

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению практических занятий

по дисциплине «Алгебра»

для студентов

Специальности 10.05.03 Информационная безопасность

автоматизированных систем

Специализация «Анализ безопасности информационных систем»

Ставрополь

2026

ВВЕДЕНИЕ

Цель и задачи освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Алгебра» является формирование у будущего специалиста по специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем специализация «Анализ безопасности информационных систем» является формирование у студентов фундаментальных математических знаний и навыков в области алгебры, необходимых для решения профессиональных задач, связанных с криптографией, анализом алгоритмов защиты информации и разработкой безопасных систем.

Задачи дисциплины:

- Изучение алгебраических структур – овладение теорией групп, колец, полей и решеток, лежащих в основе современных криптографических алгоритмов.
- Освоение линейной алгебры – изучение матричных операций, векторных пространств и линейных преобразований, применяемых в алгоритмах обработки данных и стеганографии.
- Развитие абстрактного мышления – формирование умения формализовать задачи информационной безопасности с помощью математического аппарата.
- Применение алгебры в криптографии – изучение конечных полей, эллиптических кривых и других структур, используемых в современных криптосистемах (RSA, ECC, AES).
- Решение систем уравнений – освоение методов решения линейных и нелинейных систем, применяемых в криптоанализе и обратной инженерии.

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Основные понятия

Квадратную таблицу чисел, состоящую из n строк и n столбцов, будем называть **квадратной матрицей порядка n** . Обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = (a_{ij}) \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n).$$

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют **главную диагональ**, а элементы $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ образуют **побочную диагональ** матрицы.

Одной из важных характеристик квадратной матрицы является ее определитель или детерминант.

Определителем матрицы $A = (a_{ij})$ ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$) называется число, которое ставится в соответствие этой матрице и вычисляется по ее элементам. Обозначается определитель матрицы любым из символов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta, \quad \det A, \quad |A|.$$

1°. Определителем матрицы $A = (a_{11})$, состоящей из одного элемента, является само число a_{11} .

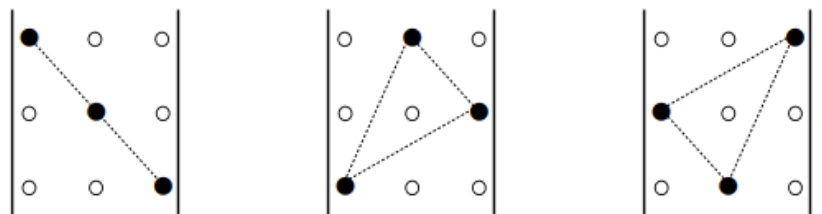
2°. Определитель второго порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

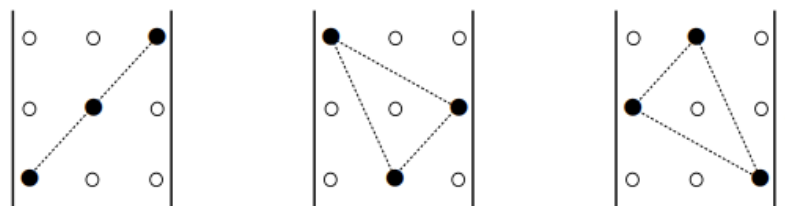
3°. Определитель третьего порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Для того чтобы запомнить эту формулу, используют правило Саррюса (или правило треугольников). Произведение $a_{11}a_{22}a_{33}$ элементов главной диагонали входит в формулу со знаком «+», также как и произведения $a_{12}a_{23}a_{31}$ и $a_{21}a_{32}a_{13}$ элементов, расположенных в вершинах треугольников, основания которых параллельны главной диагонали:



А произведение $a_{13}a_{22}a_{31}$ элементов побочной диагонали, а также произведения $a_{11}a_{23}a_{32}$ и $a_{21}a_{12}a_{33}$ входят со знаком «-»:



ПРИМЕР 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Используя правило Саррюса, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 2 = -3.$$

4°. Чтобы сформулировать общее правило вычисления определителя произвольного порядка, введем понятия минора и алгебраического дополнения элемента матрицы.

Если из матрицы A порядка n вычеркнуть i -ю строку и j -й столбец (строку

и столбец, на пересечении которых расположен элемент a_{ij}), то определитель полученной матрицы порядка $n-1$ называется минором элемента a_{ij} и обозначается M_{ij} .

