

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по организации практических работ обучающихся
по дисциплине «Теоретические основы электротехники»
для студентов направления подготовки /специальности
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
Направленность (профиль) Цифровые технологии в электроэнергетике

Оглавление

Практическое занятие 1 Эквивалентные преобразования в электрических цепях

Практическое занятие 2 Анализ режимов цепей постоянного тока с использованием законов Ома и Кирхгофа

Практическое занятие 3 Анализ режимов цепей постоянного тока методами контурных токов и узловых потенциалов

Практическое занятие 4 Комплексный метод анализа цепей синусоидального тока

Практическое занятие 5 Расчет однофазных цепей синусоидального тока

Практическое занятие 6 Расчет трехфазных цепей синусоидального тока

Практическое занятие 7 Расчет трехфазных цепей синусоидального тока с симметричной нагрузкой

Практическое занятие 8 Расчет трехфазных цепей синусоидального тока с несимметричной нагрузкой

Практическое занятие 9 Расчет трехфазных цепей синусоидального тока с несимметричной нагрузкой при аварийных режимах

Практическое занятие 1

Тема: Эквивалентные преобразования в электрических цепях

Цель: Научиться рассчитывать эквивалентное сопротивление при различных схемах соединения резисторов: последовательном, параллельном, треугольником и звездой.

Актуальность темы практического занятия заключается в необходимости проводить эквивалентные преобразования при расчетах электрических цепей.

Теоретическая часть

Эквивалентные преобразования в электрических цепях используют для упрощения схемы и проводимых расчетов. В разветвленных электрических цепях можно выделить *последовательное*, *параллельное* соединение сопротивлений, а также соединение *звездой* и *треугольником*.

При *последовательном* соединении сопротивлений рисунок 1.1

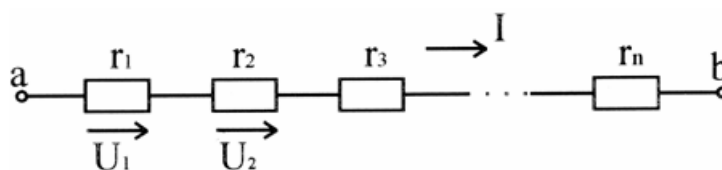


Рисунок 1.1 – Последовательное соединение сопротивлений

Сопротивление на участке цепи между точками a и b

$$r_{ab} = \sum_{i=1}^n r_i = r_1 + r_2 + \dots + r_n. \quad (1.1)$$

Напряжение на участке ab

$$U_{ab} = \sum_{i=1}^n U_i = U_1 + U_2 + \dots + U_n.$$

Ток I одинаков во всех элементах цепи.

Параллельное соединение сопротивлений показано на рисунке 1.2.

Проводимость $g_{ab} = \frac{1}{r_{ab}}$ на участке цепи между точками a и b

$$g_{ab} = \sum_{i=1}^n g_i = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n}. \quad (1.2)$$

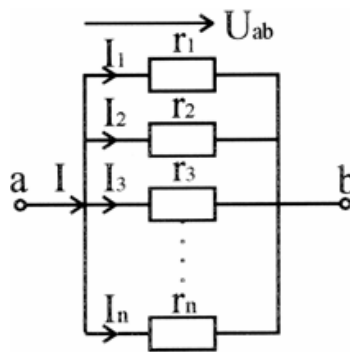


Рисунок 1.2 – Параллельное соединение сопротивлений

Напряжение U_{ab} одинаково во всех элементах цепи.

Ток I в неразветвленной части электрической цепи равен сумме токов ветвей

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

Пример. При параллельном соединении двух сопротивлений r_1 и r_2 между точками а и b, общее сопротивление

$$R_a = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2} \quad (1.3).$$

Ток I_1 через сопротивление r_1 при известном токе в неразветвленной части электрической цепи I

$$I_1 = I \frac{r_2}{r_1 + r_2}.$$

Ток I_2 через сопротивление r_2 при известном токе в неразветвленной части электрической цепи I

$$I_2 = I \frac{r_1}{r_1 + r_2}.$$

Не всегда можно упростить разветвленную электрическую цепь до требуемого уровня, используя преобразования для последовательного и параллельного соединения сопротивлений.

В таком случае необходимо использовать взаимные преобразования соединения сопротивлений *звезда* в соединение сопротивлений *треугольник* (рисунок 1.3).

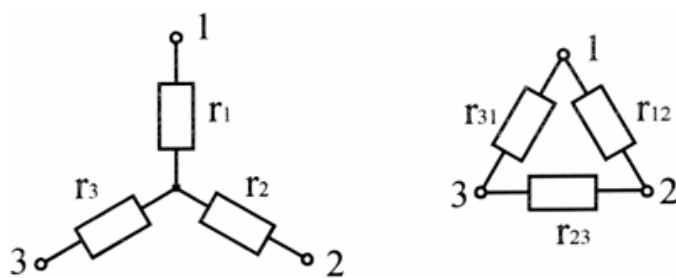


Рисунок 1.3 – Соединение сопротивлений r_1 , r_2 и r_3 звездой; соединение сопротивлений r_{12} , r_{23} и r_{31} треугольником

При взаимном преобразовании *треугольника* сопротивлений в *звезду* имеем:

$$r_1 = \frac{r_{12} \cdot r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}, \quad r_2 = \frac{r_{12} \cdot r_{23}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}, \quad r_3 = \frac{r_{23} \cdot r_{31}}{r_{12} + r_{23} + r_{31}}. \quad (1.4)$$

При взаимном преобразовании *звезды* сопротивлений в *треугольник* имеем:

$$r_{12} = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_3} + r_1 + r_2, \quad r_{23} = \frac{r_2 \cdot r_3}{r_1} + r_2 + r_3, \quad r_{31} = \frac{r_3 \cdot r_1}{r_2} + r_3 + r_1. \quad (1.5)$$

Примечание. При вычислении входного (эквивалентного) сопротивления необходимо помнить, что источники энергии заменяются внутренними сопротивлениями. Внутреннее сопротивление идеального источника ЭДС равно нулю. Внутреннее сопротивление идеального источника тока равно бесконечности.

Задания

1. Для цепи, изображенной на рисунке 1.4, найти эквивалентные сопротивления между зажимами a и b , c и d , d и f . Значения сопротивлений представлены на схеме в Омах. ($r_{ab} = 12$ Ом, $r_{cd} = 4$ Ом, $r_{df} = 4$ Ом)

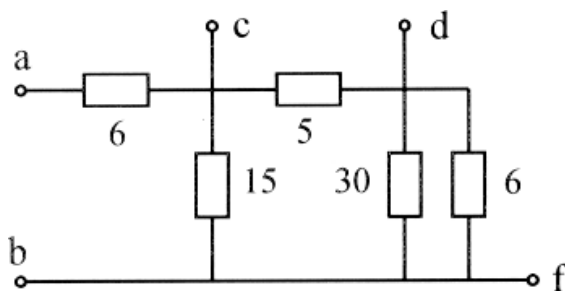


Рисунок 1.4

2. Для цепи, изображенной на рисунке 1.5, определить эквивалентное сопротивление цепи между точками a и b при разомкнутом и замкнутом ключе k . Если $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = r_7 = 10 \text{ Ом}$. ($r_{ab} = 12 \text{ Ом}$, $r_{ab} = 8,33 \text{ Ом}$)

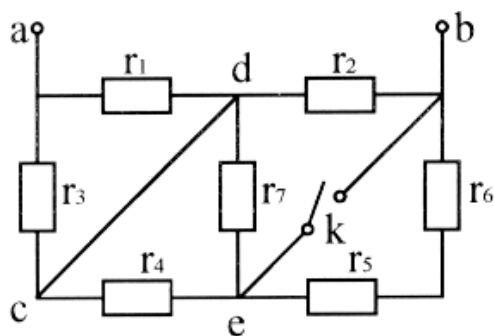


Рисунок 1.5

3. Для цепи, изображенной на рисунке 1.6, $J = 12 \text{ А}$, $E_1 = 30 \text{ В}$, $E_2 = 40 \text{ В}$, значения сопротивлений в Омах указаны на схеме. Найти входное сопротивление относительно выводов источника тока, применив преобразования: 1) треугольника сопротивлений в звезду; 2) звезды сопротивлений в треугольник. ($3,25 \text{ Ом}$)

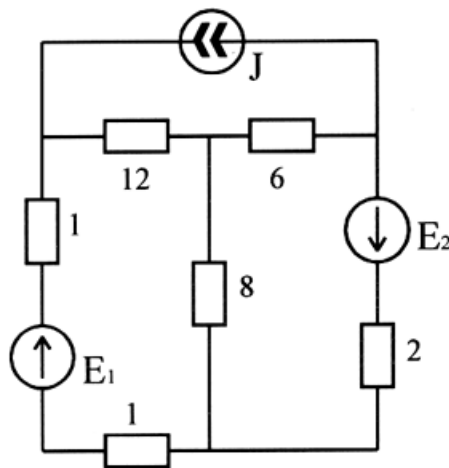


Рисунок 1.6

Контрольные вопросы

1. Как определяется общее сопротивление при последовательном соединении сопротивлений? при параллельном соединении?
2. Как определяется напряжение на участке электрической цепи с последовательными сопротивлениями, падения напряжения на которых известны?
5. Как определить токи в двух параллельных ветвях по известному току в неразветвленной части электрической цепи?
3. При каком соединении сопротивлений ток через все сопротивления равен?

4. При каком соединении сопротивлений напряжение на них одинаково?
6. В каком случае необходимо использовать взаимные преобразования соединения сопротивлений звезда в треугольник?
7. Формулы преобразования звезды в треугольник, треугольника в звезду.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

Основная литература

1. Немцов М.В. Электротехника и электроника (6-е изд., стер.) учебник. – М: Академия, 2013. – 480 с. – ISBN: 9785446804320.
2. Электротехника и электроника: Учебное пособие для вузов / В.В. Кононенко [и др.]; под ред. В.В. Кононенко. – Изд. 6-е – Ростов н/Д: Феникс, 2010. – 784 с. (Высшее образование). – ISBN 978-5-222-17568-2.

Дополнительная литература

3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник. – 10-е изд. – М.: Гардарики, 2002. – 638 с.
4. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: учеб. пособие для студентов / под ред. П. А. Ионкина. – М.: Энергоиздат, 1982. – 768 с.

Практическое занятие 2

Тема: Анализ режимов цепей постоянного тока с использованием законов Ома и Кирхгофа

Цель: Научиться рассчитывать токи в ветвях с помощью законов Ома и Кирхгофа.

Актуальность темы практического занятия заключается в необходимости использовать законы Ома и Кирхгофа для расчета электрических цепей.

Теоретическая часть

Закон Ома для участка цепи между зажимами а и b (рисунок 2.1) позволяет найти ток I участка по разности потенциалов $U_{ab} = \phi_a - \phi_b$ и сопротивлению R этого участка:

$$I = \frac{U_{ab}}{R} = \frac{\phi_a - \phi_b}{R}. \quad (2.1)$$

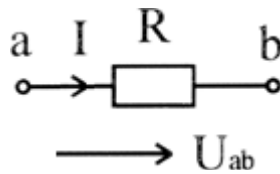


Рисунок 2.1 – Участок цепи

Закон Ома для участка цепи между зажимами b и a (рисунок 2.2) позволяет найти ток I участка по разности потенциалов $U_{ba} = \phi_b - \phi_a$ и сопротивлению R этого участка:

$$I = \frac{U_{ba}}{R} = \frac{\phi_b - \phi_a}{R}. \quad (2.2)$$

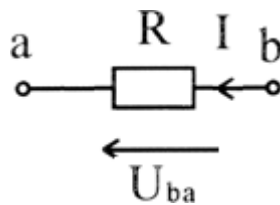


Рисунок 2.2

Закон Ома для участка цепи содержащего ЭДС между зажимами a и b (рисунок 2.3 и рисунок 2.4).

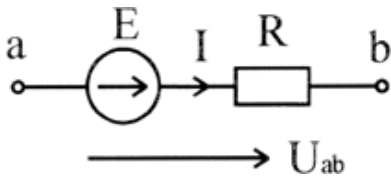


Рисунок 2.3 – Участок цепи, содержащий ЭДС

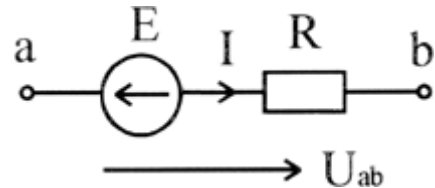


Рисунок 2.4 – Участок цепи содержащий ЭДС

Для схем на рисунках 2.3 и 2.4 закон Ома позволяет найти ток I участка по разности потенциалов $U_{ab} = \phi_a - \phi_b$, а также находящимся на этом участке ЭДС E и сопротивлению R .

Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС (рисунке 2.3)

$$I = \frac{U_{ab} + E}{R} \quad (2.3)$$

В случае если на участке цепи между зажимами a и b направление ЭДС будет противоположно току I (рисунок 2.4).

$$I = \frac{U_{ab} - E}{R} \quad (2.4)$$

Расчет режимов электрических цепей проводят используя первый и второй законы Кирхгофа.

Первый закон формулируется для узлов электрической цепи. Узлом называется место соединения трех и более ветвей электрической цепи. Ветвью электрической цепи называется участок электрической цепи между узлами, состоящий из одного или нескольких элементов по которым протекает один и тот же ток.

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов в узле электрической цепи равна нулю.

$$\sum I_i = 0. \quad (2.5)$$

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма падений напряжений на элементах контура (под контуром здесь понимается замкнутая последовательность ветвей, не содержащих источников тока) равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом же контуре:

$$\sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n E_i \text{ или } \sum_{i=1}^n I_i \cdot r_i = \sum_{i=1}^n E_i. \quad (2.6)$$

Алгоритм решения задач с использованием законов Кирхгофа.

1. Определить количество узлов y и ветвей b электрической цепи.
2. Выбрать произвольно положительные направления искомых токов ветвей и обозначить их на схеме.
3. Определить количество уравнений по первому закону Кирхгофа, которое равно количеству узлов без единицы ($y - 1$). Записать для произвольно выбранных узлов требуемое количество уравнения по законам Кирхгофа. В алгебраической сумме следует учесть и токи источников тока.
4. Определить количество уравнений по второму закону Кирхгофа. Их число равно количеству ветвей без источников тока ($b - b_{\text{ит}}$) за вычетом уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, т.е. $(b - b_{\text{ит}}) - (y - 1)$, где $b_{\text{ит}}$ – число ветвей с источниками тока. Записать уравнения по 2-му закону Кирхгофа для независимых контуров. Независимые контуры образуются замкнутыми последовательностями ветвей, не содержащих источников тока, так, чтобы в новом контуре была хоть одна ветвь, не входящая в предыдущие.

(Иногда в некоторых цепях необходимо составлять уравнения, в которые входят уже содержащиеся ветви.)

5. Объединить уравнения, составленные по первому и второму законам Кирхгофа, в систему уравнений.

6. Решить систему уравнений.

Пример использования алгоритма решения задач с использованием законов Кирхгофа для электрической цепи, представленной на рисунке 2.5.

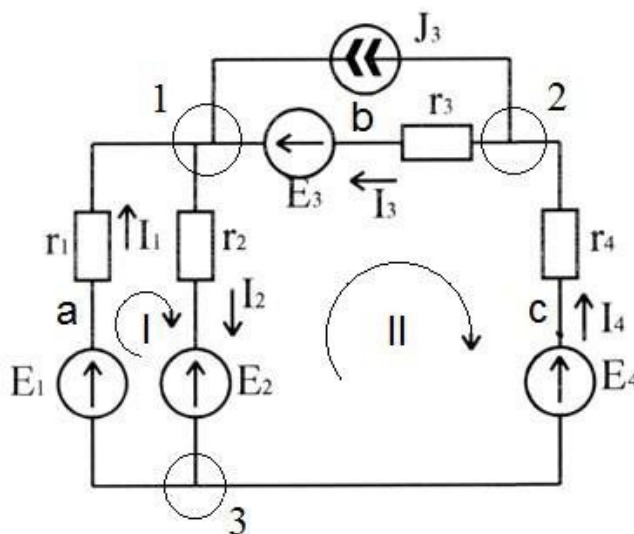


Рисунок 2.5 – Схема электрической цепи

При расчетах как правило необходимо определить токи в ветвях схемы. Все параметры элементов электрической цепи, и ее топология считаются известными.

Решение.

1. Определим количество узлов y и ветвей b электрической цепи. Так, в рассматриваемой цепи имеется три узла, обозначенных цифрами 1, 2 и 3 всего $y = 3$. Ветви находятся между узлами и в представленной цепи их пять $b = 5$.

2. Выберем произвольно положительные направления искомых токов I_1 , I_2 , I_3 , I_4 ветвей и обозначим их на схеме.

3. Определим количество уравнений по первому закону Кирхгофа, равное количеству узлов без единицы: $3 - 1 = 2$. Запишем для произвольно выбранных узлов требуемое количество уравнений по первому закону Кирхгофа. В алгебраической сумме следует учесть и токи источников тока.

$$1 \text{ узел: } I_1 - I_2 + I_3 + J_3 = 0$$

$$2 \text{ узел: } I_4 - I_3 - J_3 = 0$$

4. Определим количество уравнений по второму закону Кирхгофа, равное числу ветвей без источников тока $(5 - 1)$ минус два уравнения, составленные по первому закону Кирхгофа, т.е. $(5 - 1) - 2 = 2$. Запишем уравнения по 2-му закону Кирхгофа для независимых контуров. Независимые контуры образуются замкнутыми последовательностями ветвей не содержащих источников тока.

Уравнения по второму закону Кирхгофа для рассматриваемой электрической цепи.

$$\text{I контур: } I_1 \cdot r_1 + I_2 \cdot r_2 = E_1 - E_2,$$

$$\text{II контур: } -I_2 \cdot r_2 - I_3 \cdot r_3 - I_4 \cdot r_4 = E_2 - E_3 - E_4.$$

5. Объединить уравнения, составленные по первому и второму законам Кирхгофа в систему уравнений.

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 - I_2 + I_3 + J_3 = 0 \\ I_4 - I_3 - J_3 = 0 \\ I_1 \cdot r_1 + I_2 \cdot r_2 = E_1 - E_2 \\ -I_2 \cdot r_2 - I_3 \cdot r_3 - I_4 \cdot r_4 = E_2 - E_3 - E_4 \end{array} \right. \quad (2.7)$$

6. Решить полученную систему уравнений можно, если в ней четыре неизвестные. Чаще всего в задачах требуется определить токи (т.е. для данной схемы I_1, I_2, I_3, I_4), тогда все остальные элементы должны быть известными. Возможны и другие варианты.

Таким образом, получена система уравнений 2.7 для заданной электрической цепи рисунок 2.5 по законам Кирхгофа.

После расчета токов, необходимо проверить баланс мощностей электрической цепи.

Баланс мощностей в электрической цепи.

Общая мощность источников электрической энергии для электрической цепи (рисунок 2.5) определяется следующим образом:

$$P_{\text{ист}} = E_1 \cdot I_1 - E_2 \cdot I_2 + E_3 \cdot I_3 + E_4 \cdot I_4 + U_{12} \cdot J_3. \quad (2.8)$$

Знак «минус» в выражении (2.8) у мощности источника ЭДС $P_{E_2} = -E_2 \cdot I_2$, ставится потому, что направление тока I_2 противоположно направлению ЭДС E_2 . Если направление источника ЭДС и тока через него не совпадает, то данный источник ЭДС потребляет электрическую энергию, а не производит ее. Мощность источника тока $P_{J_3} = U_{12} \cdot J_3 = (\phi_1 - \phi_2) \cdot J_3$, т.к. у источника тока J_3 потенциал ϕ_1 больше, чем ϕ_2 . Как определять потенциалы электрической цепи (напряжение на участке цепи), будет рассмотрено ниже в примере построения потенциальной диаграммы.

Общая мощность потребителей электрической энергии для электрической цепи (рисунок 2.5) определяется следующим образом:

$$P_{\text{потр}} = I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot R_2 + I_3^2 \cdot R_3 + I_4^2 \cdot R_4. \quad (2.9)$$

В результате расчетов общая мощность источников электрической энергии $P_{\text{ист}}$ должна оказаться равна общей мощности потребителей электрической энергии $P_{\text{потр}}$ для рассматриваемой электрической цепи $P_{\text{ист}} = P_{\text{потр}}$. Если равенство не получается, значит, имеются ошибки в расчетах, которые требуется устранить.

Пример. Построение потенциальной диаграммы для внешнего контура электрической цепи, представленной на рисунке 2.5. Внешний контур состоит из элементов E_1 , r_1 , E_3 , r_3 , r_4 , E_4 . Перечень элементов производился от наибольшего по названию узла, в данном случае это узел 3, по часовой стрелке. Из рисунка видно, что при выборе контура в его состав не включены ветви с источником тока, т.к. его сопротивление равно бесконечности, и определить падение напряжения на нем по закону Ома не удастся. Обозначим на электрической схеме точки при переходе от одного элемента к другому. Так, между элементами E_1 и r_1 получим точку a , между E_3 и r_3 – точку b , между r_4 и E_4 обозначим точку c . Используя закон Ома, определим потенциалы всех указанных во внешнем контуре точек. Для этого условно заземлим потенциал точки 3, тогда ϕ_3 станет равен нулю. При этом токораспределение в цепи не изменится, т.к. никаких новых ветвей, по которым могли бы протекать токи, не образуется.

Тогда потенциалы обозначенных в схеме точек при известных токах определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\phi_3 &= 0; \\ \phi_a &= \phi_3 + E_1; \\ \phi_1 &= \phi_a - I_1 \cdot r_1; \\ \phi_b &= \phi_1 - E_3; \\ \phi_2 &= \phi_b + I_3 \cdot r_3; \\ \phi_c &= \phi_2 + I_4 \cdot r_4; \\ \phi_3 &= \phi_c - E_4 = 0.\end{aligned}$$

Знак «плюс» в формуле $\phi_a = \phi_3 + E_1$ ставится потому, что ЭДС E_1 повышает потенциал при переходе от потенциала ϕ_3 к ϕ_a . Знак «минус» в формуле $\phi_1 = \phi_a - I_1 \cdot r_1$ ставится потому, что ток течет от большего потенциала ϕ_a к меньшему ϕ_1 . Чтобы определить меньший потенциал ϕ_1 необходимо от большего ϕ_a вычесть падение напряжения $U_1 = I_1 \cdot r_1$ на резисторе r_1 . Знак «минус» в формуле $\phi_b = \phi_1 - E_3$ ставится потому, что ЭДС E_3 понижает потенциал при переходе от потенциала ϕ_1 к ϕ_b . Знак «плюс» в формуле $\phi_2 = \phi_b + I_3 \cdot r_3$ ставится потому, что ток течет от большего потенциала ϕ_2 к меньшему ϕ_b . Чтобы отыскать больший потенциал ϕ_2 необходимо к нему прибавить падение напряжения $U_3 = I_3 \cdot r_3$ на резисторе r_3 . Аналогичным образом ставятся знаки в других уравнениях потенциалов электрической цепи. Представленные формулы для определения потенциалов электрической цепи вытекают из закона Ома.

На основании полученных значений потенциалов точек строится потенциальная диаграмма 2.6.

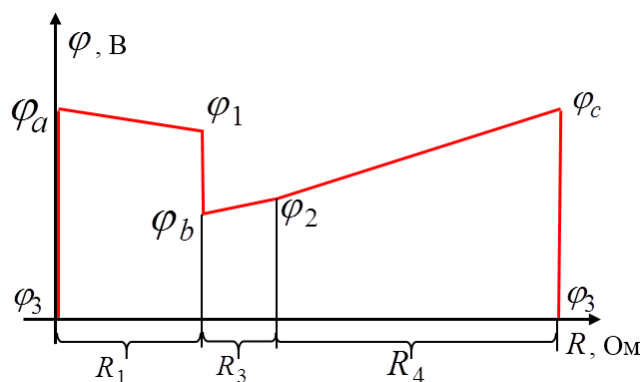


Рисунок 2.6 – Потенциальная диаграмма

Задания

1. Определить показание вольтметра для схемы, изображенной на рисунке 2.7. (15 В).

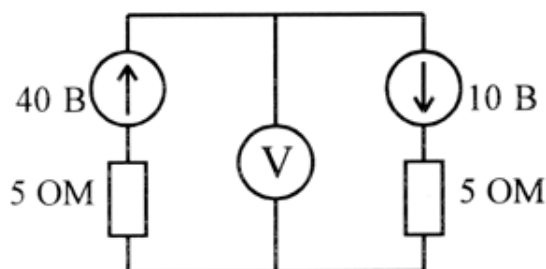


Рисунок 2.7

2. Определить токи в ветвях схемы рисунок 2.8, применяя законы Кирхгофа. Дано: $E_1 = 3$ В, $E_2 = 2$ В, $E_3 = 2$ В, $E_5 = 1$ В, $J_3 = 1$ А, $J_4 = 0,5$ А, $r_1 = 4$ Ом, $r_2 = 6$ Ом, $r_3 = 2$ Ом, $r_4 = 8$ Ом, $r_5 = 10$ Ом. ($I_1 = 0,2$ А, $I_2 = 0,7$ А, $I_3 = -0,5$ А, $I_4 = 0,1$ А, $I_5 = 0,1$ А)

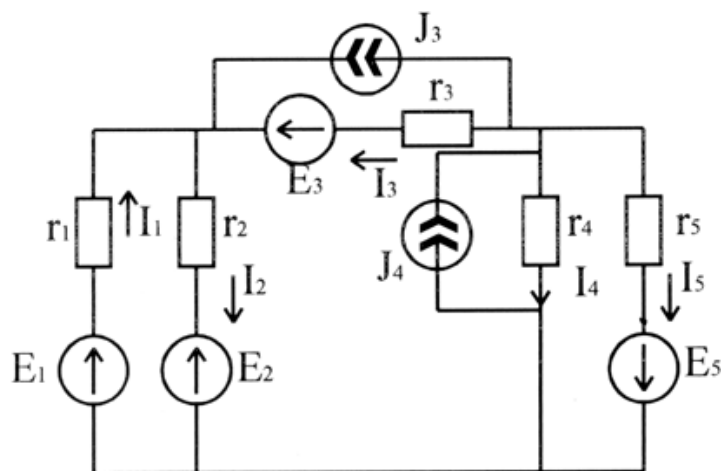


Рисунок 2.8

3. Для цепи рисунок 2.9 построить потенциальные диаграммы при разомкнутом и замкнутом ключе. Дано: $E_1 = 15$ В, $E_2 = 5$ В, $E_3 = 20$ В, $E_4 = 35$ В, $r_1 = 8$ Ом, $r_2 = 24$ Ом, $r_3 = 40$ Ом, $r_4 = 4$ Ом. Внутренние сопротивления источников энергии: $r_{10} = 2$ Ом, $r_{20} = 6$ Ом, $r_{30} = 2$ Ом, $r_{40} = 4$ Ом.

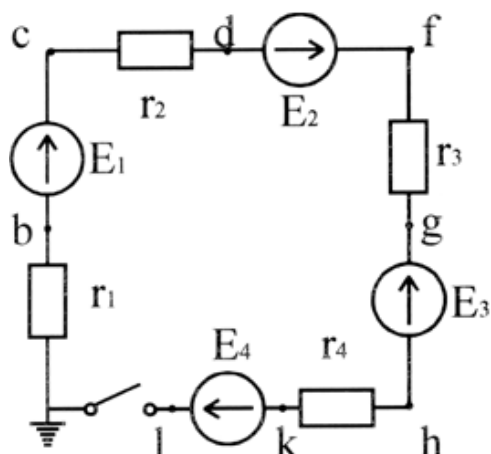


Рисунок 2.9

Контрольные вопросы

1. Записать закон Ома для участка эклектической цепи и для полной цепи.
2. Как определяется направление тока при известных потенциалах электрической цепи?
3. Дайте определение узлам и ветвям электрической цепи.
4. Сформулируйте и запишите первый закон Кирхгофа.
5. Сформулируйте и запишите второй закон Кирхгофа.
6. Как определить показания вольтметра по известным токам в ветвях?
7. Методика построения потенциальной диаграммы для замкнутого контура электрической цепи.
8. Поясните, как произвести учет внутреннего сопротивления источника энергии при построении потенциальной диаграммы.

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

Основная литература

1. Немцов М.В. Электротехника и электроника (6-е изд., стер.) учебник. – М: Академия, 2013. – 480 с. – ISBN: 9785446804320.
2. Электротехника и электроника: Учебное пособие для вузов / В.В. Кононенко [и др.]; под ред. В.В. Кононенко. – Изд. 6-е – Ростов н/Д: Феникс, 2010. – 784 с. (Высшее образование). – ISBN 978-5-222-17568-2.

Дополнительная литература

3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник. – 10-е изд. – М.: Гардарики, 2002. – 638 с.

Практическое занятие 3

Тема: Анализ режимов цепей постоянного тока методами контурных токов и узловых потенциалов

Цель: Научиться рассчитывать токи в ветвях методами контурных токов и узловых потенциалов.

Актуальность темы практического занятия заключается в необходимости использовать методы узловых потенциалов и контурных токов для расчета электрических цепей.

Теоретическая часть

Метод контурных токов.

Метод контурных токов также позволяет уменьшить количество решаемых уравнений в сравнении с системой уравнений по законам Кирхгофа. Количество уравнений по методу контурных токов определяется числом уравнений по второму закону Кирхгофа для рассматриваемой электрической цепи. Метод основывается на том свойстве, что ток в любой ветви может быть представлен в виде алгебраической суммы независимых контурных токов, протекающих по этой ветви. В соответствии с данным методом необходимо выбрать контурные токи таким образом, чтобы каждый из них проходил через один источник тока, а оставшиеся контурные токи выбирать проходящими по ветвям, не содержащим источники тока.

