EI}{4}; r_{13} = -\frac{6i_1}{h_1} = -\frac{3EI}{8}; \\ R_{1P} &= -\frac{ql^2}{12} = -\frac{10 \cdot 8^2}{12} = -\frac{160}{3} \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Отрицательный знак в двух последних случаях объясняется тем, что направления реактивных моментов r_{13} и R_{1P} противоположны заданному направлению угла поворота Z_1 первой связи.

Аналогично могут быть определены коэффициенты второго канонического уравнения, для чего из рамы должен быть вырезан узел 5 и рассмотрены условия его равновесия при тех же четырех воздействиях на основную систему (рис. 8.5а–г). Из рис. 8.7а–г следует:

$$r_{21} = r_{12} = \frac{EI}{4}; r_{22} = 4i_1 + 4i_2 + 3i_3 + 3i_3 = \frac{5EI}{2};$$

$$r_{23} = \frac{6i_1}{h_1} - \frac{3i_3}{h_2} = \frac{7EI}{24}; R_{2P} = \frac{ql^2}{12} = \frac{160}{3} \kappa H \cdot \text{м}.$$

Для определения коэффициентов третьего уравнения, представляющих реакции во введенном стержне (третьей связи), рассмотрим стойки и рассмотрим условие равновесия средней части рамы, содержащей введенный стержень (рис. 8.8а–г). При этом под условием равновесия будем понимать равенство нулю проекции всех сил, действующих на выделенную часть рамы, на горизонталь: $\sum X = 0$. Отличные от нуля проекции дадут искомые реакции во введенном стержне и поперечные силы, приложенные в местах рассечения стоек. Последние определяются обычным путем по эпюрам $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3, M_P$.

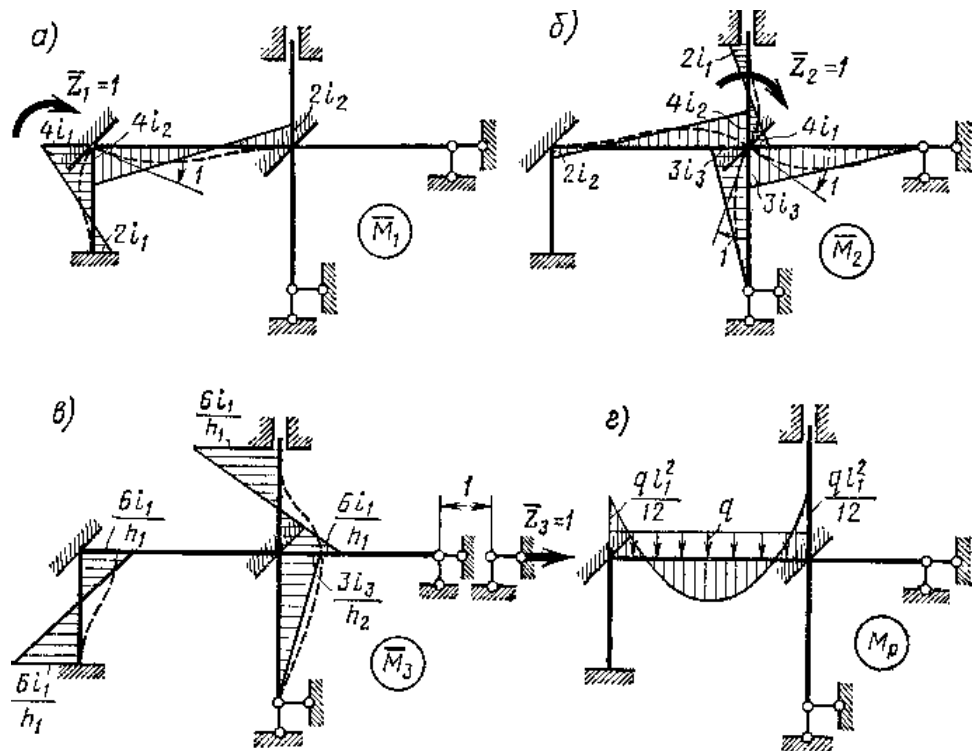


Рисунок 8.5

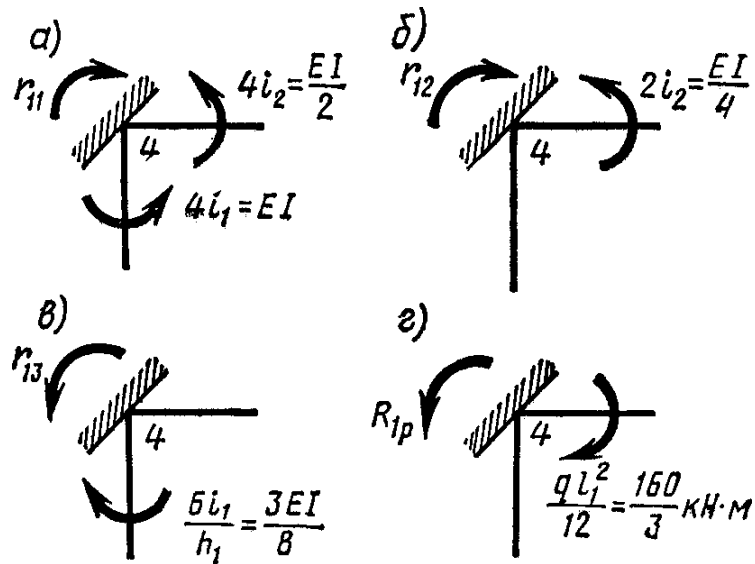


Рисунок 8.6

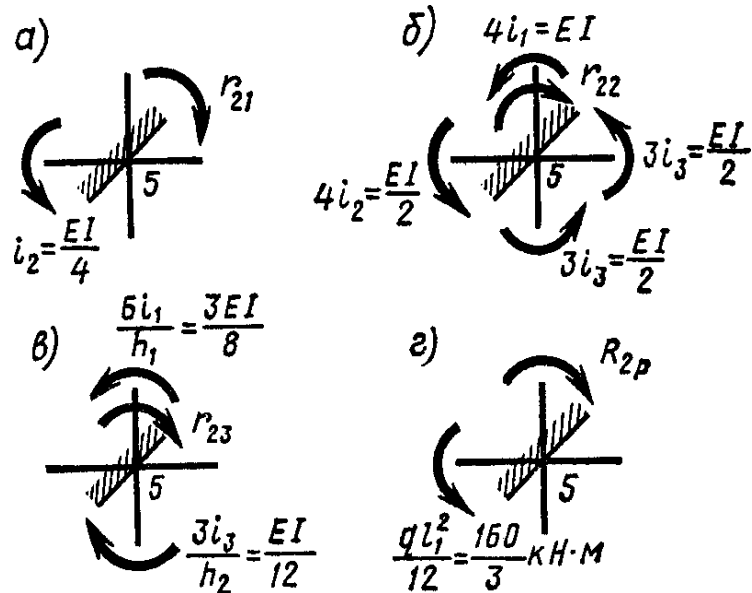


Рисунок 8.7

Из рис. 8.8 а–г следует:

$$r_{31} = r_{13} = -\frac{3EI}{8}; r_{32} = r_{23} = \frac{7EI}{24}; r_{33} = \frac{12i_1}{h_1^2} + \frac{12i_1}{h_1^2} + \frac{3i_3}{h_2^2} = \frac{7EI}{18}; R_{3P} = 0.$$

Проверка найденных коэффициентов и свободных членов может быть осуществлена способом перемножения эпюр. Для выполнения универсальной проверки построим суммарную единичную эпюру $\overline{M}_S$, представляющую сумму единичных эпюр (рис. 8.9), и перемножим ее саму на себя:

$$r_{SS} = \sum \int \frac{\bar{M}_S^2}{EI} dx = \frac{85EI}{EI}.$$

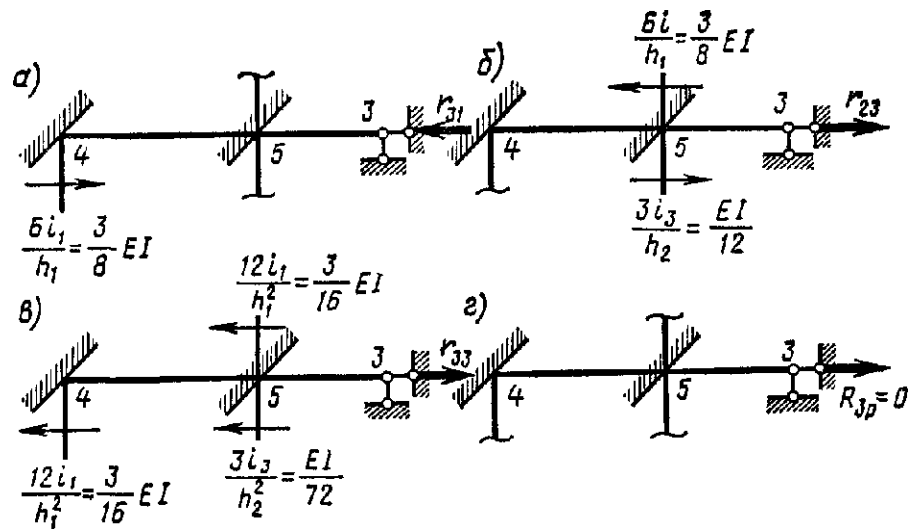


Рисунок 8.8

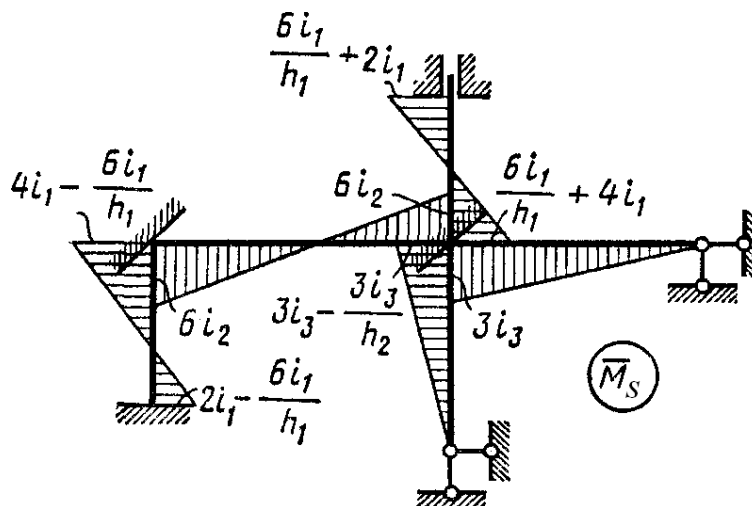


Рисунок 8.9

То обстоятельство, что сумма всех найденных коэффициентов равна тому же числу:

$$r_{SS} = r_{11} + r_{12} + r_{13} + r_{21} + r_{22} + r_{23} + r_{31} + r_{32} + r_{33} = \frac{3EI}{2} + \frac{EI}{4} - \frac{3EI}{8} + \frac{EI}{4} + \frac{5EI}{2} + \frac{7EI}{24} - \frac{3EI}{8} + \frac{7EI}{24} + \frac{7EI}{18} = \frac{85EI}{16},$$

подтверждает правильность их вычисления.

Для проверки свободных членов необходимо построить эпюру изгибающих моментов M'_p от внешней нагрузки в любой статически определимой системе, образованной из заданной рамы, и перемножить ее с эпюрой $\overline{M}_S$:

$$R_{SP} = -\sum \int \frac{M'_p \overline{M}_S}{EI} dx.$$

Для двух из возможных эпюр M'_p , представленных на рис. 8.10, этот интеграл обращается в ноль, что также подтверждает правильность вычислений, так как в нашем случае

$$\sum R_{iP} = R_{1P} + R_{2P} + R_{3P} = 0.$$

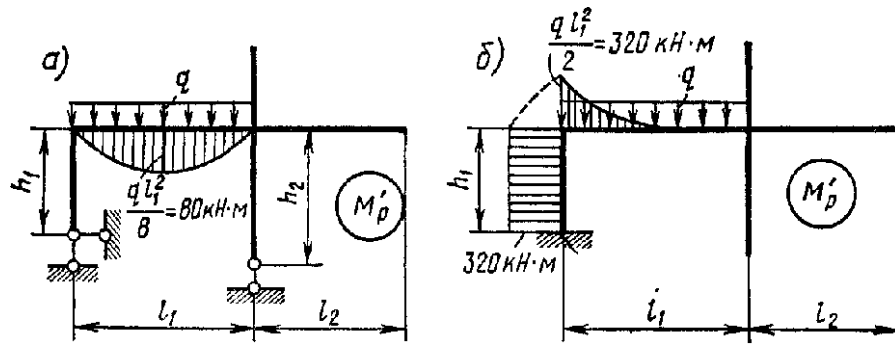


Рисунок 8.10

Найденные значения коэффициентов и свободных членов позволяют переписать систему канонических уравнений в виде:

$$\begin{aligned} \frac{3EI}{2}Z_1 + \frac{EI}{4}Z_2 - \frac{3EI}{8}Z_3 - \frac{160}{3} &= 0, \\ \frac{EI}{4}Z_1 + \frac{5EI}{2}Z_2 + \frac{7EI}{24}Z_3 + \frac{160}{3} &= 0, \\ -\frac{3EI}{8}Z_1 + \frac{7EI}{24}Z_2 + \frac{7EI}{18}Z_3 + 0 &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы дает:

$$Z_1 = \frac{65,4}{EI}, Z_2 = -\frac{38,4}{EI}, Z_3 = \frac{91,8}{EI}.$$

Единичные эпюры (см. рис. 8.5а–г) могут быть теперь исправлены, т. е. умножены на найденные значения неизвестных. При этом знак у второй

эпюры изменится на обратный, так как Z_2 имеет отрицательный знак. Окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 8.11) построим согласно выражению

$$M = \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \bar{M}_3 Z_3 + M_P.$$

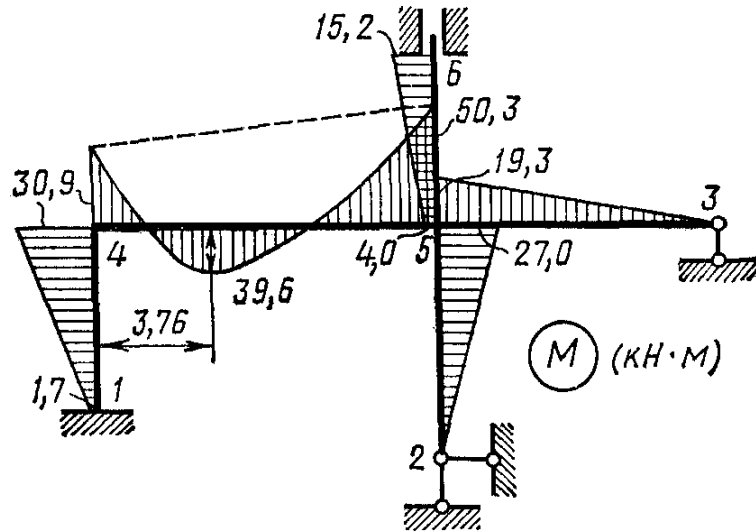


Рисунок 8.11

Достаточной проверкой ее правильности являются статические проверки, приведенные на рис. 8.12. При желании сделать дополнительную кинематическую проверку подобно тому, как это делается в методе сил, необходимо построить единичные эпюры в основной системе метода сил и перемножить их или суммарную единичную эпюру $\bar{M}'_S$ (например, рис. 8.13) с окончательной эпюрой изгибающих моментов. При правильном расчете результат такого перемножения должен быть равен нулю. Эта проверка будет служить контролем правильности принятых для расчета единичных эпюр и грузовой эпюры изгибающих моментов.

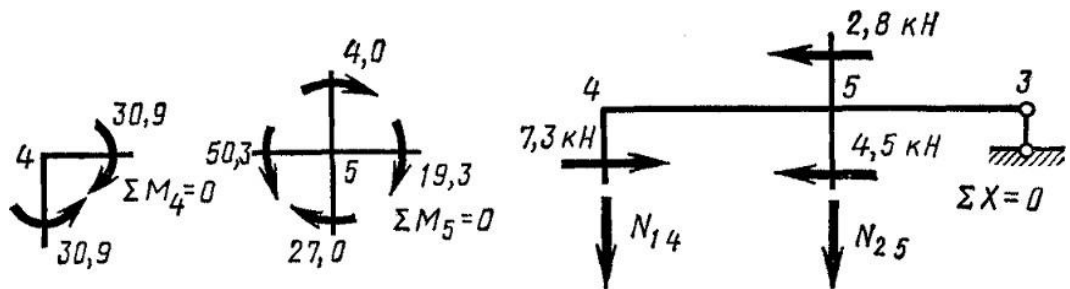


Рисунок 8.12

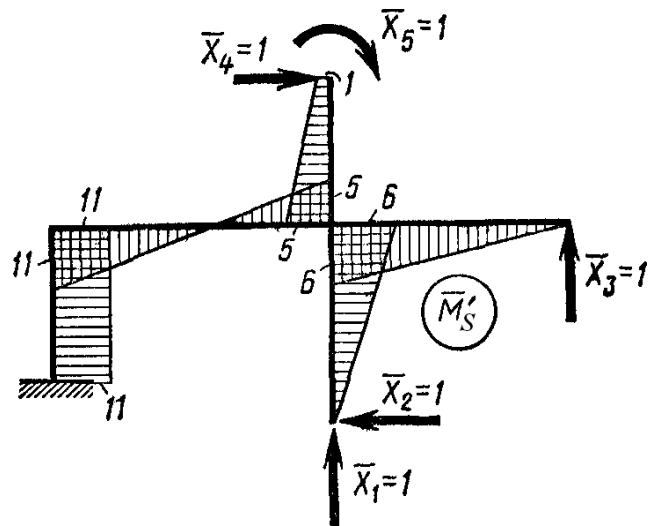


Рисунок 8.13

Задания

Для статически неопределимой рамы (рис. 8.14) требуется:

1. Определить число кинематической неопределимости заданной системы и выбрать основную систему метода перемещений.
2. Построить необходимые единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов в основной системе.
3. Записать систему канонических уравнений метода перемещений и вычислить ее коэффициенты из условия равновесия частей рамы.
4. Решить полученную систему канонических уравнений.
5. Построить окончательные эпюры изгибающих моментов M_{OK} , поперечных Q и продольных сил N .
6. Проверить полученные результаты, осуществив деформационную и статическую проверки.

Исходные данные взять из таблицы

Схема (рис.8.14)	l_1 , м	l_2 , м	h_1 , м	h_2 , м	P_1 , кН	P_2 , кН	q_1 ,кН/м	q_2 ,кН/м	$\frac{J_P}{J_C}$
1	2,0	4,0	3,0	8,0	3,0	-	0,1	-	2,00
2	7,0	4,0	4,0	10,0	-	3,0	-	0,5	1,20

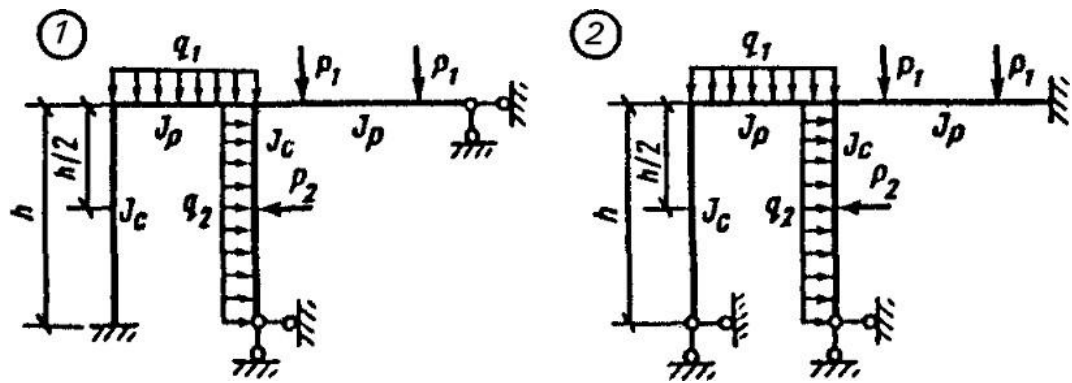


Рисунок 8.14

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение степени кинематической неопределимости заданной системы.
2. Раскройте суть основной и эквивалентной системы по методу перемещений.
3. Поясните физический смысл коэффициентов канонических уравнений метода перемещений при неизвестных.
4. Поясните физический смысл свободных членов в канонических уравнениях метода перемещений.
5. Поясните порядок построения единичных и грузовых эпюр метода перемещений.
6. Сформулируйте свойство симметрии коэффициентов канонических уравнений при неизвестных.
7. Раскройте физический смысл канонических уравнений метода перемещений.
8. Поясните статический способ определения коэффициентов и свободных членов системы канонических уравнений.
9. Поясните порядок проверки правильности вычисления коэффициентов при неизвестных канонических уравнений метода перемещений.
10. Поясните порядок проверки правильности вычисления свободных членов в канонических уравнениях метода перемещений.

11. Раскройте порядок построения окончательной эпюры изгибающих моментов.

12. Поясните порядок проверки правильности построения окончательной эпюры изгибающих моментов.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 10

МАТРИЧНАЯ ФОРМА РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Теоретическая часть

Для n раз кинематически неопределимой системы канонические уравнения имеют вид системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

[illegible]

Представим эти же уравнения в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & & \dots & r_{2n} \\ & r_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{1P} \\ R_{2P} \\ \vdots \\ R_{nP} \end{bmatrix} = 0$$

ИЛИ

$$\vec{R}_r \cdot \vec{Z} + \vec{R}_p = 0, \quad (9.1)$$

где R_r – матрица реакций во введенных дополнительных связях в основной системе от единичных перемещений этих связей; матрица R_r – квадратная, симметричная порядка n ; R_p – вектор реактивных усилий в

дополнительных связях от заданной внешней нагрузки; $\vec{Z}$ – вектор неизвестных перемещений.

Для вычисления элементов матриц R_r и $\vec{R}_P$ можно воспользоваться известными выражениями реакций в связи от единичных перемещений связей и внешней нагрузки:

$$r_{ik} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k}{EJ} dx; \quad R_{iP} = \sum \int \frac{M'_P \bar{M}_i}{EJ} dx,$$

где $\bar{M}_i, \bar{M}_k$ – изгибающие моменты в основной системе метода перемещений от единичных перемещений дополнительных связей $Z_i = Z_k = 1$; M'_P – изгибающий момент от внешней нагрузки в любой основной статически определимой системе, которую можно получить из заданной статически неопределимой, удалив «лишние» связи.

В силу того что элементы r_{ik}, R_{iP} выражаются так же, как и δ_{ik}, Δ_{iP} , то и матрицы R_r и $\vec{R}_P$ можно вычислять аналогично матрицам $A_\delta, \vec{\Delta}_P$:

$$R_r = L_m^T \cdot B \cdot L_m; \quad (9.2)$$

$$R_P = -L_m^T \cdot B \cdot L_{mp}^o \vec{P}, \quad (9.3)$$

где L_m — матрица влияния изгибающих моментов в основной системе метода перемещений от единичных перемещений дополнительных связей $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = 1$. Матрица содержит n столбцов и m строк. Число столбцов n равно числу единичных перемещений, число строк m – числу сечений, в которых вычисляются внутренние усилия; L_m^T – матрица, транспонированная по отношению к L_m ; B – матрица податливости отдельных, не связанных элементов; L_{mp}^o – матрица влияния изгибающих моментов в любой статически определимой системе от внешних сил, равных единице: $\vec{P} = \vec{P}_2 = \dots = \vec{P}_i = 1$; $\vec{P}$ – вектор внешних сил.

Решив матричное уравнение (9.1), найдем вектор неизвестных

$$\vec{Z} = -R_r^{-1} \cdot R = (L_m^T \cdot B \cdot L_m)^{-1} L_m^T \cdot B \cdot L_{mp}^o \cdot \vec{P}. \quad (9.4)$$

Окончательные значения изгибающих моментов в пронумерованных сечениях заданной системы находят по уравнению

$$\vec{M} = L_{mp} \cdot \vec{P} + L_m \cdot \vec{Z}, \quad (9.5)$$

где L_{mp} – матрица влияния изгибающих моментов в основной системе метода перемещений от внешних сил, равных единице.

Пример

Рассчитать раму, показанную на рис. 9.1а.

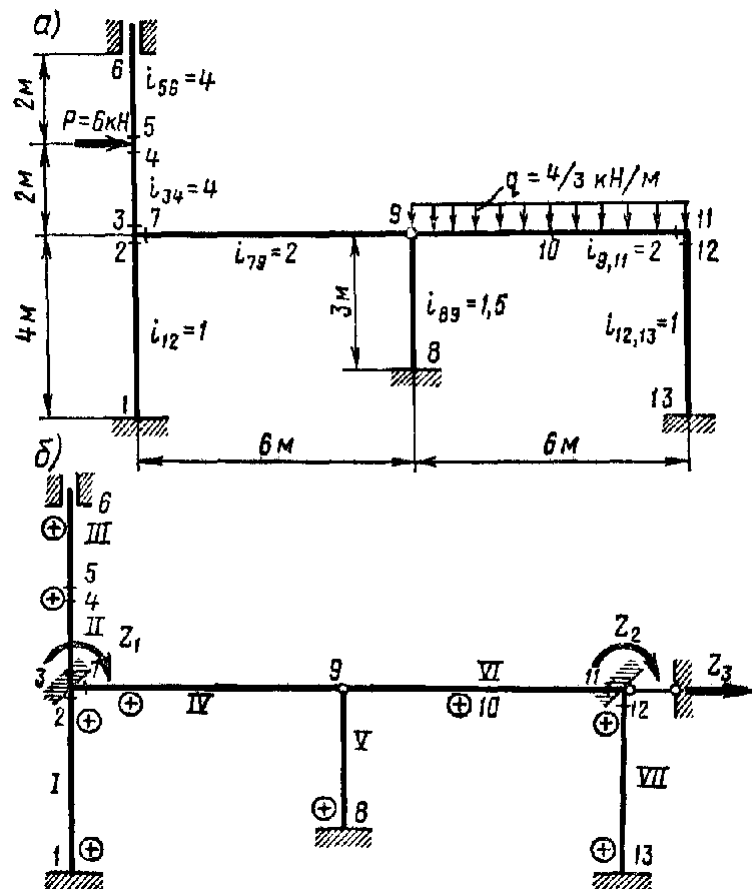


Рисунок 9.1

Решение

Степень кинематической неопределимости рамы

$$n = n_y + n_n = 2 + 1 = 3.$$

Заданная рама имеет два жестких внеопорных узла и одно линейное горизонтальное перемещение узлов. Выбираем основную систему. Для этого в два жестких узла вводим защемления и добавляем один горизонтальный опорный стержень. Основная система показана на рис. 9.1б. Разбиваем

заданную раму на семь участков, руководствуясь тем, чтобы в пределах каждого участка все эпюры $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3$ и M_P не имели разрывов и точек перелома. Принимаем рабочее правило знаков для изгибающих моментов. Например, на участке I (стержень 1–2) изгибающие моменты, вызывающие растяжение в правых волокнах, приняты положительными, что отмечено знаком «+», и т. д. (рис. 9.1б).