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} будем называть произведение $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Рассмотрим, например, матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём миноры и алгебраические дополнения элементов a_{23} и a_{31} . Вычеркнем вторую строку и третий столбец, на пересечении которых находится элемент a_{23} , тогда

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -1.$$

Вычеркнув третью строку и первый столбец, на пересечении которых находится элемент a_{31} , получим

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 5.$$

Определитель n -го порядка может быть вычислен по любой из формул:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} \quad (\text{разложение по } i\text{-й строке}),$$

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} \quad (\text{разложение по } j\text{-му столбцу}),$$

причем результат вычислений не зависит от выбора строки или столбца.

ПРИМЕР 3.

Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель по третьему столбцу:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Полученные определители 3-го порядка также можно вычислить разложением по любой строке (столбцу). Разложим первый определитель, например, по второму столбцу, второй определитель – по третьему столбцу, а третий определитель – по третьей строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -16,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 19,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Окончательно имеем $\Delta = -1 \cdot (-16) + 1 \cdot 19 - 1 \cdot 7 = 28$. ■

Свойства определителя

1. Определитель не изменится, если его строки сделать столбцами, сохраняя их нумерацию:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Из свойства 1 следует, что всякое утверждение о строках определителя справедливо и для его столбцов, и обратно. Поэтому остальные свойства будем формулировать только для строк.

2. Определитель, имеющий нулевую строку, равен нулю.
3. Если поменять местами две строки определителя, то знак определителя изменится на противоположный.

4. Определитель, две строки которого совпадают, равен нулю.
5. Если все элементы некоторой строки имеют общий множитель, то этот множитель можно вынести за знак определителя.
6. Определитель, имеющий пропорциональные строки, равен нулю.
7. Если все элементы какой-либо строки представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у первого из которых в данной строке стоят первые слагаемые, у второго – вторые слагаемые:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Если к элементам какой-либо строки прибавить элементы другой строки, умноженные на одно и то же число, то определитель не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} & a_{23} + \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Замечание 1. Вычислить определитель третьего порядка можно следующим образом: к определителю справа приписывается сначала первый столбец, а затем второй столбец:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Со знаком «+» входят в формулу произведения $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$ и $a_{13}a_{21}a_{32}$ (произведение элементов главной диагонали и произведения элементов, находящихся на линиях, параллельных главной диагонали), со знаком «-» входят произведения $a_{31}a_{22}a_{13}$, $a_{32}a_{23}a_{11}$ и $a_{33}a_{21}a_{12}$ (произведение элементов побочной диагонали и произведения элементов, находящихся на линиях, параллельных

побочной диагонали).

Замечание 2. При вычислении определителя разложением по строке (столбцу) сначала можно, используя свойства определителя, получить в выбранной строке (столбце) максимально возможное число нулевых элементов.

Замечание 3. Используя свойства определителя, можно привести определитель к треугольному виду, когда все элементы под (или над) одной из диагоналей (главной или побочной) равны нулю. Например, если все элементы определителя под (или над) главной диагональю равны нулю, то определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

ПРИМЕР 5.

Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & -2 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель разложением по третьему столбцу, предварительно получив в этом столбце как можно больше нулей. Для этого из элементов первой строки вычтем элементы второй строки (обозначение I - II), затем из элементов второй строки вычтем элементы четвертой строки, умноженные на 3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & -2 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{I-II}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 6 & -2 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{II-3 \cdot IV}{=} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -3 \\ -28 & -2 & 0 & 7 \\ 6 & -2 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложив полученный определитель по третьему столбцу, в котором всего один ненулевой элемент, имеем

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -28 & -2 & 7 \\ 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 42 - 168 - 36 - 14 + 28) = 146. \blacksquare$$

ПРИМЕР 6. Вычислить определитель 4-го порядка, элементы которого находятся по формуле: $a_{ij} = \min \{i, j\}$.

Решение. Приведем определитель к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} IV-III \\ III-II \\ II-I \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Задачи 1.

1. Вычислить определители

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 2+3i & 3 \\ 4 & 2-3i \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}; \text{ г) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

2. Решить уравнения и неравенство:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0; \text{ б) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0; \text{ в) } \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} \geq 0.$$

3. Вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}.$$

Ответы: 1. а) - 24; б) 1; в) 0; г) - 12.

2. а) 13; б) 5; в) x принадлежит $[-6; -4]$.

3. а) 63; б) - 5544.