Система уравнений по методу контурных токов в виде матрицы будет иметь столько строк и столбцов, сколько уравнений необходимо записать по второму закону Кирхгофа для рассматриваемой электрической цепи. Если в электрической цепи имеется источник тока, то добавится столбец в систему уравнений, если два, то два столбца и т.д.

Рассмотрим использование метода контурных токов на *примере*.

Метод контурных токов целесообразно применять, когда в количество уравнений по второму закону Кирхгофа для электрической цепи получается меньше чем по первому. На рисунке 3.1 представлена электрическая цепь, отвечающая указанным требованиям.

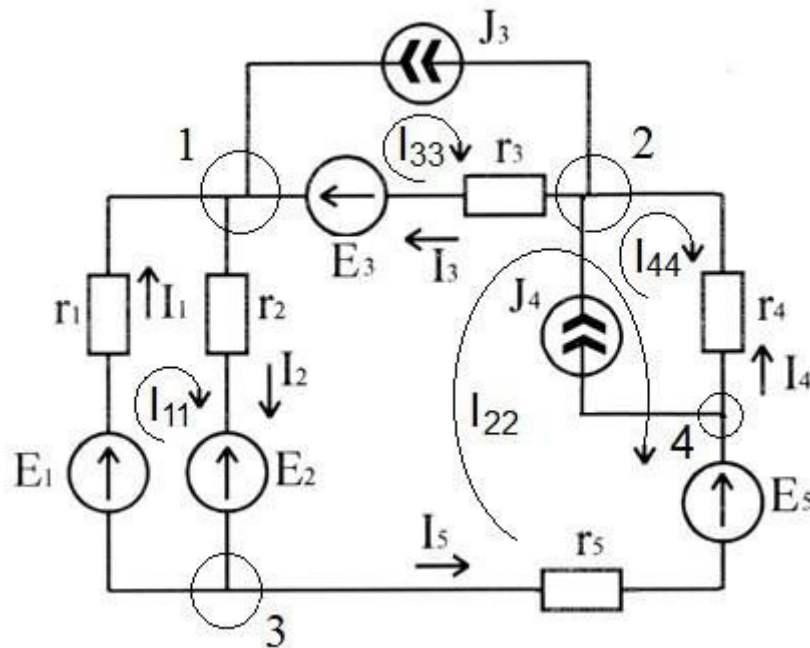


Рисунок 3.1 – Схема электрической цепи для расчета по методу контурных токов

Решение.

В этой цепи четыре узла, следовательно, по первому закону Кирхгофа необходимо записать $4 - 1 = 3$ уравнения. Рассматриваемая схема содержит семь ветвей, две из которых с источниками тока, следовательно, по второму закону Кирхгофа количество уравнений равно: $7 - 2 - 3 = 2$. Для заданной схемы направления обхода контурных токов I_{11} , I_{22} , I_{33} , I_{44} взяты по часовой стрелке, причем $I_{33} = -J_3$, т.к. обход контура не совпадает с направлением тока источника тока; $I_{44} = J_4$, т.к. обход контура совпадает с направлением тока источника тока. Таким образом, контурные токи $I_{33} = -J_3$ и $I_{44} = J_4$ считаются известными. Следовательно, остается два неизвестных контурных тока (I_{11} и I_{22}), для их нахождения используем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} I_{11} \cdot R_{11} - I_{22} \cdot R_{12} - I_{33} \cdot R_{13} - I_{44} \cdot R_{14} = E_{11} \\ -I_{11} \cdot R_{21} + I_{22} \cdot R_{22} - I_{33} \cdot R_{23} + I_{44} \cdot R_{24} = E_{22} \end{cases} \quad (3.1)$$

где R_{mm} – собственное сопротивление контура m (сумма сопротивлений всех ветвей, входящих в контур m). Для рассматриваемой цепи $R_{11} = r_1 + r_2$; $R_{22} = r_2 + r_3 + r_4 + r_5$. В системе уравнений (3.1) у собственных сопротивлений контуров по главной диагонали матрицы будут всегда стоять знаки «плюс».

Если будет задана такая электрическая цепь, для которой по второму закону Кирхгофа необходимо будет записать другое количество уравнений, тогда и количество уравнений в системе (2.4) изменится. Количество строк в системе (2.4) определяется количеством уравнений по второму закону Кирхгофа, а количество столбцов равно сумме числа уравнений по второму закону Кирхгофа и числа источников тока.

R_{ml} – общее сопротивление контуров m и l , берется со знаком «плюс», если направления контурных токов в данной ветви совпадают, в обратном случае – берется знак «минус». В рассматриваемой схеме общим сопротивлением между контурами 1 и 2, а, следовательно, 2 и 1, является r_2 . Направление контурных токов в данной ветви не совпадают, следовательно, сопротивление $R_{12} = R_{21} = r_2$ войдет в уравнение со знаком «минус». Сопротивления между контурами 1 и 3, а также 1 и 4 равны нулю, следовательно, $R_{13} = 0$ и $R_{14} = 0$. Сопротивление между контурами 2 и 3 $R_{23} = r_3$. Направление контурных токов в данной ветви не совпадают, следовательно, сопротивление R_{23} войдет в уравнение со знаком «минус». Сопротивление между контурами 2 и 4 $R_{24} = r_4$. Направление контурных токов в данной ветви совпадают, следовательно, сопротивление R_{24} войдет в уравнение со знаком «плюс».

E_{mm} – алгебраическая сумма ЭДС, входящих в контур m . Для данной схемы $E_{11} = E_1 - E_2$, $E_{22} = E_2 - E_3 - E_5$.

Таким образом, в новых обозначениях система уравнений 3.1 примет следующий вид

$$\begin{cases} I_{11} \cdot (r_1 + r_2) - I_{22} \cdot r_2 = E_1 - E_2 \\ -I_{11} \cdot r_2 + I_{22} \cdot (r_2 + r_3 + r_4 + r_5) - I_{33} \cdot r_3 + I_{44} \cdot r_4 = E_2 - E_3 - E_5 \end{cases} \quad (3.2)$$

Решив полученную систему (3.2) относительно I_{11} и I_{22} , считая $I_{33} = -J_3$ и $I_{44} = J_4$ известными, найдем токи в ветвях электрической цепи.

Токи в ветвях электрической цепи, через контурные токи определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11}; \quad I_2 = I_{11} - I_{22}; \quad I_3 = I_{33} - I_{22}; \\ I_4 &= -I_{44} - I_{22}; \quad I_5 = -I_{22}. \end{aligned}$$

Метод узловых потенциалов.

Данный метод также позволяет уменьшить количество решаемых уравнений в сравнении с системой уравнений по законам Кирхгофа. Количество уравнений по методу узловых потенциалов определяется количеством уравнений по первому закону Кирхгофа для рассматриваемой электрической цепи. В соответствии с данным методом, необходимо сначала определить потенциалы всех узлов электрической цепи, а затем с помощью закона Ома определить токи в ветвях. При этом один из узлов электрической схемы, который называют *опорным*, заземляется, его потенциал становится равен нулю. Узел для заземления выбирается произвольно. Удобно заземлять узел, номер которого имеет наибольшее значение в заданной электрической цепи.

Система уравнений по методу узловых потенциалов в виде матрицы будет иметь столько строк и столбцов, сколько уравнений необходимо записать по первому закону Кирхгофа для рассматриваемой электрической цепи. Если в электрической цепи имеется ветвь содержащая только идеальный источник ЭДС. Тогда удобно пронумеровать узлы электрической цепи так, чтобы номер узла с наибольшим значения в заданной электрической цепи, оказался в узле от которого отходит источник ЭДС. Этот узел принимают за опорный и заземляют. Тогда потенциал узла, в который входит источник ЭДС, будет известным и равным величине ЭДС источника.

Рассмотрим использование метода узловых потенциалов на примере.

Пример.

Метод узловых потенциалов целесообразно применять, когда количество уравнений по первому закону Кирхгофа для электрической цепи получается меньше чем по второму. На рисунке 3.2 представлена электрическая цепь, отвечающая указанным требованиям.

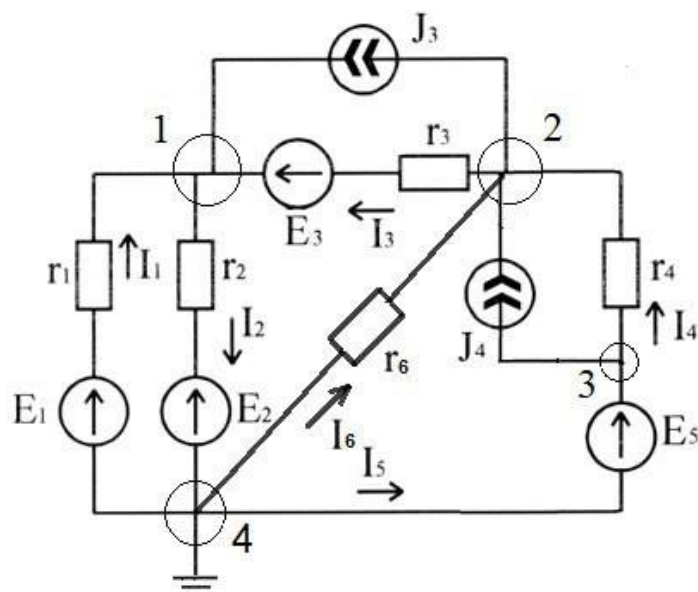


Рисунок 3.2 – Схема электрической цепи для расчета по методу узловых потенциалов

Представленная схема содержит 8 ветвей, 2 из которых содержат источники тока, следовательно, количество уравнений по второму закону Кирхгофа равно: $8 - 2 - 3 = 3$ уравнения.

В заданной цепи четыре узла, следовательно, по первому закону Кирхгофа необходимо записать $4 - 1 = 3$ уравнения, причем имеется ветвь, содержащая только идеальный источник ЭДС E_5 . В этом случае узел, от которого отходит источник ЭДС E_5 , пронумеруем цифрой 4 и примем его за опорный, потенциал которого равен нулю $\phi_4 = 0$. Обозначим заземление $\equiv$ у ϕ_4 на расчетной схеме. Потенциал узла, в который входит источник ЭДС E_5 , будет известным и равным величине ЭДС источника $\phi_3 = E_5$.

Таким образом, остается два неизвестных потенциала ϕ_1 и ϕ_2 , для их нахождения используем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} \phi_1 \cdot g_{11} - \phi_2 \cdot g_{12} - \phi_3 \cdot g_{13} = J_{11} \\ -\phi_1 \cdot g_{21} + \phi_2 \cdot g_{22} - \phi_3 \cdot g_{23} = J_{22} \end{cases}, \quad (3.3)$$

где $g_{11}, g_{22}, \dots, g_{SS}$ – собственные проводимости узлов 1, 2, ..., S, соответственно, которые определяются как сумма проводимостей ветвей, присоединенных к соответствующему узлу. Для рассматриваемой цепи

$$g_{11} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}; \quad g_{22} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6}.$$

В системе уравнений (3.3) у собственных проводимостей узлов по главной диагонали матрицы будут всегда стоять знаки «плюс». Если будет задана такая электрическая цепь, для которой по первому закону Кирхгофа необходимо будет записать другое количество уравнений, то система уравнений (3.3) должна состоять из строк и столбцов, количество которых определяется количеством уравнений по первому закону Кирхгофа.

g_{SN} – сумма проводимостей ветвей, соединяющих узел S с узлом N , всегда в системе уравнений (3.3) берется со знаком «минус». Для рассматриваемой цепи сумма проводимостей ветвей между узлами 1 и 2, а, следовательно, 2 и 1, является $g_{12} = g_{21} = \frac{1}{r_3}$. Сумма проводимостей ветвей между узлами 1 и 3,

равна нулю, следовательно $g_{13} = 0$. Сумма проводимостей ветвей между узлами 2 и 3 $g_{23} = \frac{1}{r_4}$.

$J_{SS} = \sum_S E \cdot g + \sum_S J$, где $\sum_S E \cdot g$ – алгебраическая сумма произведений ЭДС ветвей, примыкающих к узлу S , на их проводимости; при этом со знаком «плюс» берутся те произведения, в ветвях которых ЭДС действуют в направлении узла S , и со знаком «минус», – в направлении от узла S ;

$\sum_S J$ – алгебраическая сумма источников тока, присоединенных к узлу S , знак перед J определяется согласно правилу, указанному выше. В нашем случае $J_{11} = \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} + \frac{E_3}{r_3} + J_3$, $J_{22} = -\frac{E_3}{r_3} - J_3 + J_4$.

Таким образом, в новых обозначениях система уравнений 3.3 примет следующий вид

$$\begin{cases} \phi_1 \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) - \phi_2 \cdot \frac{1}{r_3} = \frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} + \frac{E_3}{r_3} + J_3 \\ -\phi_1 \cdot \frac{1}{r_3} + \phi_2 \cdot \left(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_6} \right) - \phi_3 \cdot \frac{1}{r_4} = -\frac{E_3}{r_3} - J_3 + J_4 \end{cases} \quad (3.4)$$

Решив полученную систему (3.4) относительно ϕ_1 и ϕ_2 , считая известным $\phi_3 = E_5$, найдем токи в ветвях электрической цепи.

Токи в ветвях электрической цепи определяются по закону Ома через полученные при решении системы (3.4) потенциалы:

$$I_1 = \frac{\phi_4 - \phi_1 + E_1}{r_1};$$

$$I_2 = \frac{\phi_1 - \phi_4 - E_2}{r_2};$$

$$I_3 = \frac{\phi_2 - \phi_1 + E_3}{r_3};$$

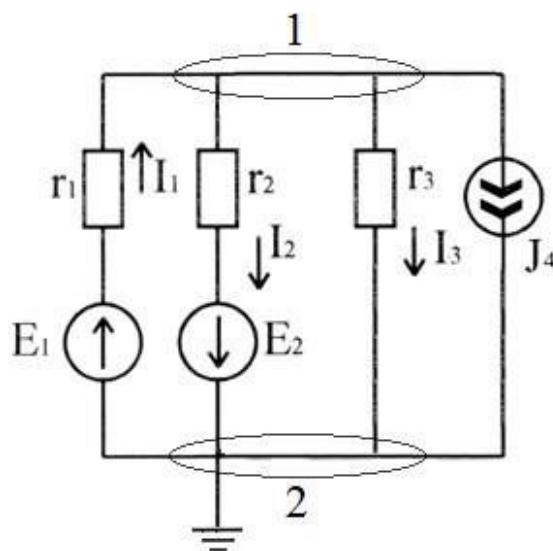
$$I_4 = \frac{\phi_3 - \phi_2}{r_4};$$

$$I_5 = I_4 + J_4 = \frac{\phi_3 - \phi_2}{r_4} + J_4;$$

$$I_6 = \frac{\phi_4 - \phi_2}{r_6}.$$

Метод двух узлов (частный случай метода узловых потенциалов).

Встречаются электрические цепи у которых всего два узла рисунок 3.3. Для расчета токов в такой цепи наиболее рациональным методом расчета является метод двух узлов.



Рисунке 3.3

Рассмотрим использование метода двух узлов на примере.

Пример.

Для электрической цепи (рисунок 3.3) по методу узловых потенциалов запишем следующее выражение:

$$\phi_1 \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) = \frac{E_1}{r_1} - \frac{E_2}{r_2} - J_4.$$

Запишем получившееся выражение для напряжения $U_{12} = -U_{21}$:

$$U_{12} = (\phi_1 - \phi_2) = -U_{21} = -(\phi_2 - \phi_1) = \frac{E_1 \cdot \frac{1}{r_1} - E_2 \cdot \frac{1}{r_2} - J}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}}. \quad (3.4)$$

Выражение 3.4 принято называть *методом двух узлов*.

Токи в ветвях электрической цепи, определяются по закону Ома следующим образом:

$$I_1 = \frac{E_1 - (\phi_1 - \phi_2)}{r_1}; \quad I_2 = \frac{\phi_1 - \phi_2 + E_2}{r_2}; \quad I_3 = \frac{\phi_1 - \phi_2}{r_3}.$$

3

r_3

Задания

1. Определить токи ветвей в электрической цепи схема, которой представлена на рисунке 3.4 методом: а) контурных токов; б) узловых потенциалов. Дано: $E_1 = 36$ В, $E_2 = 12$ В, $J = 8$ А, $R_1 = R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 1$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, $R_5 = 1$ Ом. ($I_1 = 9$ А, $I_2 = 3$ А, $I_3 = 6$ А, $I_4 = 2$ А)

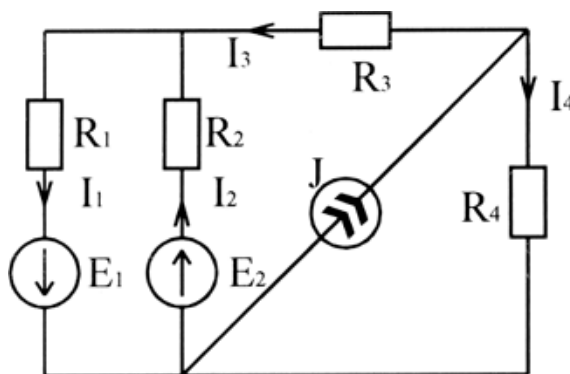


Рисунок 3.4

2. Вычислить все токи в электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 3.5 методом: а) контурных токов; б) методом узловых потенциалов. Дано: $J = 50$ мА, $E_1 = 60$ В, $R_1 = 5$ кОм, $R_2 = 4$ кОм, $R_3 = 16$ кОм, $R_4 = 2$ кОм, $R_5 = 8$ кОм. ($I_1 = 20$ мА, $I_2 = 30$ мА, $I_3 = 10$ мА, $I_4 = 40$ мА, $I_5 = 10$ мА)

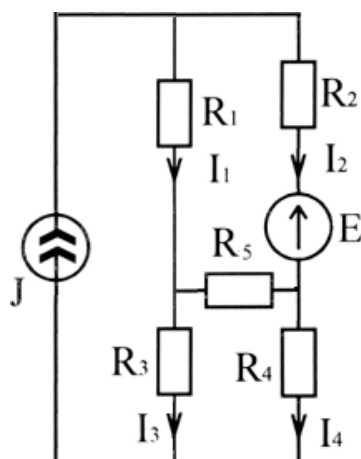


Рисунок 3.5

Контрольные вопросы

1. Сформулировать основные принципы метода узловых потенциалов.
2. Сколько уравнений необходимо составить по методу узловых потенциалов?
3. Сформулировать основные принципы метода контурных токов.
4. Сколько уравнений необходимо составить по методу контурных токов?
5. Каковы особенности применения метода контурных токов для схем, содержащих источник тока?
6. Каковы особенности применения метода узловых потенциалов для схем, содержащих идеальный источник ЭДС между узлами?
7. Как найти токи в ветвях по методу двух узлов?

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

Основная литература

1. Немцов М.В. Электротехника и электроника (6-е изд., стер.) учебник. – М: Академия, 2013. – 480 с. – ISBN: 9785446804320.
2. Электротехника и электроника: Учебное пособие для вузов / В.В. Кононенко [и др.]; под ред. В.В. Кононенко. – Изд. 6-е – Ростов н/Д: Феникс, 2010. – 784 с. (Высшее образование). – ISBN 978-5-222-17568-2.

Дополнительная литература

3. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: учеб. пособие для студентов / под ред. П. А. Ионкина. – М.: Энергоиздат, 1982. – 768 с.

Практическое занятие 4

Тема: Комплексный метод анализа цепей синусоидального тока

Цель: Получить навыки перевода синусоидальных величин в комплексные, научиться строить векторные диаграммы.

Актуальность темы практического занятия заключается в необходимости использовать комплексный метод для расчета электрических цепей.

Теоретическая часть

В настоящее время подавляющая часть электрической энергии генерируется (вырабатывается), передается и потребляется на переменном синусоидальном токе. В отличие от постоянного тока, где полярность источников электрической энергии с течением времени не меняется, при переменном токе происходит чередование полярности источников электрической энергии с определенной частотой. В России принята частота $f = 50$ Гц для генерации и передачи электрической энергии. Таким образом, *переменным ток* является в случае, если он с течением времени меняет свое значение и направление. Значение тока в любой данный момент времени t_1 называют *мгновенным* и обозначают малой буквой $i(t_1)$. Токи, мгновенные значения которых повторяются через равные промежутки времени в той же самой последовательности, называют периодическими, а наименьший промежуток времени, через который эти повторения наблюдаются – периодом T . Ток считается определенным, если известна его зависимость от времени $i(t)$. Термин «переменный ток» обычно применяют в узком смысле, а именно, для такого периодического тока, у которого постоянная составляющая тока равна нулю, т.е. $\frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt = 0$ и особенно часто для синусоидального тока

$$i(t) = I_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t).$$

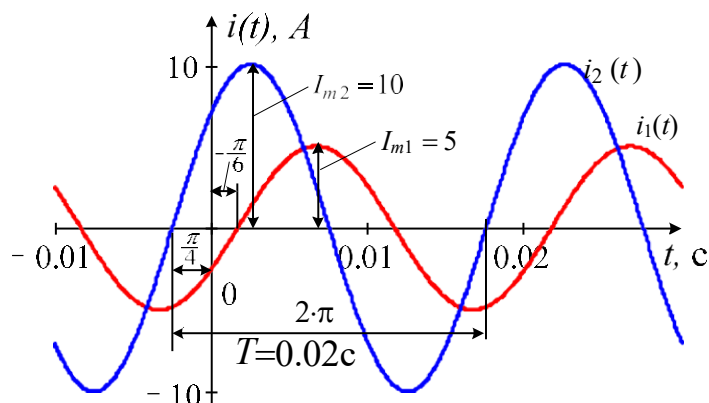
Основные понятия синусоидального тока.

Мгновенные значения синусоидального тока определяется выражением:

$$i(t) = I_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \phi) \quad (4.1)$$

где I_m – амплитуда тока. Аргумент синуса называют фазой – $(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \phi)$. Угол называют начальной фазой. Фаза с течением времени непрерывно растет. После ее увеличения на $2 \cdot \pi$ весь цикл изменения тока повторяется. Величина $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ называется угловой частотой и показывает скорость изменения фазы.

Для примера на рисунке 4.1 построены графики синусоидальных токов одинаковой частоты $f = 50$ Гц, но с различными амплитудами и начальными фазами: $i_1(t) = 5 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \frac{\pi}{6}\right)$, $i_2(t) = 10 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$.



Рисунке 4.1 – Графики синусоидальных токов

По оси абсцисс отложено время t и пропорциональная времени величина $\cdot t$. Начальная фаза отсчитывается всегда от момента, соответствующего началу синусоиды, до момента начала отсчета времени $t = 0$. При положительной начальной фазе $\phi = \frac{\pi}{4}$ начало синусоиды тока $i(t)$ сдвинуто влево, а при отрицательной начальной фазе $\phi = -\frac{\pi}{6}$ для тока $i_1(t)$ – вправо от начала координат. Если у нескольких синусоидальных функций, изменяющихся с одинаковой частотой, начала синусоид не совпадают, то говорят, что они сдвинуты относительно друг друга по фазе. На рисунке 4.1 $\phi_1 - \phi_2 < 0$, т.е. ток $i_1(t)$ отстает по фазе от тока $i_2(t)$. Если у синусоидальных функций одинаковые частоты и одинаковые начальные фазы, то говорят, что функции совпадают по фазе, если разность фаз равна $\pm \pi$, то говорят, что они противоположны по фазе.

Для численного описания переменного тока, принято использовать параметр, называемый действующее значение $I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t) dt}$, который характеризует действие тока в электрической цепи за период. Действующее значение (его называют также эффективным или среднеквадратичным) синусоидального тока определяется следующим образом:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T (I_m \cdot \sin(t))^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot (I_m)^2 \cdot \left(\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2 \cdot t)}{4} \right) \Big|_0^T \right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \cdot (I_m)^2 \cdot \left(\frac{T}{2} - \frac{\sin(2 \cdot T / 2)}{4} - \left(\frac{0}{2} - \frac{\sin(2 \cdot 0)}{4} \right) \right)} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot (I_m)^2 \cdot \left(\frac{T}{2} \right)} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Следовательно, действующее значение синусоидального тока равно $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0.707 \cdot I_m$. Действующее значение синусоидального тока численно

равно значению такого постоянного тока, который за время, равное периоду синусоидального тока, выделяет такое же количество теплоты, что и синусоидальный ток на одном и том же сопротивлении.

Большинство измерительных приборов показывают действующее значение измеряемой величины. (Определение показаний приборов будет рассмотрено в практическом занятии 10).

Изображение синусоидально изменяющихся величин на комплексной плоскости.

На рисунке 4.2 показан синусоидальный ток $i(t) = I_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \phi)$, представляющий собой на комплексной плоскости вектор $\widehat{I}_m$.

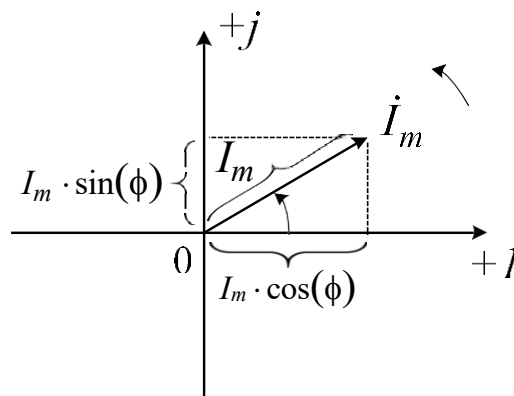


Рисунок 4.2 – Изображение синусоидальных величин на комплексной плоскости

Синусоидальный ток $i(t)$ может быть записан в комплексном виде $\widehat{I_m}$ (точка, поставленная над током $\widehat{I_m}$, означает, что эта величина изменяется во времени синусоидально) следующим образом:

$$\widehat{I_m} = I_m \cdot e^{j\phi} = I_m \cdot \cos(\phi) + j \cdot I_m \cdot \sin(\phi).$$

где $\widehat{I_m}$ – комплексная величина, модуль (длина вектора) которой равен I_m ;

$j = \sqrt{-1}$ – единица измерения по мнимой оси комплексной плоскости;

– угол, под которым вектор $\widehat{I_m}$ проведен к вещественной оси $+I$ комплексной плоскости, равный начальной фазе. Выражение $I_m \cdot e^{j\phi}$ называют *показательной* формой записи комплексного числа $\widehat{I_m}$.

$I_m \cdot \cos(\phi) + j \cdot I_m \cdot \sin(\phi)$ называют алгебраической формой записи комплексного числа $\widehat{I_m}$.

$I_m \cdot \cos(\phi)$ – *вещественная* часть комплекса $\widehat{I_m}$ или *активная* составляющая тока $\widehat{I_m}$.

$j \cdot I_m \cdot \sin(\phi)$ – *мнимая* часть комплекса $\widehat{I_m}$ или *реактивная* составляющая тока $\widehat{I_m}$.

Рассмотрим пример записи синусоидального тока в комплексном виде в показательной и алгебраической формах.

Пример.

Запишем в комплексном виде синусоидальные токи
 $i_1(t) = 5 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \frac{\pi}{6}\right)$ и $i_2(t) = 10 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$;

$\widehat{I_{m1}} = 5 \cdot e^{j \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ – показательная форма записи тока $i_1(t)$,

$\widehat{I_{m1}} = 5 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + j \cdot 5 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ – алгебраическая форма записи тока $i_1(t)$,

$\widehat{I_{m2}} = 10 \cdot e^{j \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)}$ – показательная форма записи тока $i_2(t)$,

$\widehat{I_{m2}} = 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \cdot 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ – алгебраическая форма записи тока $i_2(t)$.

Изобразим на комплексной плоскости (рисунок 4.3) синусоидальные токи $i_1(t) = 5 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \frac{\pi}{6}\right)$ и $i_2(t) = 10 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$.

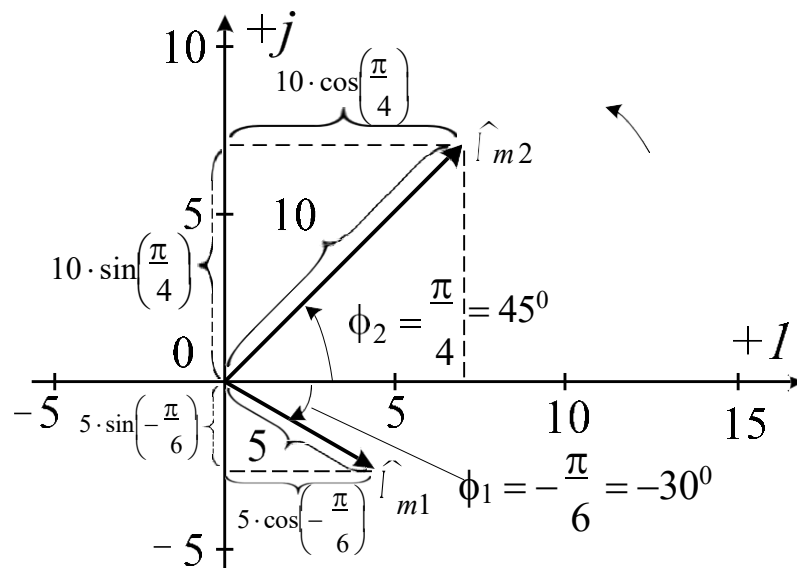


Рисунок 4.3 – Изображение синусоидальных величин на комплексной плоскости

Сложение и вычитание синусоидальных функций времени на комплексной плоскости. Векторная диаграмма.