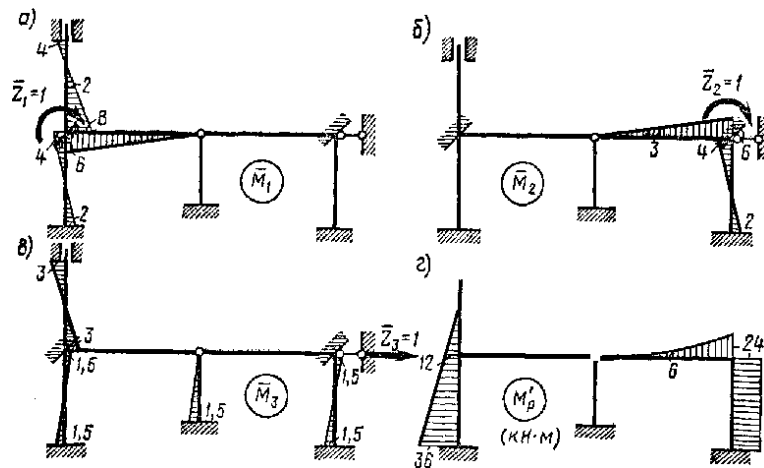


Рисунок 9.2

Для составления матрицы L_m строим эпюры изгибающих моментов $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3$ в основной системе от перемещений $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = 1$, пользуясь табличными данными для однопролетных статически неопределимых балок (рис. 9.2а–в).

Для составления вектора M'_P вначале определяем степень статической неопределимости заданной рамы. Она равна 6.

Выбираем статически определимую основную систему (метода сил), отбросив две связи в сечении 6 и удалив шарнир в сечении 9.

В полученной статически определимой системе от заданной нагрузки строим эпюру M'_P (рис. 9.2г).

Ординаты $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3$ и M'_P с учетом принятого правила знаков вносим в L_m и M_P :

$$L_m = \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \\ (10) \\ (11) \\ (12) \\ (13) \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1,5 \\ -4 & 0 & 1,5 \\ -8 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & -1,5 \\ 0 & -2 & 1,5 \end{bmatrix}; L_{mp}^o \cdot \vec{P} = \vec{M}'_P = \begin{bmatrix} -36 \\ -12 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ -24 \\ -24 \\ -24 \end{bmatrix}.$$

Матрица B податливости отдельных несвязанных элементов будет представлять квазидиагональную матрицу, состоящую из семи матриц b_i .

Матрицы податливости каждого элемента (участка) вычисляют обычным способом:

$$b_1 = \frac{1}{6i_{12}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad b_2 = \frac{1}{6i_{34}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix};$$

$$b_3 = \frac{1}{6i_{56}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{bmatrix}; \quad b_4 = \frac{1}{6i_{79}} [2] = \frac{1}{12} [2];$$

$$b_5 = \frac{1}{6i_{89}} [2] = \frac{\frac{4}{3}}{6 \cdot 1,5 \cdot \frac{4}{3}} [2] = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix};$$

$$b_6 = \frac{1}{6i_{9,11}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad b_7 = \frac{1}{6i_{12,13}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем матрицу реакций по формуле $R_r = L_m^T \cdot B \cdot L_m$:

$$R_r = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 & -2 & -2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & 4 & -2 \\ -1,5 & 1,5 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & -1,5 & 1,5 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & & & & & & & & \\ & 2 & 4 & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & 0,5 & & & & & & & & \\ & & & 0,5 & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & 0,5 & & & & & & \\ & & & & & 0,5 & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & 2 & & & & & \\ & & & & & & & & 8 & & & & \\ & & & & & & & & \frac{8}{3} & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & \\ & & & & & & & & & 0 & 4 & 0 & \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & & & & & & & & 4 & 2 \\ & & & & & & & & & & & & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1,5 \\ -4 & 0 & 1,5 \\ -8 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & -1,5 \\ 0 & -2 & 1,5 \end{bmatrix} \\
 & R_r = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 1,5 \\ 0 & 10 & -1,5 \\ 1,5 & -1,5 & 3,5 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Вычисляем вектор свободных членов по формуле

$$-\vec{R}_P = L_m^T \cdot B \times L_{mp} \cdot \vec{P}:$$

$$\begin{aligned}
 -\vec{R}_P &= \begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 & -2 & -2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & 4 & -2 \\ -1,5 & 1,5 & -3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & -1,5 & 1,5 \end{bmatrix} \times \\
 & \times \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 2 & & & & & & & & & & & \\ & 2 & 4 & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & 0,5 & & & & & & & & \\ & & & 0,5 & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & 0,5 & & & & & & \\ & & & & & 0,5 & 1 & & & & & & \\ & & & & & & & 2 & & & & & \\ & & & & & & & & 8 & & & & \\ & & & & & & & & \frac{8}{3} & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & \\ & & & & & & & & & 0 & 4 & 0 & \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & & & & & & & & 4 & 2 \\ & & & & & & & & & & & & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -36 \\ -12 \\ 12 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ -24 \\ -24 \\ -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Находим обратную матрицу R_r^{-1} :

$$R_r^{-1} = \frac{1}{567} \begin{bmatrix} 32,75 & -2,25 & -15 \\ -2,25 & 60,75 & 27 \\ -15 & 27 & 180 \end{bmatrix}.$$

Отыскиваем вектор неизвестных перемещений $\vec{Z}$:

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} = R_r^{-1} \cdot \vec{R}_P = \frac{1}{567} \begin{bmatrix} 32,75 & -2,25 & -15 \\ -2,25 & 60,75 & 27 \\ -15 & 27 & 180 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1177 \\ -0,5119 \\ 0,5873 \end{bmatrix}.$$

По эпюре изгибающих моментов, построенной в основной кинематически определяемой системе M_P (рис. 9.3), вычисляем матрицу $L_{mp} \cdot \vec{P}$.

Окончательные значения изгибающих моментов в заданной раме будут:

$$\vec{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1,5 \\ -4 & 0 & 1,5 \\ -8 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & -1,5 \\ 0 & -2 & 1,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,1177 \\ -0,5119 \\ 0,5873 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,645 \\ 0,410 \\ -2,704 \\ -0,235 \\ -0,235 \\ 2,233 \\ 0,706 \\ 0,881 \\ 0 \\ 1,536 \\ 3,072 \\ -2,928 \\ 1,905 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,645 \\ 0,410 \\ 0,296 \\ -3,235 \\ -3,235 \\ 5,233 \\ 0,706 \\ 0,881 \\ 0 \\ 4,536 \\ -2,928 \\ -2,928 \\ 1,905 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \\ (8) \\ (9) \\ (10) \\ (11) \\ (12) \\ (13) \end{matrix}.$$

По полученным данным строим эпюру изгибающих моментов в заданной системе (рис. 9.4).

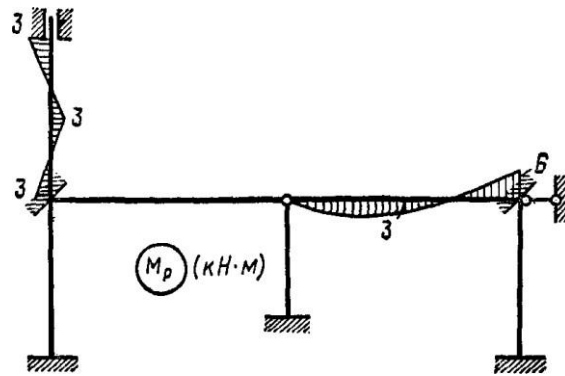


Рисунок 9.3

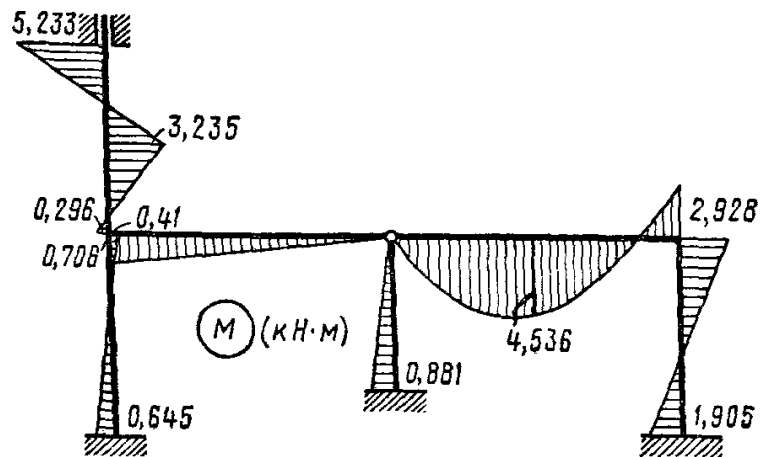


Рисунок 9.4

Задания

Рассчитать раму, показанную на рис. 9.5

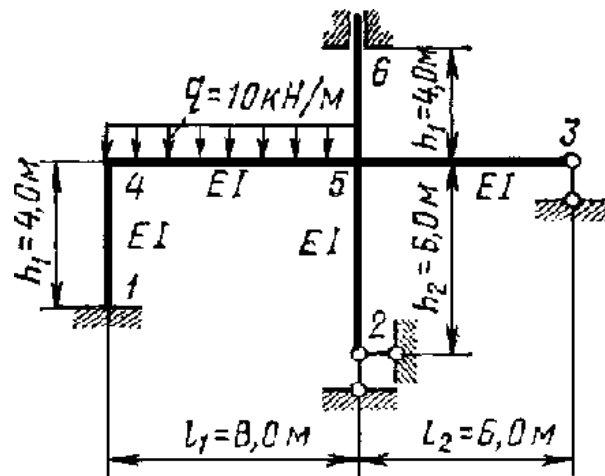


Рисунок 9.5

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 11

УСТОЙЧИВОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

Теоретическая часть

Устойчивостью называется способность сооружений сохранять первоначальное положение или первоначальную форму равновесия в деформированном состоянии при действии внешних сил.

В соответствии с этим надо различать *устойчивость сооружения* и *устойчивость форм равновесия* в нагруженном состоянии.

Положение сооружения или форма равновесия в нагруженном состоянии считается *устойчивым*, если при всяком, сколь угодно малом дополнительном возмущении сооружение отклоняется от исследуемого положения или равновесного состояния, однако после исчезновения дополнительного возмущения возвращается в исходное положение.

Положение сооружения или форма равновесия в нагруженном состоянии считается *неустойчивым*, если при каком-либо сколь угодно малом отклонении от исследуемого равновесного состояния и после исчезновения сооружения не проявляет тенденции к уменьшению получаемых отклонений, а иногда отклоняется еще далее – до нового положения или новой формы равновесного состояния.

Переход сооружения из одного равновесного состояния к другому равновесному состоянию называется *потерей устойчивости системы*. Состояние перехода называется *критическим состоянием*. При этом величины внешних сил, действующие на сооружение, называются *критическими*.

В строительной механике различают два вида потери устойчивости сооружения: 1) *потерю устойчивости положения* и 2) *потерю устойчивости, вызванной сменой формы равновесного состояния*.

Пусть рассматриваемая рама n раз кинематически неопределима. Канонические уравнения метода перемещений для нового, т.е. критического состояния, как и в классическом методе перемещений, записывается так

$$r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \dots + r_{1n}Z_n + R_{1P} = 0;$$

$$r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \dots + r_{2n}Z_n + R_{2P} = 0;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \dots + r_{nn}Z_n + R_{nP} = 0.$$

$$y(0) = y(l) = 0; \quad M_x(0) = M(l) = 0.$$

При расчете на устойчивость система преобразуется. Так как мы рассматриваем только случай действия узловых нагрузок, то во введенных связях они никакой реакции не вызывают. То есть можно принять $R_{1P} = R_{2P} = \dots = R_{nP} = 0$.

Единичные реакции r_{ik} , как и при расчете обычных статических задач, определяются из условия равновесия узлов или отдельных частей ОС при заданных единичных смещениях. Как показали решения задачи, значения моментов и поперечных сил являются функцией параметра внешних продольных сил ν . Следовательно, и единичные реактивные усилия во введенных связях r_{ik} являются функциями от параметра ν и обозначаются $r_{ik}(\nu)$. Тогда:

$$r_{11}(\nu)Z_1 + r_{12}(\nu)Z_2 + \dots + r_{1n}(\nu)Z_n = 0;$$

$$r_{21}(\nu)Z_1 + r_{22}(\nu)Z_2 + \dots + r_{2n}(\nu)Z_n = 0;$$

$$\dots\dots\dots$$

$$r_{n1}(\nu)Z_1 + r_{n2}(\nu)Z_2 + \dots + r_{nn}(\nu)Z_n = 0.$$

Так как в новом равновесном (критическом) состоянии составные элементы искривляются, следовательно, все неизвестные Z_i заведомо не могут быть равными нулю. Поэтому определитель однородной системы алгебраических уравнений, составленный из коэффициентов при неизвестных, должен быть равен нулю

$$\begin{vmatrix} r_{11}(v) & r_{12}(v) & r_{1n}(v) \\ r_{21}(v) & r_{22}(v) & r_{2n}(v) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ r_{m1}(v) & r_{m2}(v) & r_{mn}(v) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель, и приравняв его нулю, получим трансцендентное уравнение относительно параметра критической нагрузки v . Решив это уравнение относительно v и по минимальному значению корня $v = v_{min}$, определяют критическое значение внешних сил.

Все предлагаемые рамы целесообразно решать методом перемещений. Так как внешние нагрузки действуют вдоль стоек, то, очевидно, грузовых эпюр в основной системе не будет, и свободные члены канонических уравнений обратятся в нуль.

Построение единичных эпюр для сжатых приложенными силами стоек следует проводить по специальным таблицам, для ригелей - по обычным таблицам метода перемещений. Эпюры моментов и необходимых функций для метода перемещений можно взять из таблицы 12.1. Эти же сведения можно взять из справочников и учебников.

Коэффициенты канонических уравнений будут включать в себя специальные функции $\varphi_n(v_i)$ и $\varphi_m(v_k)$ от параметров

$$v_i = \sqrt{\frac{P_i h_i^2}{EJ_i}}; \quad v_k = \sqrt{\frac{P_k h_k^2}{EJ_k}},$$

где P_i и P_k – силы, действующие вдоль стоек h_1 и h_2 ;

EJ_i и EJ_k – жесткости стоек.

По заданию силы P_i и P_k связаны между собой коэффициентом α , поэтому и параметры v_i и v_k окажутся связанными соотношениями

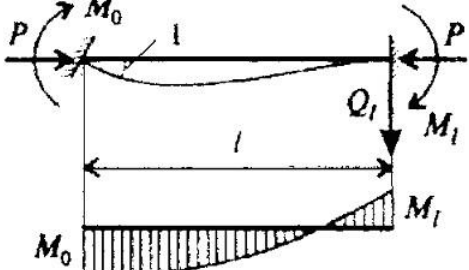
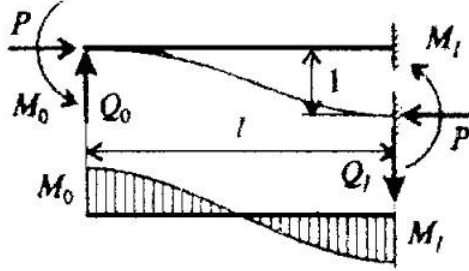
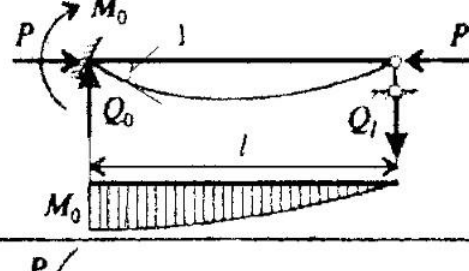
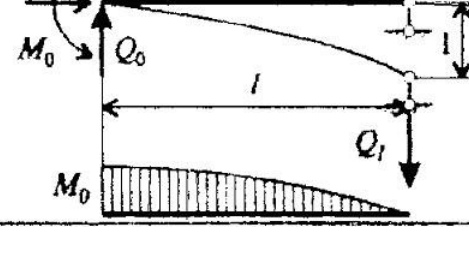
$$\frac{v_i}{v_k} = h_i \sqrt{\frac{P_i}{EJ_i}} : h_k \sqrt{\frac{P_k}{EJ_k}} = \frac{h_1}{h_2} \sqrt{\alpha \frac{EJ_k}{EJ_i}}.$$

Для нахождения $P_{кр}$ составляется и приравнивается к нулю определитель из коэффициентов канонических уравнений

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r_{11} \cdot r_{22} - r_{22} \cdot r_{12} = 0.$$

Это уравнение решается относительно ν подбором. Затем из таблицы 12.2 выписывают значения специальных функций $\varphi_n(\nu_i)$ и $\varphi_m(\nu_k)$, входящих в уравнение устойчивости. Если данные значения φ не удовлетворяют уравнению, то нужно задаться другим значением ν_k

Таблица 12.1

Вид смещения и эпюра M	M_0	M_l	$Q_0 = Q_l$
	$4 i \varphi_1(\nu)$	$2 i \varphi_2(\nu)$	$-\frac{6 i}{l} \varphi_3(\nu)$
	$\frac{6 i}{l} \varphi_3(\nu)$	$\frac{6 i}{l} \varphi_3(\nu)$	$\frac{12 i}{l^2} \varphi_4(\nu)$
	$3 i \varphi_7(\nu)$	0	$-\frac{3 i}{l} \varphi_7(\nu)$
	$\frac{3 i}{l} \varphi_7(\nu)$	0	$\frac{3 i}{l^3} \varphi_8(\nu)$

и проделать все вычисления вторично и т. д. Когда будут найдены величины ν_i и ν_k , удовлетворяющие уравнению устойчивости, то по формулам

$$P_{i_{кр}} = \frac{v_i^2 EJ_i}{h_i^2} \text{ и } P_{k_{кр}} = \frac{v_k^2 EJ_k}{h_k^2}$$

определяются значения критических сил.

Таблица 12.2

v	$\varphi_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$\varphi_3(v)$	$\varphi_4(v)$	$\varphi_7(v)$	$\varphi_8(v)$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,2	0,9986	1,0009	0,9992	0,9959	0,9973	0,9840
0,4	0,9945	1,0026	0,9973	0,9840	0,9893	0,9350
0,6	0,9881	1,0061	0,9941	0,9641	0,9758	0,8558
0,8	0,9787	1,0111	0,9895	0,9362	0,9565	0,7432
1,0	0,9662	1,0172	0,9832	0,8999	0,9313	0,5980
1,2	0,9511	1,0251	0,9756	0,8566	0,8998	0,4198
1,4	0,9329	1,0348	0,9669	0,8025	0,8613	0,2080
1,6	0,9116	1,0463	0,9567	0,7431	0,8152	-0,0381
1,8	0,8871	1,0600	0,9449	0,6749	0,7606	-0,3194
2,0	0,8590	1,0760	0,9313	0,5980	0,6916	-0,6372
2,2	0,8273	1,0946	0,9164	0,5131	0,6202	-0,9932
2,4	0,7915	1,1164	0,8998	0,4198	0,5304	-1,3896
2,6	0,7513	1,1417	0,8814	0,3181	0,4234	-1,8299
2,8	0,7064	1,1712	0,8613	0,2080	0,2944	-2,3189
3,0	0,6560	1,2057	0,8393	0,0983	0,1361	-2,8639
3,2	0,5997	1,2463	0,8153	-0,0380	-0,0635	-3,4769
3,4	0,5366	1,2940	0,7891	-0,1742	-0,3248	-4,1781
3,6	0,4656	1,3508	0,7609	-0,3191	-0,6862	-5,0062
3,8	0,3850	1,4191	0,7297	-0,4736	-1,2303	-7,0436
4,0	0,2933	1,5018	0,6961	-0,6372	-2,1717	-7,5060
4,2	0,1877	1,6036	0,6597	-0,8103	-4,3156	-10,1956
4,4	0,0648	1,7310	0,6202	-0,9931	-15,3271	-21,7815
4,6	-0,0807	1,8933	0,5772	-1,1861	14,6693	7,6160

Продолжение таблицы 12.2

4,8	-0,2572	2,1056	0,5305	-1,3896	5,4023	-2,2777
5,0	-0,4772	2,3924	0,4793	-1,6040	3,3615	-4,9719
5,2	-0,7630	2,7961	0,4234	-1,8299	2,3986	-6,6147
5,4	-1,1563	3,3989	0,3621	-2,0679	1,7884	-7,9317
5,6	-1,7481	4,3794	0,2944	-2,3189	1,3266	-9,1268
5,8	-2,7777	6,2140	0,2195	-2,5838	0,9302	-10,2831
6,0	-5,1589	10,7270	0,1361	-2,8639	0,5551	-11,4449
6,2	-18,5940	37,3080	0,0424	-3,1609	0,1700	-12,6433

Пример 12.1

Для заданной рамы, изображенной на рис. 12.1, предполагая, что $EJ_P = 2EJ_C$; $l = 5\text{ м}$; $EJ_C = 5000\text{ кН} \cdot \text{м}^2$, требуется:

1. Показать возможные формы потери устойчивости, рассматриваемой рамы.
2. Определить критические значения силы для случаев нагружения заданной системы, когда а) $P_1 = P, P_2 = 0$; б) $P_1 = 0, P_2 = P$; в) $P_1 = P, P_2 = P$.

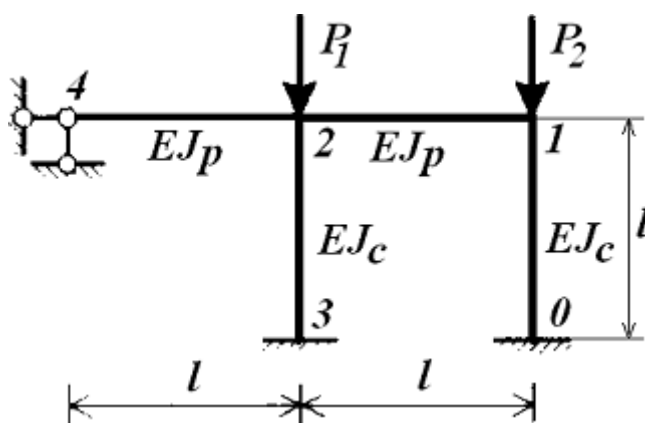


Рисунок 12.1

Решение

1. Показать возможные формы потери устойчивости рассматриваемой рамы.

Рассматриваемая система является дважды кинематически неопределимой. Возможные формы потери устойчивости системы определяются угловыми перемещениями узлов 1 и 2. Следовательно, для установления искривленной формы рамы необходимо определить углы поворотов Z_1 и Z_2 двух смежных узлов 1 и 2.

В критическом состоянии возможные формы потери устойчивости изображены на рис.12.2.

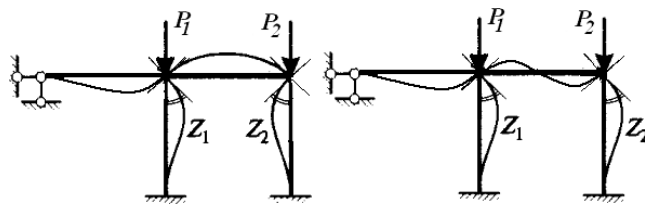


Рисунок 12.2

2. Определить критические значения силы P_1 и P_2 для случаев:

$$a) P_1 = P, P_2 = 0; б) P_1 = 0, P_2 = P; в) P_1 = P, P_2 = P.$$

Приступая к решению поставленной задачи, в качестве базовой принимаем стойку 0—1 с изгибной жесткостью $EJ_C = 5000 \text{ кН} \cdot \text{м}^2 = 5000 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$ и длиной $l = 5 \text{ м}$.

Вычисляем погонные изгибные жесткости элементов рассматриваемой рамы:

$$i_{01} = i_{23} = \frac{EJ_C}{l} = \frac{5000}{5} = 1000 \text{ кН} \cdot \text{м}; i_{12} = i_{24} = \frac{EJ_P}{l} = \frac{10000}{5} = 2000 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Введем обозначения: $i_{01} = i = 1000 \text{ кН} \cdot \text{м}; i_{23} = i; i_{12} = i_{24} = 2i$.

Случай а) $P_1 = P, P_2 = 0$.

Последовательно задавая перемещения $Z_1 = 1$ и $Z_2 = 1$ и пользуясь табл. 12.1, строим единичные эпюры $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$, выражая ординаты эпюры моментов $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ через величину i (рис. 12.3а,б).

В соответствии с методом сечений вырезаются узлы 1 и 2 (рис. 12.3в) и из условий их равновесия определяются выражения реактивных моментов

$$r_{11}(v) - 8i - 4i\varphi_1(v) - 6i = 0, r_{11}(v) = 4i\varphi_1(v) + 14i = 2i[2\varphi_1(v) + 7];$$

$$r_{21}(v) - 4i = 0, r_{21}(v) = 4i = r_{12}; \quad r_{22}(v) - 4i - 8i = 0, r_{22}(v) = 12i.$$

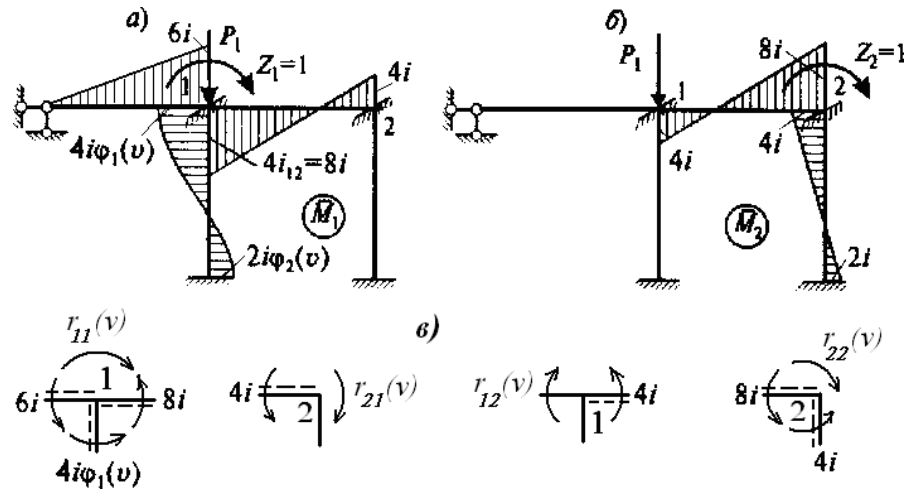


Рисунок 12.3

Уравнение устойчивости принимает вид:

$$\begin{bmatrix} r_{11}(v) & r_{12}(v) \\ r_{21}(v) & r_{22}(v) \end{bmatrix} = 0 \quad \text{откуда} \quad r_{11}(v)r_{22}(v) - r_{12}(v)^2 = 0$$

$$\text{или} \quad 2i[2\varphi_1(v) + 7] \cdot 12i - (4i)^2 = 0, \quad 24i^2[2\varphi_1(v) + 7] - 16i^2 = 0.$$

Из решения последнего уравнения получим:

$$\varphi_1(v) = -\frac{152i^2}{48i^2} = -3,1667.$$

Применяя принцип линейного интерполирования, с помощью табл.12.2 вычисляем значение параметра

$$v_{кр} = 5,8 + \frac{[\varphi_1(v) - \varphi_1(5,8)][6,0 - 5,8]}{\varphi_1(6,0) - \varphi_1(5,8)} = 5,8 + \frac{(-3,1667 + 2,7777)(6,0 - 5,8)}{-5,1589 + 2,7777} = 5,833.$$

Критическая сила $P_{l,кр}$ будет

$$P_{l,кр} = \frac{v_{кр}^2 EJ}{l^2} = \frac{5,833^2 \cdot 5000}{5^2} = 6804 \text{ кН}.$$

Случай б) $P_1 = 0, P_2 = P$.