МАТРИЦЫ. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Основные понятия

Прямоугольную таблицу чисел, состоящую из m строк и n столбцов, будем называть матрицей размера $m \times n$. Обозначение:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = (a_{ij}) \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь a_{ij} – элементы матрицы, i – номер строки, j – номер столбца. При $m \times n$ получаем квадратную матрицу. Матрица размера $1 \times n$ называется матрицей-строкой. Матрица размера $m \times 1$ называется матрицей-столбцом. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой.

Назовем матрицу $A^T = (a_{ij}^T)$ размера $n \times m$ транспонированной к матрице $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$, если $a_{ij}^T = a_{ji}$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$), то есть строки матрицы A^T совпадают с соответствующими столбцами матрицы A .

ПРИМЕР 1. Транспонировать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Записав столбцы данной матрицы в виде строк, получим матрицу

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

транспонированную к матрице A .

Матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называются равными, если они одного размера, а элементы, стоящие на одинаковых местах, равны, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$.

Квадратную матрицу $A = a_{ji}$ ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$), будем называть диагональной, если все ее элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю.

Диагональная матрица, для которой $a_{ji} = \lambda$ ($i = 1, 2, \dots, n$), называется скалярной.

Диагональная матрица, для которой $a_{ji} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), называется единичной и обозначается буквой E , то есть

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется вырожденной, если ее определитель равен нулю. В противном случае матрица называется невырожденной.

Операции над матрицами

1. Суммой матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ размера $m \times n$ называется матрица C размера $m \times n$, элементы c_{ij} которой находятся по формулам

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n).$$

Обозначение: $C = A + B$.

2. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ на число лямбда называется матрица C размера $m \times n$, элементы которой c_{ij} имеют вид

$$c_{ij} = \lambda a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n).$$

Обозначение: $C = \lambda A$.

ПРИМЕР 2. Найти $2A - B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } 2A - B &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - (-1) & 4 - 4 & 6 - 1 \\ 4 - 0 & 0 - 1 & 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 3. Найти AB , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Число столбцов матрицы A равно двум и равно числу строк

матрицы В, следовательно, эти матрицы можно перемножить. Матрица $C = AB$ имеет размер 3×2 .

Найдем элементы матрицы C :

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 = 5;$$

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) = -8;$$

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 9;$$

$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) = -14;$$

$$c_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} = 5 \cdot (-1) + 6 \cdot 3 = 13;$$

$$c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} = 5 \cdot 2 + 6 \cdot (-5) = -20.$$

Итак, окончательно имеем $C = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 9 & -14 \\ 13 & -20 \end{pmatrix}$. ■

Замечание. В последнем примере было найдено произведение AB . Что касается произведения BA , то оно не существует, так как число столбцов матрицы В не совпадает с числом строк матрицы А.

Замечание. Для квадратных матриц одного порядка можно рассматривать как произведение AB , так и произведение BA . В общем случае $AB \neq BA$.

ПРИМЕР 4. Найти произведения AB и BA , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $AB \neq BA$. ■

Матрицы А и В называются коммутирующими или перестановочными, если $AB = BA$. Скалярная и единичная матрицы коммутируют с любой квадратной матрицей того же порядка.

Натуральная степень квадратной матрицы находится по формуле

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ раз}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Если $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ – многочлен n -й степени относительно x , то

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 E,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A .

ПРИМЕР 5. Найти

$$f(A), \text{ если } f(x) = 2x^2 - 5x + 3 \text{ и } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поскольку

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

то

$$f(A) = 2A^2 - 5A + 3E = 2 \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -9 & 15 \end{pmatrix}.$$

Элементарными преобразованиями строк матрицы являются следующие операции:

- 1) перестановка двух строк матрицы;
- 2) умножение строки на ненулевое число;
- 3) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.

Если матрица B получена из матрицы A с помощью элементарных преобразований, то матрицы A и B называются эквивалентными. Обозначение: $A \sim B$.

С помощью элементарных преобразований любая матрица может быть приведена к ступенчатому виду (первый ненулевой элемент в каждой следующей ненулевой строке находится правее первого ненулевого элемента в предыдущей ненулевой строке).

ПРИМЕР 6. Привести к ступенчатому виду матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ -5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+5\cdot\text{I}]{\text{II}-3\cdot\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\cdot\text{III}+3\cdot\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 17 & 18 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Любая квадратная невырожденная матрица A эквивалентна единичной матрице E того же порядка.

Например, рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Матрица A

является невырожденной, так как $\det A = 3$. Применяя элементарные преобразования строк, получим

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}+5\text{I}]{\text{II}-3\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} \leftrightarrow \text{III}]{\text{III}/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+2\text{I}} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I}+\text{III}]{\text{II}+2\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Задачи.