В результате сложении двух синусоидальных токов $i_1(t) = I_{m1} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \phi_1)$ и $i_2(t) = I_{m2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \phi_2)$ одинаковой частоты получается некоторый ток той же частоты $i(t) = I_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \phi)$. Найдем амплитуду I_m и начальную фазу искомого тока. Для этого сложим два тока в комплексном виде $\widehat{I_{m1}}$ и $\widehat{I_{m2}}$, геометрическая сумма векторов этих токов даст комплексную амплитуду суммарного тока $I_m \cdot e^{j \cdot \phi}$. Для определения разности двух токов (ЭДС, напряжений) следует произвести не сложение, а вычитание соответствующих векторов. Следует отметить, что если бы векторы I_{m1} , $\widehat{I_{m2}}$, $\widehat{I_m}$ вращались вокруг начала координат с угловой скоростью ω , то взаимное расположение векторов относительно друг друга осталось бы без изменений.

Векторной диаграммой называют совокупность векторов на комплексной плоскости, изображающей синусоидально изменяющиеся функции времени одной и той же частоты и построенные с соблюдением правильной ориентации

их относительно друг друга по фазе. Рассмотрим сложение и вычитание синусоидальных функций на примере.

Пример.

Необходимо сложить и вычесть два тока $i_1(t) = 5 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \frac{\pi}{6}\right)$ и $i_2(t) = 10 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$. Изобразим эти токи на комплексной плоскости в

виде векторов и проведем их сложение и вычитание (рисунок 4.4).

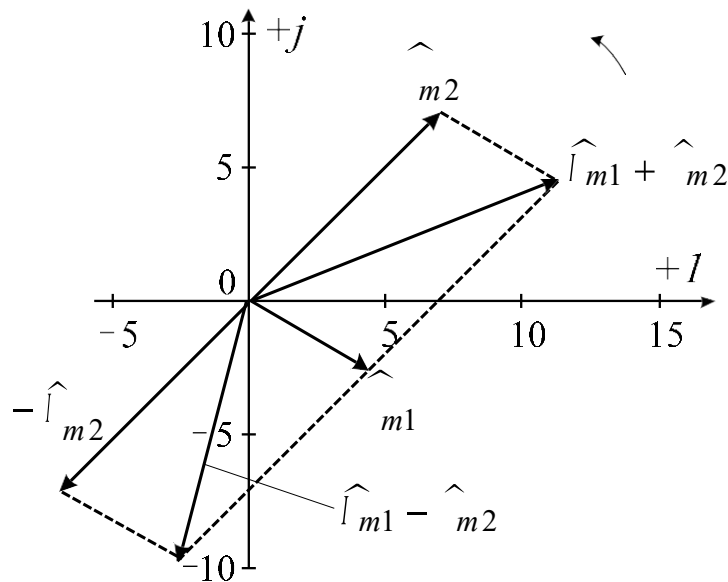


Рисунок 4.4 – Сложение и вычитание синусоидальных величин на комплексной плоскости

Проведем аналитическое сложение и вычитание токов в комплексной форме записи. Для этого используем алгебраическую форму записи комплексных токов:

$$\begin{aligned} \widehat{I}_{m1} &= 5 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + j \cdot 5 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4,33 - j \cdot 2,5, \\ \widehat{I}_{m2} &= 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \cdot 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 7,071 + j \cdot 7,071, \\ \widehat{I}_{m1} + \widehat{I}_{m2} &= 4,33 - j \cdot 2,5 + 7,071 + j \cdot 7,071 = 11,401 + j \cdot 4,571, \\ \widehat{I}_{m1} - \widehat{I}_{m2} &= 4,33 - j \cdot 2,5 - 7,071 - j \cdot 7,071 = -2,741 - j \cdot 9,571 \end{aligned}$$

Если необходимо разделить или умножить два комплекса, тогда используют показательную форму записи или алгебраическую.

В показательной форме записи, при умножении модули умножают, показатели складывают, при делении модули делят, показатели вычитают:

$$\begin{aligned} \widehat{m1} \cdot \widehat{m2} &= 5 \cdot e^{j\left(-\frac{\pi}{6}\right)} \cdot 10 \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 50 \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = 50 \cdot e^{j(15^\circ)}, \\ \widehat{I_{m1}} &= \frac{5}{10} \cdot e^{j\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)} = 0,5 \cdot e^{j\left(-\frac{5\pi}{12}\right)} = 0,5 \cdot e^{j(-75^\circ)}. \end{aligned}$$

Умножение в алгебраической форме записи:

$$\begin{aligned} \widehat{m1} \cdot \widehat{m2} &= (4,33 - j \cdot 2,5) \cdot (7,071 + j \cdot 7,071) = \\ &= 4,33 \cdot 7,071 + j \cdot 7,071 \cdot 4,33 - j \cdot 2,5 \cdot 7,071 - j \cdot 2,5 \cdot j \cdot 7,071. \end{aligned}$$

Далее, так как $j^2 = -1$ слагаемое $(-j \cdot 2,5 \cdot j \cdot 7,071)$ станет равно 17,677.

Тогда $\widehat{m1} \cdot \widehat{m2} = 30,617 + j \cdot 30,617 - j \cdot 17,677 + 17,677 = 48,296 + j \cdot 12,941.$

Деление в алгебраической форме записи, производится путем домножения числителя и знаменателя на сопряженный комплекс знаменателя. Сопряженный комплекс отличается от обычного знаком у мнимой части.

$$\begin{aligned} \widehat{m1} &= \frac{(4,33 - j \cdot 2,5)}{(7,071 + j \cdot 7,071)} = \frac{(4,33 - j \cdot 2,5) \cdot (7,071 - j \cdot 7,071)}{(7,071 + j \cdot 7,071) \cdot (7,071 - j \cdot 7,071)} = \\ &= \frac{4,33 \cdot 7,071 - j \cdot 7,071 \cdot 4,33 - j \cdot 2,5 \cdot 7,071 + j \cdot 2,5 \cdot j \cdot 7,071}{7,071 \cdot 7,071 - j \cdot 7,071 \cdot 7,071 + j \cdot 7,071 \cdot 7,071 + 7,071 \cdot 7,071} = \\ &= \frac{12,94 - j \cdot 48,295}{100} = 0,129 - j \cdot 0,483 \end{aligned}$$

Мгновенная мощность.

Протекание синусоидальных токов по участкам электрической цепи сопровождается потреблением энергии от источников. Скорость поступления энергии характеризуется мощностью. Под *мгновенной мощностью*, понимают произведение мгновенного значения напряжения $u(t)$ на участке цепи на мгновенное значение тока $i(t)$, протекающего по этому участку:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t).$$

Резистивный, индуктивный и емкостной элементы в цепи синусоидального тока.

Элементами реальных электрических цепей синусоидального тока являются резисторы, катушки индуктивности и конденсаторы. Резистивный элемент – это идеализированный схемный элемент, учитывающий выделение

теплоты в том или ином элементе реальной электрической цепи. Индуктивный элемент – это идеализированный, элемент представляющий катушку индуктивности без активного сопротивления $R=0$. Емкостной элемент – это идеализированный элемент, представляющий собой конденсатор без потерь $R=\infty$.

Напряжение совпадает с формой вызванного этим напряжением тока только в резистивных цепях, т.е. ток и напряжение в этом случае совпадают по фазе. В цепях с индуктивными и емкостными элементами формы напряжения и тока отличаются друг от друга.

В цепях с индуктивным элементом ток и напряжение связаны следующим выражением: $i_L = \frac{1}{L} \int u_L dt$. Если напряжение, приложенное к индуктивному элементу, имеет синусоидальную форму $u(t) = u_L(t) = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$, то ток определится из выражения

$$i_L = \frac{1}{L} \cdot \int U_m \cdot \sin(\omega \cdot t) dt = \frac{U_m}{\omega \cdot L} \cdot \cos(\omega \cdot t) = \frac{U_m}{\omega \cdot L} \cdot \sin(\omega \cdot t - 90^\circ),$$

$$i_L = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t - 90^\circ),$$

где $I_m = \frac{U_m}{\omega \cdot L}$.

Произведение $\omega \cdot L$ обозначается X_L и называется *индуктивным сопротивлением* $X_L = \omega \cdot L$.

Таким образом, если к индуктивному элементу приложить напряжение гармонической формы, то ток будет отставать от напряжения на 90° (рисунок 4.5 4.6).

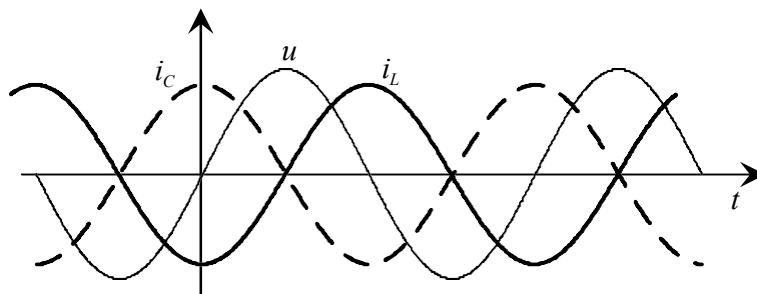


Рисунок 4.5 – Мгновенные токи и напряжение на индуктивном и емкостном элементах. При начальной фазе напряжения равной нулю

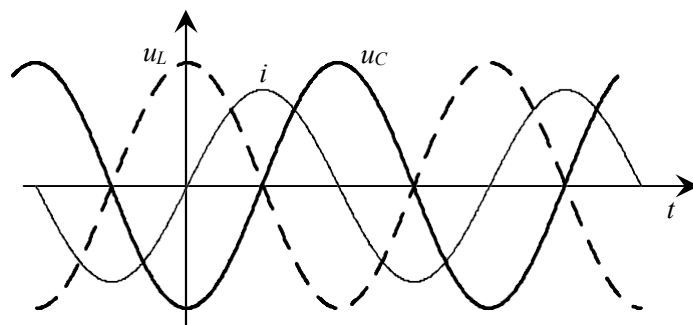


Рисунок 4.6 – Мгновенные токи и напряжение на индуктивном и емкостном элементах. При начальной фазе тока равной нулю

В цепях с емкостным элементом ток и напряжение связаны следующим выражением $i_C = C \frac{du_C}{dt}$. Если ко входу цепи приложено напряжение синусоидальной формы $u(t) = u_C(t) = U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$, то ток через емкостной элемент определится из выражения:

$$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt} = C \cdot \frac{d}{dt}(U_m \cdot \sin(\omega \cdot t)) = \omega \cdot C \cdot U_m \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Так как множитель $\omega \cdot C \cdot U_m$ имеет размерность тока, обозначим его $I_m = \omega \cdot C \cdot U_m$. Известно, что $\cos(\omega \cdot t) = \sin(\omega \cdot t + 90^\circ)$. Таким образом, ток через емкостной элемент $i_C = I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$ опережает напряжение на 90° (рисунок 4.5, 4.6). Величина $\frac{1}{\omega \cdot C}$ обозначается X_C и называется *емкостным*

сопротивлением $X_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$.

Задания

1. Построить кривые изменения напряжения и тока во времени и начертить векторы, изображающие заданные синусоидальные функции

$$u(t) = 100 \cdot \sin\left(157 \cdot t + \frac{\pi}{10}\right) \text{ В}; \quad i(t) = 5 \cdot \sin\left(157 \cdot t - \frac{\pi}{8}\right) \text{ А}.$$

Чему равен сдвиг фаз между напряжением и током? Определить период T и частоту ω .

2. Найти аналитически и при помощи векторной диаграммы сумму и разность синусоидальных токов. Найти аналитически их произведение и частное от деления.

а) $i_1(t) = 100 \cdot \sin(\omega \cdot t + 30^\circ), \mu A$; $i_2(t) = 120 \cdot \sin(\omega \cdot t - 45^\circ), \mu A$;

б) $i_1(t) = -20 \cdot \sin(\omega \cdot t - 112^\circ), \mu A$; $i_2(t) = 50 \cdot \sin(\omega \cdot t + 250^\circ), \mu A$;

в) $i_1(t) = 50 \cdot \sin(\omega \cdot t - 90^\circ), \mu A$; $i_2(t) = 25 \cdot \sin(\omega \cdot t + 110^\circ), \mu A$;

3. Катушка с активным сопротивлением $R = 10$ Ом, индуктивностью $L = 0,05$ Гн подключена к источнику синусоидального напряжения (рисунок 7.7), действующее значение которого $U = 120$ В, $f = 50$ Гц. Определить полное сопротивление катушки, ток и сдвиг фаз между напряжением и током. Вычислить активную и реактивную составляющие напряжением на зажимах катушки. Построить векторную диаграмму напряжений и тока. ($X_L = 15,7$ Ом, $Z = 18,6$ Ом, $\varphi = 57^\circ 30'$, $I = 6,45$ А, $U_{X_L} = 103$ В, $U_R = 64,5$ В)

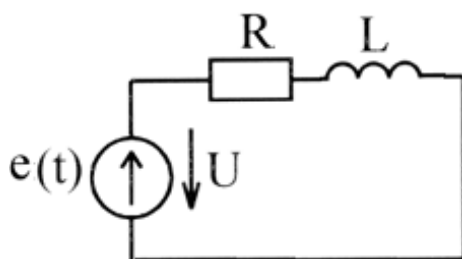


Рисунок 4.7

4. Найти мгновенные значения напряжения на всех участках и мгновенную мощность источника (рисунок 4.8). Дано: $J(t) = 2 \cdot \sin(\omega \cdot t + 30^\circ)$, $f = 200$ Гц, $r = 10$ Ом, $L = 0,01$ Гн, $C = 80$ мкФ.

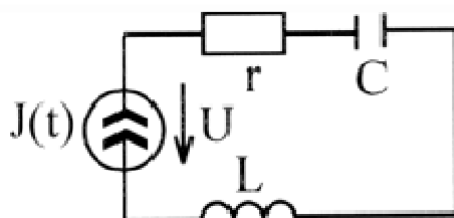


Рисунок 4.8

$$(u_r(t) = 20 \cdot \sin(\omega \cdot t + 30^\circ), u_L(t) = 25 \cdot \sin(\omega \cdot t + 120^\circ), u_C(t) = 20 \cdot \sin(\omega \cdot t - 60^\circ), \\ u(t) = 20,6 \cdot \sin(\omega \cdot t + 44^\circ), p(t) = 17,67 - 18 \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t + 74^\circ)).$$

Контрольные вопросы

1. Чем отличается переменный ток от постоянного?
2. Приведите основные характеристики синусоидального тока.
3. Как определяется действующее значения переменного тока?
4. Как изображается переменный ток на комплексной плоскости?
5. Приведите комплексные формы записи переменного тока.
6. Как аналитически и графически сложить (вычитать) два переменных тока?
7. Как аналитически умножить или разделить две комплексные величины?
8. Как определяется и что показывает мгновенная мощность?
9. Как определяется индуктивное сопротивление? Емкостное?

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

Основная литература

1. Немцов М.В. Электротехника и электроника (6-е изд., стер.) учебник. – М: Академия, 2013. – 480 с. – ISBN: 9785446804320.
2. Электротехника и электроника: Учебное пособие для вузов / В.В. Кононенко [и др.]; под ред. В.В. Кононенко. – Изд. 6-е – Ростов н/Д: Феникс, 2010. – 784 с. (Высшее образование). – ISBN 978-5-222-17568-2.

Дополнительная литература

3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник. – 10-е изд. – М.: Гардарики, 2002. – 638 с.

Практическое занятие 5

Тема: Расчет однофазных цепей синусоидального тока

Цель: Получить навыки расчета разветвленных однофазных цепей синусоидального тока различными методами как в обычных режимах, так и в режиме резонанса, научиться сопровождать расчеты векторными и топографическими диаграммами.

Актуальность темы практического занятия заключается в необходимости проводить расчеты однофазных цепей используемых при электроснабжении потребителей.

Теоретическая часть

Символический (комплексный) метод расчета цепей синусоидального тока.

Рассмотрим электрическую цепь синусоидального тока, схема которой приведена на рисунке 5.1.

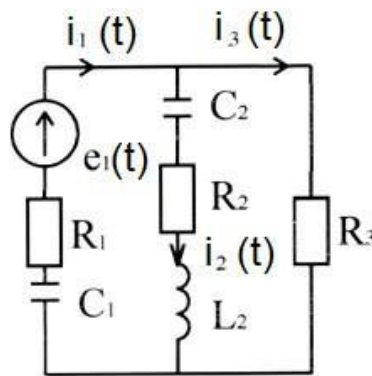


Рисунок 5.1 – Схема электрической цепи синусоидального тока

В цепи действует синусоидальный источник ЭДС $e_1(t) = E_1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

Запишем уравнения по законам Кирхгофа для мгновенных значений, учитывая, что $u_R(t) = i(t) \cdot R$; $u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$; $u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt$. Далее в уравнениях синусоидальные токи и напряжения, зависящие от времени будем обозначать i , e , u_R , u_L , u_C :

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ u_{R1} + u_C + u_{C2} + u_{R2} + u_{L2} = e_1 \\ -u_{L2} - u_{R2} - u_{C2} + u_{R3} = 0 \end{cases}$$

Выражая мгновенные значения напряжения через мгновенные значения токов, получаем

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_3 = 0 \\ i_1 \cdot R_1 + \frac{1}{C_1} \cdot \int i_1 dt + \frac{1}{C_2} \cdot \int i_2 dt + i_2 \cdot R_2 + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} = e_1 \\ -L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} - i_2 \cdot R_2 - \frac{1}{C_2} \cdot \int i_2 dt + i_3 \cdot R_3 = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Система уравнений (5.1) представляет собой законы Кирхгофа в дифференциальной форме для схемы электрической цепи (рисунок 5.1).

Сущность символического метода расчета состоит в том, что при синусоидальном токе можно перейти от уравнений, составленных для мгновенных значений и являющихся дифференциальными уравнениями, к алгебраическим уравнениям, составленным относительно комплексов тока и ЭДС. При этом следует произвести следующие замены:

$$\begin{aligned}
i &\rightarrow \widehat{I}_m \\
e &\rightarrow \widehat{E}_m \\
u_R &= i \cdot R \rightarrow \widehat{I}_m \cdot R \\
u_L &= L \cdot \frac{di}{dt} \rightarrow \widehat{I}_m \cdot j \cdot \omega \cdot L \\
u_C &= \frac{1}{C} \cdot \int i dt \rightarrow \widehat{I}_m \cdot \begin{pmatrix} -j \cdot 1 \\ \omega \cdot C \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Мгновенное значение напряжения на индуктивной катушке $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$

заменено комплексом $\widehat{I}_m \cdot j \cdot \omega \cdot L$, опережающим ток на 90° . Опережение вектора тока происходит вследствие умножения его на $j = 1 \cdot e^{j90^\circ}$, так как умножение любого вектора на j сдвигает его на угол, равный $+90^\circ$. Таким образом, мгновенное значение напряжения на конденсаторе $u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i dt$

заменено комплексом $\widehat{I}_m \cdot \begin{pmatrix} -j \cdot 1 \\ \omega \cdot C \end{pmatrix}$, отстающим от тока на 90° . Отставание

вектора тока происходит вследствие умножения его на $(-j = 1 \cdot e^{-j90^\circ})$, так как умножение любого вектора на $(-j)$ сдвигает его на угол, равный (-90°) .

Анализ электрических цепей также можно производить в комплексах действующих значений токов $\widehat{I}_m$ и напряжений $\widehat{U}_m$, которые $\sqrt{2}$ раз меньше соответствующих амплитудных комплексов $\widehat{I}_m$ $\widehat{U}_m$. В задачах, как правило, расчет ведется для действующих значений токов и напряжений, если не оговорено другое. Расчет для действующих значений проводится потому, что модули этих значений будут показывать измерительные приборы, включенные в рассматриваемую электрическую цепь.

После замен мгновенных величин в схеме на рисунке 5.1 на комплексы действующих значений схема электрической цепи примет вид, показанный на рисунке 5.2.

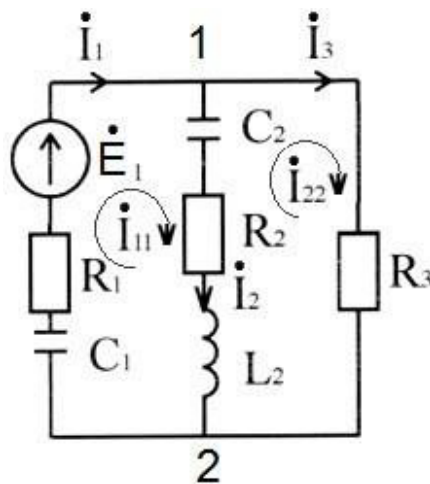


Рисунок 5.2 – Схема электрической цепи синусоидального тока

Символическая форма записи уравнений для действующих значений токов $\widehat{I}$ и $\widehat{U}$ напряжений по законам Кирхгофа для схемы электрической цепи на рисунке 5.2:

$$\begin{cases} \widehat{I}_1 - \widehat{I}_2 - \widehat{I}_3 = 0 \\ \widehat{I}_1 \cdot R_1 + \widehat{I}_1 \cdot (-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_1}) + \widehat{I}_2 \cdot (-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_2}) + \widehat{I}_2 \cdot R_2 + \widehat{I}_2 \cdot j \cdot \omega \cdot L_2 = \widehat{E}_1 \\ -\widehat{I}_2 \cdot j \cdot \omega \cdot L_2 - \widehat{I}_2 \cdot R_2 - \widehat{I}_2 \cdot (-j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_2}) + \widehat{I}_3 \cdot R_3 = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

Решив систему уравнений (5.3), получим комплексы неизвестных токов $\widehat{I}_1$, $\widehat{I}_2$ и $\widehat{I}_3$. После перехода от комплексных значений токов к мгновенным $i_1(t)$, $i_2(t)$ и $i_3(t)$ токи считаются определенными.

Для расчета цепей переменного тока посредством комплексных чисел могут использоваться все методы, применяемые для расчета цепей постоянного тока. При этом напряжения, потенциалы, токи, сопротивления и проводимости должны быть записаны в комплексной форме.

Метод контурных токов для цепи переменного тока.

Рассмотрим метод контурных токов на примере схемы, представленной на рисунке 5.2.

Для заданной схемы направления обхода контурных токов $\widehat{I}_1$, $\widehat{I}_2$ взяты по часовой стрелке. Источников тока в схеме нет. Таким образом, система уравнений по методу контурных токов будет иметь две строки и два столбца:

$$\begin{cases} \widehat{I}_{11} \cdot \underline{Z}_{11} - \widehat{I}_{22} \cdot \underline{Z}_{12} = \widehat{E}_{11} \\ -\widehat{I}_{11} \cdot \underline{Z}_{12} + \widehat{I}_{22} \cdot \underline{Z}_{22} = \widehat{E}_{22} \end{cases} \quad (5.4)$$

где $\underline{Z}_{mm}$ – собственное комплексное сопротивление контура m (сумма комплексных сопротивлений всех ветвей, входящих в контур m). В нашем случае $\underline{Z}_{11} = R_1 - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_1} - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C_2} + R_2 + j \cdot \omega \cdot L_2 = R_1 - j \cdot X_{C_1} - j \cdot X_{C_2} + R_2 + j \cdot X_{L_2}$;
 $\underline{Z}_{22} = -j \cdot X_{C_2} + R_2 + j \cdot X_{L_2} + R_3$.

Z_{ml} – общее комплексное сопротивление контуров m и l , берется со знаком «плюс», если направления контурных токов в данной ветви совпадают, в обратном случае – берется знак «минус». Для рассматриваемой цепи общим сопротивлением между контурами 1 и 2, а, следовательно, 2 и 1, является $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -j \cdot X_{C_2} + R_2 + j \cdot X_{L_2}$. Направление контурных токов в данной ветви не совпадают, следовательно, сопротивление $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$, войдет в уравнение со знаком минус.

$\widehat{E}_m$ – комплекс алгебраической суммы ЭДС, входящих в контур m . В нашем случае $\widehat{E}_{11} = \widehat{E}_1$, $\widehat{E}_{22} = 0$.

Таким образом, в новых обозначениях система уравнений 5.4 примет следующий вид:

$$\begin{cases} \widehat{I}_{11} \cdot (R_1 - j \cdot X_{C_1} - j \cdot X_{C_2} + R_2 + j \cdot X_{L_2}) - \widehat{I}_{22} \cdot (-j \cdot X_{C_2} + R_2 + j \cdot X_{L_2}) = \widehat{E}_1 \\ -\widehat{I}_{11} \cdot (-j \cdot X_{C_2} + R_2 + j \cdot X_{L_2}) + \widehat{I}_{22} \cdot (j \cdot X_{C_2} + R_2 + j \cdot X_{L_2} + R_3) = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

Решив полученную систему (5.5) относительно $\widehat{I}_{11}$ и $\widehat{I}_{22}$, найдем токи в ветвях электрической цепи.

Токи в ветвях электрической цепи, через контурные токи определяются следующим образом: $\widehat{I}_1 = \widehat{I}_{11}$; $\widehat{I}_2 = \widehat{I}_{11} - \widehat{I}_{22}$; $\widehat{I}_3 = \widehat{I}_{22}$.

Метод узловых потенциалов для цепи переменного тока.

В представленной на рисунке 5.2 электрической цепи всего два узла. Для расчета токов в такой цепи используем метод двух узлов.

Запишем выражение для напряжения $\widehat{U}_{12} = -\widehat{U}_{21}$ по методу двух узлов:

$$\widehat{U}_{12} = (\phi_1 - \phi_2) = -\widehat{U}_{21} = -(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\widehat{E}_1 \cdot \frac{1}{R_1 - j \cdot X_{C_1}}}{\frac{1}{R_1 - j \cdot X_{C_1}} + \frac{1}{R_2 + j \cdot X_{L_2} - j \cdot X_{C_2}} + \frac{1}{R_3}} \quad (5.6)$$

Токи в ветвях электрической цепи определяются по закону Ома следующим образом:

$$\begin{aligned} \widehat{I}_1 &= \frac{\widehat{E}}{R_1 - j \cdot X_{C_1}}; \widehat{I}_2 = \frac{\widehat{E}}{R_2 + j \cdot X_{L_2} - j \cdot X_{C_2}}; \widehat{I}_3 = \frac{\widehat{E}}{R_3} \end{aligned}$$

Использование закона Ома для расчета цепи переменного тока рассмотрим на примере схемы, представленной на рисунке 5.2.

В схеме (рисунок 5.2) содержится один источник, поэтому для нахождения тока $\widehat{I}_1$ используем закон Ома:

$$\begin{aligned} \widehat{I}_1 &= \frac{\widehat{E}}{R_1 - j \cdot X_{C_1} + \frac{R_3 \cdot (R_2 + j \cdot X_{L_2} - j \cdot X_{C_2})}{R_3 + R_2 + j \cdot X_{L_2} - j \cdot X_{C_2}}}; \\ \widehat{I}_2 &= \widehat{I}_1 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_2 + j \cdot X_{L_2} - j \cdot X_{C_2}}; \\ \widehat{I}_3 &= \widehat{I}_1 \cdot \frac{R_2 + j \cdot X_{L_2} - j \cdot X_{C_2}}{R_3 + R_2 + j \cdot X_{L_2} - j \cdot X_{C_2}}. \end{aligned}$$

Комплексное сопротивление относительно источника $\widehat{E}_1$ равно $R_1 - j \cdot X_{C_1} + \frac{R_3 \cdot (R_2 + j \cdot X_{L_2} - j \cdot X_{C_2})}{R_3 + R_2 + j \cdot X_{L_2} - j \cdot X_{C_2}}$, т.к. ветвь с R_3 соединена параллельно с ветвью $(R_2 + j \cdot X_{L_2} - j \cdot X_{C_2})$, по которой протекает ток $\widehat{I}_2$, а их общее сопротивление $\frac{R_3 \cdot (R_2 + j \cdot X_{L_2} - j \cdot X_{C_2})}{R_3 + R_2 + j \cdot X_{L_2} - j \cdot X_{C_2}}$ соединено последовательно с участком цепи $R_1 - j \cdot X_{C_1}$.

Токи $\widehat{I}_2$ и $\widehat{I}_3$ определялись через параллельное токораспределение $\widehat{I}_1$ по ветвям R_3 и $(R_2 + j \cdot X_{L_2} - j \cdot X_{C_2})$.

Пример расчета электрической цепи синусоидального тока.

Рассчитать токи в ветвях электрической цепи однофазного переменного тока рисунок 5.3. Если $e_1(t) = 20 \cdot \sqrt{2} \sin(314 \cdot t)$, $C_1 = C_2 = 318,5$ мкФ, $R_1 = R_2 = 10$ Ом, $L_2 = 16$ мГн, $R_3 = 20$ Ом.

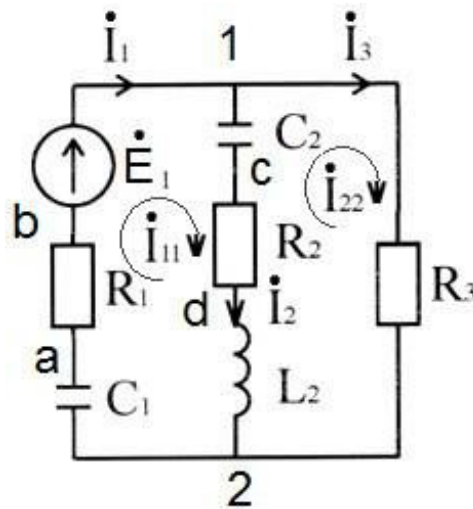


Рисунок 5.3 – Схема электрической цепи синусоидального тока

Решение.

Воспользуемся методом двух узлов

$$U_{12} = (\phi_1 - \phi_2) = -U_{21} = -(\phi_2 - \phi_1) = \frac{1 \cdot R_1 - \frac{1}{j \cdot X_{C_1}}}{\frac{1}{R_1 - j \cdot X_{C_1}} + \frac{1}{R_2 + j \cdot X_{L_2} - j \cdot X_{C_2}} + \frac{1}{R_3}}.$$

Определим индуктивное и емкостные сопротивления

$$X_{L_2} = \omega \cdot L = 314 \cdot 16 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ Ом},$$

$$X_{C_1} = X_{C_2} = \frac{1}{\omega \cdot C_1} = \frac{1}{314 \cdot 318,5 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ Ом}.$$

Определим комплекс действующего значения источника $E_1 = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j \cdot \phi_1}$,

т.к. $E_m = 200 \cdot \sqrt{2}$, а $\phi_1 = 0$. Тогда $E_1 = 200 \cdot e^{j \cdot 0} = 200 \text{ В}$.