Строим эпюры моментов $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$ (рис. 12.4).

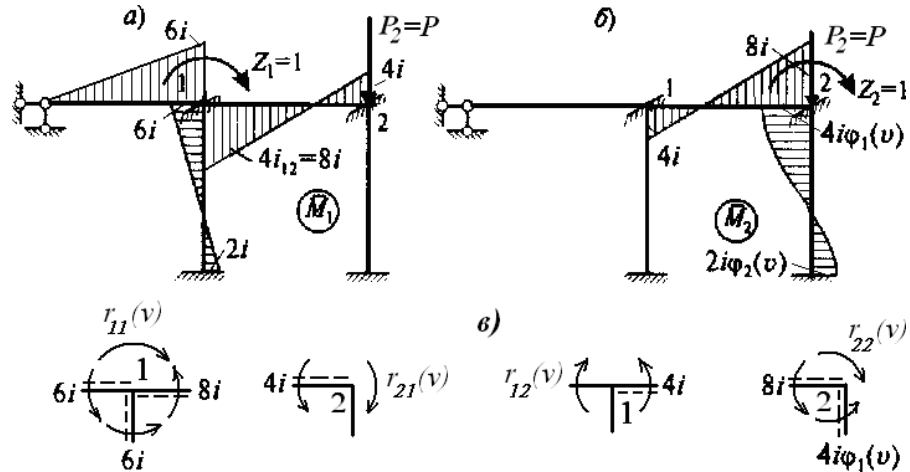


Рисунок 12.4

Из условий равновесия вырезанных узлов определяются выражения реактивных моментов

$$r_{11}(v) = 18i; \quad r_{21}(v) = 4i = r_{12}; \quad r_{22}(v) = 4i[\varphi_1(v) + 2].$$

Из уравнений устойчивости получим

$$72i^2[\varphi_1(v) + 2] - 16i^2 = 0 \quad \text{откуда} \quad \varphi_1(v) = -1,7778.$$

Применяя принцип линейного интерполирования, с помощью табл. 12.2 вычисляем значение параметра

$$v_{кр} = 5,6 + \frac{[\varphi_1(v) - \varphi_1(5,6)][5,8 - 5,6]}{\varphi_1(5,8) - \varphi_1(5,6)} = 5,6 + \frac{(-1,7778 + 1,7471)(5,8 - 5,6)}{-2,7777 + 1,7481} = 5,606.$$

Критическая сила равна

$$P_{2,кр} = \frac{v_{кр}^2 EJ}{l^2} = \frac{5,606^2 \cdot 5000}{5^2} = 6285 \text{ кН}.$$

Случай в) $P_1 = P, P_2 = P$.

Эпюры моментов M_1 и M_2 в данном случае принимают вид (рис. 12.5).

В соответствии с методом сечений вырезаются узлы 1 и 2 (рис. 12.5в) и из условий их равновесия определяются выражения реактивных моментов:

$$r_{11}(v) = 2i[2\varphi_1(v) + 7]; \quad r_{21}(v) = 4i = r_{12}; \quad r_{22}(v) = 4i[\varphi_1(v) + 2].$$

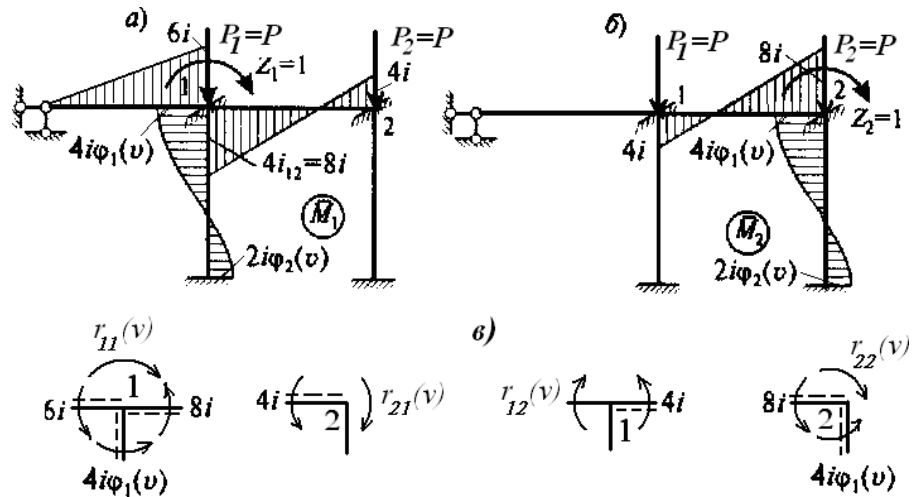


Рисунок 12.5

Подставляя выражения в уравнения устойчивости, получим

$$16\varphi_1^2(v) + 88\varphi_1(v) + 96 = 0.$$

Из решения последнего уравнения получим

$$\varphi_{1(1,2)}(v) = \frac{-88 \pm \sqrt{88^2 - 4 \cdot 16 \cdot 96}}{2 \cdot 16} = -2,75 \pm 1,25 \text{ или}$$

$$\varphi_{1(1)}(v) = -1,5 \quad \varphi_{1(2)}(v) = -4.$$

Применяя принцип линейного интерполирования, по заданным значениям $\varphi_1(v)$ (табл. 12.2) определяем минимальное значение параметра критической нагрузки:

$$v_{кр}^{min} = 5,4 + \frac{[\varphi_1(v) - \varphi_1(5,4)][5,6 - 5,4]}{\varphi_1(5,6) - \varphi_1(5,4)} = 5,4 + \frac{(-1,5 + 1,1563)(5,6 - 5,4)}{-1,7481 + 1,1563} = 5,516.$$

Следовательно,

$$P_{1,кр} = P_{2,кр} = \frac{(v_{кр}^{min})^2 EJ}{l^2} = \frac{5,516^2 \cdot 5000}{5^2} = 6085 \text{ кН}.$$

Обобщая результаты расчетов величин критических сил в зависимости от вида нагружения рамы, получили:

$$a) P_{1,кр} = 6804 \text{ кН}, P_2 = 0; \quad б) P_1 = 0, P_{2,кр} = 6285 \text{ кН}; \quad в) P_{1,кр} = P_{2,кр} = 6085 \text{ кН}.$$

Заметим, что как это показывают результаты расчетов, наступление критического состояния системы зависит как от свойств заданной системы, так и от схемы нагружения.

Пример 12.2

Для заданной рамы, изображенной на рис. 12.6а, предполагая, что $EJ_P = 2EJ_C$; $l = 5\text{ м}$; $EJ_C = 5000\text{ кН} \cdot \text{м}^2$, требуется:

1. Показать возможные формы потери устойчивости, рассматриваемой рамы.
2. Определить критические значения силы для случаев нагружения заданной системы.

Решение

Приступая к решению поставленной задачи, в качестве базовой принимаем стойку 0—1 с изгибной жесткостью $EJ_C = 5000\text{ кН} \cdot \text{м}^2$ и длиной $l = 5\text{ м}$.

Вычисляем погонные изгибные жесткости элементов рассматриваемой рамы:

$$i_{01} = i_{23} = \frac{EJ_C}{l} = \frac{5000}{5} = 1000\text{ кН} \cdot \text{м}; i_{12} = i_{24} = \frac{EJ_P}{l} = \frac{10000}{5} = 2000\text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Введем обозначения: $i_{01} = i = 1000\text{ кН} \cdot \text{м}$; $i_{23} = i$; $i_{12} = i_{24} = 2i$.

Основная система и единичные эпюры изображены соответственно на рис. 12.6б—г.

Вычислим аргументы поправочных множителей:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{l_1}{l_2} \sqrt{\frac{0,8P \cdot EJ_C}{P \cdot EJ_C}} = \frac{5}{5} \sqrt{\frac{0,8P \cdot 5000}{P \cdot 5000}} = \sqrt{0,8},$$

если принять $\alpha = \sqrt{0,8}$, то $v_1 = \alpha v_2$.

В соответствии с методом сечений вырезаются узлы 1 и 2 (рис. 12.д) и из условий их равновесия определяются выражения реактивных моментов:

$$r_{11}(\alpha v_2) - 8i - 4i\varphi_1(\alpha v_2) - 6i = 0, r_{11}(v_1) = 4i\varphi_1(\alpha v_2) + 14i;$$

$$r_{21}(v_2) - 4i = 0, r_{21}(v_2) = 4i; \quad r_{12}(\alpha v_2) - 4i = 0, r_{12}(\alpha v_2) = 4i;$$

$$r_{22}(v_2) - 8i - 4i\varphi_1(v_2) = 0, r_{22}(v_2) = 4i\varphi_1(v_2) + 8i.$$

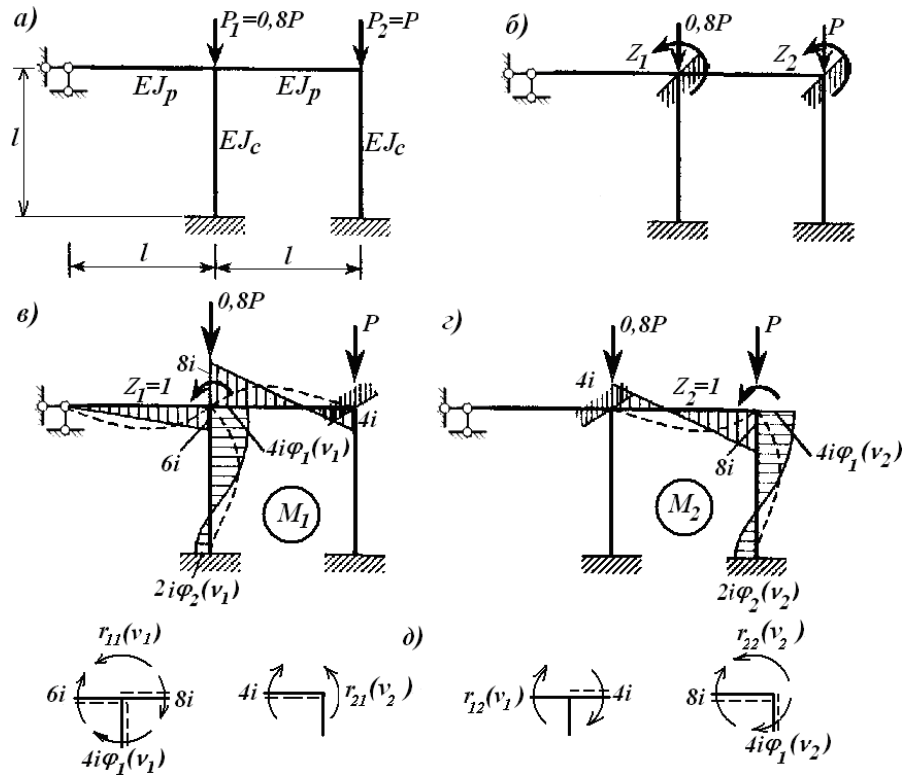


Рисунок 12.6

Уравнение устойчивости принимает вид:

$$\begin{bmatrix} r_{11}(\alpha v_2) & r_{12}(\alpha v_2) \\ r_{21}(v_2) & r_{22}(v_2) \end{bmatrix} = 0 \quad \text{откуда} \quad r_{11}(\alpha v_2)r_{22}(v_2) - r_{12}(\alpha v_2)r_{21}(v_2) = 0$$

$$\text{или} \quad [4i\varphi_1(\alpha v_2) + 14i][4i\varphi_1(v_2) + 8i] - (4i)^2 = 0,$$

$$\varphi_1(\alpha v_2)\varphi_1(v_2) + 2\varphi_1(\alpha v_2) + 3,5\varphi_1(v_2) + 6 = 0.$$

Уравнение решаем подбором v_1 и v_2 .

Примем по таблице 12.2 $v_2 = 5,6$ и $\varphi_1(v_2) = -1,7481$, тогда $v_1 = \alpha v_2 = \sqrt{0,8} \cdot v_2 = 5,0$ и $\varphi_1 = -0,4772$. Подставим значения в уравнение $(-1,7481)(-0,4772) + 3,5(-1,7481) + 2(-0,4772) + 6 = -6,2385 + 6 \neq 0$.

Уравнение устойчивости не удовлетворяется. Подкорректируем значение v_2 . Обозначим $\varphi_1(v_2) = x$ и подставим в уравнение устойчивости

$$(-0,4772)x + 3,5x + 2(-0,4772) = -6. \quad X = -1,6692 = \varphi_1(v_2).$$

По значению $\varphi_1(v_2) = -1,6692$ методом интерполирования определяем уточненное значение v_2 .

$$v_2 = 5,4 + \frac{(-1,6692 + 1,1563)(5,6 - 5,4)}{-1,7481 + 1,1563} = 5,57.$$

Следовательно,

$$P_{1кр} = \frac{(v_{1кр})^2 EJ_C}{l^2} = \frac{5^2 \cdot 5000}{5^2} = 5000 \text{ кН}.$$

$$P_{2кр} = \frac{(v_{2кр})^2 EJ_C}{l^2} = \frac{5,57^2 \cdot 5000}{5^2} = 6205 \text{ кН}.$$

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение свойства заданной системы, называемого устойчивостью.
2. Дайте определение положения системы, называемого устойчивым.
3. Дайте определение понятия об устойчивой форме равновесного состояния системы.
4. Дайте определение о критическом состоянии системы.
5. Какие значения внешних сил называются критическими?
6. Что означает потеря системой устойчивости по I и по II роду соответственно?
7. Перечислите все три критерия по определению критических значений внешних сил.
8. Сформулируйте основные задачи теории устойчивости.
9. Сформулируйте задачу Эйлера.
10. Укажите основные закономерности, существующие между различными формами потери устойчивости стержневых систем.
11. Перечислите основные факторы, оказывающие наиболее существенное влияние на величину критических значений внешних сил.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 12

ДИНАМИКА СООРУЖЕНИЙ

Теоретическая часть

Рассмотрим систему в виде невесомой балки с сосредоточенной массой m , горизонтальным перемещением которой пренебрегаем (рис. 13.1). При таких предпосылках единственная материальная точка, т.е. сосредоточенная масса величиной m , может совершать перемещения только в вертикальном направлении, следовательно, система имеет одну степень свободы.

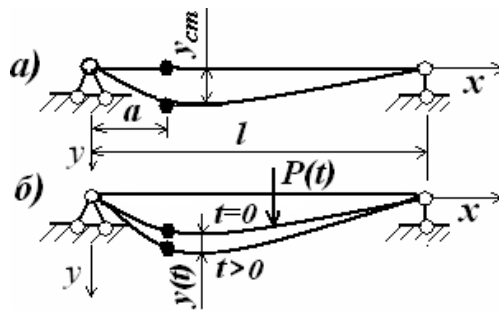


Рисунок 13.1

Будем исследовать движение системы из ее исходного положения равновесия $t=0$ (рис. 13.1a), считая перемещение вниз положительным.

Пусть на балку действует динамическая сила величиной:

$$P(t) = P_0 \sin \theta t,$$

где θ — частота вынуждающей силы. Обозначая дополнительное перемещение массы m от динамических нагрузок через $y(t)$, вводим следующие начальные условия:

$$y(0) = y_0; \quad \dot{y}(0) = \dot{y}_0.$$

В процессе движения на массу действует сила инерции $F''(t) = -m\ddot{y}(t)$ и сила сопротивления по Фойхту $R(t) = -\alpha \dot{y}(t)$. Сила сопротивления движению возникает от различных внешних и внутренних причин: сопротивление движению внешней среды, трение в местах соединения

элементов и опорных частей, внутреннее неупругое сопротивление материалов конструкций и т.д.

Вводим следующие обозначения:

δ_{11} – вертикальное перемещение балки в точке размещения массы m от действия вертикальной единичной силы $P=1$, приложенной в той же точке;

$\Delta_{1P}(t)$ – вертикальное перемещение балки в точке закрепления массы m от динамической силы $P(t)$, при этом $\Delta_{1P}(t) = \delta_{1P}P(t)$; δ_{1P} – единичное перемещение массы от $P=1$, приложенной в точке приложения внешней силы $P(t)$ при ее отсутствии.

Применяя принцип независимости действия сил, очевидно, что в любой момент времени полное перемещение сосредоточенной массы m примет значение

$$y(t) = [F''(t) + R(t)]\delta_{11} + P(t)\delta_{1P},$$

откуда определяется дифференциальное уравнение движения рассматриваемой системы (подставим значения $F''(t)$ и $P(t)$).

$$y(t) = -m\ddot{y}(t)\delta_{11} - \alpha\dot{y}(t)\delta_{11} + P(t)\delta_{1P},$$

$$m\ddot{y}(t)\delta_{11} + \alpha\dot{y}(t)\delta_{11} + y(t) = P(t)\delta_{1P}.$$

Разделим последнее уравнение на $m\delta_{11}$ и получим:

$$\ddot{y}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{y}(t) + \frac{1}{m\delta_{11}}y(t) = \frac{\delta_{1P}}{m\delta_{11}}P(t).$$

Введем обозначения:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}; \quad n = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{m} \text{ и получим}$$

$$\ddot{y}(t) + 2n\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{\delta_{1P}}{m\delta_{11}}P(t). \quad (1)$$

Это дифференциальное уравнение движения системы с учетом затухания. Здесь ω_0 – круговая частота собственных колебаний системы; n – коэффициент затухания.

Общее решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$y = y_1(t) + y_2(t).$$

Общее решение однородного уравнения

$$y_1(t) = y_A e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi).$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$y_A = \sqrt{y_0^2 + \frac{y_0^2}{\omega_0^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_0^2}{\omega_0 y_0}; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - n^2},$$

где ω – круговая частота собственных колебаний с учетом затухания.

Частное решение второго неоднородного уравнения при действии на систему $P(t) = P_0 \sin \theta t$,

$$y_2(t) = y_a \sin(\omega t - \varphi_1).$$

$$y = y_A e^{-nt} \sin(\omega t + \varphi) + y_a \sin(\omega t - \varphi_1). \quad (2)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$y_a = \delta_{1P} P_0 \mu; \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2n\theta}{\omega^2 - \theta^2}; \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2\theta^2}{\omega^4}}}.$$

Величина μ называется *динамическим коэффициентом* и характеризует эффект от динамической нагрузки по отношению к аналогичной статической нагрузке величиной $P(t) = P_0 = \text{const}$.

Динамический коэффициент существенно зависит от отношения θ/ω . При $\theta/\omega \rightarrow 1$ динамический коэффициент стремится принять максимальное значение и колебания системы при $\theta/\omega = 1$ называются *резонансными*, а амплитуда колебаний принимает опасное значение:

$$y_a = \delta_{1P} P_0 \mu = \delta_{1P} P_0 \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4n^2\theta^2}{\omega^4}}}.$$

В большинстве случаев практических расчетов при малых значениях коэффициента затухания n динамический коэффициент определяют как

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2}}.$$

Пример 13.1

Для плоской рамы (рис. 13.1), изготовленной из двутавра и нагруженной неуравновешенным двигателем, полный вес которого Q , требуется:

а) определить собственную основную круговую частоту ω симметричной формы вертикальных колебаний системы, приняв ее как имеющую одну степень свободы (собственный вес системы не учитывается);

б) принять θ – круговую частоту возмущающей центробежной силы двигателя;

в) вычислить динамический коэффициент μ ;

г) определить с учетом динамического воздействия нагрузки максимальные напряжения $\pm\sigma$ в сечении с наибольшим абсолютным значением изгибающего момента;

д) определить с учетом динамического воздействия прогиб $f_{\max}$ в точке приложения нагрузки G .

Вертикальная составляющая неуравновешенной центробежной силы $P\sin\theta t$; частота вибрации двигателя $\theta = 0,5\omega$, т. е. составляет половину собственной частоты колебания рамы.

$$l = 6 \text{ м}; h = 11 \text{ м}; Q = 13 \text{ кН}; P = 2,3 \text{ кН}; [\sigma]_{\text{ст}} = 190 \text{ МПа}, E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

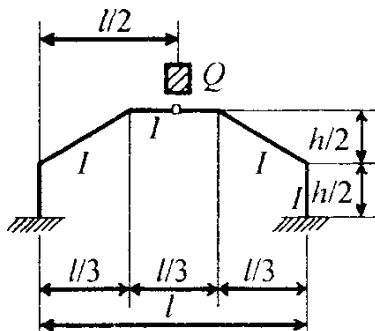


Рисунок 13.1

Решение

Заданная система два раза статически неопределима. Основная система метода сил представлена на рис. 13.2а. Эпюры моментов в основной системе от действия сил $X_1=1$, $X_2=1$ показаны на рис. 13.2б, а от силы Q на рис. 13.2в.

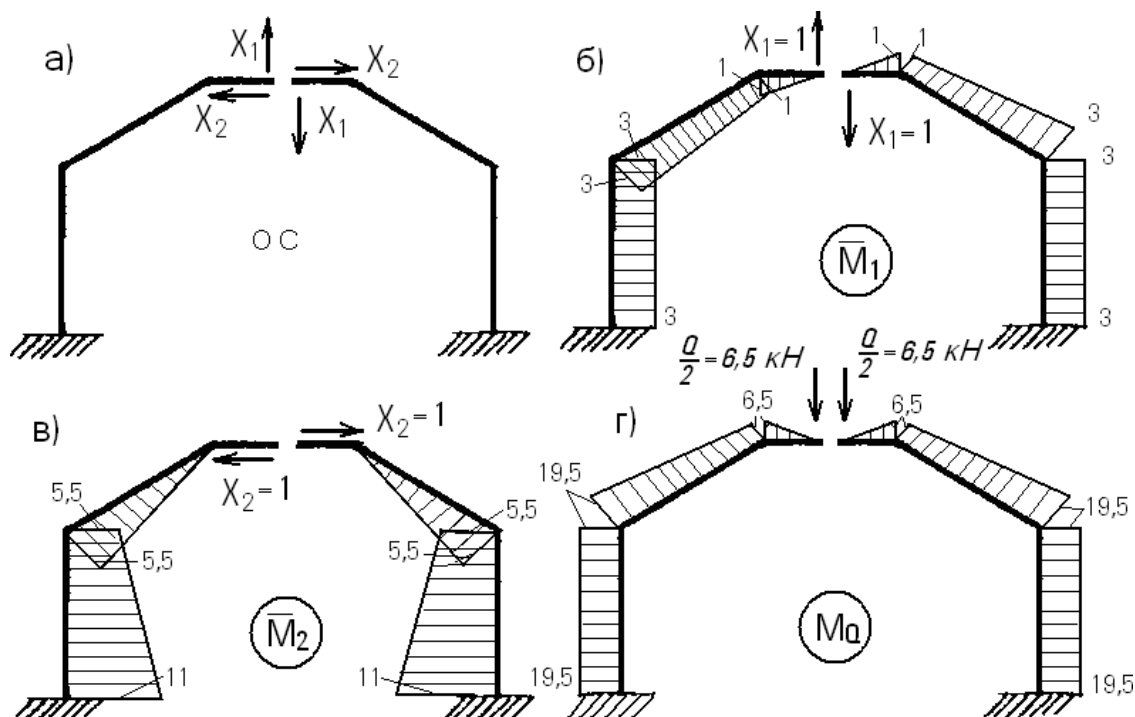


Рисунок 13.2

Канонические уравнения метода сил в данном случае записываются в виде

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1Q} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2Q} = 0.$$

Коэффициенты канонических уравнений находим по формуле Мора.

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M} \cdot \bar{M}}{EJ} dx,$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot 5,5 \cdot 3 + \frac{5,85}{6} (2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3) \right] = \frac{150,34}{EJ}.$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EJ} dx = 0.$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EJ} dx,$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{EJ} \left(\frac{1}{2} \cdot 5,85 \cdot 5,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,5 \right) + \frac{2 \cdot 5,5}{6EJ} \left(2 \cdot 5,5^2 + 2 \cdot 11^2 + 2 \cdot 5,5 \cdot 11 \right) = \frac{482,4875}{EJ}.$$

$$\Delta_{1Q} = \sum \int \frac{M_1 \cdot M_Q}{EJ} dx = 0,$$

$$\Delta_{2Q} = \sum \int \frac{M_2 M_Q}{EJ} dx,$$

$$\Delta_{2Q} = - \frac{2}{EJ} \left[\frac{5,85}{6} (2 \cdot 5,5 \cdot 19,5 + 5,5 \cdot 6,5) + \frac{5,5 + 11}{2} 5,5 \cdot 19,5 \right] = - \frac{2257,6}{EJ}.$$

Полученные значения коэффициентов подставим в канонические уравнения и получим

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 4,7 \text{ кН}.$$

Построим исправленную эпюру $\bar{M}_2 \cdot X_2$ и окончательную эпюру изгибающего момента для рамы (рис. 13.3).

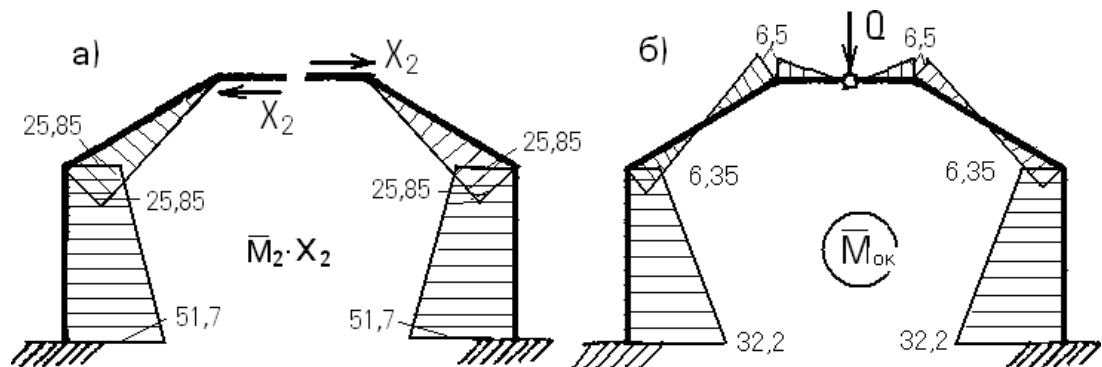


Рисунок 13.3

Пренебрегая собственным весом конструкции по сравнению с весом двигателя Q , основную круговую частоту ω вертикальных симметричной формы собственных колебаний определяют, как для системы с одной степенью свободы, по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{11}' Q}},$$

где δ'_{11} – перемещение от единичной силы, приложенной в точке приложения сосредоточенной массы, по направлению этой силы.