1. Найти $4A - 5B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. Найти AB и BA , если возможно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Найти $f(A)$, если

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \text{ и } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Привести к ступенчатому виду:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответы: 1. } \begin{pmatrix} -7 & -9 & -10 \\ 22 & 11 & -23 \\ -12 & -6 & 40 \end{pmatrix}. \text{ 2. } AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 12 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \text{ 3. } \begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 6 & 1 & -13 \\ -20 & 1 & 27 \end{pmatrix}.$$

ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Обратной матрицей к квадратной невырожденной матрице A называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условию

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A . Если матрица A^{-1} существует, то она единственная.

Методы вычисления обратной матрицы

1. Метод присоединенной матрицы. Присоединенная матрица A^* определяется как транспонированная к матрице, состоящей из алгебраических дополнений A_{ij} элементов матрицы A , то есть

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица к любой невырожденной матрице A находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*.$$

ПРИМЕР 1. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Так как $\det A = -1 \neq 0$, то обратная матрица A^{-1} существует. Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A :

$$A_{11} = -1; \quad A_{12} = 0; \quad A_{21} = -2; \quad A_{22} = 1,$$

тогда

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = - \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \blacksquare$$

ПРИМЕР 2. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель матрицы A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -9 + 36 = 27.$$

Так как $\det A \neq 0$, то обратная матрица существует. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48; & A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42; \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3; & A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24; \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21; & A_{23} &= (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6; \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3; & A_{32} &= (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6; \\ A_{33} &= (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3. \end{aligned}$$

Составим присоединенную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} -48 & 42 & -3 \\ 24 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Тогда обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{27} A^* = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16/9 & 8/9 & -1/9 \\ 14/9 & -7/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -16/9 & 8/9 & -1/9 \\ 14/9 & -7/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \blacksquare$$

2. Метод элементарных преобразований строк. К квадратной матрице A порядка n справа приписывают единичную матрицу E того же порядка. Полученную матрицу (A/E) размера $n \times 2n$ с помощью элементарных преобразований строк (строки длины $2n$) приводят к виду (E/A^{-1}) .

ПРИМЕР 3. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. К матрице (A/E) размера 2×4 применим элементарные преобразования строк так, чтобы слева получилась единичная матрица, тогда справа будет обратная матрица:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{II \cdot (-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{I - 2II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

$$\text{Следовательно, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Задачи

1. Найти обратную матрицу двумя способами:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}; \text{ б) } X \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответы: 1. а) } \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 8 & -11 & -2 \\ -4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{2. а) } \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3/2 & -1 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 15/7 \\ -16/7 \\ -11/7 \end{pmatrix}.$$

РАНГ МАТРИЦЫ

Пусть дана произвольная матрица размера $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим любые k ($k \leq \min\{m, n\}$) строк и любые k столбцов матрицы A . Элементы, находящиеся на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k . Определитель этой матрицы называется минором k -го порядка матрицы A и обозначается M_k .

Рассмотрим, например, матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Любой элемент матрицы является минором 1-го порядка. Всего миноров 1-го порядка двенадцать. Найдем какой-нибудь минор 2-го порядка. Выделим, например, первую и третью строки и второй и третий столбцы матрицы. На пересечении выделенных строк и столбцов получим минор 2-го порядка:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}.$$

Кстати, число всех миноров 2-го порядка данной матрицы равно числу способов выбора двух строк из трех возможных, умноженному на число способов выбора двух столбцов из четырех возможных, а именно,

$$C_3^2 \cdot C_4^2 = \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = 18,$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ — число сочетаний из } n \text{ по } k.$$

Рангом матрицы A называется наибольший из порядков ее ненулевых миноров. Обозначение: $r(A)$ или $\text{rang} A$. Любой ненулевой минор порядка $r(A)$ называется базисным минором.

В примере, рассмотренном выше, минор $M_3 = -36$ не равен нулю, его порядок равен трем. Это максимальный порядок ненулевых миноров, следовательно, $r(A) = 3$, а сам минор M_3 является базисным.

Методы нахождения ранга матрицы

1. Метод окаймляющих миноров. Пусть в матрице A найден ненулевой минор M_k порядка k . Выделим k строк и k столбцов, на пересечении которых стоят элементы этого минора, добавим к ним еще одну любую из оставшихся строк матрицы и один любой из оставшихся столбцов. Таким образом, число выделенных строк равно $k+1$, и число выделенных столбцов равно $k+1$. На пересечении этих строк и столбцов получилась квадратная матрица порядка $k+1$, определитель которой M_{k+1} и является окаймляющим минором для минора M_k .