Подставим в выражение U_{12} полученные значения:

$$U_{12} = \frac{200 \cdot \frac{1}{10 - j \cdot 10}}{\frac{1}{10 - j \cdot 10} + \frac{1}{10 + j \cdot 5 - j \cdot 10} + \frac{1}{20}}.$$

Приведем знаменатель полученного выражения к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{10 - j \cdot 10} + \frac{1}{10 + j \cdot 5 - j \cdot 10} + \frac{1}{20} &= \frac{20 \cdot (10 - j \cdot 5) + 20 \cdot (10 - j \cdot 10) + (10 - j \cdot 10) \cdot (10 - j \cdot 5)}{(10 - j \cdot 10) \cdot (10 - j \cdot 5) \cdot 20} = \\ &= \frac{200 - j \cdot 100 + 200 - j \cdot 200 + 100 - j \cdot 50 - j \cdot 100 - 50}{(10 - j \cdot 10) \cdot (10 - j \cdot 5) \cdot 20} = \frac{450 - j \cdot 450}{(10 - j \cdot 10) \cdot (10 - j \cdot 5) \cdot 20}. \end{aligned}$$

После подстановки полученного значения в выражение для $\widehat{U}_{12}$, получим:

$$\begin{aligned}\widehat{U}_{12} &= \frac{200}{\frac{10-j \cdot 10}{450-j \cdot 450}} = \frac{200 \cdot 20 \cdot (10-j \cdot 5)}{450-j \cdot 450} = \frac{40000-j \cdot 20000}{450-j \cdot 450} = \\ &= \frac{(10-j \cdot 10) \cdot (10-j \cdot 5) \cdot 20}{(450-j \cdot 450) \cdot (450+j \cdot 450)} = \\ &= \frac{(40000-j \cdot 20000) \cdot (450+j \cdot 450)}{(450-j \cdot 450) \cdot (450+j \cdot 450)} = \\ &= \frac{40000 \cdot 450 - j \cdot 20000 \cdot 450 + j \cdot 450 \cdot 40000 + 450 \cdot 20000}{450^2 - j \cdot 450 \cdot 450 + j \cdot 450 \cdot 450 + 450^2} = \\ &= \frac{18000000 + 9000000 - j \cdot 9000000 + j \cdot 18000000}{202500 + 202500} = \frac{27000000 + j \cdot 9000000}{405000} = \\ &= \frac{200}{3} + j \cdot \frac{200}{9} \approx 66,667 + j \cdot 22,222.\end{aligned}$$

Теперь найдем ток $\widehat{I}_1$, используя закона Ома:

$$\begin{aligned}\widehat{I}_1 &= \frac{\widehat{\phi}_1 - \widehat{\phi}_2}{R_1 - j \cdot X_{C_1}} = \frac{200 - \left(\frac{600 + j \cdot 200}{9} \right)}{10 - j \cdot 10} = \frac{1800 - 600 - j \cdot 200}{10 - j \cdot 10} = \\ &= \frac{(1200 - j \cdot 200)}{(90 - j \cdot 90)} = \frac{(1200 - j \cdot 200) \cdot (90 + j \cdot 90)}{(90 - j \cdot 90) \cdot (90 + j \cdot 90)} = \\ &= \frac{1200 \cdot 90 + j \cdot 90 \cdot 1200 - j \cdot 200 \cdot 90 + 200 \cdot 90}{90^2 + 90^2} = \frac{126000 + j \cdot 90000}{16200} = \\ &= \frac{70}{9} + j \cdot \frac{50}{9} \approx 7,778 + j \cdot 5,556.\end{aligned}$$

В показательной форме записи ток $\widehat{I}_1$ равен:

$$\widehat{I}_1 = \left| \widehat{I}_1 \right| \cdot e^{j \arg(\widehat{I}_1)} = \sqrt{\left(\frac{70}{9} \right)^2 + \left(\frac{50}{9} \right)^2} \cdot e^{j \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{50/9}{70/9} \right)} = \sqrt{\frac{7400}{81}} \cdot e^{j \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{5}{7} \right)} \approx 9,558 \cdot e^{j \cdot (35,538^\circ)}.$$

Ток $\widehat{I}_2$ будет равен:

$$\widehat{I}_2 = \frac{\widehat{\phi}_1 - \widehat{\phi}_2}{R_2 + j \cdot X_{L_2} - j \cdot X_{C_2}} = \frac{\frac{200}{3} + j \cdot \frac{200}{9}}{10 + j \cdot 5 - j \cdot 10} = \frac{40}{9} + j \cdot \frac{40}{9} \approx 4.444 + j \cdot 4.444.$$

Ток $\widehat{I}_2$ в показательной форме записи $\widehat{I}_2 = \left| \widehat{I}_2 \right| \cdot e^{j \arg(\widehat{I}_2)} \approx 6,285 \cdot e^{j \cdot (45^\circ)}.$

Ток $\widehat{I}_3$ будет равен:

$$\widehat{I}_3 = \frac{\widehat{\phi}_1 - \widehat{\phi}_2}{R_3} = \frac{\frac{200}{3} + j \cdot \frac{200}{9}}{20} = \frac{10}{3} + j \cdot \frac{10}{9} \approx 3.333 + j \cdot 1.111.$$

Ток $\widehat{I_3}$ в показательной форме записи $\widehat{I_3} = \left| \widehat{I_3} \right| \cdot e^{j \cdot \arg(\widehat{I_3})} \approx 3,514 \cdot e^{j(18,435^\circ)}$.

Таким образом, запишем мгновенные значения токов:

$$i_1(t) = 9,558 \cdot \sin(314 \cdot t + 35,538^\circ), \quad i_2(t) = 6,285 \cdot \sin(314 \cdot t + 45^\circ), \\ i_3(t) = 3,514 \cdot \sin(314 \cdot t + 18,435^\circ).$$

Векторная диаграмма токов.

На рисунке 5.4 представлена векторная диаграмма токов для электрической цепи, изображенной на рисунке 5.3.

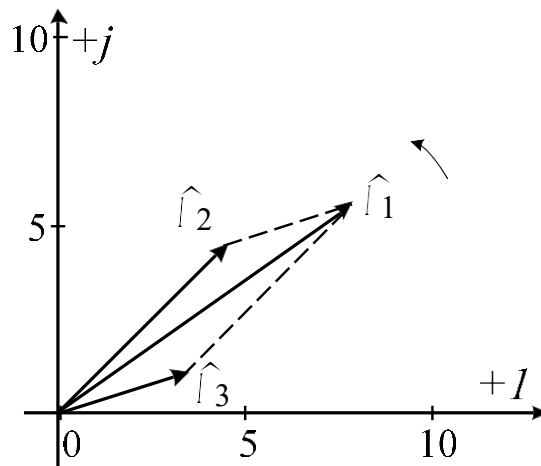


Рисунок 5.4 – Векторная диаграмма токов

Определим потенциалы точек электрической схемы рисунок 5.3.

$$\widehat{\phi}_2 = 0;$$

$$\widehat{\phi}_a = \widehat{\phi}_4 - \widehat{I_1} \cdot (-j \cdot X_C) \approx -(7,778 + j \cdot 5,556) \cdot (-j \cdot 10) \approx -55,556 + j \cdot 77,778;$$

$$\widehat{\phi}_b = \widehat{\phi}_{1a} - \widehat{I_1} \cdot R_1 = -55,556 + j \cdot 77,778 - (7,778 + j \cdot 5,556) \cdot 10 \approx -133,333 + j \cdot 22,222;$$

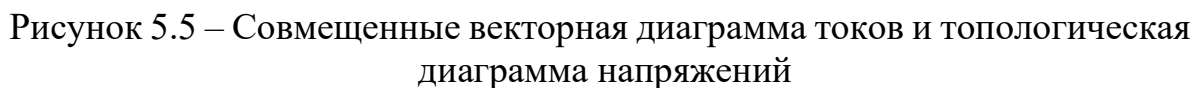
$$\widehat{\phi}_1 = \widehat{\phi}_{1b} + \widehat{E} \approx -133,333 + j \cdot 22,222 + 200 \approx 66,667 + j \cdot 22,222;$$

$$\widehat{\phi}_c = \widehat{\phi}_1 - \widehat{I_2} \cdot (-j \cdot X_{C_2}) = 66,667 + j \cdot 22,222 - (4,444 + j \cdot 4,444) \cdot (-j \cdot 10) \approx 22,222 + j \cdot 66,667;$$

$$\widehat{\phi}_d = \widehat{\phi}_{2c} - \widehat{I_2} \cdot R_2 = 22,222 + j \cdot 66,667 - (4,444 + j \cdot 4,444) \cdot 10 \approx -22,222 + j \cdot 22,222;$$

$$\widehat{\phi}_2 = \widehat{\phi}_d - \widehat{I_3} \cdot j \cdot X_L = -22,222 + j \cdot 22,222 - (4,444 + j \cdot 4,444) \cdot j \cdot 5 \approx 0.$$

Потенциалы точек на комплексной плоскости образуют *топологическую диаграмму*. Для схемы (рисунок 5.3) топологическая диаграмма, совмещенная с векторной диаграммой токов, представлена на рисунке 5.5. Масштаб векторов тока при это увеличен в десять раз.



Если аналитический расчет дает результаты, не совпадающие с такими очевидными положениями, то, следовательно, в расчете есть ошибка, которую необходимо устранить. Кроме того, векторную диаграмму часто используют и как средство расчета.

Активная, реактивная и полная мощность.

Мгновенная мощность, производимая и отдаваемая источником ЭДС и получаемая нагрузкой, равна скорости совершения работы A в данный момент времени $p = \frac{dA}{dt} = u \cdot i$.

Рассмотрим на *примере* электрической цепи (рисунок 5.3) прием, позволяющий найти активную и реактивную мощности при известных комплексах напряжения и тока.

Активная мощность в цепи переменного тока:

$$P_{\text{пол}} = U_{R_1} \cdot I_1 + U_{R_2} \cdot I_2 + U_{R_3} \cdot I_3 = (I_1)^2 \cdot R_1 + (I_2)^2 \cdot R_2 + (I_3)^2 \cdot R_3,$$

где U_{R_1} , U_{R_2} , U_{R_3} – действующие значения напряжения на резисторах, $|I_1|$ – модуль (длина вектора) комплекса тока I_1 .

$$P_{\text{пол}} = (7,778 + j \cdot 5,556)^2 \cdot 10 + (4,444 + j \cdot 4,444)^2 \cdot 10 + (3,333 + j \cdot 1,111)^2 \cdot 20 = \\ = \sqrt{(7,778)^2 + (5,556)^2} \cdot 10 + \sqrt{(4,444)^2 + (4,444)^2} \cdot 10 + \sqrt{(3,333)^2 + (1,111)^2} \cdot 20 = 1556.$$

Реактивная мощность в цепи переменного тока:

$$Q_{\text{пол}} = (I_1)^2 \cdot (-j \cdot X_{C_1}) + (I_2)^2 \cdot (j \cdot X_{L_2} - j \cdot X_{C_2}) = \\ = \sqrt{(7,778)^2 + (5,556)^2} \cdot (-j \cdot 10) + \sqrt{(4,444)^2 + (1,111)^2} \cdot (j \cdot 5 - j \cdot 10) = -j \cdot 1111.$$

Комплекс полной мощности получаемой нагрузкой от источника ЭДС E_1 :

$$S_{\text{пол}} = P_{\text{пол}} \pm j \cdot Q_{\text{пол}} = 1556 - j \cdot 1111.$$

В формуле стоит знак $\pm$, т.к. реактивная мощность может быть, как положительная, так и отрицательная, в зависимости от характера нагрузки. В нашем случае $P_{\text{пол}} = 1,556$ кВт, $Q_{\text{пол}} = -j \cdot 1,111$ кВар.

Комплекс полной мощности $S_{\text{отд}}$, отдаваемой (генерируемой) источником ЭДС E_1 , определяется следующим образом:

$$S_{\text{отд}} = E_1 \cdot I_1^*,$$

где I_1^* – сопряженный комплекс тока I_1 . Для рассматриваемой схемы $I_1 = 7,778 + j \cdot 5,556$. Сопряженный комплекс тока I_1^* отличается от простого

комплекса $\widehat{I_1}$ тем, что у мнимой части тока $\widehat{I}$ необходимо изменить знак $\widehat{I_1}^* = 7,778 - j \cdot 5,556$ (в рассматриваемом случае знак «плюс» меняется на «минус»).

Таким образом, $\widehat{S_{отд}} = 200 \cdot (7,778 - j \cdot 5,556) = 1556 - j \cdot 1111$. Вещественная часть комплекса полной мощность $\widehat{S_{отд}}$ обозначается $P_{отд}$ и является активной мощностью, генерируемой источником $\widehat{E_1}$. Мнимая часть – это реактивная мощность $Q_{отд}$. В рассматриваемом случае $P_{отд} = 1,556$ кВт, $Q_{отд} = -j \cdot 1,111$ кВар.

Расчет показывает, что баланс активных и реактивных мощностей в рассматриваемой цепи рисунок 5.3 выполняется.

На рисунке 5.7 представлена иллюстрация токов, напряжений, активной, реактивной и полной мощности для электрической цепи, изображенной на рисунке 5.3.

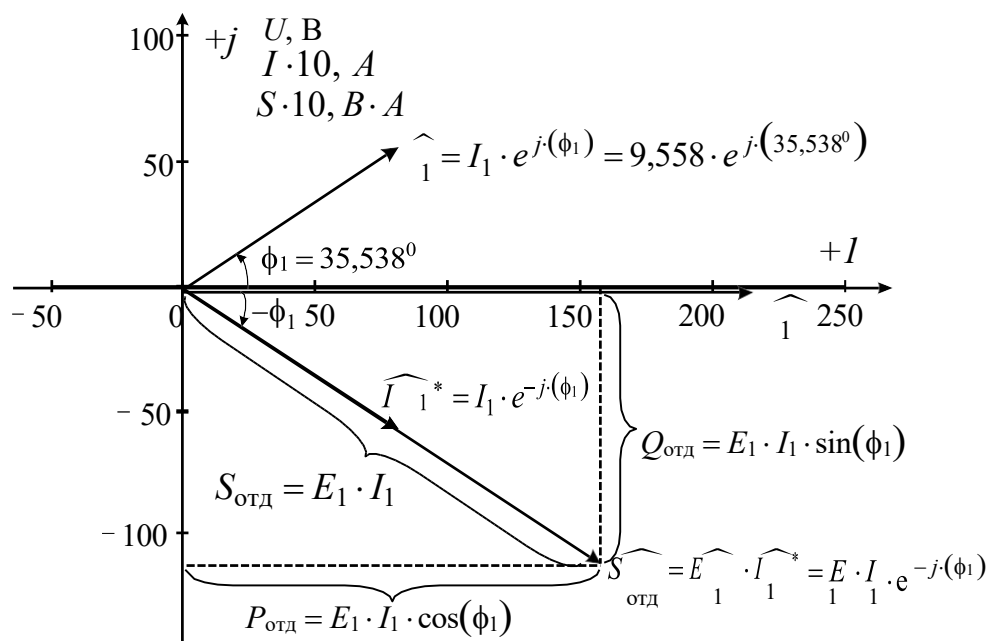


Рисунок 5.7 – Векторная диаграмма токов, напряжений и мощностей

Измерение активной мощности в цепи переменного тока.

Активная мощность измеряется ваттметром W, который имеет две цепи или обмотки. На рисунке 5.8 показана обмотка тока, которая имеет два зажима (вывода) 1 и 2, а также обмотка напряжения (зажимы 3 и 4). Одноименные зажимы обозначают звездочками.

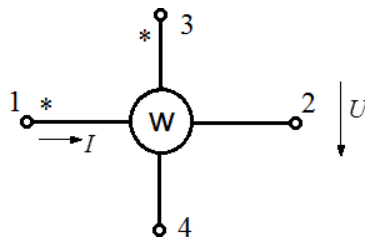


Рисунок 5.8 – Изображение ваттметра на электрической схеме

Ваттметр измеряет значение $W = \operatorname{Re}[U \cdot I^*] = U \cdot I \cdot \cos(\phi)$, где U и I – действующие значения напряжения и тока, подведенные к ваттметру, а ϕ – угол сдвига фаз между ними, который соответствует одинаковым положительным направлениям U и I относительно выводов, отмеченных звездочкой.

Вольтметры V и амперметры A в цепи переменного тока показывают модуль действующего значения измеряемой величины.

Резонансный режим работы цепей переменного тока.

В цепи переменного тока, содержащей один или несколько индуктивных или емкостных элементов, подключенных к источнику энергии возможен режим резонанса, при котором ток и напряжение на входе цепи будут совпадать по фазе. Различают два основных вида резонансных режимов: *резонанс токов* и *резонанс напряжений*. Резонансный режим на практике используют для уменьшения сдвига фаз между напряжением на приемнике и током, потребляемым от генератора.

Резонанс токов возникает в параллельном колебательном контуре (рисунок 5.9).

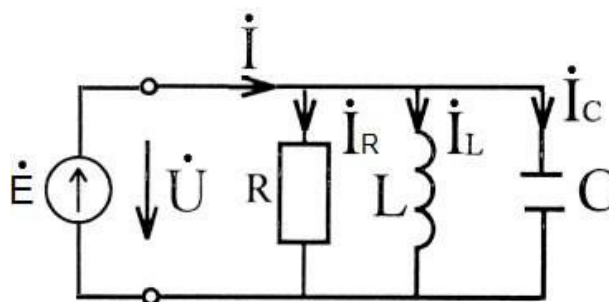


Рисунок 5.9 – Параллельный колебательный контур

При напряжении питания $U = U \cdot e^{j\psi_U}$ комплексное значение общего тока будет равно:

$$\text{где } Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L} + \frac{1}{\left(\frac{1}{-j \cdot \omega \cdot C} \right)} = \frac{1}{R} - j \cdot \left(\frac{1}{\omega \cdot L} \right) + j \cdot (\omega \cdot C) =$$

$$= \frac{1}{R} - j \cdot \left(\frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C \right) = g - j \cdot (b_L - b_C) - \text{комплексная проводимость цепи};$$

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C \right)^2} - \text{ее модуль (полная проводимость)};$$

$\phi = \psi_U - \psi_I$ – аргумент.

Действующее значение тока I

$$I = U \cdot Y = U \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot L} - \omega \cdot C \right)^2}.$$

При угловой частоте $\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$ индуктивная $b_L = \frac{1}{\omega \cdot L}$ и емкостная

$b_C = \omega \cdot C$ проводимости ветвей одинаковы $b_L = b_C$, угол сдвига фаз тока и напряжения $\phi = \psi_U - \psi_I = 0$. Полная проводимость цепи $Y = g = \frac{1}{R}$, и общий

ток $I_0 = U \cdot g = \frac{U}{R}$. Если напряжение U на зажимах цепи и активная

проводимость g цепи не изменяются, то общий ток при резонансе имеет наименьшее значение. Токи в индуктивном и емкостном элементах равны по величине и находятся в противофазе. Векторная диаграмма при резонансе токов представлена на рисунке 5.10.

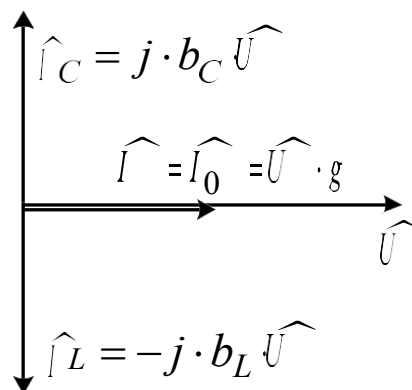


Рисунок 5.10 – Векторная диаграмма токов при параллельном резонансе

Если в ветвях с индуктивным и емкостным элементами включены резисторы R_L и R_C , то условием резонанса токов в цепи будет равенство индуктивной и емкостной проводимостей ветвей (рисунок 5.11):

$$\frac{\omega \cdot L}{R_L^2 + (\omega \cdot L)^2} = \frac{1}{R_C^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}, \text{ резонансная частота } \omega = \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}.$$

Добротность для параллельного контура $Q = \frac{I_L}{I_0} = \frac{I_C}{I_0}$ определяет

кратность превышения тока в индуктивном и емкостном элементах над общим током в режиме резонанса. Резонансные свойства контура характеризуют также величиной, носящей название затухание контура $d = \frac{1}{Q}$.

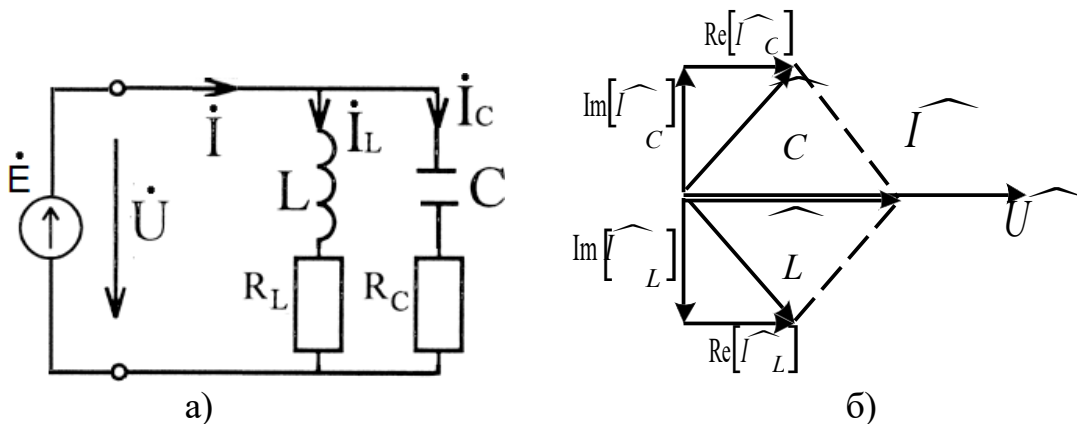


Рисунок 5.11 – Электрическая схема (а) и векторная диаграмма (б) параллельного колебательного контура в режиме резонанса

Резонанс напряжений возникает в последовательном колебательном контуре (рисунок 5.12), который содержит индуктивный L , емкостной C и резистивный R элементы.

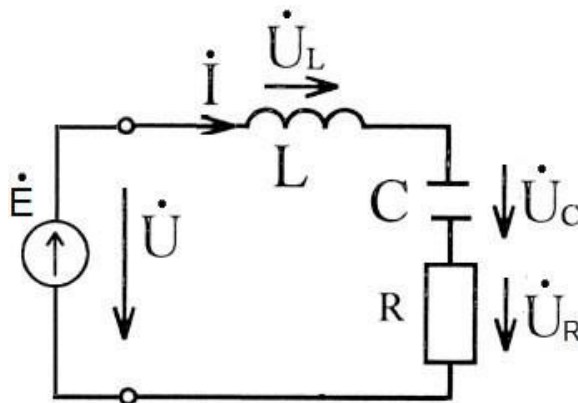


Рисунок 5.12 – Последовательный колебательный контур

По закону Ома комплексная величина тока в контуре определяется

$$\widehat{I} = I \cdot e^{j\psi_i} = \frac{\widehat{U}}{\underline{Z}} = \frac{U \cdot e^{j\psi_U}}{Z \cdot e^{j\phi}},$$

где $\underline{Z} = R + j \cdot \omega \cdot L - j \cdot \left| \frac{1}{\omega \cdot C} \right|$ – комплексное входное сопротивление,

$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2}$ – его модуль (полное сопротивление),

$\phi = \psi_U - \psi_i = \arctg \left(\frac{\left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)}{R} \right)$ – его аргумент.

Действующее значение тока: $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}.$

Режим работы неразветвленного участка цепи, при котором ее ток и напряжение совпадают по фазе $\psi_u = \psi_i$, $\phi = 0$, называется резонансом напряжений. В режиме резонанса напряжение на емкостном и напряжение на индуктивном элементах равны и находятся в противофазе рисунок 5.13.

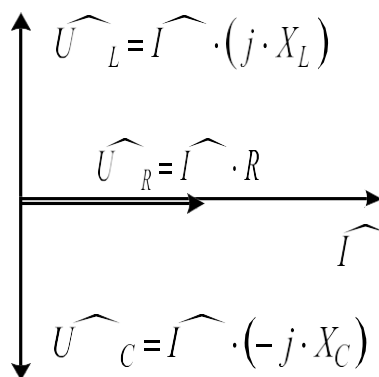


Рисунок 5.13 – Векторная диаграмма напряжений при последовательном резонансе

Резонансного режима можно достичь, изменяя частоту приложенного к цепи напряжения или параметры цепи: индуктивность катушки и емкость конденсатора. Величины угловой частоты ω_0 , индуктивности L_0 и емкости C_0 , в

резонансном режиме: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}; C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}.$

Если напряжение U на зажимах цепи и активное сопротивление R цепи не изменяются, то ток при резонансе имеет наибольшее значение, равное $I_0 = \frac{U}{R}$ и

не зависящее от величин реактивных сопротивлений. Напряжения на емкостном и индуктивном элементах могут во много раз превысить напряжение питания, если $\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C} = \sqrt{\frac{L}{C}} > R$, где $\sqrt{\frac{L}{C}} = \rho$ –

характеристическое (волновое) сопротивление колебательного контура.

Отношение $\frac{U_{Cp}}{U} = \frac{U_{Lp}}{U} = \frac{\rho}{R} = Q$ определяет кратность превышения напряжения на зажимах индуктивного и емкостного элементов над напряжением питания и называется добротностью контура.

Цепи переменного тока с взаимной индуктивностью.

Если две катушки изготовлены таким образом, что магнитный поток одной пересекает витки другой, то между катушками имеется взаимная индуктивность M . При согласном включении катушек магнитный поток, вызванный током одной катушки, совпадает по направлению с магнитным потоком, вызванным током другой катушки ($M > 0$). Соединение катушек, при котором магнитные потоки направлены в противоположные стороны, является встречным ($M < 0$).

На схемах замещения электрических цепей точками обозначены одноименные выводы (начала катушек). При согласном включении катушек токи направлены одинаково относительно одноименных выводов (рисунок 5.14 а). Если токи направлены по-разному относительно одноименных выводов (рисунок 5.44 б), то катушки включены встречно.

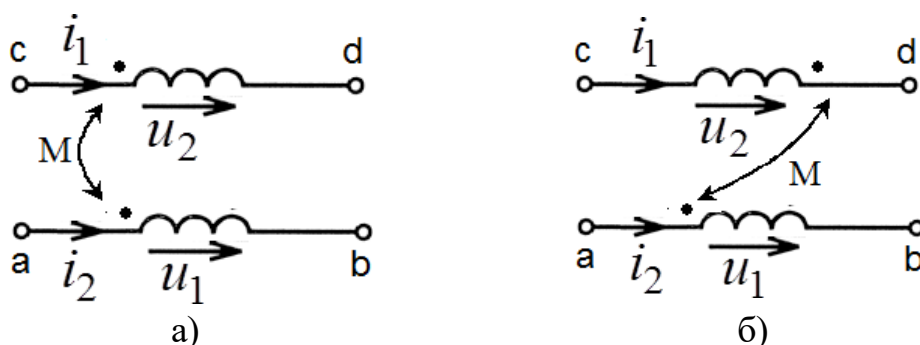


Рисунок 5.14 – Схема замещения электрической цепи

Напряжения на индуктивных элементах при наличии индуктивной связи определяется при согласном включении как

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

при встречном включении $u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}, \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}.$

В режиме синусоидального тока комплексные значения напряжения на индуктивных элементах при согласном включении определяются:

$$\widehat{U}_1 = j\omega L_1 \widehat{I}_1 + j\omega M \widehat{I}_2, \quad \widehat{U}_2 = j\omega L_2 \widehat{I}_2 + j\omega M \widehat{I}_1,$$

при встречном включении –

$$\widehat{U}_1 = j\omega L_1 \widehat{I}_1 - j\omega M \widehat{I}_2, \quad \widehat{U}_2 = j\omega L_2 \widehat{I}_2 - j\omega M \widehat{I}_1.$$

Степень индуктивной связи двух элементов цепи характеризуется коэффициентом связи $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$. При $k = 1$ ($M = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$) имеем

совершенную связь обмоток – весь поток, создаваемый одной обмоткой, пересекает сечение витков второй катушки, и рассеяние магнитного потока отсутствует. К этому режиму можно приблизиться, помещая обе катушки на общем сердечнике, материал которого имеет высокую магнитную проницаемость. Практически всегда $k < 1$. Примером цепи с магнитной связью является трансформатор. *Трансформатор* используется для преобразования токов и напряжений, развязки и согласования отдельных участков цепи. Он состоит из двух или нескольких индуктивно связанных обмоток или катушек. (задачи по трансформаторам будет рассмотрены в практическом занятии 7)

Задания

1. Для электрической цепи однофазного переменного тока схема, которой представлена на рисунке 5.15. Записать уравнения по законам Кирхгофа в дифференциальной форме. Найти токи ветвей методом контурных токов и узловых потенциалов, напряжения на участках цепи, активную, реактивную и полную мощности, а также построить векторную диаграмму токов и напряжений. Определить показание измерительных приборов.