Построим эпюру $\bar{M}'_1$ с целью определения δ'_{11} (рис. 13.4а).

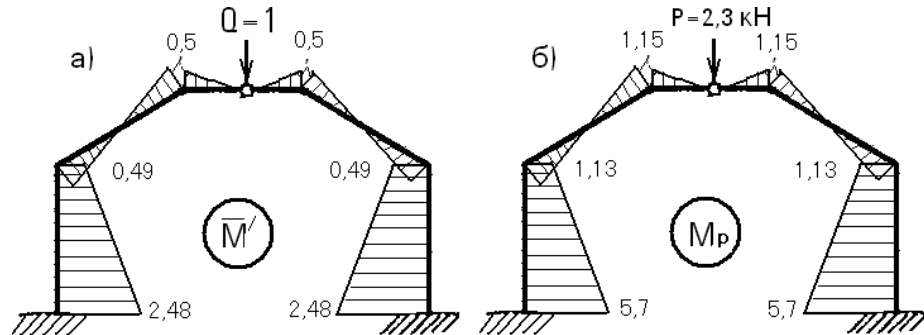


Рисунок 13.4

Для дальнейших расчетов необходимо подобрать профиль двутавра рамы. Для этого по эпюре $M_{ок}$ определяем наибольший момент в сечении над стойкой $M_{Q\max} = 32,2 \text{ кН}\cdot\text{м}$. Тогда, определив момент сопротивления сечения при изгибе, можно подобрать профиль двутавра.

$$W_x = \frac{M_{Q\max}}{[\sigma]_{cm}} = \frac{32200}{190 \cdot 10^6} = 169,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 169,5 \text{ см}^3.$$

Этому значению момента сопротивления сечения соответствует двутавр № 20, с $J=1840 \text{ см}^4$ и $W_x=184 \text{ см}^3$. Изгибная жесткость выбранного профиля $EJ=3864000 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$. Единичное перемещение δ'_{11} определяется по формуле Мора в результате перемножения эпюры $\bar{M}'$ саму на себя:

$$\delta'_{11} = \frac{2}{EJ} \left[\frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{5,85}{6} (2 \cdot 0,49 \cdot 0,49 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 - 0,49 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 0,49) + \frac{5,5}{6} (2 \cdot 0,49 \cdot 0,49 + 2 \cdot 2,48 \cdot 2,48 + 2 \cdot 0,49 \cdot 2,48) \right] = \frac{29}{EJ}.$$

Частота собственных колебаний системы

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta'_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{\delta'_{11}Q}} = \sqrt{\frac{g \cdot EJ}{29Q}} = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 3864000}{29 \cdot 13000}} = 10 \text{ с}^{-1}.$$

Круговая частота возмущающей центробежной силы двигателя:

$$\theta = 0,5\omega = 0,5 \cdot 10 = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Динамический коэффициент вычисляется по формуле:

$$\mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{5}{10}\right)^2} = 1,333.$$

4.3. Определение максимального напряжения в сечении с наибольшим абсолютным значением изгибающего момента

В дополнение к эпюре $M_{ок}$ необходимо также построить эпюру M_P от нагрузки неуравновешенной силы P двигателя. Эта эпюра может быть построена при помощи эпюры M^T путем умножения всех ее ординат на величину, равную P . Эпюра M_P представлена на рис. 13.3б.

Далее на эпюрах $M_{ок}$ и M_P следует отыскать сечение, в котором значения изгибающих моментов достигают наибольших (по абсолютной величине) значений, и определить $M_{Q\max}$ и $M_{P\max}$. Нормальное напряжение изгиба с учетом динамического воздействия неуравновешенной силы $P\sin\theta t$ двигателя находится по формуле:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max}^{\text{дин}} &= \frac{M_{Q\max}}{W_x} + \frac{M_{P\max}\mu}{W_x} = \frac{32200}{184 \cdot 10^{-6}} + \frac{5700 \cdot 1,33}{184 \cdot 10^{-6}} = \\ &= 175 \cdot 10^6 + 41,2 \cdot 10^6 = 216,2 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

Заметим, что для повышения точности решения следует к полученному значению $\sigma_{\max}^{\text{дин}}$ добавить напряжение, вызванное нормальными силами. Для этого надо дополнительно построить эпюры N_Q и N_P .

Добавочное напряжение находится по формуле:

$$\sigma_{\text{дон}} = \frac{N_Q}{F} + \frac{N_P\mu}{F},$$

где F – площадь сечения стержня.

В нашем случае нормальные (продольные) силы отсутствуют.

В нашем расчете $\sigma_{\max}^{\text{дин}} = 216,2 \text{ МПа}$ превышают значение $[\sigma]_{\text{ст}} =$

190 МПа , поэтому размер двутавра надо уточнить:

$$W'_x = \frac{M_{Q \max} + M_{P \max} \cdot \mu}{[\sigma]_{\text{ст}}} = \frac{32200 + 5700 \cdot 1,33}{190 \cdot 10^6} = 209,4 \text{ см}^3.$$

Этому значению момента сопротивления сечения соответствует двутавр № 22, с $J = 2550 \text{ см}^4$ и $W_x = 232 \text{ см}^3$. $EJ = 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 2550 \cdot 10^{-8} = 5355000 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$.

$$f_{\max} = \delta'_{11} Q + \delta'_{11} P \mu = \frac{29}{5355} 13 + \frac{29}{5355} 5,7 \cdot 1,33 = 0,111 \text{ м}.$$

Вопросы к практическому занятию

1. Поясните основные задачи динамической теории инженерных конструкций.
2. Какие виды динамических нагрузок вы можете перечислить?
3. Раскройте сущность метода сосредоточенных масс.
4. Какие колебания называются свободными или собственными?
5. Какие колебания называются вынужденными?
6. Дайте определение понятий круговой и фазовой частоты соответственно.
7. Дайте определение периода собственных и вынужденных колебаний соответственно.
8. Что называется числом собственных колебаний заданной системы?
9. Перечислите основные подходы, применяемые при решении задач динамики.
10. Сформулируйте понятия сила инерции и сила сопротивления по Фойгту.
11. Дайте определение понятия система с конечным числом степеней свободы.
12. Дайте определение понятия система с распределенными параметрами.
13. Сформулируйте понятие собственные формы колебания.
14. Сформулируйте понятие собственные частоты колебаний.
15. Дайте определение коэффициента динамичности для системы с одной степенью свободы.
16. Какое явление называется резонансным?

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
Строительная механика

Направление подготовки 08.03.01 Строительство
Направленность (профиль) Промышленное и гражданское строительство

Методические указания предназначены для студентов специальностей 08.03.01 Строительство, выполняющих в соответствии с рабочим учебным планом и программой дисциплины расчетно-графические работы (РГР) по дисциплине «Строительная механика».

В них приведены формулировка заданий и его объем, исходные данные к РГР, выполняемым студентами очной и очно-заочной форм обучения. Изложены общие требования к оформлению работы, даны рекомендации по решению задач и по организации работы над расчетно-графической работой, примерный календарный план её выполнения, порядок защиты и ответственность студентов за его выполнение.

Могут быть использованы при выполнении типовых расчетов, а также при проведении практических и самостоятельных аудиторных занятий студентов.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАНИЯ И ЕГО ОБЪЁМ

Расчетно-графическая работа (РГР) выполняется в V семестре и состоит из 4 заданий:

1. Расчет трехшарнирной арки или трехшарнирной рамы.
2. Расчет сложной статически определимой плоской фермы.
3. Определение перемещений в статически определимой раме (балке).
4. Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил.

Каждое задание выполняется по индивидуальному варианту, приводятся примеры выполнения и решения задачи.

Набор вариантов индивидуальных заданий, входящих в расчетно-графическую работу, студент определяет по своему шифру, который устанавливается по последним трем цифрам зачетной книжки студента.

1. Расчет трехшарнирной арки или трехшарнирной рамы

Задание. Для сплошной трехшарнирной арки или рамы (рис. 1.1) требуется:

- а) определить аналитически моменты, поперечные и нормальные силы в сечениях k_1 и k_2 от действия постоянной нагрузки;
- б) построить линии влияния M , Q и N для сечения k_2 , и по ним найти значения M , Q и N от той же постоянной нагрузки.

Исходные данные, согласно шифру, выбираются по таблице 1.1.

Методические указания

Схему арки надо вычертить, определив по уравнению её оси достаточное число точек (не менее пяти, включая замковый шарнир C) и проведя через них плавную кривую. На схему надо нанести все заданные размеры и нагрузку. Для точек k_1 и k_2 надо вычислить координаты и, кроме того, значения синусов и косинусов углов наклона касательных.

Таблица 1.1

Первая цифра шифра	$l_1, \text{м}$	α	β_1	Вторая цифра шифра	β_2	$q_1, \text{кН/м}$	$q_2, \text{кН/м}$	Последняя цифра шифра	Вариант схемы	Очертание оси	$\frac{f}{l}$	$P, \text{кН}$
1	26	0,20	0,20	1	0,65	0	4	1	<i>a</i>	Парабола	0,34	4
2	34	0,50	0,30	2	0,58	4	0	2	<i>a</i>	Окружность	0,35	3
3	18	0,30	0,22	3	0,70	0	5	3	<i>б</i>	Рама	0,39	5
4	28	0,60	0,25	4	0,72	5	0	4	<i>в</i>	Рама	0,40	6
5	20	0,40	0,15	5	0,80	0	6	5	<i>г</i>	Рама	0,32	7
6	32	0,70	0,40	6	0,60	6	0	6	<i>a</i>	Парабола	0,36	8
7	22	0,80	0,35	7	0,66	7	0	7	<i>б</i>	Рама	0,38	2
8	36	0,25	0,12	8	0,75	0	7	8	<i>a</i>	Окружность	0,33	5
9	24	0,35	0,33	9	0,85	8	0	9	<i>в</i>	Рама	0,30	8
0	30	0,45	0,45	0	0,55	0	8	0	<i>г</i>	Рама	0,31	4

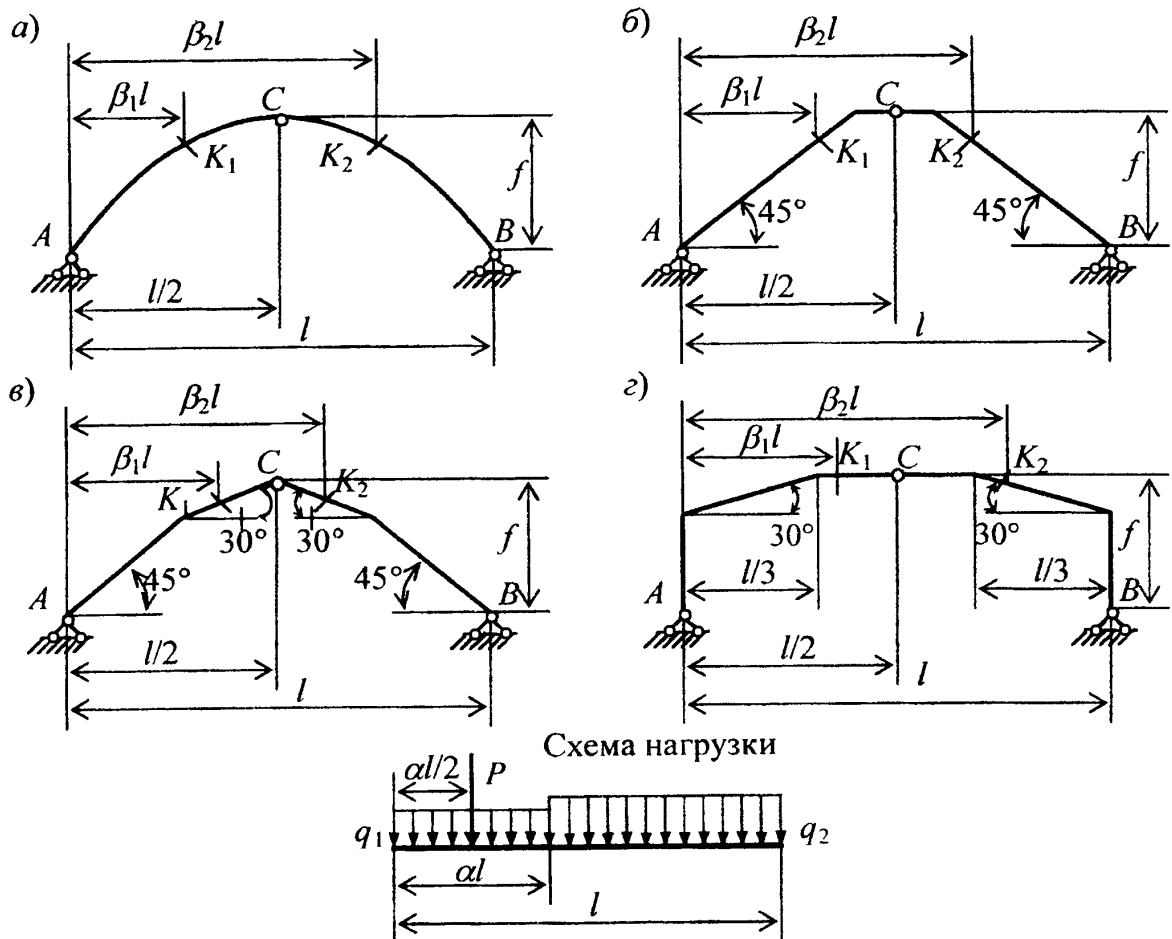


Рисунок 1.1

Ординаты точек оси и углы наклона касательных определяются по следующим уравнениям:

а) при очертании оси по параболе

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x); \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx};$$

б) при очертании оси по окружности

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} - R + f,$$

где $R = \frac{f}{2} + \frac{l^2}{8f}$; $\sin \varphi = \frac{l - 2x}{2R}$; $\cos \varphi = \frac{y + R - f}{R}$.

Для трехшарнирных рам ординаты и необходимые углы наклона определяются непосредственно из чертежа.

Вычисление значений опорных реакций, моментов, поперечных и продольных сил в заданных точках надо иллюстрировать необходимыми формулами.

Пример решения

1.1. *Определение вертикальных опорных реакций и распора* (рис. 1.2)

Предварительно необходимо начертить строго в масштабе расчетную схему оси арки, ординаты которой должны быть вычислены по уравнению

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x).$$

В нашем случае

при $x_k = 3\text{м}$, $y = \frac{4 \cdot 6}{24^2} 3(24 - 3) = 2,625\text{м}$;

при $x = 6\text{м}$, $y = \frac{4 \cdot 6}{24^2} 6(24 - 6) = 4,5\text{м}$;

при $x = 9\text{м}$, $y_k = \frac{4 \cdot 6}{24^2} 9(24 - 9) = 5,625\text{м}$; и т. д.

Результаты расчета сведем в таблицу 1.2.

Таблица 1.2

x	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y	0	2,625	4,5	5,625	6,0	5,625	4,5	2,625	0

Вертикальные опорные реакции V_A, V_B и горизонтальные опорные реакции (распор) H_A и H_B вычисляем из уравнений равновесия системы. В данном примере имеем:

$$\sum M_A = 0, V_B \cdot 24 - q_2 \cdot 12 \cdot 18 - P_2 \cdot 18 + q_1 \cdot 12 \cdot 6 - P_1 \cdot 6 = 0,$$

$$V_B = \frac{1,5 \cdot 12 \cdot 18 + 4 \cdot 18 + 1 \cdot 12 \cdot 6 + 6 \cdot 6}{24} = 21 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0, -V_A \cdot 24 + q_1 \cdot 12 \cdot 18 + P_1 \cdot 18 - q_2 \cdot 12 \cdot 6 + P_2 \cdot 6 = 0,$$

$$V_A = \frac{1 \cdot 12 \cdot 18 + 6 \cdot 18 + 1,5 \cdot 12 \cdot 6 + 4 \cdot 6}{24} = 19 \text{ кН};$$

$$\sum M_C^{лев} = 0, -V_A \cdot 12 + H_A \cdot 6 + q_1 \cdot 12 \cdot 6 + P_1 \cdot 6 = 0, \quad H_A = \frac{19 \cdot 12 - 1 \cdot 12 \cdot 6 - 6 \cdot 6}{6} = 20$$

кН;

$$\sum X = 0, \quad H_A - H_B = 0, \quad H_A = H_B = 20 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составим следующие неиспользованные уравнения равновесия системы:

$$\sum Y = 0, \quad V_A - q_1 \cdot 12 - P_1 - q_2 \cdot 12 - P_2 + V_B = 0, \quad 19 - 1 \cdot 12 - 6 - 1,5 \cdot 12 - 4 + 21 = 0;$$

$$\sum M_C^{прав} = 0, \quad V_B \cdot 12 - H_B \cdot 6 - q_2 \cdot 12 \cdot 6 - P_2 \cdot 6 = 0,$$

$$21 \cdot 12 - 20 \cdot 6 - 1,5 \cdot 12 \cdot 6 - 4 \cdot 6 = 0.$$

Уравнения тождественно удовлетворяются. Следовательно, вертикальные опорные реакции и распор определены верно.

1.2. Определение внутренних усилий M_k , Q_k и N_k , возникающих в сечении $k-k$ от нагрузок q и P аналитически (рис. 1.2)

Внутренние усилия M_k, Q_k и N_k , возникающие в заданном сечении от нагрузок q и P , вычисляем по формулам:

$$M_k = M_k^{\bar{0}} - H_A y_k, \tag{1}$$

$$Q_k = Q_k^{\bar{0}} \cos \varphi_k - H_A \sin \varphi_k, \tag{2}$$

$$N_k = -Q_k^{\bar{0}} \sin \varphi_k - H_A \cos \varphi_k, \tag{3}$$

где $M_k^{\bar{0}}, Q_k^{\bar{0}}$ – изгибающий момент и поперечная сила в сечении $k-k$ двухопорной балки с пролетом, равным пролету трехшарнирной арки и загруженной той же нагрузкой; y_k – ордината оси трехшарнирной арки в сечении $k-k$; φ_k – угол наклона касательной к оси трехшарнирной арки в сечении $k-k$.

В рассматриваемом примере

$$M_k^{\bar{o}} = V_A x_k - \frac{q_1 x_k^2}{2} - P_1 \cdot 3; \quad Q_k^{\bar{o}} = V_A - q x_k - P_1;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x_k) = \frac{4 \cdot 6}{24^2} (24 - 2 \cdot 9) = 0,25;$$

$$\sin \varphi_k = 0,242; \quad \cos \varphi_k = 0,968; \quad y_k = 5,625 \text{ м.}$$

Подставим найденные значения $M_k^{\bar{o}}, Q_k^{\bar{o}}, \sin \varphi_k, \cos \varphi_k, y_k$ в формулы, получим величины внутренних усилий, возникающих в сечении $k-k$ от нагрузок q и P :

$$M_k = V_A x_k - \frac{q_1 x_k^2}{2} - P_1 \cdot 3 - H_A y_k = 19 \cdot 9 - \frac{1 \cdot 9^2}{2} - 6 \cdot 3 - 20 \cdot 5,625 = 0;$$

$$Q_k = (V_A - q_1 x_k - P_1) \cos \varphi_k - H_A \sin \varphi_k = \\ (19 - 1 \cdot 9 - 6) \cdot 0,968 - 20 \cdot 0,242 = -0,968 \text{ кН};$$

$$N_k = -(V_A - q_1 x_k - P_1) \sin \varphi_k - H_A \cos \varphi_k = \\ -(19 - 1 \cdot 9 - 6) \cdot 0,242 - 20 \cdot 0,968 = -20,328 \text{ кН.}$$

1.3. Построение линий влияния M_k, Q_k и N_k

В рассматриваемом примере все линии влияния строим способом нулевых точек.

Построение линий влияния M_k . Линию влияния изгибающего момента M_k для сечения $k-k$ строим в следующем порядке:

1. Определяем положение нулевой точки O_M линии влияния M_k на ее оси абсцисс. Для этого проводим на схеме трехшарнирной арки прямые Ak и BC и точку пересечения их (O_M) сносим по вертикали на ось абсцисс линии влияния (точка O на рис. 1.2б).

Расстояние этой точки от левой опоры находим по формуле:

$$x_{OM} = l \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = 24 \frac{0,5}{0,625 + 0,5} = 10,67 \text{ м,}$$

$$\text{где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_k}{x_k} = \frac{5,625}{9} = 0,625; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{f}{l/2} = \frac{6}{12} = 0,5.$$

2. Зная положение нулевой точки O , проводим прямую линию, соединяя точку O с концом ординаты $h = x_k = 9 \text{ м}$, отложенной вверх от оси абсцисс по вертикали, проходящей через опору A .

3. На проведенную прямую MO и ее продолжение сносим по вертикалям сечение $k-k$ и средний шарнир C (точки k и C'). Отрезок прямой kC' является средней прямой линии влияния.

4. Соединяя точку k с нулевой ординатой под опорой A , а точку C' с нулевой ординатой под опорой B , получаем левую (Ak) и правую ($C'B$) прямые линии влияния M_k .

Построенная таким образом линия влияния M_k показана на рис. 1.2б.

Построение линии влияния Q_k . Эту линию влияния строим таким же способом нулевых точек в следующем порядке:

1. Определяем положение нулевой точки линии влияния Q_k . Для этого проводим из точки A прямую, параллельную касательной к оси трехшарнирной арки в сечении $k-k$, до пересечения с прямой, соединяющей точки B и C (рис. 1.2а), а затем точку их пересечения O_Q проектируем на ось абсцисс линии влияния (рис. 1.2в).

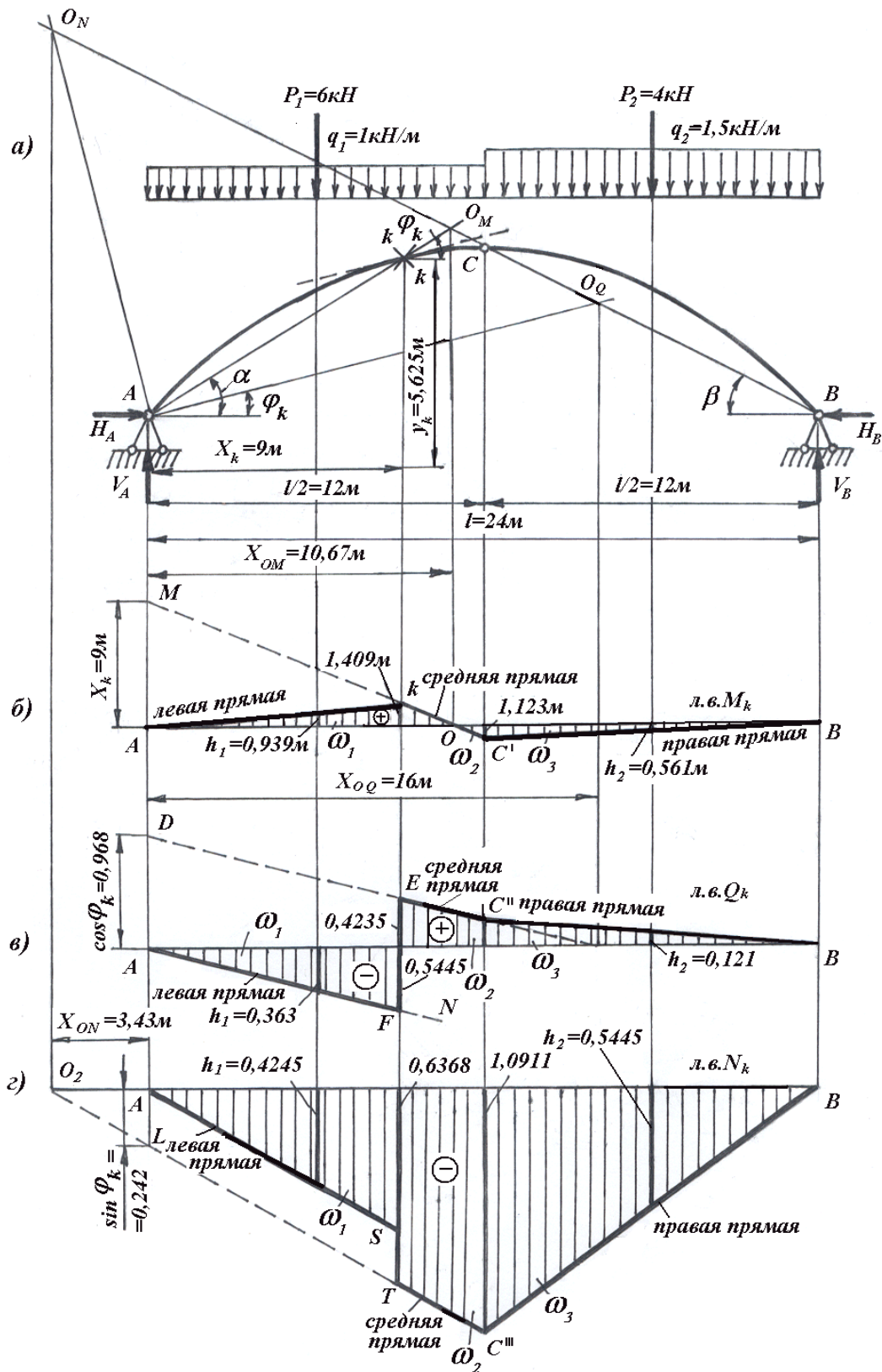


Рисунок 1.2

Полученная точка O_1 и является нулевой точкой линии влияния Q_k . Расстояние ее от левой опоры определяется по формуле:

$$x_{OQ} = l \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \varphi_k + \operatorname{tg} \beta} = 24 \frac{0,5}{0,25 + 0,5} = 16 \text{ м.}$$

2. Откладываем на левой опорной вертикали положительную ординату $h = \cos \varphi_k = 0,968$ (отрезок AD) и проводим прямую DO_1 .
3. Через нулевую ординату под опорой A (точка A) проводим прямую AN , параллельную DO_1 .
4. На параллельные прямые AN и DO_1 проектируем сечение $k-k$ (точки E и F) и получаем левую прямую AF линии влияния. Если прямая DO_1 не пересекается с вертикалью, проходящей через средний шарнир C , продолжаем прямую DO_1 до пересечения с этой вертикалью и получаем точку C'' . Соединив точку C'' с нулем под опорой B (точка B), получим правую прямую ($C''B$) линии влияния Q_k . Прямая линия, соединяющая точки E и C'' , является средней прямой линии влияния Q_k , а прямая EF носит название соединительной прямой линии влияния Q_k .