Если все миноры M_{k+1} , окаймляющие минор M_k , равны нулю, то $r(A)=k$. Если нашелся ненулевой минор M_{k+1} , окаймляющий M_k , то $r(A) > k$, и вся процедура повторяется.

ПРИМЕР 1. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение. $r(A) \geq 1$, так как у матрицы есть ненулевые элементы. Найдем какой-нибудь ненулевой минор 2-го порядка. Например,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Следовательно, $r(A) \geq 2$. Согласно методу окаймляющих миноров, достаточно рассмотреть только те миноры 3-го порядка, которые окаймляют M_2 . Таких миноров всего два (к строкам с номерами 1, 2 и к столбцам с номерами 2, 3, содержащим элементы минора M_2 , можно добавить строку с номером 3 и один из оставшихся столбцов: с номером 1 или 4):

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0,$$

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, все миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2 , равны нулю.

Следовательно, $r(A)=2$, а минор $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ является базисным.

Можно указать другие базисные миноры. Например,

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \text{ или } M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \blacksquare$$

Замечание. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

2. Метод элементарных преобразований. Матрица A с помощью элементарных преобразований приводится к ступенчатому виду. Затем определяется ранг ступенчатой матрицы, который совпадает с рангом исходной матрицы.

Задачи

Найти ранги матриц с помощью метода окаймляющих миноров или с помощью элементарных преобразований:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ответы: 1. а) 3; б) 2.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО АРИФМЕТИЧЕСКИХ ВЕКТОРОВ

Арифметическим вектором называется упорядоченный набор из n действительных чисел. Обозначение $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются компонентами вектора x .

Введем операции над арифметическими векторами: сложение арифметических векторов и умножение арифметического вектора на действительное число. Если $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – n компонентные арифметические векторы, то

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda \bar{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n), \text{ где } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Пусть L – произвольное множество n -компонентных арифметических векторов с введенными выше операциями сложения и умножения на число.

Множество L называется линейным пространством арифметических векторов, если для любых x, y, z принадлежит L и для любых, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполняются следующие восемь аксиом:

1. $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$;
2. $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$;
3. во множестве L существует нулевой элемент $\bar{0}$ такой, что для любого $\bar{x}$ из L выполняется равенство $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$;
4. для любого $\bar{x}$ из L во множестве L существует противоположный элемент $(-\bar{x})$ такой, что $\bar{x} + (-\bar{x}) = \bar{0}$;
5. $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$;
6. $\alpha(\beta \bar{x}) = (\alpha\beta) \bar{x}$;
7. $(\alpha + \beta) \bar{x} = \alpha \bar{x} + \beta \bar{x}$;
8. $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \bar{x} + \alpha \bar{y}$.

Из аксиом линейного пространства следует, что если векторы $x_1, x_2, \dots, x_k$ принадлежат линейному пространству L , то их линейная комбинация тоже принадлежит L . Примером линейного пространства является множество всех n компонентных арифметических векторов, которое обозначается n . Назовем

систему арифметических векторов линейно зависимой, если найдутся действительные числа, не равные нулю одновременно, такие, что, где 0 – нулевой вектор. В противном случае система называется линейно независимой.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная система (множество) векторов.

Упорядоченная система векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_r\}$ называется **базисом** в Q , если:

а) $\bar{e}_i \in Q$ ($i = 1, 2, \dots, r$);

б) система $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_r\}$ линейно независима;

в) для любого вектора $\bar{x}$ из Q найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, такие, что

$$\bar{x} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \dots + \lambda_r \bar{e}_r.$$

Последняя формула называется разложением вектора x по базису $\{e_1, e_2, \dots, e_t\}$, а числа лямбда, которые определяются однозначно, называются координатами вектора x в базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_t\}$.

Всякая система векторов Q имеет хотя бы один базис. Если базисов несколько, то все они состоят из одинакового числа векторов, которое называется рангом системы векторов Q .

Если Q является линейным пространством, то число векторов в базисе называется размерностью линейного пространства.

В частности, размерность n равна n , а в качестве базиса можно взять следующую систему векторов:

$$\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad \bar{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad \bar{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Теорема о базисном миноре. Ранг матрицы равен рангу системы ее столбцов (строк), при этом столбцы и строки, содержащие элементы базисного минора, образуют базис в системе столбцов (строк) этой матрицы.