Дано: $e_1(t) = e_3(t) = 20 \cdot \sqrt{2} \sin(314 \cdot t)$, $C_1 = C_2 = 318,5$ мкФ, $R_2 = 10$ Ом, $L_2 = 16$ мГн, $R_3 = 10$ Ом. ($I_1 = j \cdot 1$ А, $I_2 = 1$ А, $I_3 = (1 + j \cdot 1)$ А)

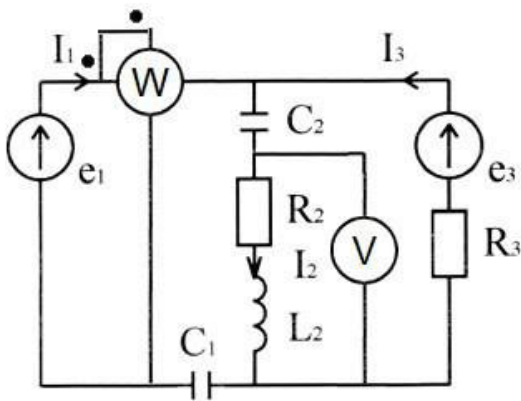


Рисунок 5.15

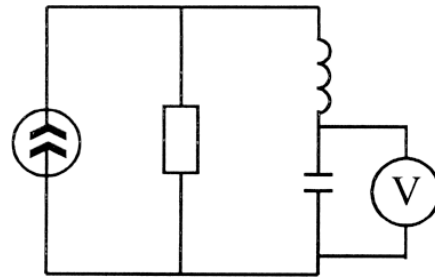


Рисунок 5.16

2. Источник тока $J(t) = 10 \cdot \sin(\omega \cdot t)$, частота которого может изменяться, подключен к схеме рисунок 5.16 с параметрами $R = 10 \text{ Ом}$, $C = 1 \text{ мкФ}$. Напряжение на емкости в режиме резонанса равно 10 В. Определить резонансную частоту и индуктивность. (10^6 рад./с , 10^{-6} Гн)

3. Для электрической цепи однофазного переменного тока схема, которой представлена на рисунке 5.17. Найти емкость конденсатора C при котором в цепи будет наблюдаться резонанс и токи в этом режиме I , I_L , I_C . Параметры электрической цепи: $U(t) = 10 \cdot \sqrt{2} \sin(500 \cdot t), \text{ В}$; $R = 16 \text{ Ом}$; $L = 1,6 \text{ мкГн}$. ($C = 25 \text{ мкФ}$, $I = 0,625 \text{ А}$, $I_L = I_C = 1,25 \text{ А}$)

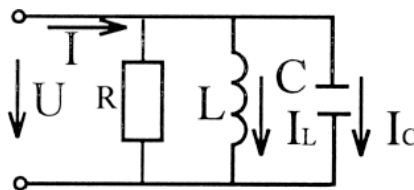


Рисунок 5.17

4. Для электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 5.18 с параметрами $X_1 = 20 \text{ Ом}$, $X_2 = 20 \text{ Ом}$, $X_C = 10 \text{ Ом}$, $X_1 = 20 \text{ Ом}$, $R = 40 \text{ Ом}$, $X_M = 10 \text{ Ом}$, $E = 200 \text{ В}$. Определить показание вольтметра. (97 В)

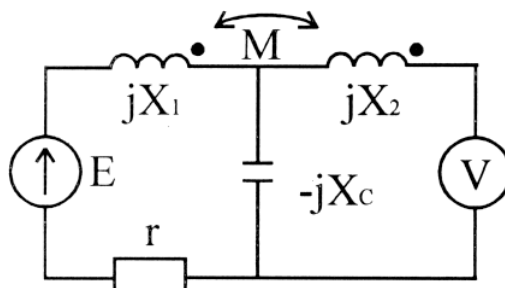


Рисунок 5.18

5. Для электрической цепи, схема которой представлена на рисунке 5.19 с параметрами: $e_1(t) = e_2(t) = 100 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314 \cdot t)$, В; $R_1 = 80$ Ом; $L_1 = 191$ мОм; $L_2 = L_3 = 255$ мГн; $C_2 = 80$ мкФ; $e_3(t) = 200 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(314 \cdot t + 120^\circ)$, В; $M = 127$ мГн. Определить токи ветвей. ($\widehat{I}_1 = 0.3 \cdot e^{-j \cdot 10^\circ}$ А, $\widehat{I}_2 = 0.97 \cdot e^{j \cdot 41^\circ}$ А, $\widehat{I}_3 = 1.18 \cdot e^{j \cdot 30^\circ}$ А)

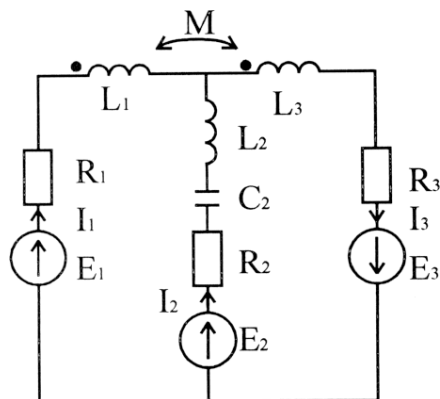


Рисунок 5.19

Контрольные вопросы

1. Изложите основы символического метода расчета. Почему все методы расчета цепей постоянного тока применимы к цепям синусоидального тока?
2. Дайте определение векторной и топографической диаграммам.
3. Как определить напряжение между двумя точками схемы по топографической диаграмме?
4. Физически интерпретируйте P , Q , S .
5. Выразите комплексную мощность S через комплексы напряжения и тока.
6. Запишите баланс активных и реактивных мощностей.
7. Дайте определение режиму резонанса токов и режиму резонанса напряжений.
8. Как в расчете учитывают магнитную связь между индуктивными катушками?

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

Основная литература

1. Немцов М.В. Электротехника и электроника (6-е изд., стер.) учебник. – М: Академия, 2013. – 480 с. – ISBN: 9785446804320.
2. Электротехника и электроника: Учебное пособие для вузов / В.В. Кононенко [и др.]; под ред. В.В. Кононенко. – Изд. 6-е – Ростов н/Д: Феникс, 2010. – 784 с. (Высшее образование). – ISBN 978-5-222-17568-2.

Дополнительная литература

3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник. – 10-е изд. – М.: Гардарики, 2002. – 638 с.

4. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: учеб. пособие для студентов / под ред. П. А. Ионкина. – М.: Энергоиздат, 1982. – 768 с.

Практическое занятие 6

Тема: Расчет трехфазных цепей синусоидального тока

Цель: Получить навыки расчета трехфазных цепей синусоидального тока при симметричной и несимметричной нагрузке.

Актуальность темы практического занятия заключается в необходимости проводить расчеты трехфазных цепей используемых при электроснабжении зданий.

Теоретическая часть

Трехфазные цепи синусоидального тока.

Электрическая цепь, состоящая из системы трех синусоидальных ЭДС, имеющих одну и ту же частоту и сдвинутых по фазе одна относительно другой на угол $2\pi/3$ (120°), к которым с помощью соединительных проводов подключена нагрузка, называется трехфазной. Графики мгновенных значений *трехфазной симметричной системы ЭДС* с действующим значением каждой фазы $E_A = E_B = E_C = 220\text{ В}$ изображены на рисунке 6.1, соответствующая векторная диаграмма – на рисунке 6.2.

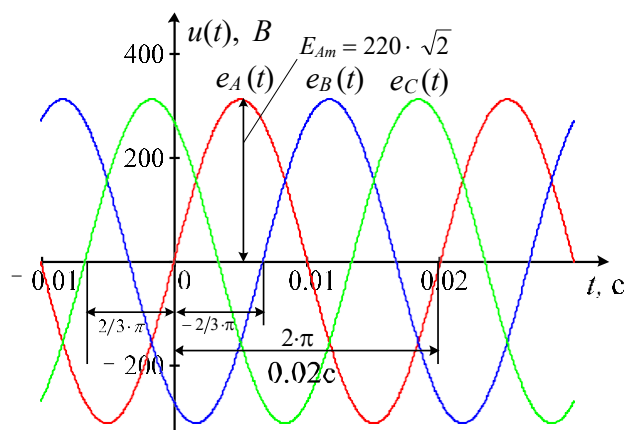


Рисунок 6.1 – Графики мгновенных значений трехфазной симметричной системы ЭДС

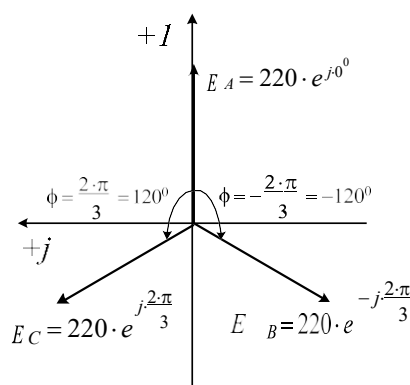


Рисунок 6.2 – Векторная диаграмма трехфазной симметричной системы ЭДС

Трехфазная цепь состоит из трех основных элементов: трехфазного генератора, в котором механическая энергия преобразуется в электрическую, с трехфазной системой ЭДС; линий передачи со всем необходимым

оборудованием; приемников (потребителей), которые могут быть как трехфазными, так и однофазными.

На электрической схеме трехфазный генератор принято изображать в виде трех обмоток, расположенных под углом 120° . При соединении звездой одноименные зажимы трех обмоток объединяют в одну точку (рисунок 6.3), которую называют *нулевой точкой* генератора N .

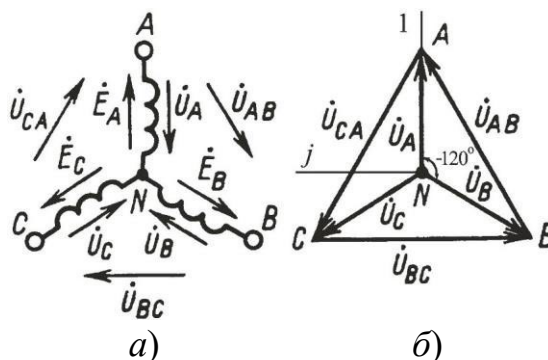


Рисунок 6.3 – Схема соединения трехфазных обмоток генератора звездой (а) и соответствующая векторная диаграмма напряжений (б)

Обмотки генератора обозначают буквами A , B , C ; буквы ставят: A – у начала первой, B – у начала второй и C – у начала третьей фазы.

Таким образом, при соединении обмоток трехфазного генератора звездой (рисунок 6.3 а) линейные напряжения определяются через разности фазных:

$$U_{AB} = U_A - U_B; U_{BC} = U_B - U_C; U_{CA} = U_C - U_A. \quad (6.1)$$

Для симметричного генератора (источника) фазные напряжения

$$U_A = U_\phi; U_B = U_\phi \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}}; U_C = U_\phi \cdot e^{j \frac{2\pi}{3}}, \quad (6.2)$$

линейные напряжения (рисунок 6.3 б)

$$U_{AB} = U_\phi \cdot e^{j \frac{\pi}{6}}; U_{BC} = U_\phi \cdot e^{-j \frac{\pi}{6}}; U_{CA} = U_\phi \cdot e^{j \frac{5\pi}{6}}. \quad (6.3)$$

Для симметричного источника справедливо равенство:

$$U_\phi = \sqrt{3} \cdot U_{\phi\phi}. \quad (6.4)$$

При соединении обмоток генератора треугольником (рисунок 6.4) конец первой обмотки генератора соединяют с началом второй, конец второй – с началом третьей, конец третьей – с началом первой. Геометрическая сумма ЭДС в замкнутом треугольнике равна нулю. Поэтому если к зажимам A , B , C не присоединена нагрузка, то по обмоткам генератора не будет протекать ток.

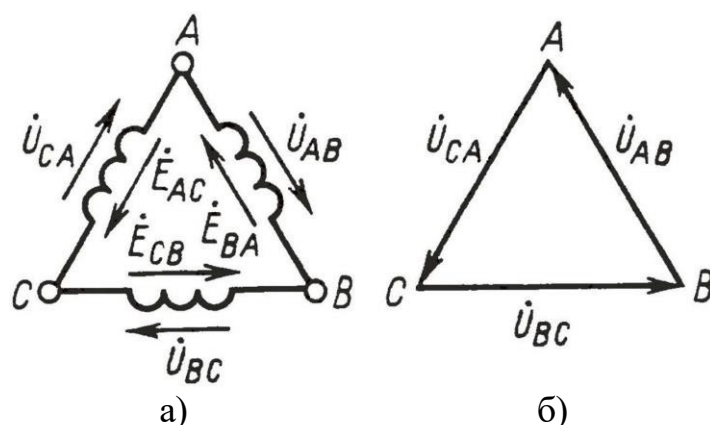


Рисунок 6.4 – Схема соединения трехфазных обмоток генератора треугольником (а) и соответствующая векторная диаграмма напряжений (б)

При соединении обмоток трехфазного источника треугольником (рисунок 6.4 а) линейные напряжения равны фазным (рисунок 6.4 б)

$$U_{\text{л}} = U_{\text{ф}}. \quad (6.5)$$

Выделяют следующие *схемы соединения трехфазного генератора с нагрузкой*. В случае соединения обмоток генератора звездой: звезда – звезда с нулевым проводом, звезда – звезда без нулевого провода, звезда – треугольник.

В случае соединения обмоток генератора треугольником, выделяют следующие *схемы соединения трехфазного генератора с нагрузкой*: треугольник – звезда, треугольник – треугольник.

Расчет трехфазных цепей синусоидального тока с симметричной несимметричной нагрузкой.

Трехфазные цепи являются разновидностью цепей синусоидального тока, и потому расчет и исследование процессов в них производят теми же методами и приемами. Для цепей трехфазного тока применим также символический метод расчета, построение векторных и топографических диаграмм. Векторные диаграммы облегчают нахождение углов между токами и напряжениями, делают все соотношения более наглядными и помогают находить возникающие ошибки при аналитическом расчете.

Симметричный режим. Для симметричного приемника, соединенного звездой (рисунок 6.5 а), справедливо соотношение $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}$, напряжение смещения нейтрали U_{nN} равно нулю, а токи в фазах

$$\widehat{I}_A = \frac{\widehat{U}_A}{(\underline{Z} + \underline{Z}_л)}; \quad \widehat{I}_B = \frac{\widehat{U}_B}{(\underline{Z} + \underline{Z}_л)}; \quad \widehat{I}_C = \frac{\widehat{U}_C}{(\underline{Z} + \underline{Z}_л)}, \quad (6.6)$$

где $\underline{Z}_л$ – сопротивление симметричной линии на фазу. По модулю токи равны и имеют сдвиг по фазе относительно друг друга, равный 120° (рисунок 6.5 б):

$$I_A = I_B = I_C = \frac{U_\Phi}{|\underline{Z} + \underline{Z}_л|}. \quad (6.7)$$

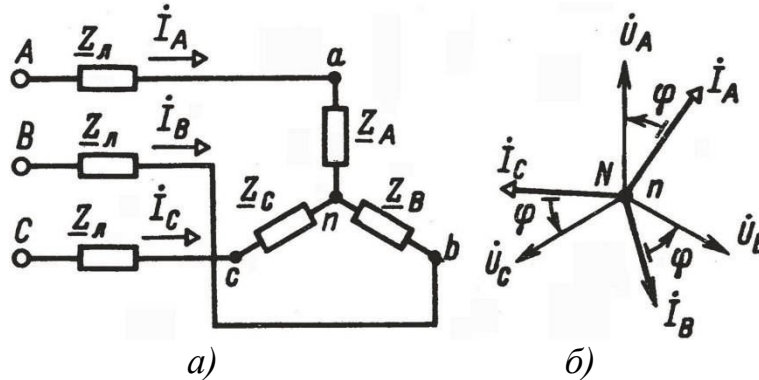


Рисунок 6.5 – Схема (а) и векторная диаграмма (б) трехфазной цепи при соединении нагрузки звездой

Для симметричного приемника, соединенного треугольником (рисунок 6.6 а), справедливо соотношение $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}$. Если $\underline{Z}_л = 0$, то фазные токи приемника равны:

$$\widehat{I}_{ab} = \widehat{U}_{AB} / (\underline{Z}); \quad \widehat{I}_{bc} = \widehat{U}_{BC} / (\underline{Z}); \quad \widehat{I}_{ca} = \widehat{U}_{CA} / (\underline{Z}). \quad (6.8)$$

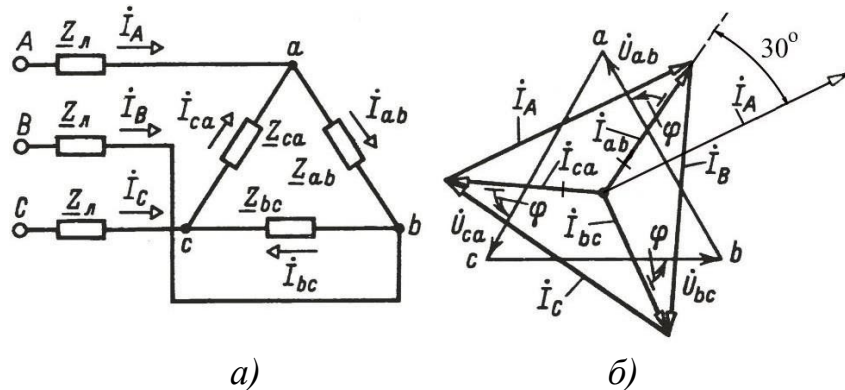


Рисунок 6.6 – Схема (а) и векторная диаграмма (б) трехфазной цепи при соединении нагрузки треугольником

По модулю токи равны и имеют сдвиг по фазе относительно друг друга, равный 120° (рисунок 6.6 б):

$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_\Phi = U_\Phi / |\underline{Z}|. \quad (6.9)$$

Линейные токи приемника определяются разностью фазных токов:

$$\widehat{I}_A = \widehat{I}_{ab} - \widehat{I}_{ca}; \quad \widehat{I}_B = \widehat{I}_{bc} - \widehat{I}_{ab}; \quad \widehat{I}_C = \widehat{I}_{ca} - \widehat{I}_{bc}. \quad (6.10)$$

Как видно из векторной диаграммы (рисунок 6.6 б),

$$\widehat{I}_A = \sqrt{3} \cdot \widehat{I}_{ab} \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{6}}; \quad \widehat{I}_B = \widehat{I}_A \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{3}}; \quad \widehat{I}_C = \widehat{I}_A \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{3}}. \quad (6.11)$$

Если $\underline{Z}_n \neq 0$, то (после преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду) линейные токи

$$\widehat{I}_A = \frac{\widehat{I}_A}{\underline{Z}/3 + \underline{Z}_n}; \quad \widehat{I}_B = \frac{\widehat{I}_B}{\underline{Z}/3 + \underline{Z}_n}; \quad \widehat{I}_C = \frac{\widehat{I}_C}{\underline{Z}/3 + \underline{Z}_n}. \quad (6.12)$$

Фазные токи определяются через линейные:

$$\widehat{I}_{ab} = \frac{\widehat{I}_A}{\sqrt{3}} e^{j \cdot \frac{\pi}{6}}; \quad \widehat{I}_{bc} = \widehat{I}_{ab} \cdot e^{-j \cdot \frac{2\pi}{3}}; \quad \widehat{I}_{ca} = \widehat{I}_{ab} \cdot e^{j \cdot \frac{2\pi}{3}}. \quad (6.13)$$

Несимметричный режим. При соединении приемника звездой с нейтральным проводом (рисунок 6.7)

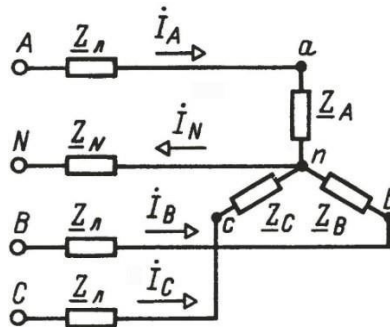


Рисунок 6.7 – Схема трехфазной цепи при соединении нагрузки звездой с нейтральным проводом

Напряжение смещения нейтрали на основании метода двух узлов

$$\widehat{U}_{nN} = \frac{\widehat{U}_A \cdot \underline{Y}_A + \widehat{U}_B \cdot \underline{Y}_B + \widehat{U}_C \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \quad (6.14)$$

где $\underline{Y}_A = 1/(\underline{Z}_A + \underline{Z}_n)$; $\underline{Y}_B = 1/(\underline{Z}_B + \underline{Z}_n)$; $\underline{Y}_C = 1/(\underline{Z}_C + \underline{Z}_n)$; $\underline{Y}_N = 1/\underline{Z}_N$.

Линейные токи и ток в нейтральном проводе

$$\widehat{I}_A = \frac{\widehat{U}_A - \widehat{U}_{nN}}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_n}; \quad \widehat{I}_B = \frac{\widehat{U}_B - \widehat{U}_{nN}}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_n}; \quad \widehat{I}_C = \frac{\widehat{U}_C - \widehat{U}_{nN}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_n}; \quad \widehat{I}_N = \frac{\widehat{U}_{nN}}{\underline{Z}_N}. \quad (6.15)$$

По первому закону Кирхгофа

$$\widehat{I}_N = \widehat{I}_A + \widehat{I}_B + \widehat{I}_C. \quad (6.16)$$

Для приемника, соединенного звездой без нейтрального провода и заданных линейных напряжений источника, токи можно определить без предварительного расчета напряжения смещения нейтрали:

$$\widehat{U}_{An} = \frac{\widehat{U}_{AB} \cdot \underline{Y}_B - \widehat{U}_{CA} \cdot \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}; \quad \widehat{U}_{Bn} = \frac{\widehat{U}_{BC} \cdot \underline{Y}_C - \widehat{U}_{AB} \cdot \underline{Y}_A}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C};$$

$$\widehat{U}_{Cn} = \frac{\widehat{U}_{CA} \cdot \underline{Y}_A - \widehat{U}_{BC} \cdot \underline{Y}_B}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}. \quad (6.17)$$

$$\widehat{I}_A = \widehat{U}_{An} / (\underline{Z}_A + \underline{Z}_L); \quad \widehat{I}_B = \widehat{U}_{Bn} / (\underline{Z}_B + \underline{Z}_L); \quad \widehat{I}_C = \widehat{U}_{Cn} / (\underline{Z}_C + \underline{Z}_L). \quad (6.18)$$

При соединении приемника треугольником (рисунок 6.6 а) и $\underline{Z}_L = 0$ фазные токи определяются согласно (6.8), линейные – (6.10).

Если $\underline{Z}_L \neq 0$, то треугольник сопротивлений можно преобразовать в эквивалентную звезду и для этого соединения рассчитать линейные токи, как показано выше.

Фазные токи определяются по предварительно найденным фазным напряжениям приемника:

$$\widehat{U}_{ab} = \underline{Z}'_A \cdot \widehat{I}_A - \underline{Z}'_B \cdot \widehat{I}_B; \quad \widehat{U}_b = \underline{Z}'_B \cdot \widehat{I}_B - \underline{Z}'_C \cdot \widehat{I}_C;$$

$$\widehat{U}_c = \underline{Z}'_C \cdot \widehat{I}_C - \underline{Z}'_A \cdot \widehat{I}_A; \quad (6.19)$$

$$\widehat{I}_{ab} = \widehat{U}_{ab} / (\underline{Z}_{ab}); \quad \widehat{I}_{bc} = \widehat{U}_{bc} / (\underline{Z}_{bc}); \quad \widehat{I}_{ca} = \widehat{U}_{ca} / (\underline{Z}_{ca}), \quad (6.20)$$

где $\underline{Z}'_A, \underline{Z}'_B, \underline{Z}'_C$ – сопротивления лучей звезды, эквивалентной треугольнику.

Мощность трехфазной цепи и способы ее измерения.

Симметричный режим. Активная, реактивная и полная мощности симметричного приемника независимо от вида соединения:

$$P = 3 \cdot U_\phi \cdot I_\phi \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos \varphi, \quad (6.21)$$

$$Q = 3 \cdot U_\phi \cdot I_\phi \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \sin \varphi, \quad (6.22)$$

$$S = 3 \cdot U_\phi \cdot I_\phi = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L, \quad (6.23)$$

где φ – сдвиг по фазе между фазными напряжением и током.

Несимметричный режим. Активная, реактивная и полная мощности несимметричного приемника независимо от вида соединения равны сумме соответствующих мощностей трех фаз.

Измерение мощности. Для измерения активной мощности, передаваемой от источника к приемнику, в трехфазной цепи с нейтральным проводом при несимметричном режиме включают ваттметры в каждую фазу (рисунок 6.8).

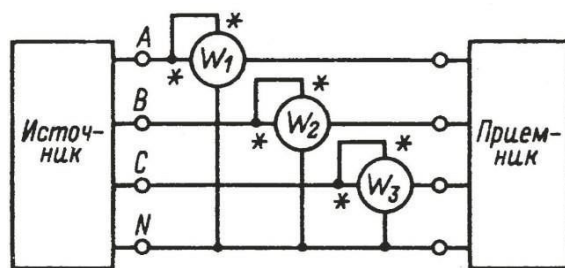


Рисунок 6.8 – Схема для измерения мощности трехфазной цепи с нейтральным проводом

Активная мощность равна сумме показаний ваттметров:

$$P = P_{W1} + P_{W2} + P_{W3} . \quad (6.24)$$

В случае симметричного режима достаточно одного ваттметра, при этом мощность

$$P = 3 \cdot P_W . \quad (6.25)$$

При отсутствии нейтрального провода активную мощность измеряют двумя ваттметрами, включенными по схеме, показанной на рисунке 6.9 а (и при симметричном, и при несимметричном режимах). Активная мощность равна алгебраической сумме показаний ваттметров:

$$P = P_{W1} + P_{W2} . \quad (6.26)$$

Для измерения реактивной мощности той же трехфазной системы применяют схему включения ваттметров, показанную на рисунке 6.9 б. Реактивная мощность

$$Q = \sqrt{3} \cdot (P_{W1} + P_{W2}) . \quad (6.27)$$

При симметричном режиме реактивную мощность можно измерить одним ваттметром, включенным по схеме рисунок 6.9 в. В этом случае

$$Q = \sqrt{3} \cdot P_W . \quad (6.28)$$

Полная мощность для каждой фазы определяется из треугольника мощностей, также как и для цепей однофазного тока.

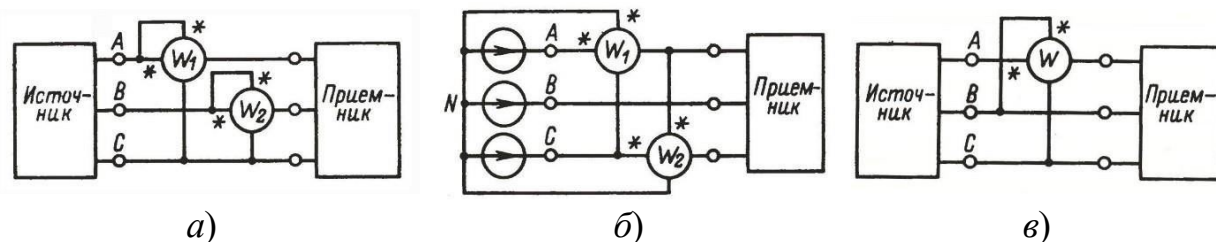


Рисунок 6.9 – Схемы для измерения трехфазной активной мощности в цепи без нейтрального провода (а) и реактивной мощности при несимметричной (б) и симметричной нагрузке (в)

Задания

1. На рисунке 6.10 представлена симметричная трёхфазная система с параметрами $X_C = 90 \text{ Ом}$, $r = 40 \text{ Ом}$. Определить показания приборов и ток i при $U_A = 120 \angle 0^\circ \text{ В}$. (207,5 В; 4 А; 2,3 А; 625 Вт; 950 Вт; $i = 3 \sqrt{2} \sin \omega t \text{ А}$).

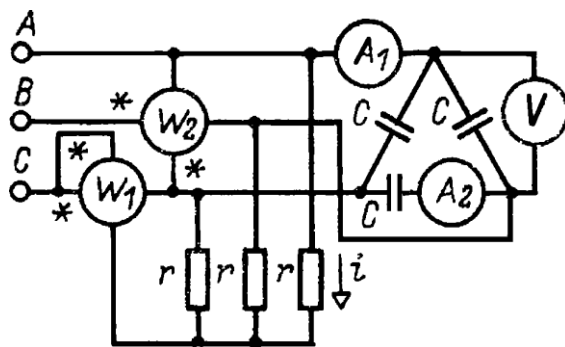


Рисунок 6.10

2. К симметричному трехфазному генератору с фазной ЭДС $E = 230 \text{ В}$ и с внутренним сопротивлением $\underline{Z}_0 = (0,3 + j0,9) \text{ Ом}$ подключена несимметричная нагрузка, соединенная в звезду с нулевым проводом (рисунок 6.11). Сопротивления фаз нагрузки: $\underline{Z}_a = (2 + j4) \text{ Ом}$, $\underline{Z}_b = (4 - j8) \text{ Ом}$, $\underline{Z}_c = 5 \text{ Ом}$. Сопротивление каждого провода линии $\underline{Z}_{np} = (0,4 + j0,3) \text{ Ом}$, а сопротивление нулевого провода $\underline{Z}_N = 0,5 \text{ Ом}$. Определить токи и напряжения на каждой фазе нагрузки и генераторе при наличии нейтрального провода и при его обрыве.