Построение линии влияния N_k . Линию влияния N_k строим способом нулевых точек в следующем порядке:

1. Нулевую точку O_N линии влияния N_k находим как проекцию на ось абсцисс линии влияния точки пересечения прямой, проведенной из точки A перпендикулярно касательной к оси арки в сечении $k-k$ (AO_N), с прямой, проведенной через правую опорную точку B и средний шарнир C (рис. 1.2а, г).

На рис. 1.2г нулевая точка O_2 расположена за пределами данного чертежа. Расстояние этой точки от левой опоры определяем по формуле:

$$x_{ON} = l \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \varphi_k - \operatorname{tg} \beta} = 24 \frac{0,5}{4,0 - 0,5} = 3,429 \text{ м},$$

где $\operatorname{ctg} \varphi_k = 1/\operatorname{tg} \varphi_k = 1/0,25 = 4$.

2. Откладываем вниз на левой опорной вертикали ординату $h = \sin \varphi_k = 0,242$ (отрезок AL). Соединив точку L с нулевой точкой O_2 прямой линией и продолжив её (если это необходимо) до пересечения с вертикалью, проходящей через средний шарнир (точка C'''), получаем прямую O_2LC''' .
3. Через нуль опорной вертикали (точка A) проводим линию, параллельную прямой O_2LC''' .
4. На эти параллельные прямые проектируем сечение $k-k$ (точки T и S). Полученная прямая AS носит название левой прямой, TS – соединительной прямой, а отрезок TC''' – средней прямой линии влияния TC''' .

5. Соединив точку C''' с нулем под правой опорой, получаем правую прямую (прямая $C'''B$) линии влияния N_k .

1.4. Вычисление величин M_k, Q_k и N_k по их линиям влияния от заданной нагрузки P и q

Загрузив каждую линию влияния заданной нагрузкой P_1, P_2 и q_1, q_2 (см. рис. 1.26, в, г), величины внутренних усилий M_k, Q_k и N_k находим по формуле:

$$L = q\omega + Ph, \quad (4)$$

где L – внутренние усилия соответственно M_k, Q_k и N_k , возникающие в сечении $k-k$;

q – интенсивность, заданной равномерно распределенной нагрузки;

ω – алгебраическая сумма площадей участков линий влияния соответственно M_k, Q_k и N_k , расположенных под равномерно распределенной нагрузкой;

P – величина заданной сосредоточенной нагрузки;

h – ординаты линий влияния M_k, Q_k и N_k под сосредоточенной нагрузкой P .

Следует подчеркнуть, что все характерные ординаты линий влияния и ординаты под нагрузками необходимо всегда определять аналитически из подобия треугольников.

Подставив в формулу (4) числовые значения P, q, ω и h для каждой из линий влияния, вычислим величины M_k, Q_k и N_k :

$$\begin{aligned} M_k &= q_1\omega_1 + P_1h_1 + q_1\omega_2 + q_2\omega_3 + P_2h_2 = \\ &= 1 \cdot 7,5149 + 6 \cdot 0,939 - 1 \cdot 0,7460 - 1,5 \cdot 6,7380 - 4 \cdot 0,561 = 0,05 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

где $h_1 = 0,939 \text{ м}$, $h_2 = -0,561 \text{ м}$, $\omega_1 = 7,5149 \text{ м}^2$, $\omega_2 = -0,7460 \text{ м}^2$, $\omega_3 = -6,7380 \text{ м}^2$.

$$\begin{aligned} Q_k &= q_1\omega_1 + P_1h_1 + q_1\omega_2 + q_2\omega_3 + P_2h_2 = \\ &= -1 \cdot 2,4502 - 6 \cdot 0,363 + 1 \cdot 0,9982 + 1,5 \cdot 2,1780 + 4 \cdot 0,1210 = -0,968 \text{ кН}, \end{aligned}$$

где $h_1 = -0,3630$, $h_2 = 0,1210$, $\omega_1 = -2,4502 \text{ м}$, $\omega_2 = 0,9982 \text{ м}$, $\omega_3 = 2,1780 \text{ м}$.

$$\begin{aligned} N_k &= q_1\omega_1 + P_1h_1 + q_1\omega_2 + q_2\omega_3 + P_2h_2 = \\ &= -1 \cdot 2,8656 - 6 \cdot 0,4245 - 1 \cdot 2,9547 - 1,5 \cdot 6,5466 - 4 \cdot 0,5455 = -20,369 \text{ кН}. \end{aligned}$$

где $h_1 = -0,4245$, $h_2 = -0,5455$, $\omega_1 = -2,8656 \text{ м}$, $\omega_2 = -2,9547 \text{ м}$, $\omega_3 = -6,5466 \text{ м}$.

Сравнение величин M_k, Q_k и N_k , полученных аналитическим способом и с применением линий влияния, приведено в таблице 1.3.

Из таблицы 1.3 видно, что результаты практически совпадают. В контрольных работах, выполняемых студентами, допускается расхождение величин не более чем на 3 %.

Таблица 1.3

Усилие	Значение усилий, полученных аналитически	Значение усилий, полученных при помощи линий влияния	Процент расхождения
M_k , кН·м	0	0,05	-
Q_k , кН	-0,968	-0,968	0 %
N_k , кН	-20,328	-20,369	0,2 %

2. Расчет сложной статически определимой плоской фермы

Задание. Для шпренгельной металлической фермы (рис. 2.1а) с выбранными по шифру из таблицы 2.1 размерами и узловыми нагрузками, полученными путем замены равномерно распределенной по всей длине нагрузки q , высота фермы h , временной нагрузкой в виде перемещающейся по грузовому поясу тележки с давлением P на ось (рис. 2.1б) требуется:

- определить (аналитически) усилия во всех стержнях заданной панели от действия постоянной нагрузки;
- построить линии влияния усилий в тех же стержнях, определив значения их характерных ординат;
- вычислить суммарные (расчетные) усилия в стержнях фермы (пункт а) от постоянной и временной нагрузок;
- загрузить одну линию влияния (по выбору) постоянной нагрузкой q , определить усилие и сравнить его с полученным аналитически в п.1.

-

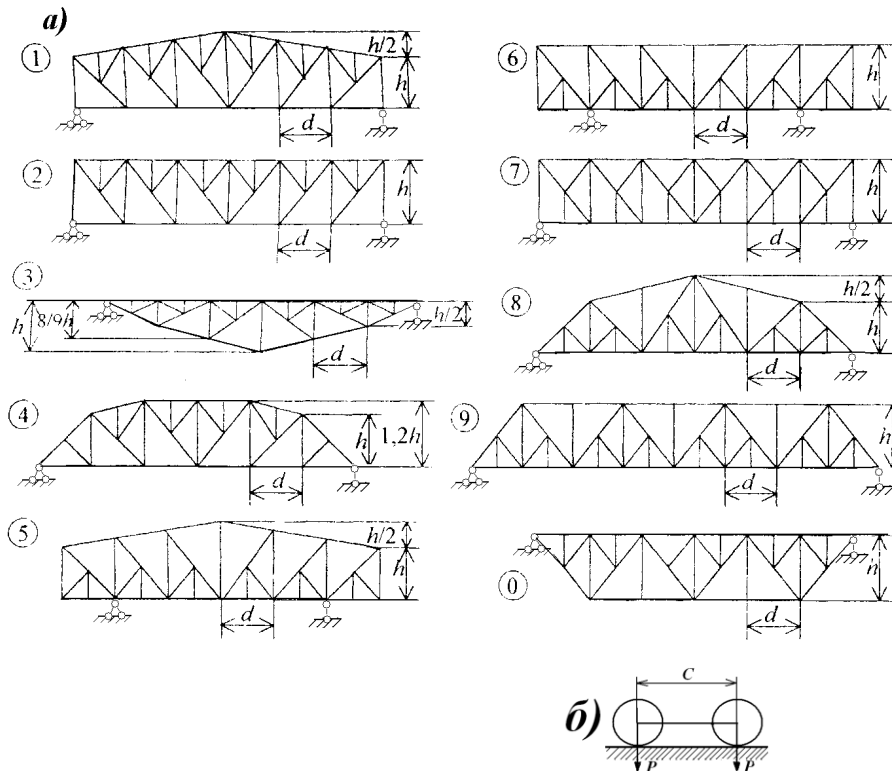


Рисунок 2.1 – в вариантах 1, 2, 3, 4, 0 – нагрузка приложена в узлах верхнего пояса,
в вариантах 5, 6, 7, 8, 9 – в узлах нижнего пояса

Методические указания

Постоянная и временная нагрузки для схем 5, 6, 7, 8, 9 приложены в узлах нижнего пояса, а для остальных схем – в узлах верхнего пояса.

Таблица 2.1

Первая цифра шифра	d , м	Вторая цифра шифра	№ панели (считая слева)	h , м	Последняя цифра шифра (№ схемы)	Нагрузки		$\frac{c}{d}$
						постоянная q , кН/м	временная P , кН (рис. 5.2.1,б)	
1	3,0	1	2	3,2	1	20	150	1,0
2	3,5	2	3	4,0	2	22,5	155	0,9
3	4,0	3	4	3,8	3	25	160	0,8
4	4,5	4	5	3,3	4	17,5	165	0,7
5	3,6	5	2	3,6	5	18	170	0,6
6	4,2	6	3	3,0	6	21	175	0,5
7	2,75	7	4	4,2	7	22	180	0,6
8	3,25	8	4	4,1	8	19	185	0,7
9	3,75	9	3	3,7	9	18,5	190	0,8
0	4,25	0	4	3,5	0	21,5	200	0,9

Так как панелью фермы считается расстояние между узлами основной решетки, то для определения узловой нагрузки следует умножить интенсивность нагрузки на площадь загрузки, равную произведению половины длины панели на

расстояние между фермами (для крайних узлов принимается половина подсчитанной таким образом нагрузки).

Усилие в каждом стержне следует определять (если возможно) непосредственно через заданную нагрузку и опорные реакции, а не одно через другое. Всего должно быть определено восемь усилий (все стержни заданной панели и правая стойка).

Рекомендуется сначала рассмотреть заданную схему и найти усилия, для которых можно провести сечение через три стержня или вырезать узел. Обычно при этом удастся найти усилия во всех стержнях, относящихся одновременно и к основной решетке, и к шпренгелю. Остальные усилия удобнее определять из рассмотрения только основной решетки или только шпренгеля. При выделении шпренгелей нельзя забывать о передаче действующих на них сил в узлы основной решетки.

Производя определение усилий, надо приводить все схемы, разрезы и указывать все величины, входящие в расчетные формулы. Геометрические характеристики (плечи, углы и пр.) должны быть определены аналитически, а не по масштабу.

При построении линий влияния надо привести все необходимые расчеты, а на полученных линиях влияния проставить числовые значения ординат под каждым узлом.

Для определения максимального усилия от временной нагрузки надо загрузить все узлы, которым соответствуют положительные значения ординат линии влияния; для определения минимальных усилий – узлы, соответствующие отрицательным ординатам линии влияния.

Максимальное расчетное усилие определяется суммой усилий от постоянной нагрузки и максимального усилия от временной нагрузки. Минимальное расчетное усилие равно сумме усилия от постоянной нагрузки и минимального усилия от временной нагрузки. Максимальные и минимальные расчетные усилия должны быть определены для всех восьми стержней и сведены в таблицу.

Таблица расчетных усилий (показан пример записи)

Наименование стержня	Усилие от постоянной нагрузки, кН	Усилия от временной нагрузки, кН		Расчетные усилия, кН	
		максимальное	минимальное	максимальное	минимальное
Первый ...	5,5	8,3	-0,2	13,8	5,3
Второй ...	-6,4	0,4	-9,2	-6,0	-15,6
и т. д.					

Пример решения

2.1. Определение (аналитически) усилия во всех стержнях заданной панели от действия постоянной нагрузки $q=40$ кН/м

Равномерно распределенную нагрузку фермы приведем к узловой (рис.2.2а). Тогда во всех промежуточных узлах заданной фермы будет передаваться узловая нагрузка $P = qd = 40 \cdot 5 = 200$ кН. А на опорные узлы нагрузка $\frac{qd}{2} = \frac{40 \cdot 5}{2} = 100$ кН.

Основная ферма (без шпренгелей) и узловая нагрузка, приложенная к ней, показаны на рис. 2.2б.

Из условия симметрии опорные реакции равны:

$$R_A = R_B = \frac{12P}{2} = \frac{12 \cdot 200}{2} = 1200 \text{ кН.}$$

Аналитически усилия в стержнях фермы определяют при помощи метода сечений. Дополнительные шпренгельные фермы (шпренгели), изображенные на рис. 2.2а, передают местную вертикальную нагрузку, приложенную к нижним дополнительным узлам, только в нижние узлы основной фермы. Такие шпренгели называются одноярусными. Элементы ферм, в состав которых входят одноярусные шпренгели, можно разделить на три категории:

- 1) элементы, принадлежащие только основной ферме. Усилия в этих элементах определяются расчетом основной фермы;
- 2) элементы, принадлежащие только дополнительным шпренгельным фермам (шпренгелям). Усилия в них определяются из условия равновесия, составляемых для отдельных частей шпренгеля, который при этом можно рассматривать как самостоятельную двухопорную ферму (рис. 2.2д);
- 3) элементы, принадлежащие одновременно основной ферме и шпренгелю. Усилия в таких элементах равны сумме двух усилий, одно из которых возникает в элементе основной фермы, а другое – в элементе шпренгеля.

Встречаются шпренгельные фермы, в состав которых входят двухярусные шпренгели. Отличительная особенность двухярусных шпренгелей состоит в том, что они узловую нагрузку, приложенную к нижнему поясу, передают в узлы верхнего пояса или, наоборот, – с верхнего пояса на нижний.

Элементы таких шпренгельных ферм делятся на четыре категории: первые три те же, что и для ферм с одноярусными шпренгелями; элементами четвертой категории являются те элементы основной фермы, линии влияния для которых имеют различный вид при езде поверху и при езде понизу. Расчет ферм с двухярусными шпренгелями проводится с учетом этой особенности.

Для определения усилия O_{7-11} в стержне 7 – 11 заданной фермы, являющимся элементом первой категории, проведем в основной ферме – сечение 1 – 1. Моментной точкой для определяемого усилия является точка 8 (рис. 2.2,б). Составим уравнение равновесия левой отсеченной части фермы $\sum M_8 = 0$, получим:

$$-R_A \cdot 4d + P \cdot 4d + 2P \cdot 2d - O_{7-11} \cdot h = 0,$$

откуда

$$O_{7-11} = \frac{-R_A \cdot 4d + P \cdot 4d + 2P \cdot 2d}{h} = \frac{(-1200 \cdot 4 + 200 \cdot 4 + 2 \cdot 200 \cdot 2)5}{10} = -1600 \text{ кН}.$$

Усилие D_{8-11}^O стержня 8 – 11 основной фермы находим из уравнения равновесия $\sum F_{ky} = 0$ левой отсеченной части фермы (сечение 1 – 1):

$$R_A - P - 2P - 2P + D_{8-11}^O \sin \alpha = 0; \quad D_{8-11}^O = \frac{5P - R_A}{\sin \alpha} = \frac{5 \cdot 200 - 1200}{0,7071} = -282,8 \text{ кН},$$

где $\alpha = 45^\circ$.

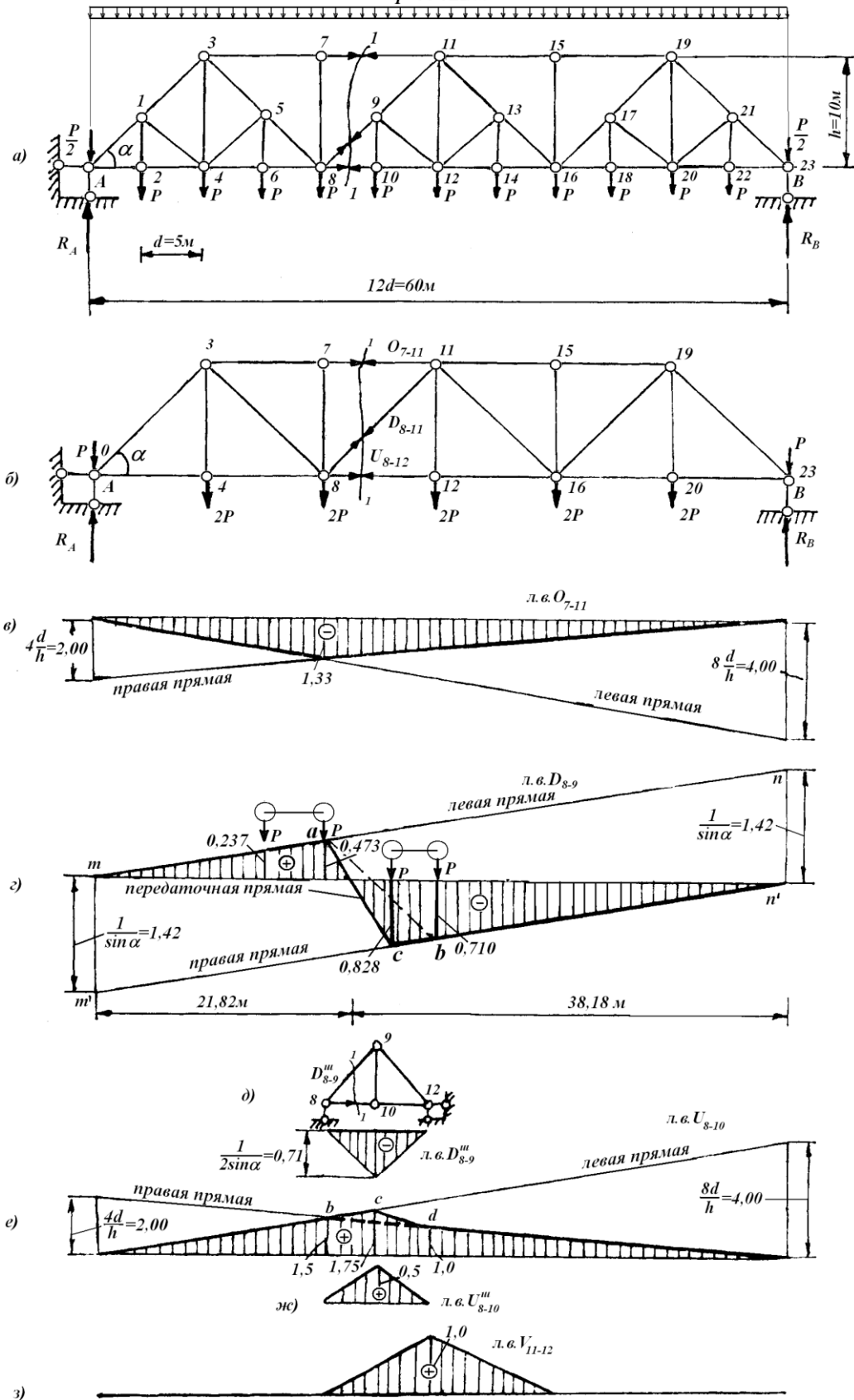


Рисунок 2.2

Усилие D_{8-9} стержня 8 – 9, элементе третьей категории определяем как сумму усилий, одно из которых D_{8-11}^O действует в элементе основной фермы, а другое D_{8-9}^{III} – в элементе шпренгеля.

Выделим шпренгель из заданной фермы и определим усилие D_{8-9}^{III} в раскосе 8 – 9 (рис. 2.3а). Проведя сечение $a-a$, составим уравнение равновесия $\sum F_{ky} = 0$ левой отсеченной части шпренгеля:

$$D_{8-9}^{III} \sin \alpha + \frac{P}{2} = 0, \quad D_{8-9}^{III} = -\frac{P}{2 \sin \alpha} = -141,4 \text{ кН.}$$

Таким образом, усилие D_{8-9} в раскосе 8 – 9 равно:

$$D_{8-9} = D_{8-9}^{III} + D_{8-11}^O = -141,4 - 282,8 = -424,2 \text{ кН.}$$

Усилие U_{8-10} в стержне нижнего пояса 8 – 10, в элементе третьей категории равно

$$U_{8-10} = U_{8-12}^O + U_{8-10}^{III}.$$

Моментной точкой для определения усилия U_{8-12}^O является точка 11 (рис. 2.2б).

Составим уравнение равновесия левой отсеченной части фермы $\sum M_{11} = 0$, получим:

$$\begin{aligned} -R_A \cdot 6d + P \cdot 6d + 2P \cdot 4d + 2P \cdot 2d + U_{8-12}^O h &= 0, \\ U_{8-12}^O &= \frac{R_A \cdot 6d - P \cdot 6d - 2P \cdot 4d - 2P \cdot 2d}{h} = \\ &= \frac{1200 \cdot 30 - 200 \cdot 30 - 2 \cdot 200 \cdot 20 - 2 \cdot 200 \cdot 10}{10} = 1800 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Чтобы найти усилие U_{8-10}^{III} в стержне нижнего пояса 8 – 10 шпренгеля, проведем сечение $a-a$ (рис. 2.3а). Составив и решив уравнение равновесия левой отсеченной части шпренгеля $\sum M_9 = 0$, получим

$$-\frac{P}{2}d + U_{8-10}^{III} \frac{h}{2} = 0, \quad U_{8-10}^{III} = P \frac{d}{h} = 200 \frac{5}{10} = 100 \text{ кН.}$$

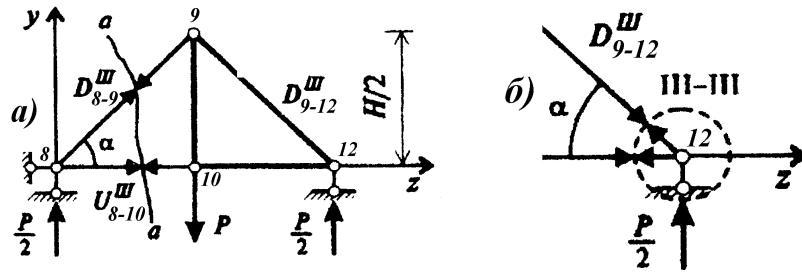


Рисунок 2.3

Таким образом, суммарное усилие U_{8-10} в элементе 8 – 10 нижнего пояса

$$U_{8-10} = U_{8-12}^O + U_{8-10}^{III} = 1800 + 100 = 1900 \text{ кН.}$$

Усилие в стержне $U_{10-12} = U_{8-10} = 1900 \text{ кН.}$

Усилие D_{9-12}^{III} в раскосе 9 – 12, элементе второй категории, определим из условия равновесия $\sum F_{ky} = 0$ узла 12, вырезанного сечением 111 – 111 (см. рис. 2.3б):

$$D_{9-12}^{III} \sin \alpha + \frac{P}{2} = 0; \quad D_{9-12}^{III} = -\frac{P}{2 \sin \alpha} = -\frac{200}{2 \cdot 0,7071} = -141,4 \text{ кН.}$$

Для определения усилия V_{11-12} в стойке 11 – 12, элементе первой категории, вырежем узел 12 в основной ферме (см. рис. 2.4) и составим уравнение его равновесия $\sum F_{ky} = 0$:

$V_{11-12} - 2P = 0$. Решив это уравнение, получим $V_{11-12} = 2P = 2 \cdot 200 = 400 \text{ кН.}$

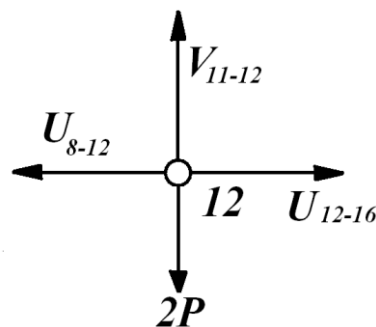


Рисунок 2.4

2.2. Построение линий влияния усилий в тех же стержнях панели фермы

Груз $P=1$ перемещается по нижнему поясу. Для построения линии влияния усилия O_{7-11} в стержне верхнего пояса 7 – 11, элементе первой категории, проведем сечение 1 – 1 в основной ферме (см. рис. 2.2б).

Рассмотрим левую отсеченную часть фермы, когда груз $P=1$ находится справа от сечения. Для этого составим уравнение равновесия $\sum M_8^{лев} = 0$:

$$-R_A 4d - O_{7-11} h = 0, \quad O_{7-11} = -\frac{4d}{h} R_A, \quad (\text{правая прямая}).$$

При $P=1$ слева от сечения составим уравнение равновесия правой отсеченной части фермы $\sum M_8^{прав} = 0$:

$$R_B 8d + O_{7-11} h = 0, \quad O_{7-11} = -\frac{8d}{h} R_B, \quad (\text{левая прямая}).$$

Полученные уравнения позволяют построить правую и левую прямые линии влияния усилия O_{7-11} . При этом они должны пересекаться под моментной точкой 8 (см. рис. 2.2 в).

Для построения линии влияния усилия D_{8-9} в раскосе 8 – 9, элементе третьей категории, воспользуемся сечением 1 – 1 (см. рис. 2.2а). Если груз находится справа от сечения, то уравнение правой прямой линии влияния усилия D_{8-9} находим из условия равновесия левой отсеченной части фермы $\sum F_{ky}^{лев} = 0$:

$$R_A + D_{8-9} \sin \alpha = 0; \quad D_{8-9} = -R_A \frac{1}{\sin \alpha}, \quad (\text{правая прямая}).$$

Рассмотрим второй случай, когда груз $P=1$ находится слева от сечения. Тогда уравнение левой прямой линии влияния усилия D_{8-9} определим из условия равновесия правой отсеченной части фермы $\sum F_{ky}^{прав} = 0$:

$$R_B - D_{8-9} \sin \alpha = 0, \quad D_{8-9} = R_B \frac{1}{\sin \alpha}, \quad (\text{левая прямая}).$$

Уравнения прямых линии влияния усилия D_{8-9} могут быть получены умножением ординат линии влияния опорной реакции R_A на постоянный коэффициент $-1/\sin \alpha$, а левая прямая – умножением ординат линии влияния опорной реакции R_B на коэффициент $1/\sin \alpha$.

Для построения правой прямой линии влияния усилия D_{8-9} на левой опорной вертикали откладываем от оси отсчета вниз ординату $1/\sin \alpha$ и соединяем ее вершину с нулевой точкой правой опорной вертикали (прямая $m'n'$ на рис. 2.2г).