Замечание. Элементарные преобразования строк матрицы не изменяют линейных соотношений между ее столбцами.

Итак, ранг системы векторов равен рангу матрицы, столбцами которой являются данные векторы. А базис состоит из векторов, которые соответствуют столбцам, содержащим элементы какого-нибудь базисного минора.

ПРИМЕР 1. Исследовать линейную зависимость системы

арифметических векторов

$$\bar{x}_1 = (1, 4, 3), \quad \bar{x}_2 = (3, -3, -1), \quad \bar{x}_3 = (2, 3, 2).$$

Решение. Составим матрицу, столбцами которой являются заданные векторы, и приведем ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{II-4I \\ III-3I}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -15 & -5 \\ 0 & -10 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{3III-2II} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -15 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, ранг матрицы равен трем. Следовательно, ранг системы векторов тоже равен трем, таким образом, заданные векторы (их всего три) линейно независимы и образуют базис.

ПРИМЕР 2. Найти ранг и какой-нибудь базис системы арифметических векторов

$$\bar{x}_1 = (2, 1, 1), \quad \bar{x}_2 = (-1, 1, -5), \quad \bar{x}_3 = (5, 3, 1), \quad \bar{x}_4 = (6, 5, -3).$$

Решение. Составим матрицу, столбцами которой являются данные векторы, и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{II-2I \\ III-I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & -2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-2II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8/3 & 11/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен двум, следовательно, ранг системы векторов тоже равен двум.

Рассмотрим последнюю матрицу. Минор

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

является базисным. По теореме о базисном миноре первый и второй столбцы, содержащие элементы базисного минора, образуют базис в системе столбцов

матрицы, а третий и четвертый столбцы линейным образом выражаются через базисные. Очевидно, третий столбец равен сумме первого столбца, умноженного на $8/3$, и второго столбца, умноженного на $1/3$

$$\left(III = \frac{8}{3} I + \frac{1}{3} II \right)$$

а четвертый столбец является суммой первого, умноженного на $11/3$, и второго, умноженного на $4/3$

$$\left(IV = \frac{11}{3} I + \frac{4}{3} II \right).$$

Поскольку при элементарных преобразованиях строк линейные соотношения между столбцами не изменяются, то для столбцов исходной матрицы выполняются те же самые соотношения, то есть арифметические векторы $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, соответствующие первому и второму столбцам, образуют базис в заданной системе векторов, а

$$\bar{x}_3 = \frac{8}{3} \bar{x}_1 + \frac{1}{3} \bar{x}_2, \quad \bar{x}_4 = \frac{11}{3} \bar{x}_1 + \frac{4}{3} \bar{x}_2.$$

Задачи

1. Исследовать линейную зависимость системы арифметических векторов

$$\bar{x}_1 = (1, -1, 2, 1), \quad \bar{x}_2 = (0, 1, -1, 2), \quad \bar{x}_3 = (1, 1, 0, -1), \quad \bar{x}_4 = (2, 1, 1, 3) ?$$

2. Найти ранг и все базисы системы арифметических векторов

$$\bar{x}_1 = (-1, 1, 2, -2), \quad \bar{x}_2 = (-3, 0, -1, 0), \quad \bar{x}_3 = (0, -1, 1, 2), \quad \bar{x}_4 = (-1, 0, 1, 0) .$$

Это же решение можно найти другим способом. Так как матрица A невырожденная, то она имеет обратную матрицу A^{-1} . Умножив обе части матричного уравнения $AX=B$ слева на A^{-1} , получим $X=A^{-1}B$.

ПРИМЕР 1. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3, \\ 3x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель матрицы A , составленной из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Первый способ. Так как $\det A \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Заменим в Δ первый столбец столбцом свободных членов, тогда

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

Заменив в Δ второй столбец столбцом свободных членов, имеем

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{-5} = -2.$$

Второй способ. Так как $\det A \neq 0$, то существует A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix},$$

тогда

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/5 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Полученное решение совпадает с решением, найденным по формулам Крамера. Подставив $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ во все уравнения системы, убеждаемся в правильности нашего решения.

Замечание. Правило Крамера имеет большое теоретическое значение. Ввиду громоздких вычислений на практике его обычно применяют только при решении квадратных систем с двумя или тремя неизвестными.

Замечание. Правило Крамера имеет большое теоретическое значение. Ввиду громоздких вычислений на практике его обычно применяют только при

решении квадратных систем с двумя или тремя неизвестными.