Для каждого случая построить векторную диаграмму. ($I_A = 37,9 e^{-j60^\circ 10'} \text{ А}$,

$$I_B = 27,4 e^{-j67^\circ 40'} \text{ А}, \quad I_C = 41,6 e^{-j108^\circ 35'} \text{ А}, \quad I_N = 24,8 e^{-j49^\circ 25'} \text{ А},$$

$$U_{an} = 170 e^{-j3^\circ 15'} \text{ В}, \quad U_b = 230 e^{-j134^\circ 20'} \text{ В}, \quad U_c = 208 e^{j108^\circ 35'} \text{ В},$$

$$U_{AN} = 195 e^{-j2^\circ 5'} \text{ В}, \quad U_{\text{л}} = 243 e^{-j125^\circ} \text{ В}, \quad U_C = 213 e^{-j110^\circ 45'} \text{ В}.$$

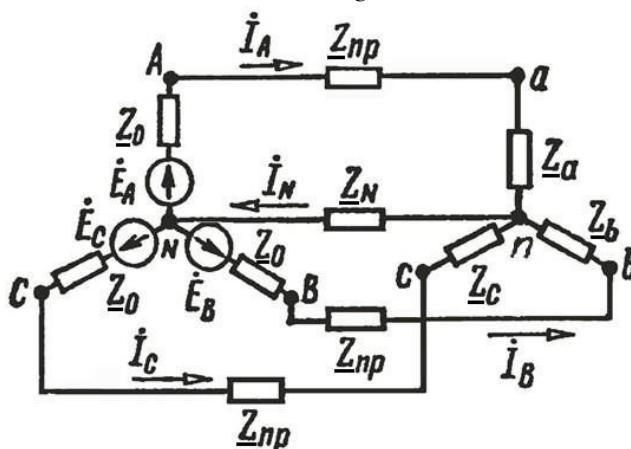


Рисунок 6.11

3. В цепи рисунок 6.12 определить токи в линии и в фазах приёмника при коротком замыкании между точками b и c, если $U_{\text{Л}} = 380 \text{ В}$; $\omega \cdot L = 2 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_A = 10 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_B = j10 \text{ Ом}$; $\underline{Z}_C = -j10 \text{ Ом}$. (0; 95 А; 95 А; 0; 33 А; 33 А).

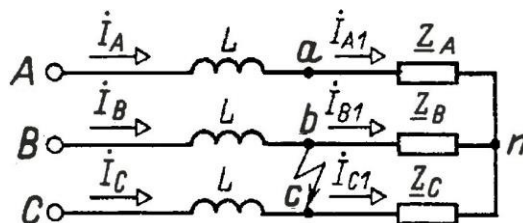


Рисунок 6.12

Контрольные вопросы

1. Что означает симметричный трехфазный источник электрической энергии?
2. Что означает несимметричный трехфазный источник?
3. Перечислите способы соединения обмоток трехфазного источника.
4. Что такое нейтральный провод?
5. Какое напряжение называется фазным, линейным?
6. Что означает симметричная и несимметричная нагрузка?
7. Что такое напряжение смещения нейтрали?
8. Как определить ток в нейтральном проводе при симметричной нагрузке?
9. Чему равна мощность трехфазной системы в симметричном режиме?
10. Что такое одно-, двух- и трехфазное короткое замыкание?

Список литературы, рекомендуемый к использованию по данной теме

Основная литература

1. Немцов М.В. Электротехника и электроника (6-е изд., стер.) учебник. – М: Академия, 2013. – 480 с. – ISBN: 9785446804320.
2. Электротехника и электроника: Учебное пособие для вузов / В.В. Кононенко [и др.]; под ред. В.В. Кононенко. – Изд. 6-е – Ростов н/Д: Феникс, 2010. – 784 с. (Высшее образование). – ISBN 978-5-222-17568-2.

Дополнительная литература

3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник. – 10-е изд. – М.: Гардарики, 2002. – 638 с.
4. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: учеб. пособие для студентов / под ред. П. А. Ионкина. – М.: Энергоиздат, 1982. – 768 с.

Практическое занятие 7

Расчет трехфазных цепей синусоидального тока с симметричной нагрузкой

1. Теоретическая часть

При соединении обмоток трехфазного источника звездой (рисунок 1.1 а) линейные напряжения определяются через разности фазных напряжений:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A. \quad (1.1)$$

Для симметричного источника фазные напряжения

$$\dot{U}_A = U_\phi; \dot{U}_B = U_\phi \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \dot{U}_C = U_\phi \cdot e^{j\frac{2\pi}{3}}, \quad (1.2)$$

линейные напряжения (рисунок 1.1 б)

$$\dot{U}_{AB} = U_\phi \cdot e^{j\frac{\pi}{6}}; \dot{U}_{BC} = U_\phi \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}; \dot{U}_{CA} = U_\phi \cdot e^{j\frac{5\pi}{6}}. \quad (1.3)$$

Между линейными и фазными напряжениями для симметричного источника существует зависимость:

$$U_\phi = \sqrt{3} \cdot U_\phi. \quad (1.4)$$

При соединении обмоток трехфазного источника треугольником (рисунок 1.2 а) линейные напряжения равны фазным (рисунок 1.2 б)

$$U_\phi = U_\phi. \quad (1.5)$$

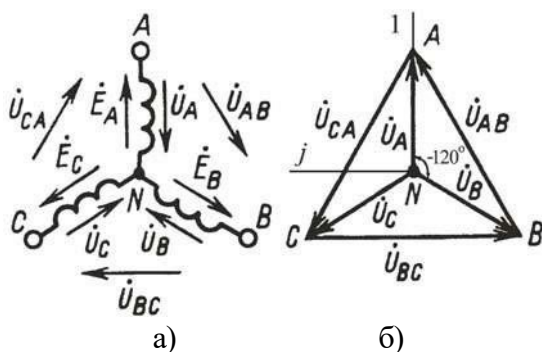


Рисунок 1.1

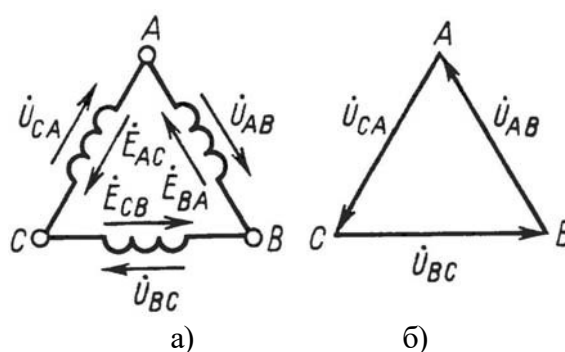


Рисунок 1.2

Симметричный режим. Для симметричного приемника, соединенного звездой (рисунок 1.3 а), $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}$; напряжение смещения нейтрали U_{nN} равно нулю и токи в фазах

$$\dot{I}_A = \dot{U}_A / (\underline{Z} + \underline{Z}_\pi); \dot{I}_B = \dot{U}_B / (\underline{Z} + \underline{Z}_\pi); \dot{I}_C = \dot{U}_C / (\underline{Z} + \underline{Z}_\pi), \quad (1.6)$$

где $\underline{Z}_\pi$ – сопротивление симметричной линии на фазу. По модулю токи равны и имеют сдвиг по фазе относительно друг друга, равный

120

(рисунок 1.3 б):

$$I_A = I_B = I_C = U_\phi / |\underline{Z} + \underline{Z}_\pi|. \quad (1.7)$$

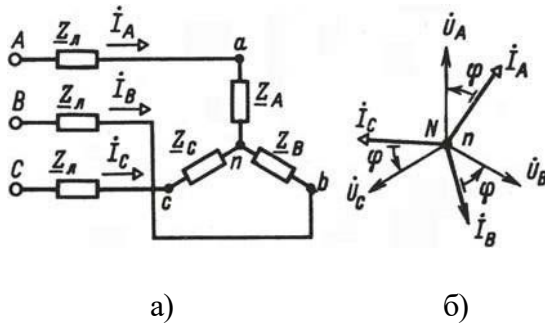


Рисунок 1.3

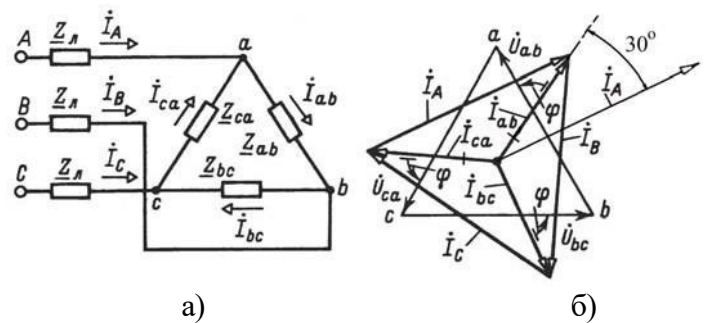


Рисунок 1.4

Для симметричного приемника, соединенного треугольником (рисунок 1.4 а), $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}$. Если $\underline{Z}_\pi = 0$, то фазные токи приемника

$$\dot{I}_{ab} = \dot{U}_{AB} / (\underline{Z}); \dot{I}_{bc} = \dot{U}_{BC} / (\underline{Z}); \dot{I}_{ca} = \dot{U}_{CA} / (\underline{Z}). \quad (1.8)$$

По модулю токи равны и имеют сдвиг по фазе относительно друг друга, равный 120° (рисунок 1.4 б):

$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_\phi = U_\pi / |\underline{Z}|. \quad (1.9)$$

Линейные токи приемника определяются разностью фазных токов:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}. \quad (1.10)$$

Как видно из векторной диаграммы (рисунок 1.4 б),

$$\dot{I}_A = \sqrt{3} \dot{I}_a e^{-j\frac{\pi}{6}}; \dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j\frac{2\pi}{3}}. \quad (1.11)$$

Если $\underline{Z}_\pi \neq 0$, то (после преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду) линейные токи

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}/3 + \underline{Z}_л}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}/3 + \underline{Z}_л}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}/3 + \underline{Z}_л}. \quad (1.12)$$

Фазные токи определяются через линейные:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{I}_A e^{j\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{3}}; \quad \dot{I}_{bc} = \dot{I}_{ab} e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \quad \dot{I}_{ca} = \dot{I}_{ab} e^{j\frac{2\pi}{3}}. \quad (1.13)$$

Активная, реактивная и полная мощности симметричного приемника независимо от вида соединения

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi = \sqrt{3}U_\text{л} I_\text{л} \cos \varphi, \quad (1.14)$$

$$Q = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi = \sqrt{3}U_\text{л} I_\text{л} \sin \varphi, \quad (1.15)$$

$$S = 3U_\phi I_\phi = \sqrt{3}U_\text{л} I_\text{л}, \quad (1.16)$$

где φ – сдвиг по фазе между фазными напряжением и током.

2. Задачи

1. От трёхфазной линии с линейным напряжением 380 В получают питание три одинаковых приёмника, соединенных звездой. Сопротивление каждого приёмника $\underline{Z} = 8 + j6$ Ом. Найти токи приёмников. (22 А).

2. К трёхфазному трансформатору, обмотки которого соединены звездой, подключены соединённые треугольником три одинаковые индуктивные катушки (рисунок 1.5). Фазное напряжение трансформатора равно 127 В, сопротивление катушки $\omega L = 22$ Ом. Определить токи в катушках и в обмотках трансформатора. (10 А; 17,3 А)

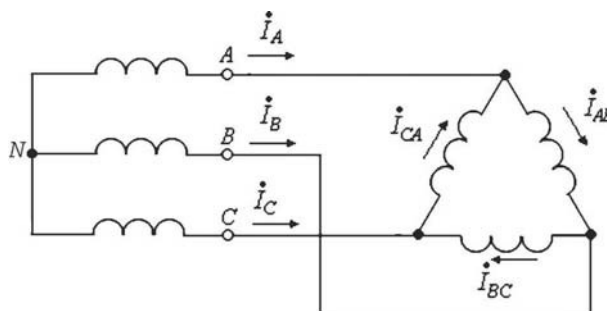


Рисунок – 1.5

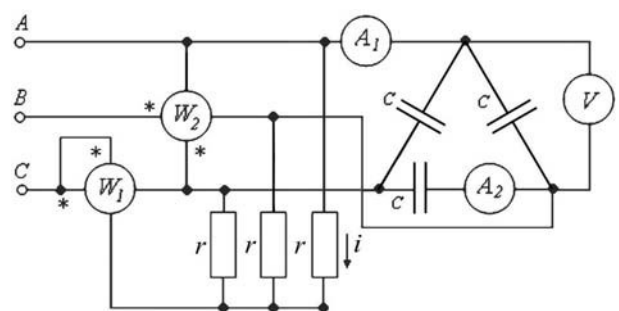


Рисунок – 1.6

3. На рисунке 1.6 представлена симметричная трёхфазная система с параметрами $X_C=90$ Ом, $r=40$ Ом. Определить показания приборов и ток i при $U_A=120\angle 0^\circ$ В. (207,5 В; 4 А; 2,3 А; 625 Вт; 950 Вт; $i=3\sqrt{2}\sin \omega t$ А).

Вопросы к практическому занятию

1. Что означает симметричный трехфазный источник электрической энергии?
2. Что означает несимметричный трехфазный источник?
3. Перечислите способы соединения обмоток трехфазного источника.
4. Что такое нейтральный провод?
5. Какое напряжение называется фазным, линейным?
6. Что означает симметричная и несимметричная нагрузка?
7. Что такое напряжение смещения нейтрали?
8. Как определить ток в нейтральном проводе при симметричной нагрузке?
9. Чему равна мощность трехфазной системы в симметричном режиме?

Практическое занятие 8

Расчет трехфазных цепей синусоидального тока с несимметричной нагрузкой

1. Теоретическая часть

Несимметричный режим. При соединении приемника звездой с нейтральным проводом (рисунок 2.1 а) напряжение смещения нейтрали

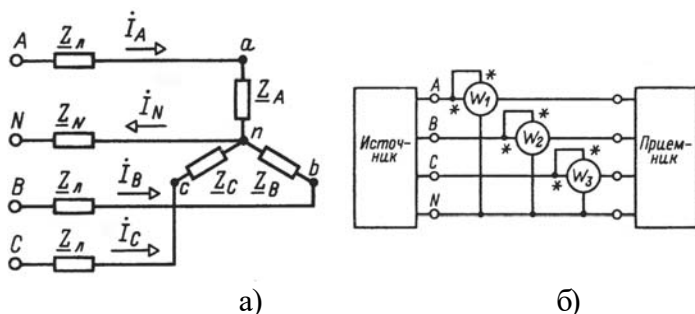
$$\dot{U}_{nN} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \quad (2.1)$$

где $\underline{Y}_A = 1/(\underline{Z}_A + \underline{Z}_л)$; $\underline{Y}_B = 1/(\underline{Z}_B + \underline{Z}_л)$; $\underline{Y}_C = 1/(\underline{Z}_C + \underline{Z}_л)$; $\underline{Y}_N = 1/\underline{Z}_N$; линейные токи и ток в нейтральном проводе

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_л}; \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B - \dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_л}; \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C - \dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_л}; \dot{I}_N = \frac{\dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_N}. \quad (2.2)$$

По первому закону Кирхгофа

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C. \quad (2.3)$$



а)

б)

Рисунок 2.1

Для приемника, соединенного звездой без нейтрального провода и заданных линейных напряжений источника, токи можно определить без предварительного расчета напряжения

смещения нейтрали:

$$\dot{U}_{An} = \frac{\dot{U}_{AB} \underline{Y}_B - \dot{U}_{CA} \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}; \quad \dot{U}_{Bn} = \frac{\dot{U}_{BC} \underline{Y}_C - \dot{U}_{AB} \underline{Y}_A}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}; \quad \dot{U}_{Cn} = \frac{\dot{U}_{CA} \underline{Y}_A - \dot{U}_{BC} \underline{Y}_B}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}. \quad (2.4)$$

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{An} / (\underline{Z}_A + \underline{Z}_L); \quad \dot{I}_B = \dot{U}_{Bn} / (\underline{Z}_B + \underline{Z}_L); \quad \dot{I}_C = \dot{U}_{Cn} / (\underline{Z}_C + \underline{Z}_L). \quad (2.5)$$

При соединении приемника треугольником (рисунок 1.4 а) и $\underline{Z}_L = 0$ фазные токи определяются согласно (1.8), линейные (1.10).

Если $\underline{Z}_L \neq 0$, то треугольник сопротивлений можно преобразовать в эквивалентную звезду и для этого соединения рассчитать линейные токи, как показано выше.

Фазные токи определяются по предварительно найденным фазным напряжениям приемника:

$$\dot{U}_{ab} = \underline{Z}'_A \dot{I}_A - \underline{Z}'_B \dot{I}_B; \quad \dot{U}_{bc} = \underline{Z}'_B \dot{I}_B - \underline{Z}'_C \dot{I}_C; \quad \dot{U}_{ca} = \underline{Z}'_C \dot{I}_C - \underline{Z}'_A \dot{I}_A; \quad (2.6)$$

$$\dot{I}_{ab} = \dot{U}_{ab} / (\underline{Z}_{ab}); \quad \dot{I}_{bc} = \dot{U}_{bc} / (\underline{Z}_{bc}); \quad \dot{I}_{ca} = \dot{U}_{ca} / (\underline{Z}_{ca}), \quad (2.7)$$

где $\underline{Z}'_A, \underline{Z}'_B, \underline{Z}'_C$ – сопротивления лучей звезды, эквивалентной треугольнику.

Активная, реактивная и полная мощности приемника равны суммам соответствующих мощностей трех фаз.

Измерение мощности. Для измерения активной мощности, передаваемой от источника к приемнику, в трехфазной цепи с нейтральным проводом при несимметричном режиме включают ваттметры в каждую фазу (рисунок 2.1 б). Активная мощность равна сумме показаний ваттметров:

$$P = P_{W1} + P_{W2} + P_{W3}. \quad (2.8)$$

В случае симметричного режима достаточно одного ваттметра, при этом мощность

$$P = 3P_W. \quad (2.9)$$

При отсутствии нейтрального провода активную мощность измеряют двумя ваттметрами, включенными по схеме, показанной на рисунке 2.2 а (и при симметричном, и при несимметричном режимах). Активная мощность равна алгебраической сумме показаний ваттметров:

$$P = P_{W1} + P_{W2}. \quad (2.10)$$

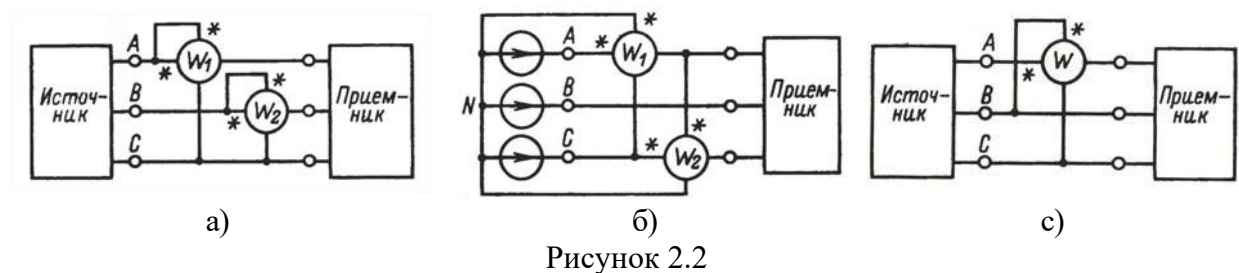
Для измерения реактивной мощности той же трехфазной системы применяют схему включения ваттметров, показанную на рисунке 2.2 б. Реактивная мощность

$$Q = \sqrt{3}(P_{W1} + P_{W2}). \quad (2.11)$$

При симметричном режиме реактивную мощность можно измерить одним ваттметром, включенным по схеме рисунок 2.2 с. В этом случае

$$Q = \sqrt{3}P_W. \quad (2.12)$$

Полная мощность для каждой фазы определяется из треугольника мощностей, также как и для цепей однофазного тока.



2. Задачи

1. К симметричному трехфазному генератору с фазной ЭДС $E = 230$ В и с внутренним сопротивлением $Z_0 = (0,3 + j0,9)$ Ом подключена несимметричная нагрузка, соединенная в звезду с нулевым проводом (рисунок 2.3). Сопротивления фаз нагрузки: $Z_a = (2 + j4)$ Ом, $Z_b = (4 - j8)$ Ом, $Z_c = 5$ Ом. Сопротивление каждого провода линии $Z_{лр} = (0,4 + j0,3)$ Ом, а

сопротивление нулевого провода $Z_N = 0,5 \text{ Ом}$. Определить токи и напряжения на каждой фазе нагрузки и генераторе при наличии нейтрального провода и при его обрыве. Для каждого случая построить векторную диаграмму.

$$(\dot{I}_A = 37,9e^{-j60^\circ 10'} \text{ А}, \quad \dot{I}_B = 27,4e^{-j67^\circ 40'} \text{ А}, \quad \dot{I}_C = 41,6e^{-j108^\circ 35'} \text{ А}, \quad \dot{I}_N = 24,8e^{-j49^\circ 25'} \text{ А},$$

$$\dot{U}_{aO_1} = 170e^{-j3^\circ 15'} \text{ В}, \quad \dot{U}_{bO_1} = 230e^{-j134^\circ 20'} \text{ В}, \quad \dot{U}_{cO_1} = 208e^{j108^\circ 35'} \text{ В}, \quad \dot{U}_{AO} = 195e^{-j2^\circ 5'} \text{ В},$$

$$\dot{U}_{BO} = 243e^{-j110^\circ 45'} \text{ В}, \quad \dot{U}_{CO} = 213e^{-j110^\circ 45'} \text{ В}).$$

2. На рисунке 2.4 изображена трёхфазная цепь, соединённая звездой, с фазным напряжением генератора равным 173 В. Определить токи, если $r = \omega L = 1/\omega C = 30 \text{ Ом}$. (2,6 А; 5 А; 5 А).

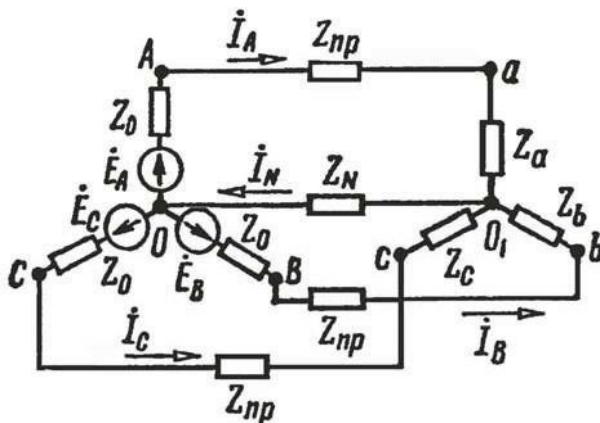


Рисунок – 2.3

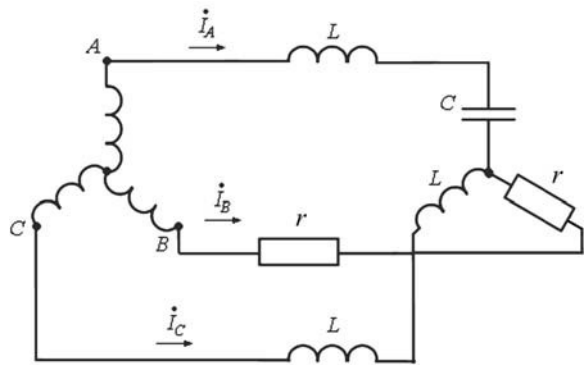


Рисунок – 2.4

Вопросы к практическому занятию

1. При каком способе соединения обмоток трехфазного источника с нагрузкой отсутствует нейтральный провод и когда он вообще не может быть использован?
2. Что такое линейный провод?
3. Пояснить связь между линейными и фазными напряжениями.
4. Приведите соотношения между линейными и фазными токами.
5. Как найти напряжение смещения нейтрали при несимметричной нагрузке?
6. Как определить ток в нейтральном проводе при несимметричной нагрузке?
7. Чему равна мощность трехфазной системы в несимметричном режиме?

Практическое занятие 9

Расчет трехфазных цепей синусоидального тока с несимметричной нагрузкой при аварийных режимах

1. Теоретическая часть

Теория, необходимая для выполнения заданий, приведена в практических занятиях 1, 2.

2. Задачи

1. В схеме рисунок 3.1 линейное напряжение равно $100\sqrt{3}$ В, $r=10$ Ом.

Определить токи I_A , I_B , I_C , I_N при следующих положениях переключателей: а) ключи K_1 , K_2 замкнуты, K_3 разомкнут; б) ключи K_1 , K_3 замкнуты, K_2 разомкнут; в) ключи K_1 , K_2 , K_3 разомкнуты. (а – 10 А; 10 А; 10 А; 0 А; б – 30 А; 17,3 А; 17,3 А; 0 А; в – 0 А; 8,65 А; 8,65 А; 0 А).

2. В цепи рисунок 3.2 определить токи в линии и в фазах приёмника при коротком замыкании между точками b и c , если $U_{\text{Л}}=380$ В; $\omega L=2$ Ом; $Z_A=10$ Ом; $Z_B=j10$ Ом; $Z_C=-j10$ Ом. (0; 95 А; 95 А; 0; 33 А; 33 А).

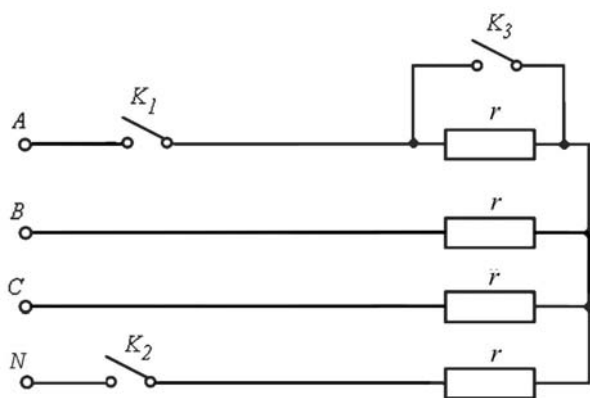


Рисунок – 3.1

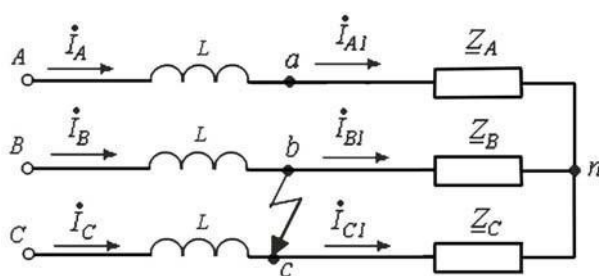


Рисунок – 3.2

3. В трёхфазной цепи рисунок 3.3 известны фазные токи: $I_A=3$ А, $I_B=4$ А, $I_C=4$ А. Определить показание амперметра в нейтральном проводе. (5 А).

4. К зажимам трехфазного симметричного источника энергии с линейным напряжением $U_L = 380$ В подключена соединенная звездой несимметричная нагрузка рисунок 3.4, сопротивления фаз которой $Z_A = (6 + j8)$ Ом, $Z_B = (24 + j7)$ Ом, $Z_C = 20$ Ом.

Определить токи и напряжения на каждой фазе, показания каждого ваттметра, мощность, расходуемую в нагрузке. Построить векторную диаграмму токов и напряжений. $\dot{I}_A = 18,3e^{-j32^\circ 24'} \text{ А}, \quad \dot{I}_B = 8,12e^{-j157^\circ 58'} \text{ А},$
 $\dot{I}_C = 15,05e^{-j121^\circ 53'} \text{ А}, \quad \dot{U}_{AO_1} = 183e^{-j20^\circ 45'} \quad \dot{U}_{BO_1} = 203e^{-j141^\circ 45'} \quad \dot{U}_{CO_1} = 301e^{j121^\circ 50'} \text{ В},$

В,

В,

$P_1 = 3530 \text{ Вт}$, $P_2 = 4870 \text{ Вт}$, $P = 8100 \text{ Вт}$)

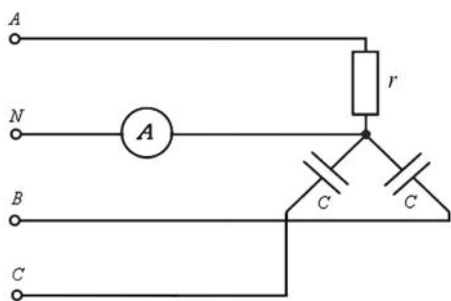


Рисунок – 3.3

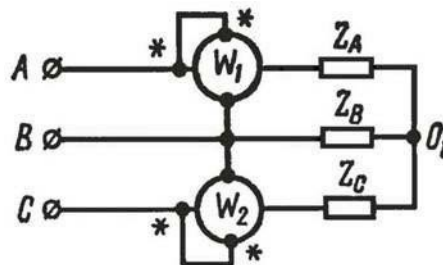


Рисунок – 3.4

Вопросы к практическому занятию

1. Могут ли линейные токи быть меньше фазных при несимметричной нагрузке?
2. Что такое однофазное короткое замыкание?
3. Что такое двухфазное и трехфазное короткое замыкание?
4. Сколько необходимо ваттметров для измерения активной мощности трехфазной системы при несимметричной нагрузке и наличии нулевого провода?

Сколько необходимо ваттметров для измерения активной мощности трехфазной системы при несимметричной нагрузке без нулевого провода?

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по организации лабораторной работы обучающихся
по дисциплине «Теоретические основы электротехники»
для студентов направления подготовки /специальности
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
Направленность (профиль) Цифровые технологии в электроэнергетике

Ставрополь, 2026

Лабораторная работа 1 Экспериментальная проверка законов Кирхгофа

Лабораторная работа 2 Цепь синусоидального тока с последовательно включенными активным и индуктивным (емкостным) элементами

Лабораторная работа 3 Цепь с индуктивно связанными элементами

Лабораторная работа 4 Исследование цепи трехфазного тока при различных схемах соединения нагрузки

Лабораторная работа 5 Исследование линейного пассивного четырехполюсника

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по организации самостоятельной работы обучающихся
по дисциплине «Теоретические основы электротехники»
для студентов направления подготовки / специальности
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
Направленность (профиль) Цифровые технологии в электроэнергетике

Ставрополь, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

1.	ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАНИЯ И ЕГО ОБЪЕМ	
2.	ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К НАПИСАНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ	
3.	РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ, ПРИМЕРНЫЙ КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ	
4.	ПОРЯДОК ЗАЩИТЫ И ОТВЕТСТВЕННОСТЬ СТУДЕНТА ЗА ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ	
5.	СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	
6.	ПРИЛОЖЕНИЕ	

Электротехника имеет первостепенное значение для технического перевооружения всего хозяйства. Внедрение электротехники позволяет решать на наиболее высоком уровне сложные технические задачи измерения различных физических величин, обработки новых технологических процессов и т.д. Особенно важную роль электротехника играет в автоматизации производственных процессов. Без комплексной автоматизации невозможно дальнейшее повышение производительности труда. Автоматизация является сейчас основным средством организации и управления промышленностью, а электротехника – «мозгом» автоматизации. С помощью электротехники создается новая технология (обработка ультразвуком, токами высокой частоты и др.), облегчаются условия труда, повышаются рабочие скорости производственных механизмов и расширяются возможности управления. В связи с широким использованием электротехники становится очевидной необходимость изучения её основ инженером любого профиля. Настоящие методические указания позволяют приобрести практические навыки расчета цепей постоянного и синусоидального тока.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАНИЯ И ЕГО ОБЪЕМ

РГР выполняется по теме: «Расчет сложной цепи постоянного и синусоидального тока с помощью ЭВМ». РГР включает в себя два задания: расчет цепей постоянного тока и расчет цепей синусоидального тока. Вариант задания выдается преподавателем.