Для построения левой прямой откладываем вверх ординату $1/\sin \alpha$ на правой опорной вертикали, вершину которой соединяем с нулевой точкой левой опорной вертикали (прямая mn на рис. 2.2з). Для учета узловой передачи нагрузки левый узел 8 сносим на левую прямую, а правый узел 9 – на правую прямую. Полученные точки a и c соединяем прямой, называемой передаточной. Пунктирной линией показана передаточная прямая ab линии влияния усилия D_{8-11}^O в раскосе 8 – 11 основной фермы (рис. 2.2з). Линия влияния D_{8-9}^{III} в раскосе 8 – 9 шпренгеля идентична линии влияния усилия D_{9-12}^{III} раскоса 9 – 12 (см. рис. 2.2д).

Алгебраическая сумма линий влияния усилий D_{8-9}^{III} и D_{8-11}^O образует линию влияния усилия D_{8-9} (рис. 2.2з). При этом треугольник abc представляет линию влияния усилия D_{8-9}^{III} .

Для построения линии влияния усилия U_{8-10} в стержне 8 – 10 нижнего пояса, элемента третьей категории, вначале проведем сечение 1 – 1 в основной ферме (рис. 2.2б) и построим линию влияния усилия U_{8-12}^O в стержне 8 – 12 нижнего пояса основной фермы. Составив и решив уравнение равновесия левой отсеченной части фермы $\sum M_7^{лев} = 0$, когда груз $P=1$ находится справа от сечения, получим уравнение правой прямой линии влияния

$$-R_A 4d + U_{8-12}^O h = 0, \quad U_{8-12}^O = R_A \frac{4d}{h}, \quad (\text{правая прямая}).$$

Рассматривая равновесие правой отсеченной части основной фермы $\sum M_7^{прав} = 0$ при грузе $P=1$, расположенном слева от сечения, получим уравнение левой прямой линии влияния

$$R_B 8d - U_{8-12}^O h = 0, \quad U_{8-12}^O = R_B \frac{8d}{h}, \quad (\text{левая прямая}).$$

Построив правую и левую прямые (они должны обязательно пересекаться под моментной точкой 7), получим линию влияния усилия U_{8-12}^O (см. рис. 2.2е). Она имеет вид треугольника с положительной ординатой в вершине.

К полученной линии влияния U_{8-12}^O в основной ферме следует прибавить усилия в пределах панели 8-12 шпренгеля U_{8-10}^{III} , изображенную на рис. 2.2ж.

Для построения линии влияния U_{8-10}^{III} проведем сечение 1 – 1 в шпренгеле (рис. 2.2д). Составим уравнение равновесия для левой отсеченной части шпренгеля $\sum F_{kx} = 0$:

$$U_{8-10}^{III} + D_{8-9}^{III} \cos \alpha = 0, \quad U_{8-10}^{III} = -D_{8-9}^{III} \cos \alpha = \frac{1}{2 \sin \alpha} \cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

Линия влияния U_{8-10} для заданной (шпренгельной) фермы изображена на рис. 2.2е. Здесь треугольник bcd является линией влияния усилия U_{8-10}^{III} в стержне шпренгеля 8 – 10.

Теперь построим линию влияния усилия V_{11-12} в стойке 11 – 12. Стойка – элемент первой категории. Поэтому для построения линии влияния усилия в ней следует рассматривать только основную ферму (см. рис. 2.2б). Вырезав узел 12 основной фермы (см. рис. 2.5), составим для него уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил на вертикальную ось $\sum F_{ky} = 0$.

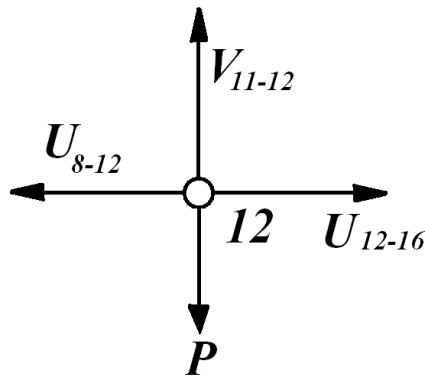


Рисунок 2.5

При приложении нагрузки $P=1$ в узле 12, получим

$$V_{11-12} - P = 0, \quad V_{11-12} = P = 1.$$

Если груз $P=1$ расположен в узлах 8 или 16 основной фермы, то уравнение равновесия примет вид: $V_{11-12} = 0$.

Отложив под узлом 12 ординату (вверх), равную 1, и соединив ее вершину с нулевыми точками под узлами 8 и 16 прямыми, получим линию влияния усилия V_{11-12} стойки 11 – 12 (см. рис. 2.2з). Она имеет вид треугольника с наибольшей ординатой, равной единице. Положительный знак указывает на то, что стойка работает на растяжение.

2.3. Вычисление суммарных усилий в стержне фермы от постоянной нагрузки q и временной нагрузки P

Загрузим линию влияния раскоса D_{8-9} временной нагрузкой в виде перемещающейся по грузовому поясу тележки с давлением на ось $P=100$ кН (рис. 2.2г).

Вычислим суммарное усилие в стержне от сочетания постоянной расчетной нагрузки q и временной P .

Предварительно вычислим из геометрических соотношений ординаты линии влияния стержня D_{8-9} , соответствующие не выгоднейшему положению колес тележки. Примем расстояние между осями тележки $C=d=5$ м. Тогда

$$\begin{aligned} D_{8-9}^{max} &= D_{8-9} + P \cdot 0,237 + P \cdot 0,473 = \\ &= -424,2 + 100 \cdot 0,237 + 100 \cdot 0,473 = -353,2 \text{ кН.} \end{aligned}$$

$$D_{8-9}^{min} = D_{8-9} - P \cdot 0,828 - P \cdot 0,71 = -424,2 - 100 \cdot 0,828 - 100 \cdot 0,71 = -578,0 \text{ кН.}$$

При вычислении суммарного усилия в стержне D_{8-9} необходимо загружать временной нагрузкой положительный и отрицательный участки линии влияния D_{8-9} .

2.4. Загружение линии влияния постоянной нагрузкой q

Загрузим линию влияния стержня U_{8-10} постоянной нагрузкой $q=40$ кН/м и вычислим усилие U_{8-10} с применением линии влияния. В этом случае

$$U_{8-10} = q\omega = 40(0,5 \cdot 1,5 \cdot 60 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 10) = 1900 \text{ кН,}$$

где $\omega = 0,5 \cdot 1,5 \cdot 60 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 10$ – площадь линии влияния усилия U_{8-10} (рис. 2.2е).

Таким образом, значение усилия в стержне U_{8-10} , вычисленное аналитически (см. п. 1) и по линии влияния, полностью совпадают.

3. Определение перемещений в статически определимой раме

Задание. Для рамы (рис. 3.1) с выбранными по шифру из таблицы 3.1 размерами и нагрузкой требуется определить горизонтальное смещение или угол поворота одного из сечений.

Таблица 3.1

Первая цифра шифра	$l, \text{м}$	$q, \text{кН/м}$	Вторая цифра шифра	$P, \text{кН}$	$h, \text{м}$	№ сечения	Последняя цифра шифра и № схемы	Вид перемещения	$J_2:J_1$
1	9,0	1,0	1	9	6,0	1	1	Угол поворота	1:2
2	9,5	1,2	2	2	5,5	2	2	Тоже	2:1
3	8,0	1,5	3	5	5,0	3	3	»	1:3
4	8,5	1,8	4	4	9,5	1	4	»	3:1
5	5,0	2,0	5	3	9,0	2	5	»	2:3
6	5,5	2,4	6	10	8,5	3	6	Горизонтальное смещение	3:2
7	6,0	3,0	7	7	8,0	1	7	Тоже	3:5
8	7,5	2,5	8	8	6,5	2	8	»	5:3
9	6,0	3,2	9	1	10,0	3	9	»	3:4
0	6,5	3,5	0	6	7,0	1	0	»	4:3

Методические указания

Все перемещения следует определять по формуле Мора с использованием правила Верещагина. Построение эпюр моментов (грузовых и единичных) следует сопровождать расчетами. Сами эпюры надо строить со стороны растянутых волокон.

Сложные эпюры для «умножения» их на единичные рекомендуется делить на части с тем, чтобы обеспечить определение их площадей и положений центров тяжести. Можно определять перемещения отдельно от силы P и нагрузки q с последующим сложением результатов.

Все эпюры должны быть четкими, иначе трудно подсчитывать их площади и положения центров тяжести отдельных площадей.

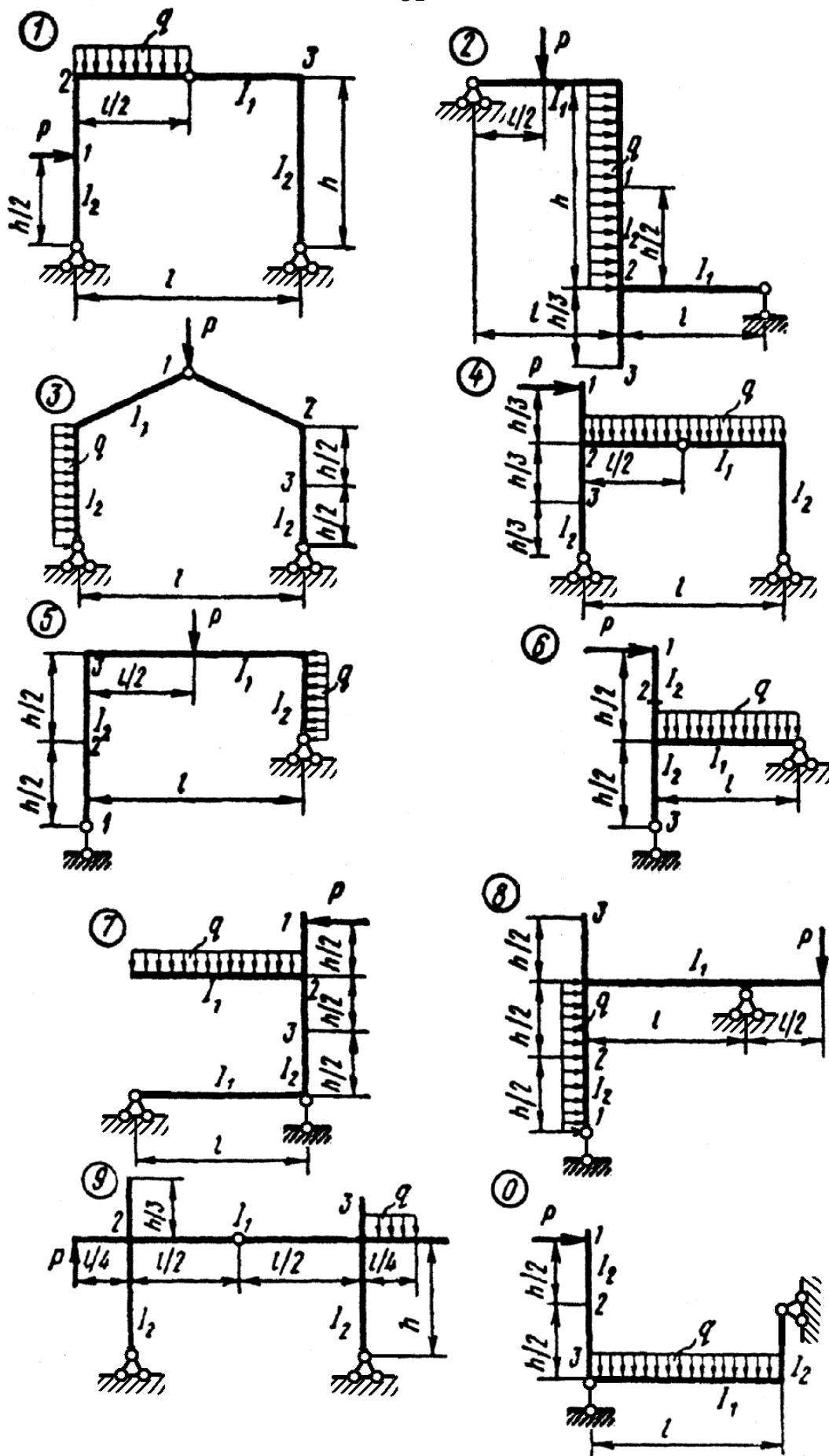


Рисунок 3.1

При расчете статически неопределимых систем, кроме уравнения равновесия, как известно, приходится составлять и решать уравнения совместности

деформаций системы. Для составления таких уравнений необходимо уметь определять перемещения заданной системы. Это приходится часто делать и при расчете статически определимых систем, которые должны обладать не только достаточной прочностью, но и жесткостью, так как в процессе их эксплуатации нормируются не только напряжения, но и перемещения конструкций.

Таким образом, изучение общих методов определения перемещений упругих систем является одной из составных задач строительной механики.

Пусть рассматриваемая заданная стержневая система под влиянием внешнего воздействия деформируется и требуется определить перемещение в i -й произвольной точке (рис. 3.2) в заранее заданном направлении.

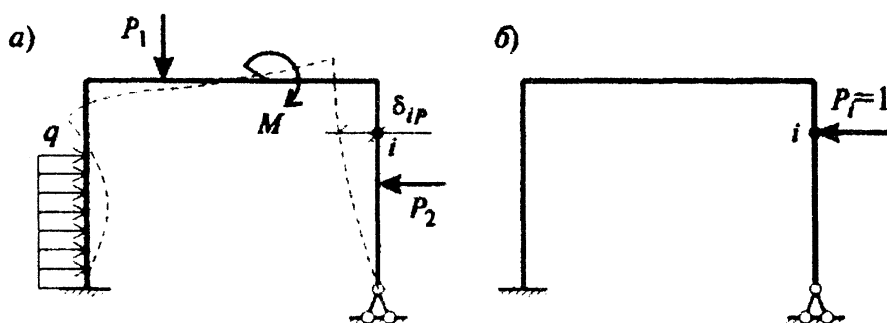


Рисунок 3.2

Примем следующую последовательность нагружения: вначале действует заданная нагрузка, а затем единичная сила. Определим работу постоянной по величине единичной силы на перемещении по ее направлению от действия заданных нагрузок, т.е. на искомом перемещении точки i . На основании теоремы Бетти она равна:

$$A_{1P} = P_1 \Delta_{1P} = 1 \cdot \Delta_{1P}.$$

Выразив работу A_{1P} через внутренние усилия в раме в единичном и грузовом состояниях, получим формулу для определения искомого перемещения

$$\Delta_{iP} = \int_0^l \frac{\bar{N}_1 N_P}{EF} dx + \int_0^l \frac{\bar{Q}_1 Q_P}{GF} \eta dx + \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ} dx.$$

Это выражение носит название *формулы Мора*. Замечательной особенностью вычисления перемещений по формуле Мора является то обстоятельство, что в качестве второго состояния можно использовать любую систему, образованную из заданной путем отбрасывания лишних связей, т.е. брать в качестве

вспомогательного состояния любую статически определимую систему, полученную из заданной. Это в значительной степени упрощает процедуру вычисления перемещений по формуле Мора.

В рамках обычно пренебрегают влиянием первого и второго членов формулы Мора, так как эти члены незначительно влияют на величину перемещений и тогда

$$\Delta_{kP} = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \frac{\bar{M}_k M_P}{EJ} dx.$$

Интеграл Мора, наряду с методом начальных параметров, является достаточно мощным инструментом для определения перемещений стержневых систем. Проиллюстрируем это на примере.

Пример решения

Для ломаного бруса, изображенного на рис. 3.3а определим угол поворота поперечного сечения C относительно вертикальной оси. Пусть жесткость ригеля в два раза больше жесткости стойки, т. е. $EJ_P = 2EJ_C$.

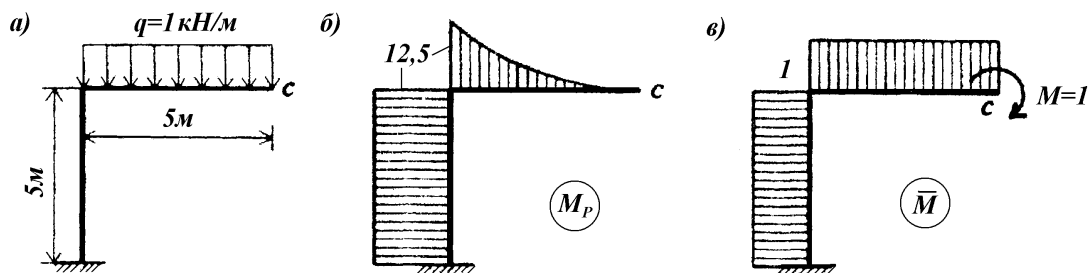


Рисунок 3.3

Последовательность расчета следующая:

- 1) строим эпюру моментов M_P от заданной нагрузки q (эпюра моментов действительного состояния рис. 3.3б);
- 2) строим эпюру моментов $\bar{M}$ при загрузке конца консоли единичным моментом $M=1$ в точке C (рис. 3.3в);

3) применяя формулу перемещений, найдем искомый угол поворота:

$$\varphi_C = \int_0^a \frac{\overline{MM}_P}{EJ_P} + \int_0^a \frac{\overline{MM}_P}{EJ_C}.$$

Решая эти интегралы по правилу Верещагина, получим

$$\varphi_C = \frac{1}{2EJ_C} \left(\frac{1}{2} \cdot 12,5 \cdot 5 \cdot 1 - \frac{1 \cdot 5^3}{12} \cdot 1 \right) + \frac{1}{EJ_C} (12,5 \cdot 5 \cdot 1) = \frac{72,92}{EJ_C} \text{ рад.}$$

4. Расчет плоской статически неопределимой рамы методом сил

Задание. Для рамы (рис. 4.1) с выбранными по шифру из таблицы 4.1 размерами и нагрузкой требуется:

- а) построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил;
- б) проверить правильность построения эпюр.

Таблица 4.1

Первая цифра шифра	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	l , м	Вторая цифра шифра	q_1 , кН/м	q_2 , кН/м	q_3 , кН/м	h , м	Последняя цифра шифра (№ схемы)	$J_1:J_2$
1	4	0	0	8	1	0	2	0	10	1	1:2
2	0	5	0	12	2	0	0	2	8	2	2:3
3	0	0	6	9	3	0	0	4	6	3	1:3
4	5	0	0	10	4	4	0	0	9	4	1:3
5	0	6	0	7	5	0	2	0	4	5	2:3
6	0	0	4	6	6	0	0	1	5	6	1:3
7	6	0	0	5	7	2	0	0	7	7	2:1
8	0	4	0	11	8	0	1	0	11	8	3:2
9	0	0	5	4	9	0	0	4	12	9	3:4
0	4	0	0	13	0	1	0	0	13	0	1:2

Методические указания

Для упрощения расчета рекомендуется принять симметричную основную систему. Можно применить разложение нагрузки на симметричную и кососимметричную. При построении единичных и грузовых эпюр надо откладывать ординаты со стороны растянутых волокон, а при их «перемножении» не забывать о правиле знаков и разных жесткостях поперечных сечений стержней. Определив значения

коэффициентов и свободных членов канонических уравнений, рекомендуется провести их проверку путем подсчета интегралов (по Верещагину):

$$\sum \int \frac{\bar{M}_{\Sigma}^2}{EJ} dx,$$

где $\bar{M}_{\Sigma} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_n$.

Результат должен совпадать с суммой

$$\sum \delta = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \dots + \delta_{nn} + 2(\delta_{12} + \delta_{13} + \dots + \delta_{1n}).$$

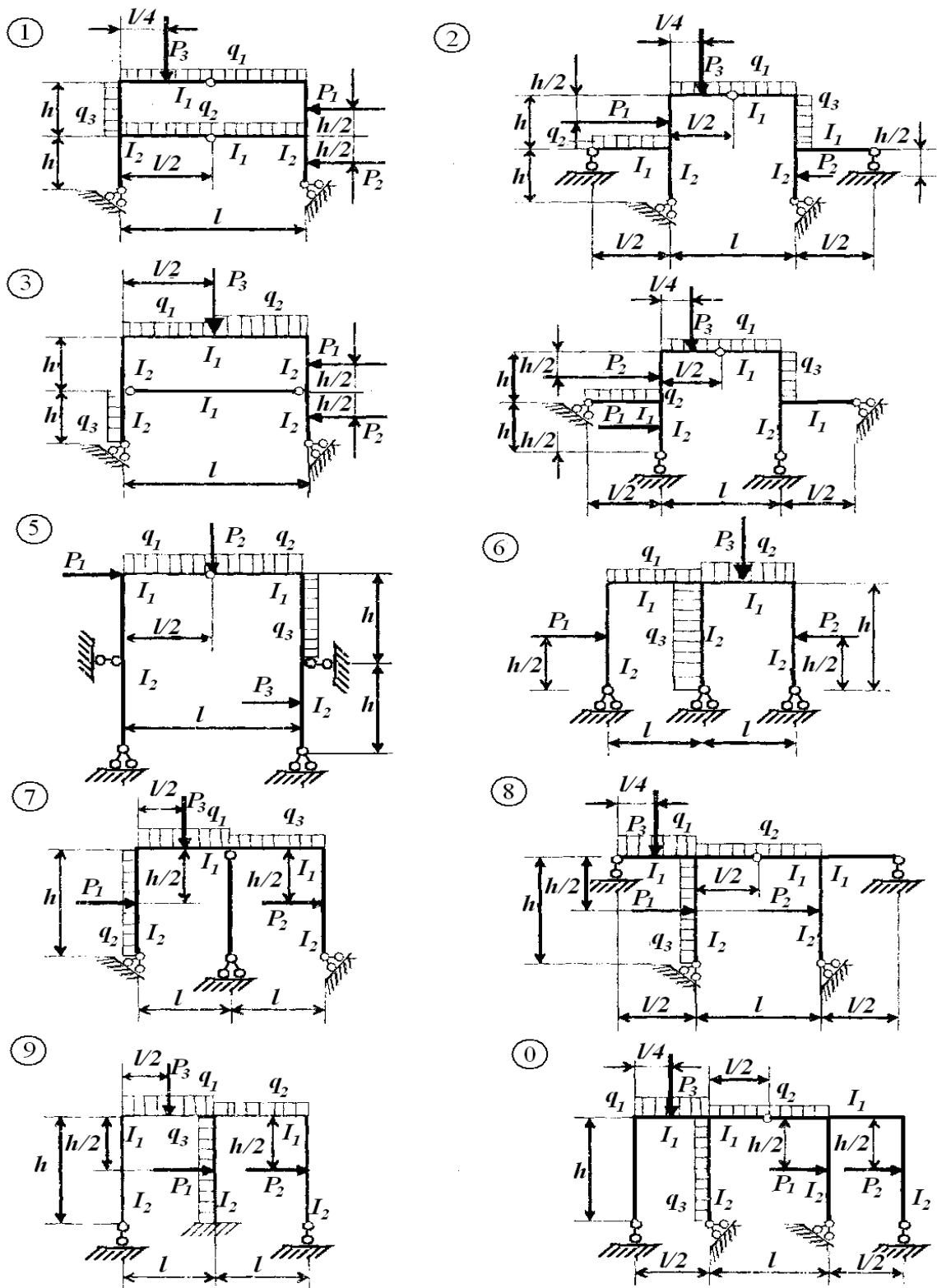


Рисунок 4.1

Проверка правильности свободных членов канонических уравнений производится по формуле:

$$\sum \int \frac{\bar{M}_{\Sigma} M_P}{EJ} dx = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} + \dots + \Delta_{nP}.$$

Решив систему уравнений, полученные значения неизвестных надо подставить в исходные уравнения с тем, чтобы убедиться в правильности выполненного решения.

Обычно после определения неизвестных строят «исправленные» эпюры моментов, умножая ординаты каждой единичной эпюры на соответствующее значение неизвестного. Тогда момент в любой точке будет определяться формулой

$$M = M_P + M_1 \cdot X_1 + M_2 \cdot X_2 + \dots + M_n \cdot X_n.$$

Окончательная эпюра моментов должна быть обязательно проверена путем «умножения» ее (по правилу Верещагина) на любую из единичных эпюр или на суммарную $\bar{M}_{\Sigma}$. Результат умножения должен быть равен нулю или быть близким к нулю (из-за неточности в подсчетах), причем разница между положительным и отрицаемым слагаемыми, отнесенная к большему из них, не должна превышать 1 %.

Построение эпюр поперечных сил (по эпюре моментов) необходимо сопровождать расчетами. При этом особое внимание надо уделить правилу знаков и участкам с криволинейным очертанием эпюр моментов. Знаки ординат поперечных сил определяются по правилам, принятым в курсе сопротивления материалов (при возрастании момента поперечная сила положительна). При построении эпюры моментов со стороны растянутых волокон возрастание момента будет характеризоваться наклоном вниз (слева направо).

На участках, где эпюра моментов прямолинейна, значение Q определяется как тангенс угла наклона эпюры M . На криволинейных участках эпюры M построение эпюры Q производится по формуле:

$$Q_x = Q_x^0 + \frac{M_{np} - M_{лев}}{l},$$

где Q_x^0 – «балочная» поперечная сила (найденная для данного участка, как для простой балки на двух опорах);

M_{np} – момент на правом конце участка (положительный, если он растягивает нижние волокна);

$M_{лев}$ – момент на левом конце участка (положительный, если он растягивает нижние волокна);

l – длина участка.

Эпюра N строится по эпюре поперечных сил путем вырезания узлов (как принято при расчете ферм), начиная с узла, в котором количество неизвестных продольных сил не превышает двух. При вырезании каждого узла необходимо учитывать, что положительная поперечная сила вращает узел по ходу часовой, а отрицательная – против.

После построения всех эпюр необходимо провести полную проверку, рассмотрев равновесие рамы целиком.

Пример решения

Для рамы (рис. 4.2а) требуется:

- а) построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил;
- б) проверить правильность построения эпюр.

Расчет статически неопределимой рамы методом сил проводится в следующей последовательности:

1. Определение степени статической неопределимости.
2. Выбор основной системы.
3. Составление системы канонических уравнений.
4. Вычисление коэффициентов канонических уравнений.
5. Проверка правильности подсчета коэффициентов канонических уравнений.
6. Решение системы канонических уравнений и проверка ее правильности.
7. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов $M_{ок}$.
8. Проверка правильности построения эпюры $M_{ок}$ и построение эпюры Q .
9. Построение эпюры N .
10. Статическая и деформационная проверка рамы в целом.

4.1. Определение степени статической неопределимости

Степень статической неопределимости рассчитывают по формуле:

$$W = 3D - 2III - C_0,$$

где W – число степеней свободы системы;

D – число дисков (стержней);

III – количество простых (одинарных) внутренних шарниров в системе;

C_0 – число опорных стержней.

В нашем примере имеем $D=1$, $III=0$, $C_0=5$, $W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 5 = -2$ (рис. 4.2а). Таким образом, заданная рама геометрически неизменяемая и дважды статически неопределима, или, другими словами, имеет две лишние связи.