Задачи

1. Решить системы двумя способами:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - x_2 = -4, \\ 2x_1 + x_2 = -5. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18. \end{cases}$$

Ответы: 1. а) $X = (-3, 1)^T$; б) $X = (1, 2, -3)^T$.

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ГАУССА

Основные понятия.

Рассмотрим произвольную систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

[illegible]

В матричной форме система записывается так: $AX=B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Здесь A – матрица системы, X – столбец неизвестных, а B – столбец свободных членов.

Если в системе $AX=B$ столбец свободных членов состоит из нулей (обозначение $B=0$), то система называется однородной, в противном случае, неоднородной.

Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если не имеет решений.

Система называется определенной, если она имеет единственное решение.

Если система имеет более одного решения, то она называется неопределенной. В этом случае каждое решение называется частным, а совокупность всех решений называется общим решением системы.

Элементарными преобразованиями системы являются следующие преобразования:

- 1) перестановка уравнений системы;
- 2) умножение уравнения на ненулевое число λ ;
- 3) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на

некоторое число, лямбда.

Две системы называются эквивалентными, если у них один и тот же набор неизвестных, и множества их решений совпадают. В частности, системы, полученные друг из друга с помощью элементарных преобразований, эквивалентны.

Расширенной матрицей системы называется матрица

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Теорема (Кронекера-Капелли). 1. Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы совпадает с рангом расширенной матрицы, то есть

$$\text{rang} A = \text{rang} \bar{A}.$$

2. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

3. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

ПРИМЕР 1. Установить, является ли совместной система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = -3. \end{cases}$$

Решение. Найдем ранги матриц A и $\bar{A}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{II-2I \\ III-3I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 5 & -9 \end{array} \right) \xrightarrow{III-II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right).$$

Так как $\text{rang} A = 2$, а $\text{rang} \bar{A} = 3$, то по теореме Кронекера-Капелли система решений не имеет. ■

Метод Гаусса

Для исследования системы линейных алгебраических уравнений

применяют метод Гаусс, состоящий в том, что с помощью элементарных преобразований заданная система приводится к системе более простого вида.

Любой системе можно поставить в соответствие расширенную матрицу. Расширенная матрица с помощью элементарных преобразований строк приводится к ступенчатому виду (заметим, что элементарные преобразования строк матрицы напрямую связаны с элементарными преобразованиями системы), причем можно сделать так, чтобы в каждой ненулевой строке ступенчатой матрицы первый ненулевой элемент был равен единице.

Рассмотрим возможные случаи:

1. Если расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \cdots & \alpha_{1k_2} & \cdots & \alpha_{1k_r} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha_{2k_r} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha_{rn} & \beta_r \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \beta_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right),$$

где $\beta_{r+1} \neq 0$, то $\text{rang} A \neq \text{rang} A$. По теореме Кронекера-Капелли система несовместна.

2. Если расширенная матрица имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \alpha_{n-1,n} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \beta_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

то $\text{rang} A = \text{rang} A^* = n$, и система имеет единственное решение. Чтобы получить это решение, выпишем систему, соответствующую полученной расширенной матрице:

Из последнего уравнения однозначно определяется x_n . Подставив найденное значение x_n в предпоследнее уравнение, находим однозначно x_{n-1} и т.д. И, наконец, из первого уравнения определяем однозначно x_1 . 3.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \cdots & \alpha_{1k_2} & \cdots & \alpha_{1k_r} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha_{2k_r} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha_{rn} & \beta_r \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Минор, составленный из элементов матрицы, расположенных в первых r строках и столбцах с номерами $1, k_2, \dots, k_r$, является базисным. Неизвестные, соответствующие столбцам базисного минора, назовем базисными, а остальные $n-r$ неизвестных назовем свободными. Свободные неизвестные могут принимать произвольные значения $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$.

[illegible]

После подстановки вместо свободных неизвестных произвольных

значений $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ из последнего уравнения 50 системы определяем x_{kr} . Подставляя x_{kr} в предпоследнее уравнение, получим $x_{k(r-1)}$ и так далее. Итак, общее решение системы выражается через $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$. Заметим, что каждому фиксированному набору значений свободных неизвестных соответствует единственное частное решение системы.

Задачи

1. С помощью метода Гаусса решить системы:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

ОДНОРОДНЫЕ И НЕОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

Однородные системы

Рассмотрим однородную систему линейных алгебраических уравнений $AX=0$.