Задание 1.1

Изобразить схему в соответствии с графом, показанном на рис. 1. Графы и типы элементов выбираются из табл. 1 по заданному преподавателем варианту задания. Параметры элементов имеют следующие значения: $R_1=(n+m)$, Ом; $R_2=n$, Ом; $R_3=m$, Ом; $R_4=(m+0,5n)$, Ом; $R_5=(0,25n+0,5m)$, Ом; $R_6=(m+0,5n)$, Ом; $R_7=(0,5n+0,5m)$, Ом; $E=n$, В; $J=0,25m$, А, где n соответствует номеру, под которым записана фамилия студента в журнале группы, m соответствует номеру группы на факультете.

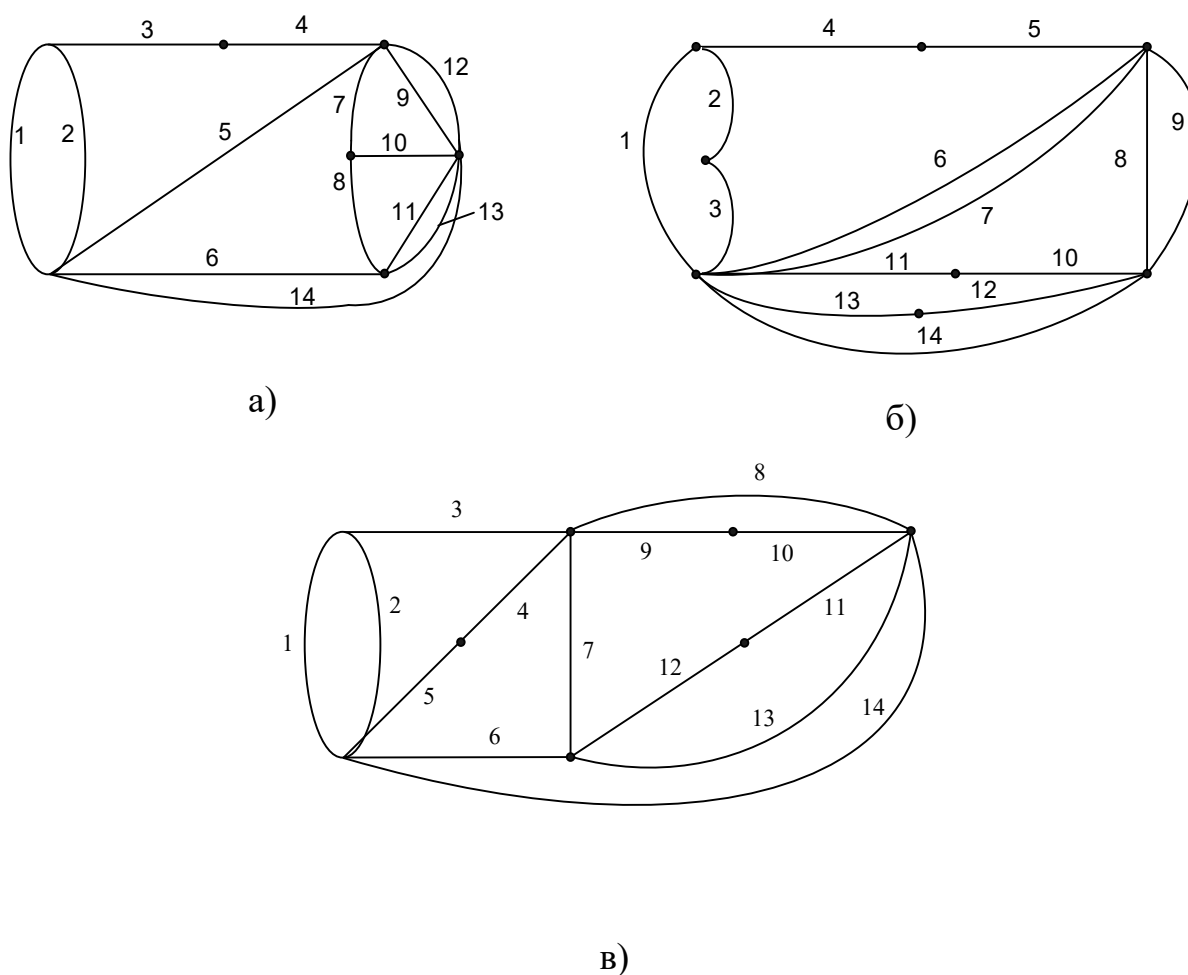


Рисунок 1

Таблица 1

Элементы ветвей															
Вариант	Рис.1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	А	Е	R_6	L_1	R_1	C_1	L_2	R_2	R_3	R_4	C_2	J	R_6	R_5	R_6
2	А	Е	R_6	R_1	L_1	C_1	L_2	R_2	R_3	J	C_2	R_4	R_5	R_6	R_6
3	А	J	R_6	L_1	R_7	C_1	L_2	R_2	R_3	R_4	E	R_5	C_2	R_6	R_6
4	Б	Е	R_6	R_6	R_1	L_1	R_2	C_1	C_2	R_3	L_2	R_4	R_5	R_7	J

5	Б	Е	R_6	R_2	R_1	L_1	R_2	C_1	J	R_3	L_2	R_4	R_7	R_5	C_2
6	Б	Е	R_6	R_6	R_1	L_1	J	R_2	C_1	R_3	L_2	R_4	R_7	R_5	C_2
7	Б	J	R_1	L_1	R_2	R_3	C_1	R_6	L_2	R_6	R_4	E	R_5	R_7	C_2
8	Б	J	R_5	L_1	R_4	E	C_1	R_6	R_6	R_3	R_2	L_2	R_1	R_7	C_2
9	Б	J	R_1	E	R_2	R_5	R_6	C_1	R_6	L_2	R_4	L_1	R_3	L_2	C_2
10	В	Е	R_6	R_3	L_1	J	R_2	L_1	C_1	R_7	R_4	L_2	R_5	R_6	C_2
11	В	Е	R_6	R_4	R_7	C_1	R_2	R_3	J	L_1	R_1	L_2	R_5	R_6	C_2
12	В	J	R_2	R_3	L_2	C_2	R_6	R_7	L_1	R_1	L_1	R_5	R_4	C_1	R_5
13	В	Е	R_6	R_5	R_7	C_1	R_2	J	C_2	R_3	L_1	L_2	R_4	R_1	R_6
14	В	Е	R_6	R_1	J	R_7	R_3	R_4	R_2	R_5	L_2	R_7	C_1	L_1	C_2
15	В	J	R_2	R_1	E	R_3	R_7	C_1	R_5	L_1	R_4	L_2	R_7	R_6	C_2
16	В	J	R_3	R_2	C_1	R_7	R_1	C_2	L_2	R_6	R_6	E	R_4	R_5	C_3
17	В	J	R_4	L_1	R_7	C_1	R_2	C_2	R_6	R_3	L_2	R_7	R_1	R_5	E
18	В	Е	R_6	R_1	C_1	L_1	L_2	C_2	R_2	R_3	R_7	R_2	J	R_4	R_5
19	В	J	R_3	L_1	R_7	C_1	L_2	R_6	R_2	R_7	R_1	E	R_4	R_5	C_2
20	В	J	R_2	L_1	C_1	R_7	R_7	R_6	R_1	E	R_3	R_4	L_2	R_5	C_2
21	А	J	R_4	R_7	L_1	R_1	L_2	R_2	R_3	R_1	E	R_5	C_1	R_6	C_2
22	А	Е	R_6	R_5	L_1	C_1	L_2	R_4	R_3	R_2	C_2	J	R_6	R_1	R_6
23	А	Е	R_6	R_5	L_1	R_6	L_2	R_3	R_2	J	C_1	R_4	R_1	R_6	C_2
24	А	J	R_2	L_1	R_7	C_1	L_2	R_1	R_3	R_4	E	R_5	R_6	R_6	C_2
25	А	Е	R_6	R_3	L_1	R_6	L_2	R_2	R_1	R_4	C_1	J	R_6	R_5	C_2
26	Б	Е	R_6	R_6	R_2	R_7	R_1	C_1	C_2	R_4	L_1	R_3	R_5	L_2	J
27	Б	Е	R_6	R_6	R_1	R_7	R_3	C_1	J	R_2	L_1	R_5	L_2	R_4	C_2
28	Б	Е	R_6	R_6	R_5	R_7	J	R_4	C_1	R_3	L_1	R_2	L_2	R_1	C_2
29	Б	J	L_1	R_5	R_4	R_3	C_1	R_6	R_7	R_6	R_2	E	R_1	L_2	C_2
30	Б	J	R_1	E	R_2	L_2	C_1	R_6	C_2	R_3	R_4	R_7	R_5	L_1	R_6
31	Б	J	R_1	E	R_2	R_3	C_1	R_6	R_6	L_1	R_4	L_2	R_5	R_7	C_2
32	В	Е	R_6	R_1	J	L_1	R_2	R_3	C_1	R_4	R_7	R_5	L_2	C_2	R_6
33	В	Е	R_6	R_1	R_7	C_1	R_2	R_3	J	R_4	L_1	R_5	L_2	C_2	R_6
34	В	Е	R_6	L_1	R_7	C_1	R_2	R_2	C_1	L_2	R_3	R_4	R_7	R_5	J
35	В	Е	R_6	R_1	C_1	R_7	R_2	J	R_6	R_3	L_1	L_2	R_4	R_5	C_2
36	В	Е	R_6	R_1	J	R_7	R_2	R_3	R_4	R_5	L_1	L_2	R_7	C_1	C_2
37	В	J	R_1	R_2	E	R_3	L_1	C_1	R_4	L_2	R_5	R_7	R_7	R_6	C_2
38	В	J	R_1	R_2	C_1	L_1	R_7	R_6	L_2	C_2	R_7	E	R_4	R_5	R_3
39	В	J	R_1	E	C_1	R_7	L_1	R_6	C_2	R_3	R_2	L_2	R_4	R_5	R_6
40	В	Е	R_6	R_1	C_1	L_1		R_6	R_2	R_3	L_2	R_7	J	R_4	R_5
41	В	J	R_1	L_1	R_7	R_6	L_2	C_2	R_2	R_7	R_3	E	R_4	R_5	C_1
42	В	J	R_1	L_1	C_1	R_7	L_2	C_2	R_2	E	R_3	R_4	R_7	R_5	R_6

Необходимо:

- определить эквивалентное сопротивление цепи относительно зажимов идеального источника ЭДС, считая задающий ток идеального источника током равным нулю;
- определить эквивалентное сопротивление цепи относительно зажимов идеального источника тока, считая задающее напряжение идеального источника ЭДС равным нулю;
- методом наложения для цепи (рис.1) найти ток, протекающий через источник ЭДС и напряжение на источнике тока; определить также токи в остальных ветвях;

- г) методом узловых потенциалов найти токи в ветвях цепи;
- д) найти токи в ветвях цепи, применяя законы Кирхгофа;
- е) рассчитать энергетический баланс для схемы;
- ж) построить потенциальную диаграмму для любого замкнутого контура схемы.

Задание 1.2

Для схемы, изображенной на рис. 1, согласно одному из графов необходимо:
– рассчитать токи в ветвях:

- а) составляя уравнение по закону Кирхгофа;
- б) методом контурных токов;
- в) методом узловых потенциалов;
- методом эквивалентного генератора рассчитать ток в ветви, заданной преподавателем;
- рассчитать энергетический баланс для схемы. Выбор параметров схемы аналогичен заданию 1.1.

Задание 1.3

Для электрических схем, изображенных на рис.2 согласно заданному варианту с параметрами, указанными в таблице 2, необходимо:

- рассчитать токи в ветвях и ЭДС E_1 законами Кирхгофа;
- считая ЭДС E_1 известной из предыдущего пункта, а ток I_1 неизвестным, рассчитать токи в ветвях:
- а) методом узловых потенциалов;
- б) методом контурных токов;
- методом эквивалентного генератора рассчитать ток в ветви, заданной преподавателем;
- рассчитать энергетический баланс для схемы;
- найти показания всех приборов.

Примечание: для всех схем принять:
для варианта «А»: $J_{K1} = 4\text{А}$; $J_{K2} = 0\text{А}$; $I_1 = 2\text{А}$;

для варианта «А»: $J_{K1} = 0\text{А}$; $J_{K2} = 4\text{А}$; $I_1 = 2\text{А}$.

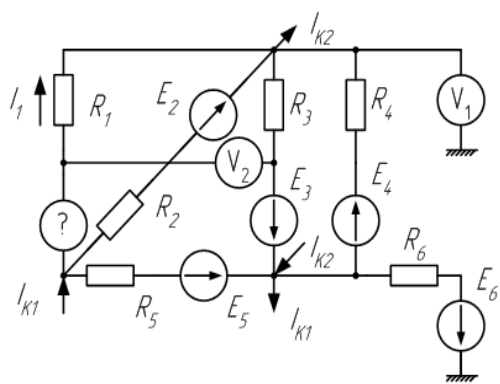
Таблица 2

Параметры схемы	№ варианта					
	1	2	3	4	5	6
$R_1, \text{Ом}$	8	6	5	4	3	2
$R_2, \text{Ом}$	5	4	5	4	4	3
$R_3, \text{Ом}$	4	5	6	5	4	4
$R_4, \text{Ом}$	6	4	5	3	5	6
$R_5, \text{Ом}$	6	5	2	2	6	4
$R_6, \text{Ом}$	7	8	2	3	7	4
$R_7, \text{Ом}$	2	3	2	2	8	7
$R_8, \text{Ом}$	3	2	2	3	2	8
$E_1, \text{В}$	?	?	?	?	?	?
$E_2, \text{В}$	50	40	50	40	20	30
$E_3, \text{В}$	30	30	40	50	30	40
$E_4, \text{В}$	40	20	30	60	40	50
$E_5, \text{В}$	50	50	20	30	50	60
$E_6, \text{В}$	30	20	10	15	20	20

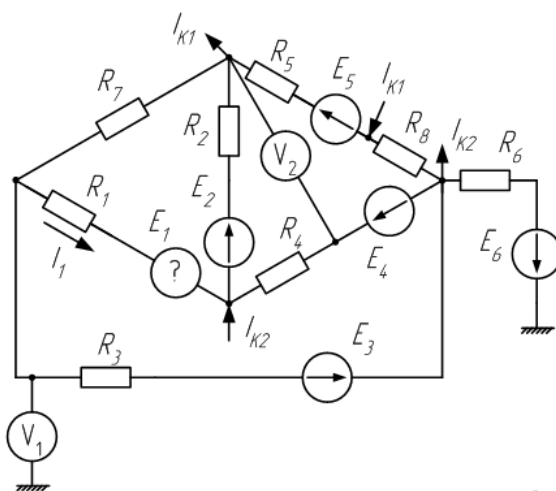
Задание 1.4

Для электрической схемы, изображенной на рис.2 и выбранной согласно заданному варианту с параметрами, приведенными в табл. 2:

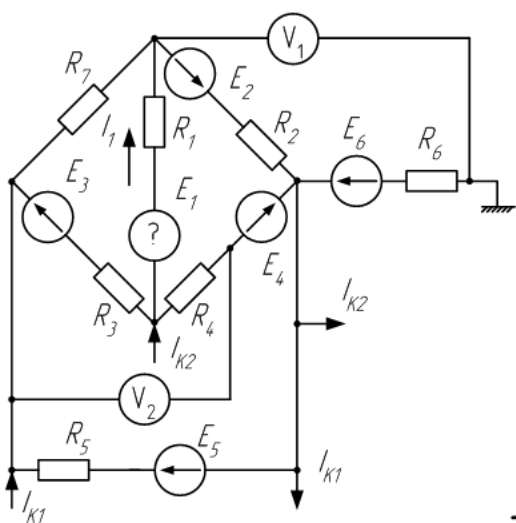
- считая ЭДС E_1 неизвестной во всех пунктах, определить токи в ветвях:
- а) законами Кирхгофа;
- б) методом контурных токов;
- в) методом узловых потенциалов;
- найти ток в ветви, заданной преподавателем, методом эквивалентного генератора
- рассчитать энергетический баланс для схемы;
- найти показания приборов.



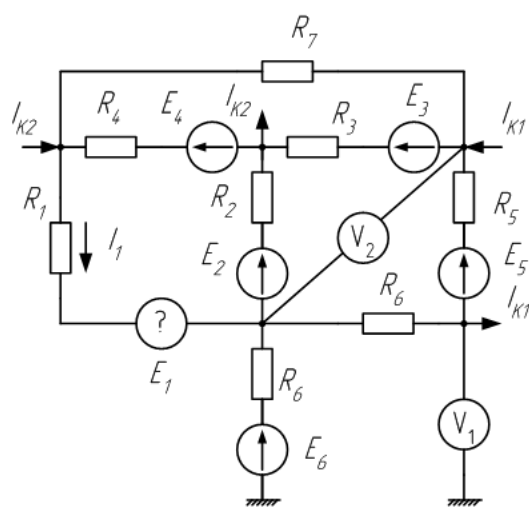
1



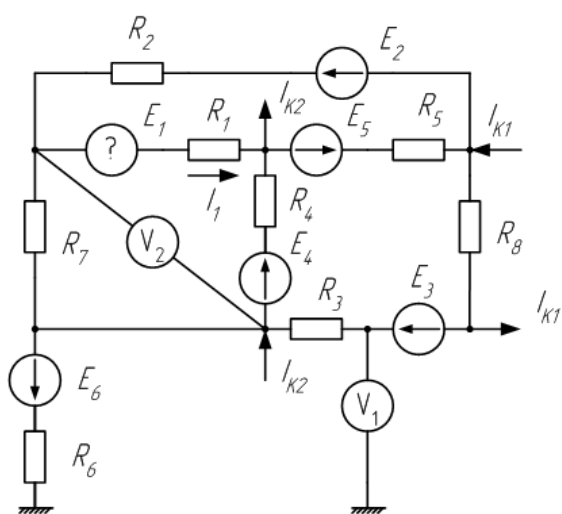
2



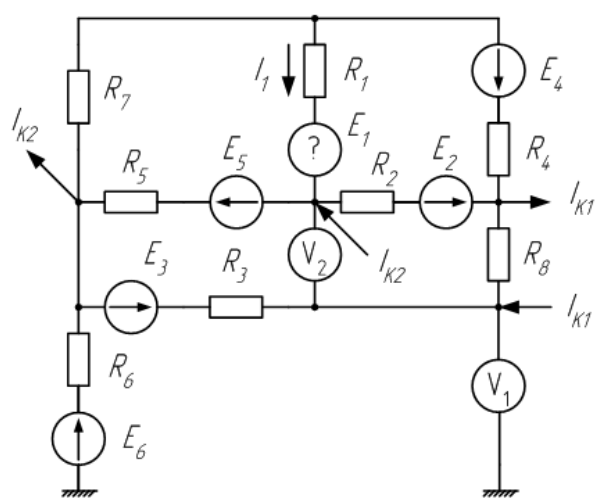
3



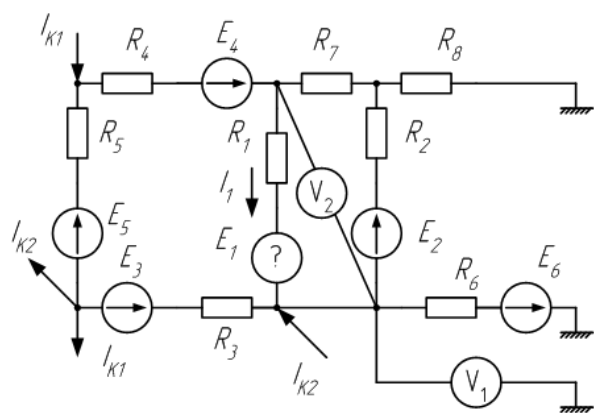
4



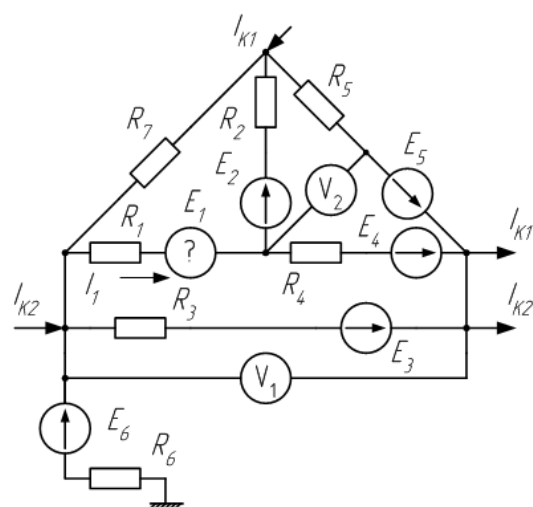
5



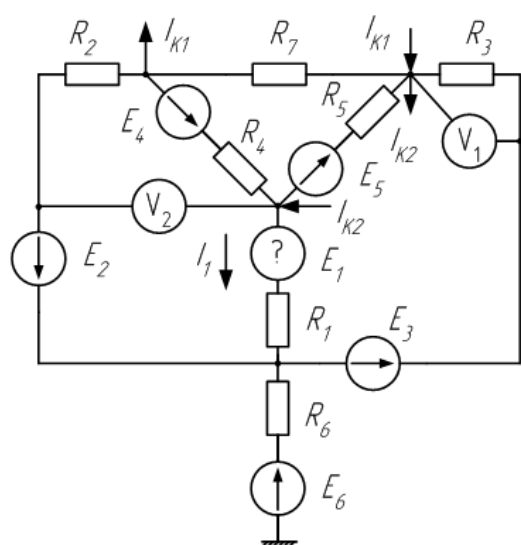
6



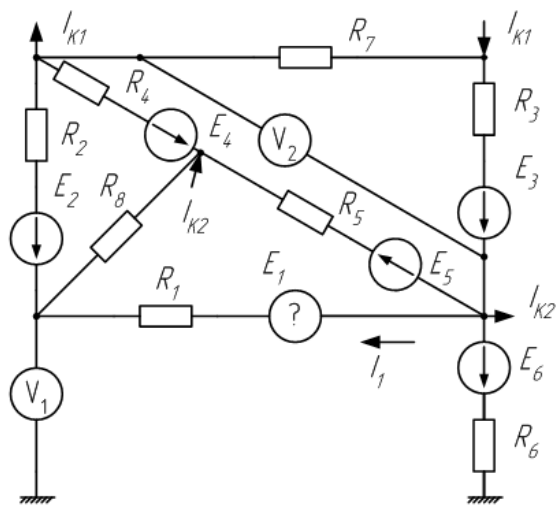
7



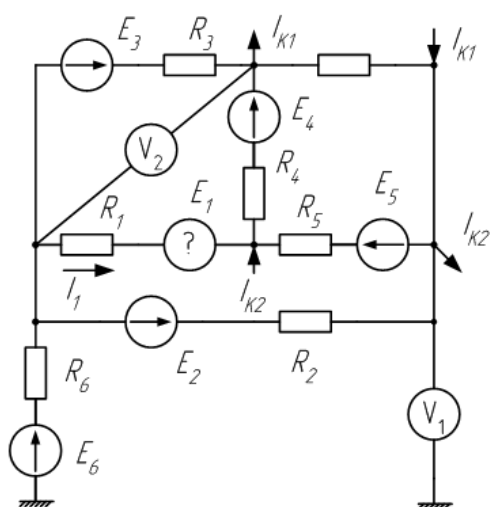
8



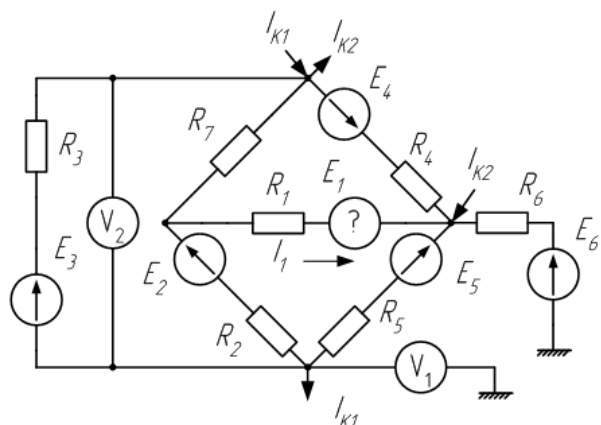
9



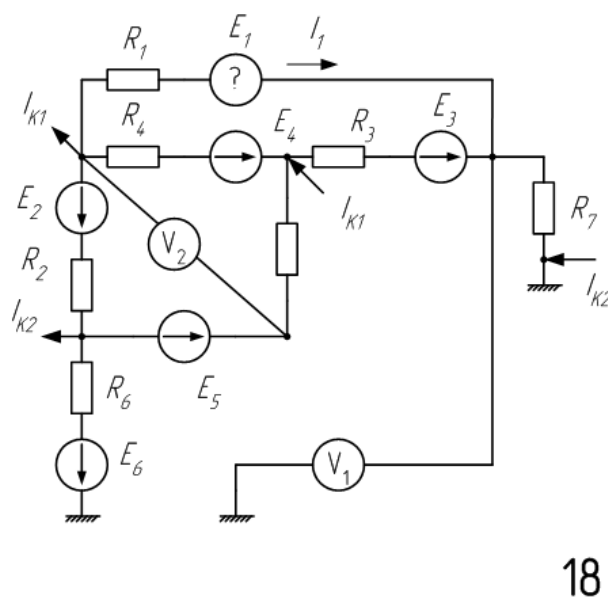
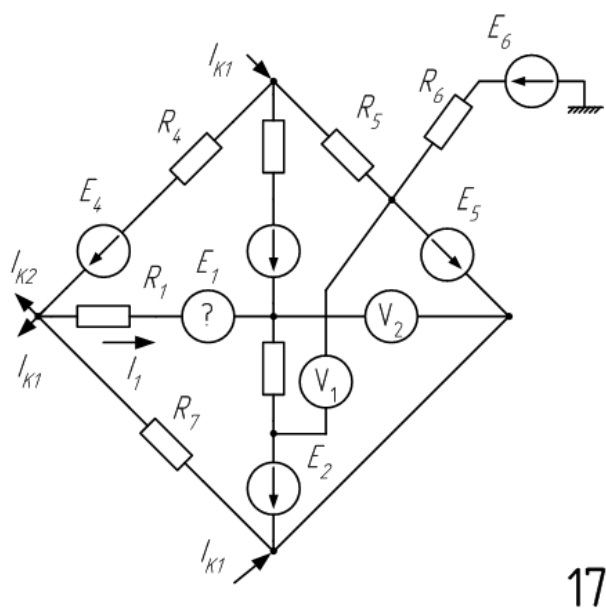
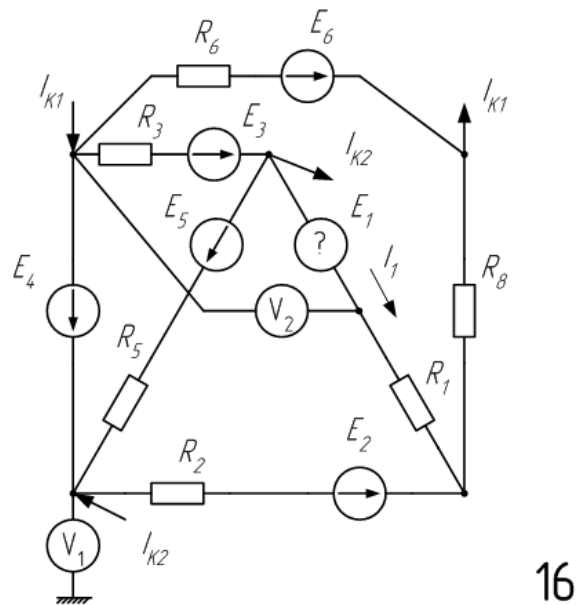
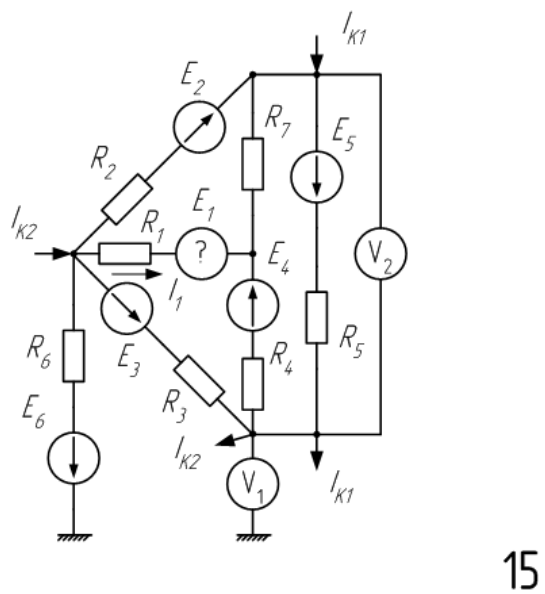
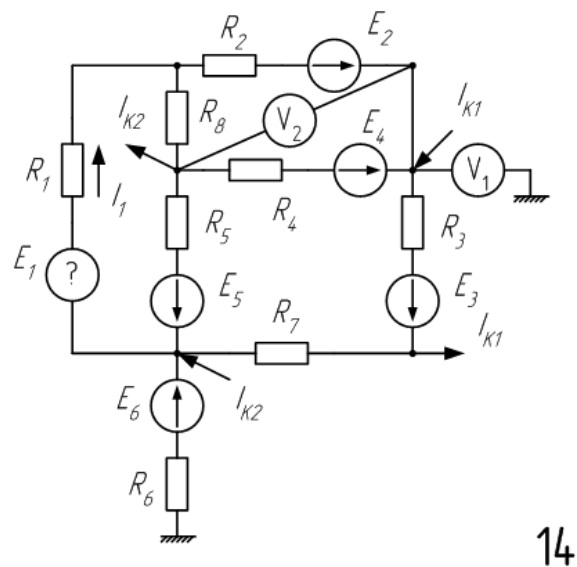
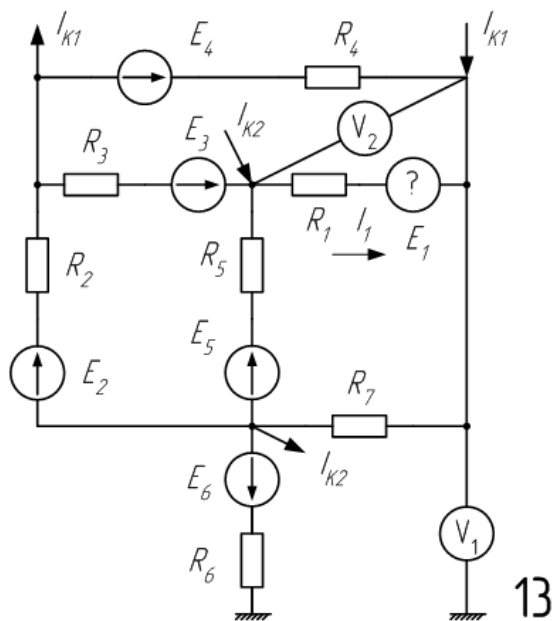
10