4.2. Выбор основной системы

Известно, что основная система определяется из заданной путем отбрасывания лишних связей и приложением соответствующих усилий, возникающих в отброшенных связях в заданной системе. При этом основная система должна быть статически определимой и геометрически неизменяемой. Сравнивая три варианта основных систем (рис. 4.2б – г), приходим к выводу, что наиболее целесообразно в качестве основной системы выбрать 1 вариант (рис. 4.2б), так как в этом случае:

- не требуется предварительное вычисление опорных реакций;
- эпюры изгибающих моментов, построенные в этой схеме от воздействия на нее каждого из усилий $X_1=1$, $X_2=1$, P и q , будут распространены на меньшем количестве участков системы и представлены простейшими геометрическими фигурами. Это значительно облегчает процесс определения коэффициентов канонических уравнений.

4.3. Составление канонических уравнений

Канонические уравнения, необходимые для решения статически неопределимых задач, представляют собой уравнения совместности деформаций. Число их всегда равно степени статической неопределимости. Физический смысл каждого из канонических уравнений состоит в том, что суммарное перемещение по направлению усилий X_i от всех действующих в основной системе силовых факторов, включая и неизвестные, равно 0, так как в действительности в этих

направлениях стоят связи, препятствующие возникновению перемещений по направлению этих неизвестных.

Для рассматриваемого случая канонические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} + \Delta_{1q} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} + \Delta_{2q} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

4.4. Вычисление коэффициентов канонических уравнений

Так как все коэффициенты канонических уравнений представляют собой перемещения, то для их вычисления вначале строят единичные и грузовые эпюры изгибающих моментов в основной системе. Затем по формуле Мора с применением готовых формул или правила Верещагина определим их значения.

Эпюры изгибающих моментов, построенные в основной системе от воздействия на нее каждого в отдельности усилия $X_1=1$, $X_2=1$, P и q , показаны на рис. 4.2д – з.

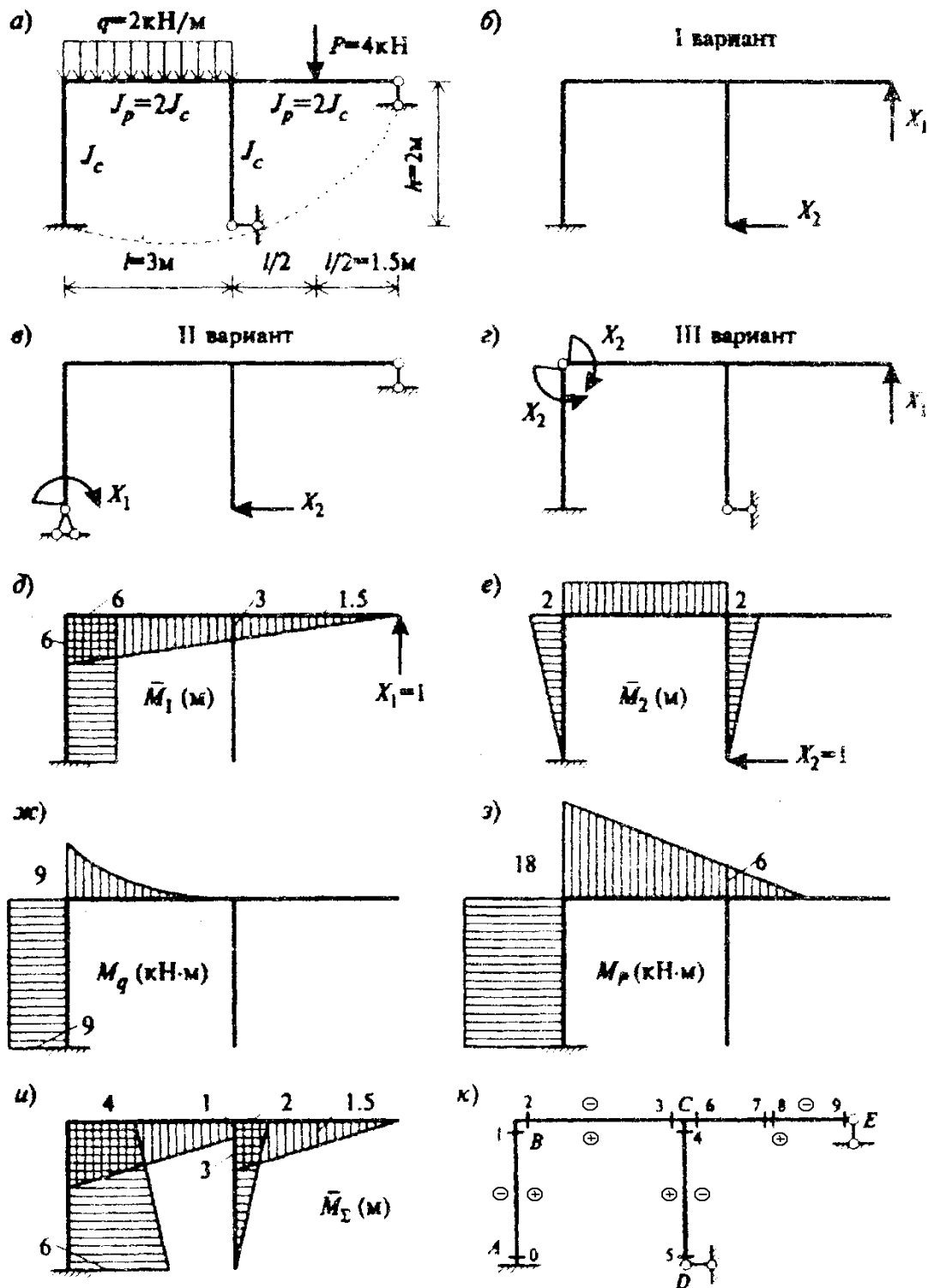


Рисунок 4.2

Исходя из единичных и грузовых эпюр, определяем коэффициенты канонических уравнений:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EJ_1} dx = \frac{1}{EJ_C} 2 \cdot 6 \cdot 6 + \frac{1}{EJ_P} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{108}{EJ_C};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EJ_1} dx = -\frac{1}{EJ_C} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 - \frac{1}{EJ_P} \frac{6+3}{2} \cdot 3 \cdot 2 = -\frac{25,5}{EJ_C};$$

$$\begin{aligned}\delta_{22} &= \sum \int \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EJ_1} dx = 2 \cdot \frac{1}{EJ_C} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{EJ_P} 2 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{11,333}{EJ_C}; \\ \Delta_{1P} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P}{EJ_1} dx = \frac{1}{EJ_C} 18 \cdot 2 \cdot 6 - \frac{1}{EJ_P} \frac{3}{6} [2(6 \cdot 18 + 3 \cdot 6) + 3 \cdot 18 + 6 \cdot 6] - \\ &\quad - \frac{1}{EJ_P} \frac{3}{2 \cdot 6} \left(2 \cdot 3 \cdot 6 - \frac{2}{3} \cdot 6 \right) = -\frac{307,125}{EJ_C}; \\ \Delta_{1q} &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_q}{EJ_1} dx = -\frac{1}{EJ_C} 6 \cdot 2 \cdot 9 - \frac{1}{EJ_P} \frac{3 \cdot 9}{2} (3 \cdot 6 + 3) = -\frac{131,625}{EJ_C}; \\ \Delta_{2P} &= \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_P}{EJ_1} dx = \frac{1}{EJ_C} 18 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{EJ_P} \frac{18+6}{2} \cdot 3 \cdot 2 = \frac{72}{EJ_C}; \\ \Delta_{2q} &= \sum \int \frac{\bar{M}_2 M_q}{EJ_1} dx = \frac{1}{EJ_C} 9 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{EJ_P} \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3 \cdot 2 = \frac{27}{EJ_C}.\end{aligned}$$

4.5. Проверка правильности подсчета коэффициентов канонических уравнений

Правильность расчета коэффициентов канонических уравнений осуществляется путем универсальных проверок, при этом должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} \sum \delta = \delta_{SS}; \\ \sum \Delta = \Delta_{SPq}, \end{cases}$$

где $\sum \delta$ – сумма всех найденных главных и побочных коэффициентов

$$\sum \delta = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22};$$

δ_{SS} – величина, полученная в результате умножения единичной суммарной эпюры

$$M_{\Sigma} \text{ на себя } \delta_{SS} = \sum_{j=1}^k \int_0^{l_j} \frac{M_{\Sigma} M_{\Sigma}}{EJ_j} dx;$$

$\sum \Delta$ – величина, определяемая сложением значений, полученных в результате умножения эпюры M_{Σ} на эпюру M_P и эпюры M_{Σ} на эпюру M_q ;

k – количество участков эпюры.

Эпюра M_{Σ} (рис. 4.2*u*) строится в основной системе от одновременного воздействия на нее всех неизвестных единичных усилий ($X_1=1$, $X_2=1$), т. е. путем сложения единичных эпюр $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$:

$$M_{\Sigma} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2.$$

В нашем случае

$$\sum \delta = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{21} + \delta_{22} = \frac{108}{EJ_C} - \frac{25,5}{EJ_C} - \frac{25,5}{EJ_C} + \frac{11,333}{EJ} = \frac{68,333}{EJ_C};$$

$$\delta_{SS} = \frac{1}{EJ_C} \frac{2}{6} [2 \cdot (6 \cdot 6 + 4 \cdot 4) + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 6] + \frac{1}{EJ_P} \frac{3}{6} [2 \cdot (4 \cdot 4 + 1 \cdot 1) + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 4] +$$

$$+ \frac{1}{EJ_C} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{EJ_P} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{68,333}{EJ_C};$$

т. е. $\sum \delta = \delta_{SS}$;

$$\sum \Delta = \Delta_{1P} + \Delta_{1q} + \Delta_{2P} + \Delta_{2q} = -\frac{307,125}{EJ_C} - \frac{131,625}{EJ_C} + \frac{72}{EJ_C} + \frac{27}{EJ_C} = -\frac{339,75}{EJ_C};$$

$$\Delta_{SPq} = -\frac{1}{EJ_C} \cdot \frac{6+4}{2} \cdot 2 \cdot 18 - \frac{1}{EJ_P} \cdot \frac{3}{6} [2 \cdot (4 \cdot 18 + 1 \cdot 6) + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 18] -$$

$$- \frac{1}{EJ_P} \cdot \frac{1 \cdot 5}{6} \cdot 6 \cdot (2 \cdot 3 + \frac{3}{2}) - \frac{1}{EJ_C} \cdot \frac{6+4}{2} \cdot 2 \cdot 9 - \frac{1}{EJ_P} \cdot \frac{3 \cdot 9}{12} \cdot (3 \cdot 4 + 1) = -\frac{339,75}{EJ_C};$$

т. е. $\sum \Delta = \Delta_{SPq}$.

Таким образом, оба условия удовлетворяются. Следовательно, коэффициенты канонических уравнений рассчитаны верно.

4.6. Решение системы канонических уравнений и проверка ее правильности

Подставив в систему уравнений значения коэффициентов канонических уравнений, получим

$$\begin{cases} 108X_1 - 25,5X_2 - 307,125 - 131,625 = 0; \\ -25,5X_1 + 11,333X_2 + 72 + 27 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдем значения неизвестных

$$X_1 = 4,267 \text{ кН}; \quad X_2 = 0,865 \text{ кН}.$$

Правильность вычисления неизвестных проверим путем подстановки найденных значений X_1 и X_2 в исходные уравнения:

$$108 \cdot 4,267 - 25,5 \cdot 0,865 - 438,750 = 460,836 - 460,808 \approx 0;$$

$$-25,5 \cdot 4,267 + 11,333 \cdot 0,865 + 99 = -108,808 + 108,803 \approx 0.$$

4.7. Построение окончательной эпюры изгибающих моментов $M_{ок}$

Ординаты окончательной эпюры изгибающих моментов $M_{ок}$ в характерных сечениях заданной системы целесообразно подсчитать в табличной форме (табл. 4.2), предварительно пронумеровав все характерные сечения и задавшись правилом знаков изгибающих моментов (рис. 4.2к).

Таблица 4.2

Номер сечения	$\bar{M}_1 \cdot X_1$, кН·м	$\bar{M}_2 \cdot X_2$, кН·м	M_P , кН·м	M_q , кН·м	$M_{ок}$, кН·м
0	25,602	0	- 9,0	- 18,0	- 1,398
1	25,602	- 1,73	- 9,0	- 18,0	- 3,128
2	25,602	- 1,73	- 9,0	- 18,0	- 3,128
3	12,801	- 1,73	0	- 6,0	5,071
4	0	- 1,73	0	0	- 1,730
5	0	0	0	0	0
6	12,801	0	0	- 6,0	6,801
7	6,400	0	0	0	6,400
8	6,400	0	0	0	6,400
9	0	0	0	0	0

Окончательную эпюру изгибающих моментов $M_{ок}$ для заданной системы строим в соответствии с принципом независимости действия сил путем сложения «исправленных» эпюр $\bar{M}_1 \cdot X_1$ и $\bar{M}_2 \cdot X_2$ с грузовыми эпюрами M_P и M_q , которые построены в основной системе

$$M_{ок} = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + M_P + M_q.$$

«Исправленные» эпюры изгибающих моментов $\bar{M}_1 \cdot X_1$ и $\bar{M}_2 \cdot X_2$ строим путем умножения ординат единичных эпюр $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$, соответственно на значения X_1 и X_2 с учетом знака. Построенные таким образом эпюры $\bar{M}_1 \cdot X_1$ и $\bar{M}_2 \cdot X_2$ приведены на рис. 4.3а, б.

Так как на участке 2 – 3 эпюра $M_{ок}$ (рис. 4.3в) криволинейна, то для уточнения ее очертания необходимо найти экстремальное значение изгибающего момента. Для этого рассмотрим элемент 2 – 3, вырезанный из статически неопределимой системы. На этот ригель действует равномерно распределенная нагрузка $q=2$ кН/м и два опорных момента $M_2 = -3,128$ кН·м и $M_3=5,071$ кН/м (табл. 4.2 и рис. 4.3в).

Расчетная схема этого элемента показана на рис. 4.3г. Вначале вычислим опорные реакции, составив уравнения равновесия:

$$\sum M_2 = -R_3 \cdot 3 - 5,071 - 3,128 + 2 \cdot \frac{3^2}{2} = 0;$$

$$\sum M_3 = R_2 \cdot 3 - 5,071 - 3,128 + 2 \cdot \frac{3^2}{2} = 0,$$

откуда $R_2 = 5,733$ кН и $R_3 = 0,267$ кН.

Проверим правильность вычисления опорных реакций, составив уравнение равновесия:

$$\sum y = R_2 + R_3 - 3q = 5,733 + 0,267 - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0.$$

Определим координату z_{ext} сечения, в котором $Q=0$, а $M=M_{ext}$, используя следующую дифференциальную зависимость:

$$\frac{dM(z)}{dz} = Q(z) = R_2 - qz = 0,$$

откуда $z = z_{ext} = \frac{R_2}{q} = \frac{5,733}{2} = 2,8665$ м.

Тогда для этого сечения получим:

$$M_{ext} = R_2 z_{ext} - \frac{q z_{ext}^2}{2} - 3,128 = 5,733 \cdot 2,8665 - \frac{2 \cdot 2,8665^2}{2} - 3,128 = 5,099 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По найденным значениям ординат строим, эпюру изгибающих моментов $M_{ок}$ для заданной рамы (рис. 4.3в).

4.8. Проверка правильности построения эпюры $M_{ок}$ и построение эпюры Q

Для проведения статической проверки вырезаем жесткие узлы рамы кроме опорных, прикладываем все действующие в них моменты и проверяем условия равновесия $\sum M_{уз} = 0$.

В нашем примере вырежем узлы B и C (рис. 4.3д) и проверим их равновесие.

Узел B : $\sum M_{уз} = 3,128 - 3,128 = 0$.

Узел C : $\sum M_{уз} = 5,071 + 1,73 - 6,801 = 0$.

Условия равновесия узлов B и C выполняются. Выполнение равновесия узлов является необходимым, но недостаточным. Достаточным условием правильности определения $M_{ок}$, является выполнение деформационной проверки заданной

системы с применением эпюры $M_{ок}$, суть которого заключается в доказательстве отсутствия перемещения в точках и по направлению каждой отброшенной связи, т. е.

$$\Delta_S = \sum_{j=1}^k \int_0^{l_j} \frac{M_{ок} \bar{M}_\Sigma}{EJ_j} dx = 0.$$

Эта проверка хотя и не имеет физического смысла, так как складываются различные по направлению перемещения, но она дает возможность доказать правильность построения $M_{ок}$ во всех сечениях заданной системы.

Для удобства вычислений криволинейную эпюру $M_{ок}$ на участке 2 – 3 (рис. 4.3в) целесообразно расчленить на трапецеидальную и параболическую (рис. 4.4).

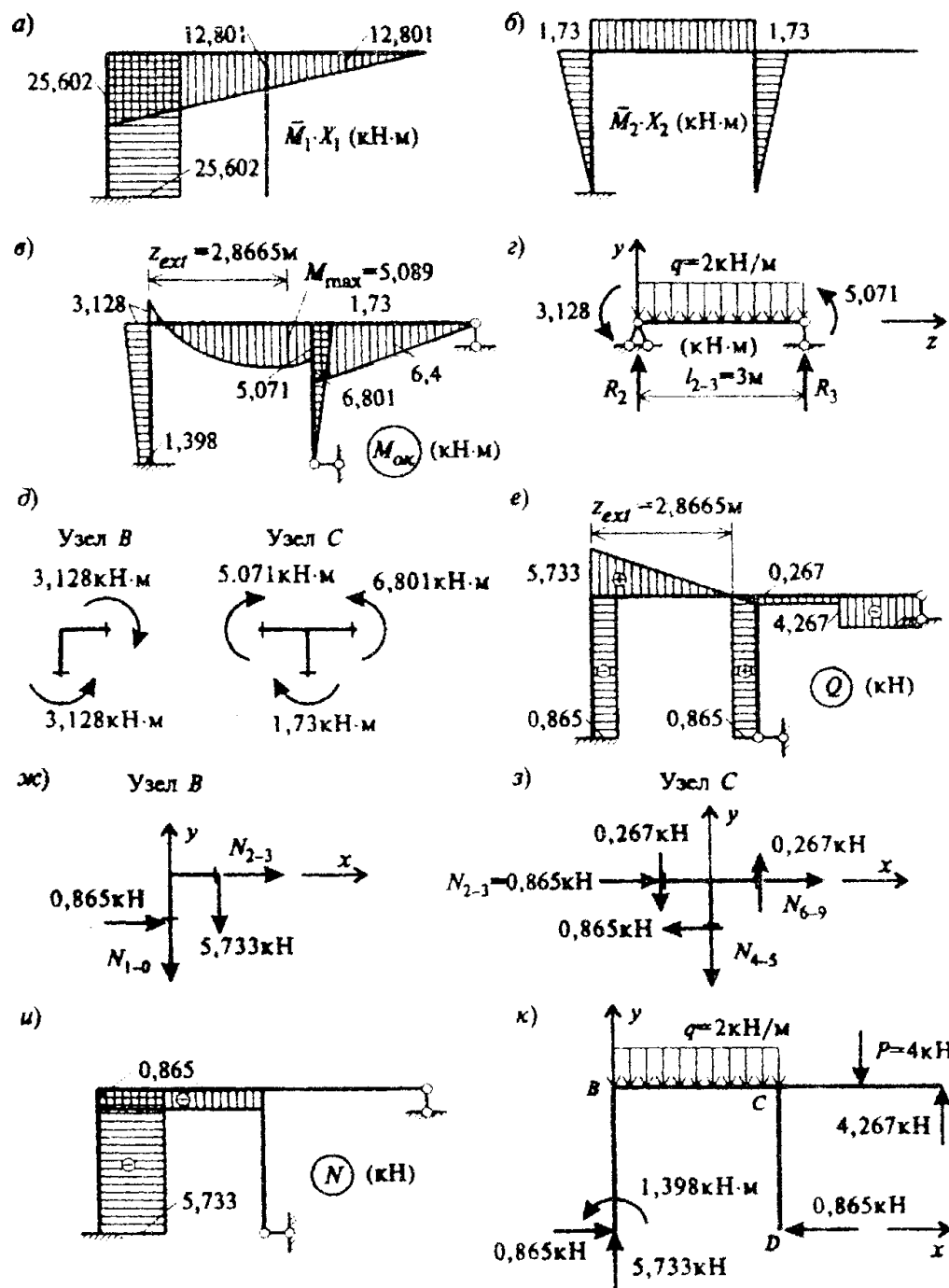


Рисунок 4.3

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta_S = & -\frac{1}{EJ_C} \frac{2}{6} [2(1,398 \cdot 6 + 3,128 \cdot 4) + 3,128 \cdot 6 + 1,398 \cdot 4] + \frac{2 \cdot 3^2}{12EJ_P} \frac{4+1}{2} + \\ & + \frac{3}{6EJ_P} [2(-3,128 \cdot 4 + 5,071 \cdot 1) - 3,128 \cdot 1 + 5,071 \cdot 4] + \frac{1}{EJ_C} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1,73 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \\ & + \frac{1,5}{6EJ_P} [2(6,8 \cdot 3 + 6,4 \cdot 1,5) + 6,8 \cdot 1,5 + 6,4 \cdot 3] + \frac{1}{EJ_P} \frac{1}{2} \cdot 6,4 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 \approx 0.\end{aligned}$$

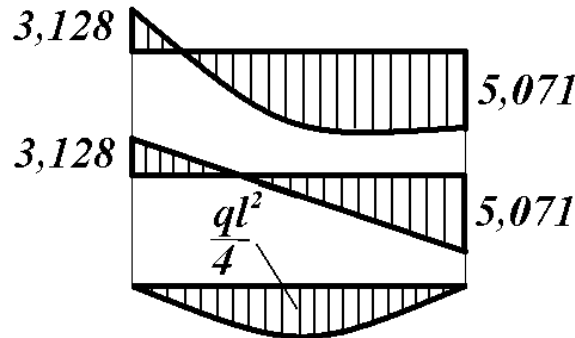


Рисунок 4.4

Ординаты эпюры $Q(x)$ определяем, используя зависимость $Q(x)=dM(x)/dx$ или записывая в конечных разностях:

$$Q(x) = Q^0(x) + \frac{M_{прав} - M_{лев}}{l},$$

где $Q^0(x)$ – поперечная сила в сечениях с координатой x по длине участка, имеющего расчетную схему в виде простой двухопорной балки, загруженной заданной внешней нагрузкой (рис. 4.3г).

Участок 0 – 1 (рис. 4.2к). На этом участке внешняя нагрузка отсутствует, поэтому $Q^0(x)=0$, и Q_{0-1} определяем по формуле:

$$\begin{aligned}Q(x) &= Q^0(x) + \frac{M_{прав} - M_{лев}}{l}, \\ Q_{0-1} &= \frac{-3,128 - (-1,398)}{2} = -0,865 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Участок 2 – 3. В этом случае при наличии нагрузки $q=2$ кН/м имеем

$$Q_{2-3} = \frac{ql}{2} - qx + \frac{5,071 - (-3,128)}{3} = 3 - 2x + 2,733 = 5,733 - 2x,$$

откуда при $x=0$, $Q_2=5,733$ кН; при $x=l=3$ м, $Q_3=5,733-6= - 0,267$ кН.

$$\text{Участок 4 – 5.} \quad Q_{4-5} = \frac{1,73 - 0}{2} = 0,865 \text{ кН}$$

$$\text{Участок 6 – 7.} \quad Q_{6-7} = \frac{-6,4 - (-6,801)}{1,5} = 0,267 \text{ кН.}$$

$$\text{Участок 8 – 9.} \quad Q_{8-9} = \frac{0 - 6,4}{1,5} = -4,267 \text{ кН.}$$

По найденным значениям ординат строим эпюру Q (рис. 4.3е).

4.9. Построение эпюры N

Ординаты эпюры продольных сил определяем из условия равновесия $\sum F_{kx} = 0$ и

$$\sum F_{ky} = 0$$

узлов рамы, вырезанных из эпюры Q . При этом отрицательную поперечную силу направляем так, чтобы она вращала вырезанный узел против хода часовой стрелки, а положительную – по ходу часовой стрелки. Нормальные силы направляем от узла, т.е. предполагаем, что стойка и ригель растянуты.

Вырезав узел B (рис. 4.3ж), составим уравнение равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \quad N_{2-3} + 0,865 = 0, \quad N_{2-3} = -0,865 \text{ кН};$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad N_{1-0} + 5,733 = 0, \quad N_{1-0} = -5,733 \text{ кН.}$$

Знак «минус» говорит о том, что направления продольных усилий ригеля и стойки были приняты неверно. Поэтому в действительности ригель и стойка работают не на растяжение, а на сжатие.

Из рассмотрения равновесия узла C (рис. 4.3з) следует:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad N_{6-9} - 0,865 + 0,865 = 0, \quad N_{6-9} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad -N_{4-5} - 0,267 + 0,267 = 0, \quad N_{4-5} = 0.$$

По вычисленным значениям ординат для каждого участка строим эпюру N (рис. 4.3и).

4.10. Статическая и деформационная проверка рамы в целом

Статическая проверка рамы в целом производится для подтверждения правильности построения эпюр $M_{ок}$, Q и N . Она заключается в проверке

равновесия рамы в целом или любой отсеченной ее части, т. е. проверке удовлетворения условий равновесия $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$, $\sum M_A(\bar{F}_{ki}) = 0$ под воздействием внешних нагрузок и внутренних усилий, возникающих в местах проведения сечений.

Для выполнения этой проверки отсечем заданную раму от всех опор и заменим их действие возникающими в этих сечениях внутренними усилиями M , Q и N (рис. 4.3к), значения которых определяются по эпюрам $M_{ок}$, Q и N . Направление всех внутренних усилий при этом должно соответствовать их знаку. Следовательно,

$$\sum F_{kx} = 0, \quad 0,865 - 0,865 = 0, \quad 0 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad 5,733 + 4,267 - 6 - 4 = 0, \quad 0 = 0;$$

$$\sum M_A(\bar{F}_{ki}) = 0, \quad 1,398 - \frac{2 \cdot 3^2}{2} - 4 \cdot 4,5 + 4,267 \cdot 6 = -25,602 + 25,602 = 0, \quad 0 = 0.$$

Уравнения равновесия удовлетворяются, следовательно, рама рассчитана, верно.

2. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Расчетно-графическая работа, как правило, пишется от руки чернилами и шариковой ручкой на одной стороне листа писчей бумаги. Допускается представление записки в отпечатанном виде. Листы работы должны иметь сквозную нумерацию. Формат листа пояснительной записки А4: 210×297 мм. Каждый лист (начиная со второго) снабжается рамкой с основной надписью (Приложение В).

Материал должен быть изложен технически грамотно, четко, сжато. Расчеты иллюстрируются эскизами, схемами, эпюрами, графиками с обязательным применением чертёжных инструментов.