Очевидно, что любая однородная система имеет, по крайней мере, нулевое решение $X = (0, 0, \dots, 0)^T$, то есть однородные системы всегда совместны, при этом возможны два случая:

- 1) если $\text{rang} A = n$, где n – число неизвестных, то система имеет только тривиальное (нулевое) решение;
- 2) если $\text{rang} A = r < n$, то система имеет ненулевые решения.

Множество всех решений однородной системы является линейным пространством, размерность которого равна $n-r$, где r – ранг матрицы A . Любой базис пространства решений однородной системы называется фундаментальной системой решений однородной системы и состоит из $n-r$ линейно независимых частных решений системы.

Фундаментальную систему решений (ФСР) обычно обозначают, $E_1, E_2, \dots, E_{n-r}$, тогда общее решение однородной системы X_{00} следующую структуру:

$$X_{00} = C_1 E_1 + C_2 E_2 + \dots + C_{n-r} E_{n-r},$$

где $C_1, C_2, \dots, C_{n-r}$ – произвольные постоянные.

Укажем способ нахождения фундаментальной системы решений. Поскольку ФСР состоит из частных решений системы, а частные решения получаются, если свободным неизвестным придавать конкретные значения, то поступим следующим образом: будем свободным неизвестным придавать поочередно значение равное единице, приравнивая при этом остальные свободные неизвестные нулю. Например, если первой свободной неизвестной придать значение 1, а остальные свободные неизвестные приравнять нулю, то соответствующее частное решение и есть E_1 . Если вторая свободная неизвестная равна единице, а все остальные свободные неизвестные равны нулю, то получается E_2 , и так далее. Такой способ гарантирует линейную независимость найденных частных решений $E_1, E_2, \dots, E_{n-r}$.

ПРИМЕР 1. Решить однородную систему и указать ФСР:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & 2 & | & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{II-2I \\ III-3I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+2II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III/9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем в качестве базисного минор $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Тогда

базисными являются неизвестные x_1, x_4, x_5 , соответствующие столбцам этого минора, а x_2 и x_3 – свободные неизвестные.

Полученной расширенной матрице соответствует система (все свободные неизвестные перенесены в правые части уравнений)

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - x_5 = -2x_2 + x_3, \\ x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений состоит из двух частных решений E_1 и E_2 , так как $n=r=5-3=2$. Чтобы найти E_1 , придадим свободным неизвестным значения 1 и 0 и, подставив их в последнюю систему, найдем значения базисных неизвестных (из третьего уравнения находим x_5 , из второго – x_4 , а из первого – x_1). Чтобы найти E_2 , придадим свободным неизвестным значения 0 и 1 и найдем соответствующие значения базисных неизвестных x_5, x_4, x_1 . Итак,

$$x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow E_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)^T,$$

$$x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow E_2 = (1, 0, 1, 0, 0)^T.$$

Общее решение системы имеет вид

$$X_{\text{оо}} = C_1 E_1 + C_2 E_2 = C_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задачи

1. Решить однородные системы. Указать ФСР.

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

2. Решить однородные системы

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - 2x_6 = 4. \end{cases}$$

Список рекомендуемой литературы

Основная литература:

1. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть 1: Основы алгебры [Текст] / А. И. Кострикин. — 3-е изд., испр. — Москва : МЦНМО, 2020. — 272 с. — ISBN 978-5-4439-2999-4.

2. Молдаванский, Д. И. Алгебра и теория чисел в криптографии [Текст] / Д. И. Молдаванский. — Москва : КУРС, 2021. — 320 с. — ISBN 978-5-906554-78-3.

Дополнительная литература:

1. Лидл, Р. Конечные поля [Текст] : в 2 т. / Р. Лидл, Г. Нидеррайтер ; пер. с англ. под ред. А. А. Нечаева. — 2-е изд., перераб. — Москва : Мир, 2018. — Т. 1. — 430 с. — ISBN 978-5-03-011473-5.

2. Сачков, В. Н. Комбинаторика и теория вероятностей в криптографии [Текст] / В. Н. Сачков. — Москва : Физматлит, 2017. — 256 с. — ISBN 978-5-9221-1756-2.

3. Глухов, М. М. Алгебра [Текст] : учебник для вузов / М. М. Глухов, В. П. Елизаров, А. А. Нечаев. — Санкт-Петербург : Лань, 2019. — 480 с. — (Учебники для вузов. Специальная литература). — ISBN 978-5-8114-3500-9.