Формулы выносятся в отдельную строку. Формулы, на которые делаются ссылки в тексте, нумеруются цифрами в круглых скобках, размещаемыми справа от формулы.

Расчетно-пояснительная записка должна быть сшита, иметь обложку и титульный лист, оформленный в соответствии с приложением А.

Работа, выполненная не по своему варианту, не проверяется.

3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ, ПРИМЕРНЫЙ КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ЕЕ ВЫПОЛНЕНИЯ

Изучение дисциплины «Строительная механика» производится в соответствии с Государственным образовательным стандартом и основными образовательными программами соответствующих специальностей. Рекомендуется следующая последовательность изучения курса:

- изучение теоретического материала на лекции;
- последующее углубленное изучение материала по учебникам и учебным пособиям. При этом обращается особое внимание на понимание физической сущности явления, на используемые ограничения и допущения;
- по материалам предварительно изученного курса решаются рекомендованные задачи;
- после углубленного изучения темы решаются относящиеся к ней задачи расчетно-графической работы.

Работа выполняется по индивидуальному заданию. Задание на РГР выдаётся на 2 неделе семестра и выполняется по следующему примерному календарному плану:

Выдача задания	2	неделя семестра
Выполнение работы	3 – 13	неделя семестра
Проверка работы преподавателем	14	неделя семестра
Возврат на доработку (в случае необходимости)	14	неделя семестра
Защита работы	15	неделя семестра

4. ПОРЯДОК ЗАЩИТЫ И ОТВЕТСТВЕННОСТЬ СТУДЕНТА ЗА ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Соответствие выполненной работы шифру, оформление и правильность решения задач проверяется преподавателем, который дает допуск к защите или возвращает

работу на доработку (замечания по доработке указываются преподавателем на полях или в тексте работы).

При выявлении несоответствия выполненной работы исходным данным студент выполняет работу заново в соответствии со своим вариантом (шифром).

При защите студент объясняет решение каждой задачи, дает обоснование полученных результатов и отвечает на вопросы преподавателя по дисциплине. РГР оценивается – «зачтено» или «не зачтено».

Студенты, не выполнившие РГР, не устранившие замечания преподавателя или не защитившие РГР, не допускаются к сдаче экзамена по дисциплине.

5. Список рекомендуемой литературы

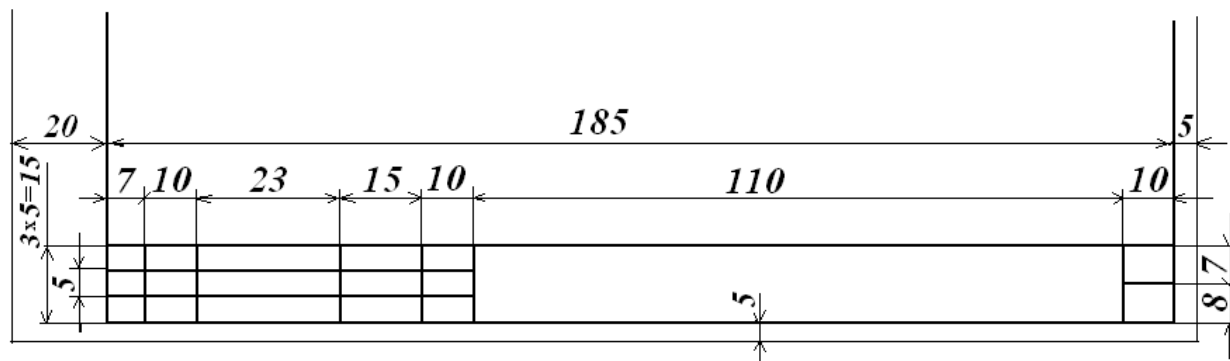
5.1. Основная литература

1. Дарков В. А., Шапошников Н. Н. Строительная механика: Учебник. 9-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2004.
2. Анохин Н. Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч 2. Статически неопределимые системы: Учеб. пособие. – М.: АСВ, 2000. – 464 с.
3. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов: Учебник / Под ред. А. Е. Саргсяна. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высшая школа, 2000. – 416 с.

5.2. Дополнительная литература

1. Основы строительной механики стержневых систем: Учебник / Н. Н. Леонтьев и др. – М.: АСВ, 1996. – 541 с.
2. Анохин Н. Н. Строительная механика в примерах и задачах. Ч 1. Статически определимые системы: Учеб. пособие. – М.: Изд-во АСВ, 1999. – 335 с.
3. Киселев В. А. Строительная механика. Общий курс: Учеб. для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.
4. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: АСВ, 1996. – 541 с.
5. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Под ред. Г. К. Клейна. – М.: Высш. шк., 1980. – 384 с.
6. Синицын С. Б., Ванюшенков М. Г. Матричные методы и МКЭ решения задач строительной механики. – М.: МИСИ, 1984. – 125 с.

Основная надпись на втором и последующих листах текстовой части работы



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
Строительная механика

Направление подготовки 08.03.01 Строительство
Направленность (профиль) Промышленное и гражданское строительство

Введение

1. Самостоятельная работа как важнейшая форма учебного процесса
2. Цели и основные задачи самостоятельной работы
3. Виды самостоятельной работы
4. Организация самостоятельной работы
5. Общие рекомендации по организации самостоятельной работы
6. Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы
7. Критерии оценки самостоятельной работы

Основная задача высшего образования заключается в формировании творческой личности профессионала, способного к саморазвитию, самообразованию и инновационной деятельности.

Успешное усвоение дисциплин по различным образовательным программам предполагает активное, творческое участие обучающегося на всех этапах ее освоения путем планомерной, повседневной не только аудиторной, но и самостоятельной работы.

Самостоятельная работа студентов является одной из важнейших составляющих образовательного процесса. Самостоятельная работа – это процесс активного, целенаправленного приобретения обучающимися новых знаний, умений без непосредственного участия преподавателя, характеризующийся предметной направленностью, эффективным контролем и оценкой результатов деятельности обучающегося.

Объем самостоятельной работы (в часах) определен учебным планом.

Методические указания по организации самостоятельной работы студентов (далее – СРС) являются обязательной частью учебно-методических комплексов учебных дисциплин.

Методические указания по организации самостоятельной работы для студентов, наряду с методическими указаниями по выполнению лабораторных работ, практических занятий и работе с лекционным материалом; по формам текущего, промежуточного и итогового контроля; по выполнению курсовых работ/проектов, расчетно-графических работ, контрольных работ; по подготовке и защите выпускных квалификационных работ, составляют единый комплекс методического обеспечения УМК каждой учебной дисциплины.

Цель методических указаний СРС – определить роль и место самостоятельной работы студентов в учебном процессе; конкретизировать ее уровни, формы и виды; обобщить методы и приемы выполнения определенных типов учебных заданий; объяснить критерии оценивания.

1. Самостоятельная работа как важнейшая форма учебного процесса

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа обучающихся, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой обучающихся).

Самостоятельная работа обучающихся является важным видом учебной и научной деятельности. В связи с этим, обучение включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРО должна стать эффективной и целенаправленной работой.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи высшего образования – «подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности».

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы обучающихся над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста обучающихся, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие обучающихся в практических занятиях, лабораторных работах, выполнение контрольных и расчетно-графических работ, написание курсовых работ (проектов) и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа обучающихся играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя:

- изучение и систематизацию официальных государственных документов - законов, постановлений, указов, нормативно-инструкционных и справочных материалов с использованием информационно-поисковых систем «Консультант-плюс», «Гарант», глобальной сети «Интернет»;

- изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации;

- подготовку докладов и рефератов, написание выпускных квалификационных работ;

- участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.

Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.

2. Цели и основные задачи самостоятельной работы

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для деятельности.

Цели самостоятельной работы:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений;

- углубление и расширение теоретических знаний;

- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;

- развитие познавательных способностей, активности обучающихся, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;

- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

- развитие исследовательских умений.

Основными задачами СРМ являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

- углубление и расширение теоретических знаний;

- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;

- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;

- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

- развитие исследовательских умений;

- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к промежуточной аттестации - зачетам и экзаменам.

3. Виды самостоятельной работы

Самостоятельная работа студента включает:

- самостоятельное изучение основной и дополнительной литературы;

- подготовка к лекциям;

- подготовка к практическим занятиям;

- выполнение расчетно-графической работы;

- подготовка к текущей и промежуточной аттестации;

Для выполнения самостоятельной работы студентам необходимо ознакомиться с содержанием рабочей программы дисциплины, с целями и задачами дисциплины, ее связями с другими дисциплинами образовательной программы, методическими разработками по данной дисциплине, с графиком консультаций преподавателей, с перечнем ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины.

4. Организация самостоятельной работы

Самостоятельная работа студента – способ активного, целенаправленного приобретения новых знаний и умений без непосредственного участия в этом процессе преподавателей.

Организационные мероприятия, обеспечивающие развитие навыков самостоятельной работы студентов, воспитание их творческой активности и инициативы, а также, в целом, обеспечивающие нормальное функционирование самостоятельной работы студентов, должны основываться на следующих предпосылках:

- самостоятельная работа должна быть конкретной по своей предметной направленности;
- самостоятельная работа должна сопровождаться эффективным, непрерывным контролем и оценкой ее результатов.

Предметно и содержательно самостоятельная работа определяется федеральным государственным образовательным стандартом по направлению подготовки, основной образовательной программой, учебным планом, рабочими программами дисциплин.

Контроль самостоятельной работы и оценка ее результатов организуются как единство двух форм:

- самоконтроль и самооценка;
- внешний контроль и оценка со стороны преподавателей, государственных экзаменационных комиссий и др.

5. Общие рекомендации по организации самостоятельной работы

Организация самостоятельной работы студентов направлена на решение следующих задач:

а) закрепление, обобщение и повторение пройденного учебного материала; применение полученных знаний в традиционных педагогических ситуациях и при решении задач высокого уровня неопределенности;

б) совершенствование умений и навыков по изучаемой дисциплине; формирование межпредметных, общеучебных, исследовательских умений;

в) активизация учебной и научно-исследовательской деятельности обучающихся, ее максимальная индивидуализация с учетом индивидуальных особенностей и академической успеваемости студентов;

г) формирование готовности студентов к самообразованию в течение всей жизни.

Видами занятий для самостоятельной работы могут быть:

Для овладения знаниями:

- чтение текста (учебника, первоисточника, дополнительной литературы, конспектов лекций);
- составление плана текста, графическое изображение структуры текста;
- конспектирование текста; выписки из текста, работа со словарями и справочниками, ознакомление с нормативными документами;
- учебно-исследовательская работа, использование аудио и видеозаписей, компьютерной техники, интернета и др.

Для закрепления и систематизации знаний:

- работа с конспектом лекций, повторная работа над материалом;
- составление плана и тезисов ответа;
- составление таблиц для систематизации учебного материала;
- ответы на контрольные вопросы;
- аналитическая обработка текста (аннотирование, рецензирование, реферирование, контент-анализ);
- подготовка сообщения для выступления на конференции;

- подготовка рефератов, докладов;
- составление библиографии.

Для формирования умений:

- выполнение контрольных работ;
- выполнение чертежей, схем, расчетно-графических работ;
- проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности.

- подготовка курсовых и дипломных работ (проектов);

Для формирования компетенций:

- принятие решений по конкретной ситуации;
- грамотная формулировка задания для исполнения;
- организация контроля по сферам деятельности.

6. Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы

Система вузовского обучения подразумевает значительную самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности.

6.1 Самостоятельное изучение основной и дополнительной литературы

Работа с литературой является основным методом самостоятельного овладения знаниями. Это сложный процесс, требующий выработки определенных навыков, поэтому студенту нужно обязательно научиться работать с книгой.

Осмысление литературы требует системного подхода к освоению материала. В работе с литературой системный подход предусматривает не только тщательное (иногда многократное) чтение текста и изучение специальной литературы, но и обращение к дополнительным источникам – справочникам, энциклопедиям, словарям. Эти источники – важное подспорье в самостоятельной работе студента, поскольку глубокое изучение именно их материалов позволит студенту уверенно «распознавать», а затем самостоятельно оперировать теоретическими категориями и понятиями, следовательно – освоить новейшую научную терминологию. Такого рода работа с литературой обеспечивает решение студентом поставленной перед ним задачи (подготовка к практическому занятию, выполнение контрольной работы и т.д.).

Выбор литературы для изучения делается обычно по предварительному списку литературы, который выдал преподаватель, либо путем самостоятельного отбора материалов. После этого непосредственно начинается изучение материала, изложенного в книге.

Наиболее надежный способ собрать нужный материал – составить план или конспект. *Конспект, план-конспект* – это последовательная фиксация отобранной и обдуманной в процессе чтения информации.

Цель – зафиксировать, переработать тот или иной научный текст. Они позволяют восстановить в памяти ранее прочитанное без дополнительного обращения к самой книге.

План – это «скелет» текста, он компактно отражает последовательность изложения материала. План как форма записи обычно более подробно передает содержание частей текста, чем оглавление книги или подзаголовки статей. Самые важные места в книге отмечайте, используя для этого легко стирающийся карандаш или вкладки листки. Запись любых планов следует делать так, чтобы ее легко можно было охватить одним взглядом.

Вся рекомендуемая для изучения курса литература подразделяется на основную и дополнительную. К основной литературе относятся источники, необходимые для полного и твердого усвоения учебного материала (учебники и учебные пособия). Необходимость изучения дополнительной литературы диктуется прежде всего тем, что в учебной литературе (учебниках) зачастую остаются неосвещенными современные проблемы, а также не находят отражение новые документы, события, явления, научные открытия последних лет. Поэтому дополнительная литература рекомендуется для более углубленного изучения программного материала.

6.2 Подготовка к лекциям и работа с конспектом лекций

При подготовке к лекции студенты должны предварительно ознакомиться с учебным материалом по данной теме и при конспектировании лекции акцентировать внимание на новых теоретических положениях, правовых и иных данных, не нашедших отражения в учебной литературе.

Лекция имеет цель – систематизация основы научных знаний по дисциплине, сконцентрировать внимание обучающихся на наиболее актуальных проблемах.

В ходе лекций преподаватель излагает и разъясняет основные, наиболее сложные понятия темы, а также связанные с ней теоретические и практические проблемы. Дает рекомендации на практические занятия и указания на самостоятельную работу.

Предварительное не углубленное знакомство с материалом очередной лекции дает многое. Студенты получают общее представление о ее содержании и структуре, о главных и второстепенных вопросах, о терминах и определениях. Все это облегчает работу на лекции и делает ее целеустремленной.

Основные моменты лекционных занятий конспектируются. Отдельные темы предлагаются для самостоятельного изучения с обязательным составлением конспекта.

Краткие записи лекций, их конспектирование помогает усвоить учебный материал. Конспект является полезным тогда, когда записано самое существенное, основное и сделано это самим обучающимся.

Запись лекций рекомендуется вести по возможности собственными формулировками. Желательно запись осуществлять на одной странице, а следующую оставлять для проработки учебного материала самостоятельно в домашних условиях.

Самостоятельную работу следует начинать с доработки конспекта, желательно в тот же день, пока время не стерло содержание лекции из памяти. С целью доработки необходимо в первую очередь прочитать записи, восстановить текст в памяти, а также исправить описки, расшифровать не принятые ранее сокращения, заполнить пропущенные места, понять текст, вникнуть в его смысл. Далее прочитать материал по рекомендуемой литературе, разрешая в ходе чтения, возникшие ранее затруднения, вопросы, а также дополнения и исправляя свои записи. Записи должны быть наглядными, для чего следует применять различные способы выделений. В ходе доработки конспекта углубляются, расширяются и закрепляются знания, а также дополняется, исправляется и совершенствуется конспект.

Работая над конспектом лекций, всегда необходимо использовать не только учебник, но и ту литературу, которую дополнительно рекомендовал лектор. Именно такая серьезная, кропотливая работа с лекционным материалом позволит глубоко овладеть знаниями.

6.3 Подготовка к практическим занятиям

Целью практических занятий является получение базовых навыков по применению теоретических знаний. Это необходимо при решении всевозможных задач на различных этапах практической деятельности.

Задачи подготовки и проведения практических занятий:

- закрепление и углубление знаний;
- создание практических навыков и умений в практической деятельности и повседневной жизни для: поиска, первичного анализа и использования информации;
- анализа конкретных ситуаций и условий их реализации;
- изложения и аргументации собственных суждений по практической ситуации;
- развитие стремления и способности к самостоятельному исследованию изучаемых реальностей, их критической оценки.

Подготовка к практическим занятиям включает: изучение нормативных актов, учебной литературы, лекционного материала; подготовка рефератов.

Практические занятия по дисциплине проводятся в форме различных дискуссий (семинарских занятий) и (или) анализа конкретных ситуаций (выполнение практических заданий).

6.4 Выполнение курсовой работы (проекта)

Курсовая работа (проект) - это самостоятельное исследование обучающимся определенной проблемы, комплекса взаимосвязанных вопросов, касающихся конкретной профессиональной ситуации.

Курсовая работа (проект) не должна состояться из фрагментов статей, монографий, пособий. Кроме простого изложения фактов и цитат, в курсовой работе (проекте) должно проявляться авторское видение проблемы и ее решения.

Рассмотрим основные этапы подготовки курсовой работы (проекта).

Выполнение курсовой работы (проекта) начинается с выбора темы.

Затем студент приходит на первую консультацию к руководителю, которая предусматривает:

- обсуждение цели и задач работы, основных моментов избранной темы;
- консультирование по вопросам подбора литературы;
- составление предварительного плана;
- составление графика выполнения курсовой работы (проекта).

Следующим этапом является работа с литературой. Необходимая литература подбирается студентом самостоятельно.

После подбора литературы целесообразно сделать рабочий вариант плана работы. В нем нужно выделить основные вопросы темы и параграфы, раскрывающие их содержание.

Составленный список литературы и предварительный вариант плана уточняются, согласуются на очередной консультации с руководителем.

Затем начинается следующий этап работы - изучение литературы. Только внимательно читая и конспектируя литературу, можно разобраться в основных вопросах темы и подготовиться к самостоятельному (авторскому) изложению содержания курсовой работы (проекта). Конспектируя первоисточники, необходимо отразить основную идею автора и его позицию по исследуемому вопросу, выявить проблемы и наметить задачи для дальнейшего изучения данных проблем.

Систематизация и анализ изученной литературы по проблеме исследования позволяют написать первую (теоретическую) главу.

Выполнение курсовой работы (проекта) предполагает проведение определенного исследования. На основе разработанного плана обучающийся осуществляет сбор фактического материала, необходимых цифровых данных. Затем полученные результаты подвергаются анализу, статистической, математической обработке и представляются в виде текстового описания, таблиц, графиков, диаграмм. Программа исследования и анализ полученных результатов составляют содержание второй (аналитической) главы.

В третьей (рекомендательной) части должны быть отражены мероприятия, рекомендации по рассматриваемым проблемам.

Рабочий вариант текста курсовой работы (проекта) предоставляется руководителю на проверку. На основе рабочего варианта текста руководитель вместе со студентом обсуждает возможности доработки текста, его оформление. После доработки курсовая работа (проект) сдается на кафедру для ее оценивания руководителем.

Защита курсовой работы (проекта) обучающихся проходит в сроки, установленные графиком учебного процесса.

При подготовке к защите курсовой работы (проекта) обучающийся должен знать основные положения работы, выявленные проблемы и мероприятия по их устранению, перспективы развития рассматриваемой экономической ситуации.

Защита курсовой работы (проекта) проводится на кафедре при наличии у обучающегося курсовой работы (проекта). Оценка - дифференцирована. Преподаватель оценивает защиту курсовой работы (проекта) и заполняет графу "оценка" в ведомости и в зачетной книжке.

Не допускаются к защите варианты курсовых работ (проектов), найденные в Интернет, сканированные варианты учебников и учебных пособий, а также копии ранее написанных работ.

6.5 Выполнение расчетно-графической работы

Расчетно-графическая работа является важным элементом учебного процесса, предусмотрена учебным планом.

Цель расчетно-графической работы – систематизация и закрепление теоретических знаний, и развитие практических навыков по решению задач в области теплогазоснабжения и вентиляции, выработка навыков анализа данных и формулирования выводов по полученным результатам.

Задачами расчетно-графической работы являются:

- развитие навыков самостоятельной работы в области решения практических задач;
- подбор и систематизация теоретического материала, являющегося основой для решения практической задачи, развитие навыков самостоятельной работы с учебной и методической литературой;
- проведение расчетов показателей по исходным данным и анализ полученных значений;
- формулирование выводов по полученным результатам.

Выполнение расчетно-графической работы проводится студентом по конкретному варианту задания, который необходимо уточнить у преподавателя.

Содержанием расчетно-графической работы является краткое изложение теоретического материала к каждой задаче, решение задачи по индивидуальному варианту, включающее в себя расчет основных показателей, анализ полученных результатов, формулирование выводов.

Расчетно-графическая работа должна содержать:

1. Титульный лист.
2. Условие задачи.
3. Теоретическая часть по каждой задаче (1-3 страницы).
4. Практическая часть и выводы по каждой задаче.
5. Библиографический список (не менее 5 источников).

Условие задачи оформляется по центру заголовком «Задача №».

Текст условия задачи должен совпадать с текстом в методических указаниях, включая таблицы, при их наличии.

Далее излагается теоретический материал, лежащий в основе решения задачи, включающий в себя основные определения, формулы расчетов показателей и др.

В практической части излагается подробное решение задачи. При необходимости результаты оформляются в виде сводной таблицы.

К каждой задаче необходимо сформулировать выводы, проанализировав полученные результаты.

Расчетно-графическая работа должна выполняться в соответствии с установленным графиком. В процессе выполнения расчетно-графической работы допускаются консультации у преподавателя на практических занятиях.

Выполнение основных этапов контролируется преподавателем и учитывается при проведении текущего контроля по дисциплине и при оценке расчетно-графической работы.

6.6 Подготовка к текущей и промежуточной аттестации

Система контроля включает в себя текущий и промежуточный контроль. Текущий контроль должен быть непрерывным. Формы текущего контроля устанавливаются по усмотрению преподавателя. Промежуточный контроль – это итог работы студента за семестр с учетом всех видов учебной работы.

Текущий контроль. Текущий контроль успеваемости обучающихся – это систематическая проверка учебных достижений обучающихся, проводимая в целях оценивания хода освоения дисциплин в соответствии с рабочей программой.

Текущий контроль успеваемости студентов очной формы обучения проводится по всем дисциплинам учебного плана в течение семестра:

- на лабораторных, семинарских, практических занятиях, по которым рабочими программами дисциплин предусмотрены отчетности;

- по всем формам самостоятельной работы студентов в заранее установленное время.

Текущий контроль успеваемости студентов осуществляется преподавателями департамент, за которыми закреплены дисциплины учебного плана, и может проводиться в следующих формах:

- собеседование,
- расчетно-графическая работа.

Виды и сроки проведения текущего контроля успеваемости студентов устанавливаются рабочей программой дисциплины.

Текущий контроль успеваемости является элементом внутривузовской системы контроля качества подготовки обучающихся и способствует активизации познавательной деятельности студентов в ходе аудиторных занятий, при выполнении программ самостоятельной и индивидуальной работы.

Текущий контроль успеваемости должен учитывать выполнение обучающимися всех видов учебных занятий, предусмотренных учебным планом и рабочей программой дисциплины, самостоятельную, исследовательскую работу и посещаемость учебных занятий.

Анализ результатов текущего контроля студентов проводится 2 раза в семестр:

- в первом полугодии - на 1 ноября, на 10 декабря;
- во втором полугодии - на 1 апреля, на 20 мая.

Анализ результатов текущего контроля студентов проводится в институтах: к указанным выше датам итоги текущего контроля и количество пропущенных занятий (в часах) преподаватели, ведущие занятия, проставляют в листы текущего контроля успеваемости, которые анализируются и хранятся в институтах.

Промежуточная аттестация. Промежуточная аттестация призвана оценить уровень сформированности компетенций, полученных студентами в процессе изучения дисциплины, курсового проектирования и обеспечить контроль качества освоения образовательных программ.

Промежуточная аттестация проводится по завершении изучения какой - либо дисциплины.

Формами промежуточной аттестации являются зачет и экзамен.

При явке на промежуточную аттестацию обучающийся обязан предъявить зачетную книжку. Фамилия обучающегося должна значиться в зачетно-экзаменационной ведомости.

Зачеты студентам по изучаемым дисциплинам выставляются преподавателем, проводившим практические, семинарские или лабораторные занятия группы (подгруппы), на последнем занятии по результатам работы в семестре. Для студентов, обучающихся на основе рейтинговой системы оценки знаний, зачет выставляется автоматически при условии сдачи всех контрольных мероприятий, предусмотренных текущим контролем успеваемости.

7. Критерии оценки самостоятельной работы

Компетенции (знания, умения и навыки) студентов оцениваются оценками:

- «отлично»;
- «хорошо»;
- «удовлетворительно»;
- «неудовлетворительно»;
- «зачтено»;
- «не зачтено».

Экзамены оцениваются по пятибалльной системе: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно».

Основные критерии оценивания компетенций:

Отметка «зачтено» ставится студентам, успешно обучающимся по данной дисциплине в семестре и не имеющим задолженностей по результатам текущего контроля успеваемости.

Отметка «не зачтено» ставится студенту, имеющему задолженности по результатам текущего контроля успеваемости по данной дисциплине.

Оценка «отлично» выставляется студенту, если он глубоко и прочно усвоил программный материал, исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно его излагает, умеет тесно увязывать теорию с практикой, свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний, причем не затрудняется с ответом при видоизменении заданий, использует в ответе материал монографической литературы, правильно обосновывает принятое решение, владеет разносторонними навыками и приемами выполнения практических задач.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он имеет знания только основного материала, но не усвоил его деталей, допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, испытывает затруднения при выполнении практических работ.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы. Отметка «неудовлетворительно» выставляется также, если обучающийся после начала экзамена отказался его сдавать.

Оценка «неудовлетворительно» проставляется только в экзаменационную ведомость, в зачетную книжку студента проставлять отметку «неудовлетворительно» не разрешается.

Критерии оценки уровня обученности и уровня сформированности компетенций по дисциплине устанавливает кафедра и отражает их в рабочей программе и фондах оценочных средств дисциплины.

Ответственность за единообразие требований, предъявляемых на экзаменах, несет заведующий кафедрой. По дисциплинам, изучаемым в течение двух и более семестров, итоговой оценкой является оценка, полученная на последнем экзамене.

Заключение

Самостоятельная работа всегда завершается какими-либо результатами. Таким образом, широкое использование методов самостоятельной работы, побуждающих к мыслительной и практической деятельности, развивает столь важные интеллектуальные качества человека, обеспечивающие в дальнейшем его стремление к постоянному овладению знаниями и применению их на практике.