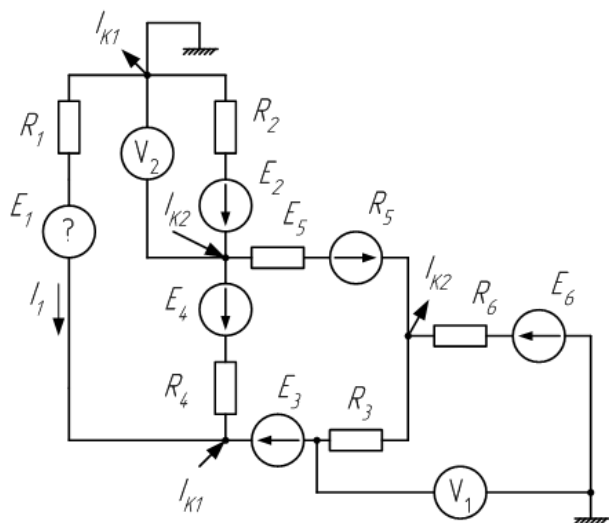


11

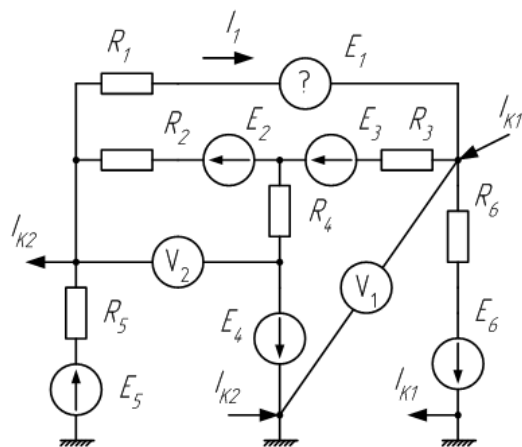


12

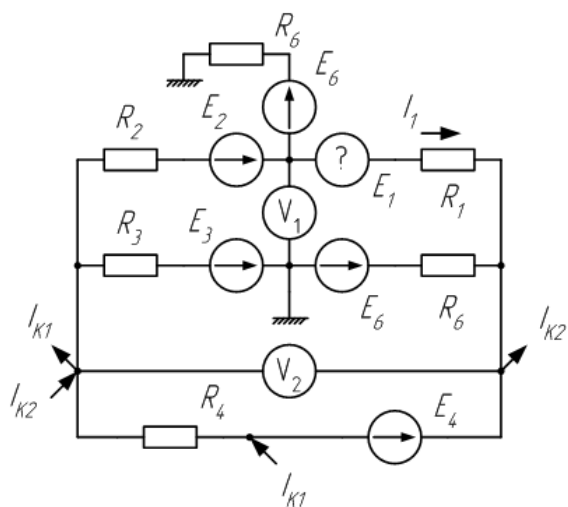




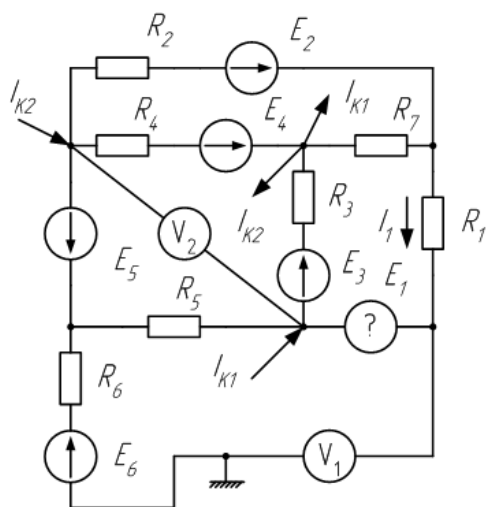
19



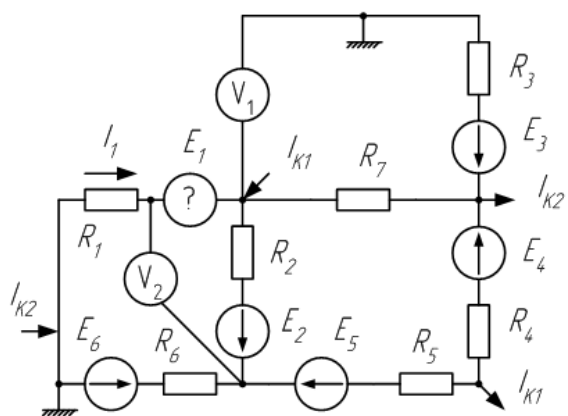
20



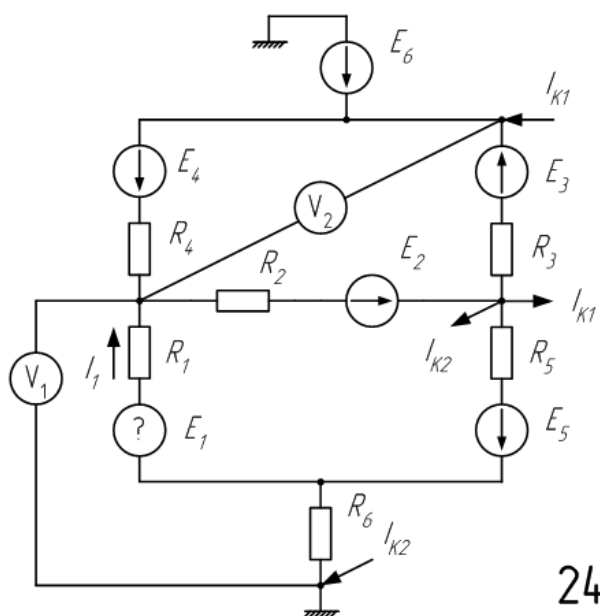
21



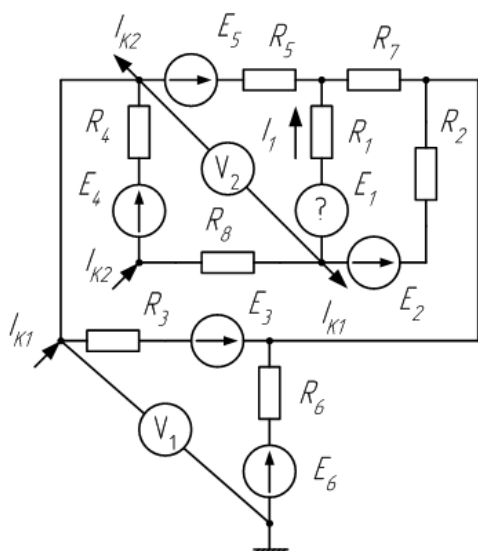
22



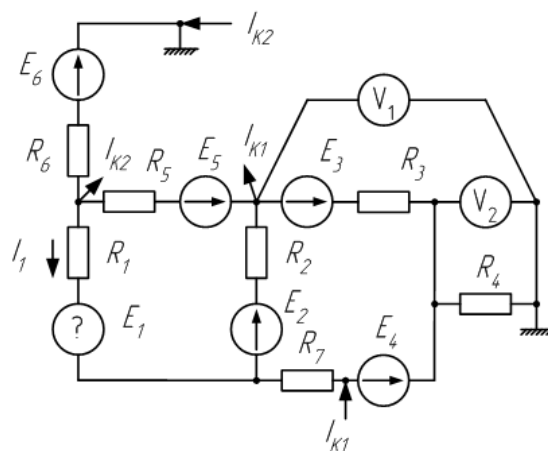
23



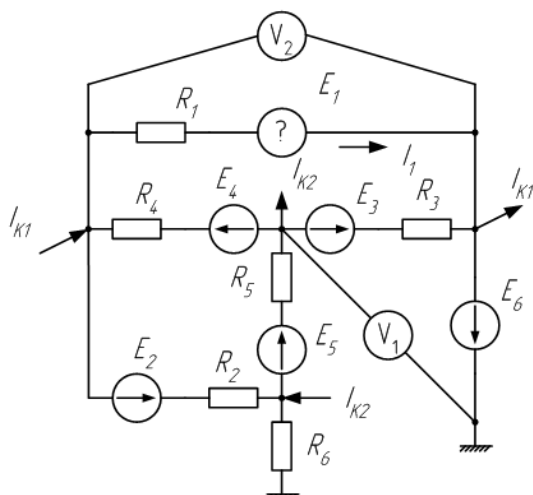
24



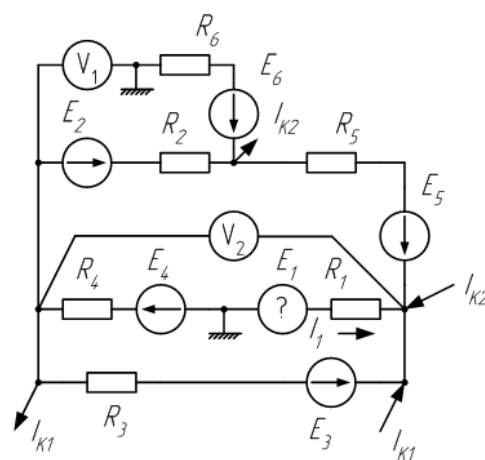
25



26



27



28

Рисунок 2

Номер варианта определяющего параметры элементов схем, указываются преподавателем.

Задание 2.1

Для заданной электрической схемы, изображенной на рис. 3, требуются:

1. На основе законов Кирхгофа в общем виде составить систему независимых уравнений для расчетов токов в ветвях цепи, записать её в двух формах:

а) дифференциальной;

б) символической.

В случае б) должны быть определены величины токов в ветвях схемы.

2. Методом узловых потенциалов определить токи в ветвях, используя возможные упрощения схемы.

3. Составить и рассчитать баланс активных и реактивных мощностей.

4. Определить показания приборов и на одном графике построить кривые мгновенных величин тока и напряжения, подведенных к ваттметру.

5. Для исходной схемы построить совмещенную векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму напряжений.

6. Предполагая, что между катушками индуктивности имеется магнитная связь, в символическом виде составить систему расчетных уравнений и определить токи в ветвях схемы.

Номер варианта указывается преподавателем. Параметры схем выбираются в соответствии с таблицей 3.

Таблица 3

№ вар.	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
E_1 , В	100	120	200	220	240	300
E_2 , В	120	100	220	200	300	240
α , град						
А	-30	60	45	90	-30	75
В	45	90	-60	30	45	30
R_1 , Ом	4	6	5	8	10	12

Продолжение таблицы 3

1	2	3	4	5	6	7
L_1 , мГн	20	30	40	50	60	10
C_1 , мкФ	200	300	150	400	250	350
R_2 , Ом	8	6	4	5	10	12
L_2 , мГн	30	40	60	50	20	10
C_2 , мкФ	250	300	200	100	150	250
R_3 , Ом	10	8	5	2	4	6
L_3 , мГн	15	20	30	45	60	50
C_3 , мкФ	400	200	300	100	500	600
f , Гц						
А	60	50	100	300	500	700
В	50	60	200	400	600	800
к.св.	0,1	0,3	0,5	0,6	0,7	0,8

Угол α – это угол, на который вектор ЭДС E_1 опережает вектор E_2 .

Задание 2.2

Исследуемая схема выбирается в соответствии с графом, изображенным на рис. 4. Графы и типы элементов выбираются из таблицы по заданному преподавателем варианту задания. Номер графа соответствует номеру группы на потоке. Элементы ветвей даны в таблице 4.

Параметры элементов имеют следующие значения:

$$R_1 = (m + n)10^3, \text{ Ом}$$

$$R_2 = (n + 2m)10^3, \text{ Ом}$$

$$R_3 = n \cdot 10^3, \text{ Ом}$$

$$R_4 = m \cdot 10^4, \text{ Ом}$$

$$R_1 = 2(n + m)10^3, \text{ Ом}$$

$$L_1 = 10(m/n), \text{ мГн}$$

$$L_2 = 10(n/(n + m), \text{ мГн}$$

$$L_3 = 20 - (m/n + m), \text{ мГн}$$

$$L_4 = 5(3n/(m + 5), \text{ мГн}$$

$$C_1 = n \cdot m10^2, \text{ мкФ}$$

$$C_2 = 0.1m, \text{ мкФ}$$

$$C_3 = n^2m^2, \text{ нФ}$$

$$C_4 = n \cdot m10^3, \text{ мкФ}$$

где n соответствует номеру, под которым записана фамилия студента в журнале группы (или номеру варианта), а m соответствует номеру группы на факультете. В нулевую и в десятую ветви схемы включены по одному из

источников энергии:

$$e(t) = 100\sqrt{2} (n+m) \cos(\omega t + \pi(n+10m)^\circ/180), \text{ В}$$

$$\text{или } i(t) = n\sqrt{2} \cos(\omega t + 2\pi(n+m)^\circ/180), \text{ А}$$

Если источник n – четное число, то в нулевой ветви включен источник ЭДС, а в 10 – источник тока, и наоборот.

Необходимо:

1. На основе законов Кирхгофа составить систему независимых уравнений для расчетов токов в ветвях цепи и записать её в двух формах:

а) дифференциальной;

б) символической.

2. Определить комплексы действующих значений токов во всех ветвях, воспользовавшись следующими методами расчета электрических цепей:

а) методом узловых потенциалов;

б) методом контурных токов.

3. Составить баланс активных и реактивных мощностей.

4. Найти входное сопротивление и входную проводимость цепи относительно источника, находящегося в нулевой ветви.

Для п.п. 1 – 4 взять $\omega = 2\pi 10^5$ рад/с.

5. Получить выражение для передаточной функции рассматриваемой цепи по напряжению относительно ветвей «0» и «10».

Построить график частотной зависимости передаточной функции (АХЧ) цепи. Рассчитать его не менее, чем на 10 частотах, включая 0 и ∞ .

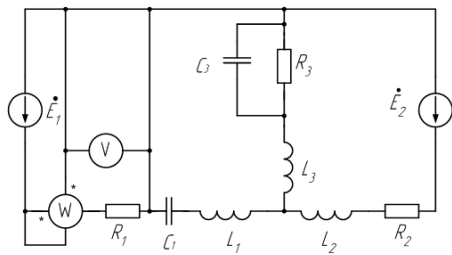
6. Построить топографическую диаграмму, совмещенную с векторной диаграммой токов. При этом потенциал точки, где сходятся 4 ветви, принять равным нулю.

7. Использовать данные расчета п.2, записать выражение для тока i_5 и построить зависимость указанной величины от ωt .

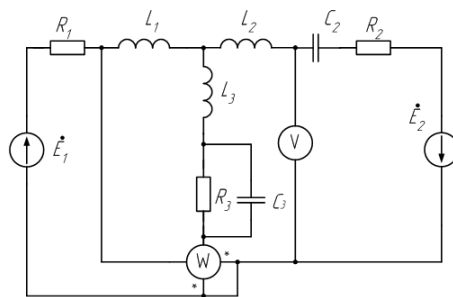
Таблица 4

Вариант	Элементы ветвей									Рис.2
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	C1	L1	L2	C2	R5	C3	R2	R2	R3	А
2	L3	L2	L2	C1	R4	C2	R3	R4	R1	А
3	L2	L2	C2	R4	C2	C3	R1	R2	R1	А
4	R2	L1	C1	L2	C2	L3	R1	R4	R1	А
5	L1	L2	R5	R1	C2	C2	L3	R2	R3	А
6	R3	L1	R5	C1	C2	L2	R1	L3	R3	А
7	L2	C1	R5	L2	C2	L3	R3	C3	R1	Б
8	C2	L1	R2	L2	R4	C2	R3	L3	R3	Б
9	C1	L2	C3	R1	R2	L2	C2	R2	R3	Б
10	C2	L2	C2	R2	C3	L3	R1	R4	L2	Б
11	R2	C1	R5	C2	L1	C3	R3	R2	L2	Б
12	R3	C2	L1	C1	R5	L2	L3	R4	R1	Б
13	R3	C2	R5	C2	L1	L2	R3	R2	L3	В
14	R5	C1	C2	L2	R3	C3	R2	L2	R3	В
15	R2	L2	C2	L2	L3	C2	R2	C3	R1	В
16	R2	L2	R1	C1	L2	C2	C3	R2	R2	В
17	R3	R1	L2	C2	L2	R2	C2	C3	L3	В
18	R3	L1	R2	C2	L2	C2	C3	R4	R5	В
19	C3	R1	R3	L1	R5	L2	R3	C2	L3	Г
20	L1	R3	L2	R1	R5	C1	R3	C2	C3	Г
21	R4	C1	R3	L3	C2	L2	R5	L1	C3	Г
22	R1	C3	L1	R2	C2	L2	L3	C2	R5	Г
23	C1	R1	C2	L1	C3	L2	R4	C1	L1	Г
24	R4	R3	R2	C1	L3	L2	C2	L1	C3	Г
25	R2	C2	R1	C1	L3	R4	L2	C2	L1	Д
26	R5	C1	R3	L1	L3	C2	C3	L1	R4	Д
27	R4	C3	R2	C1	L1	L2	C2	L2	L3	Д

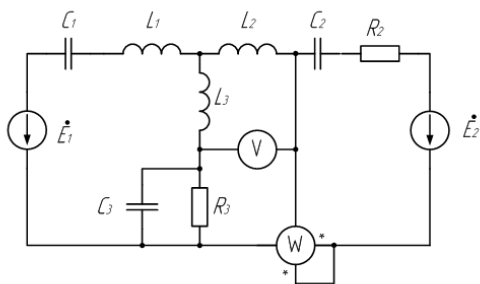
28	R3	C2	L1	L2	C3	L2	R4	C1	R5	Д
29	C1	R5	L2	C3	L2	R4	R1	C2	L1	Д
30	L1	R1	C1	R5	R3	C2	L3	R2	R1	Д



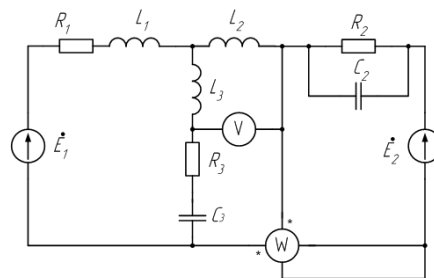
1



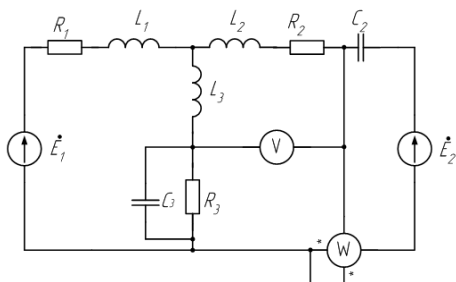
2



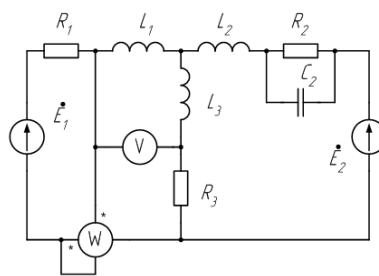
3



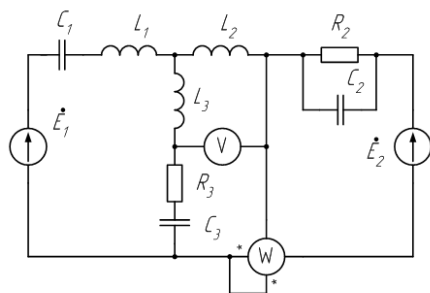
4



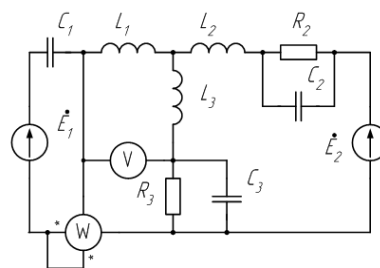
5



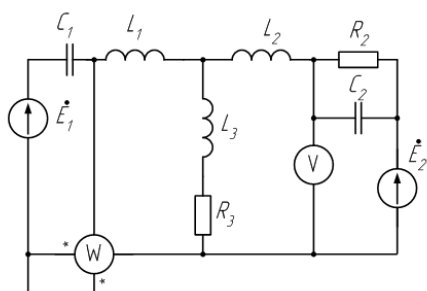
6



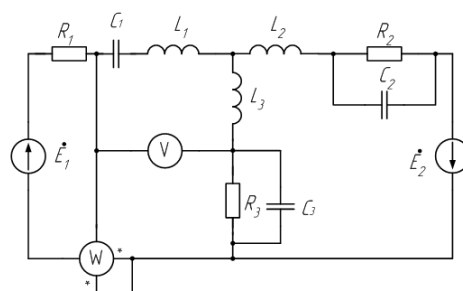
7



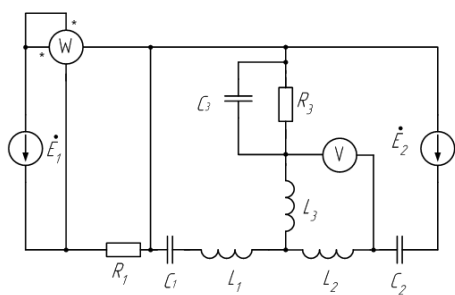
8



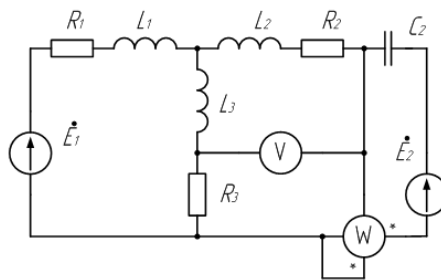
9



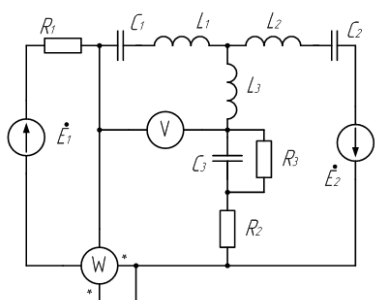
10



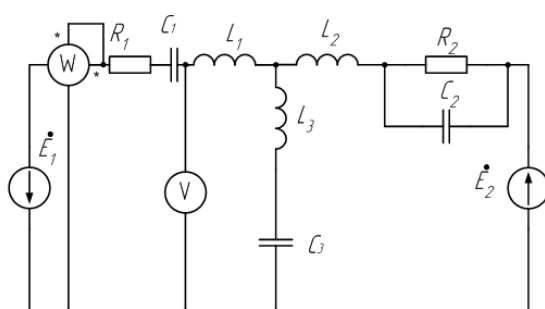
11



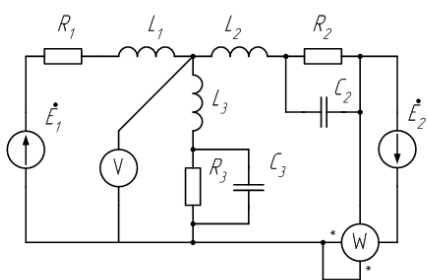
12



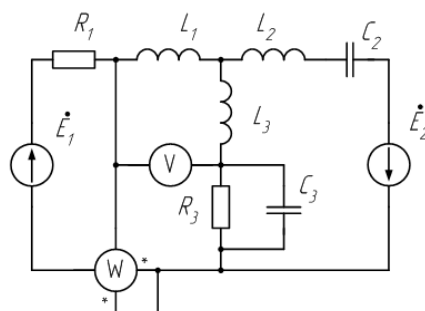
13



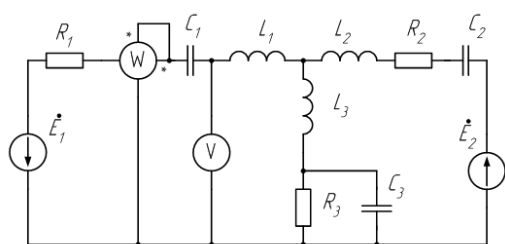
14



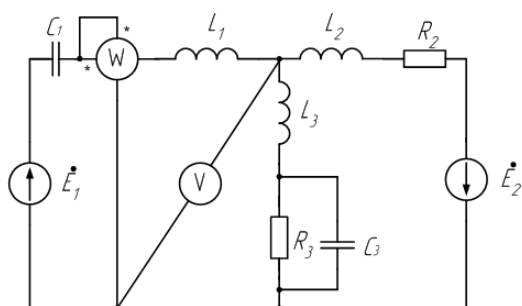
15



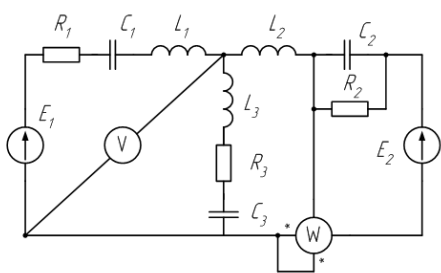
16



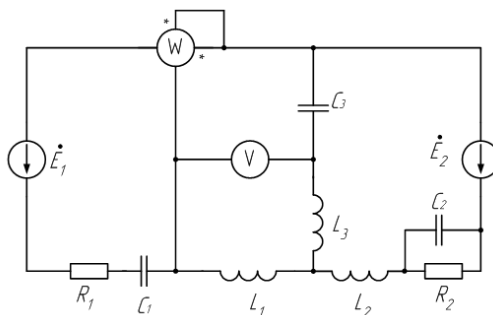
17



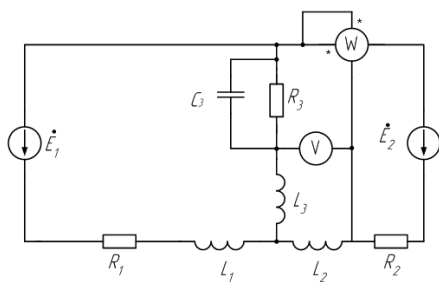
18



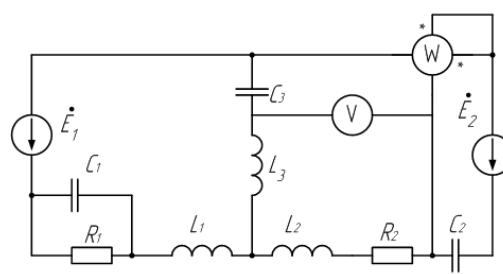
19



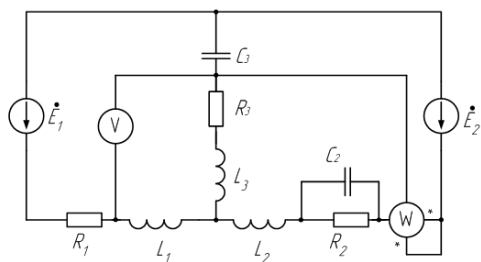
20



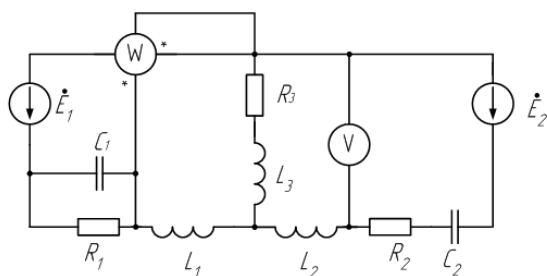
21



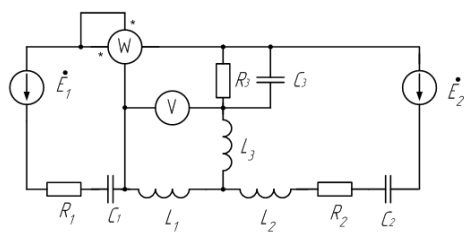
22



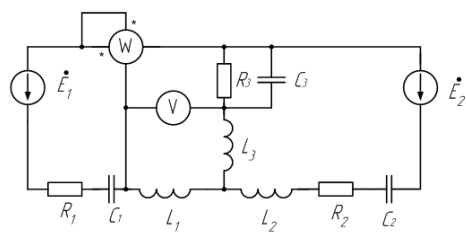
23



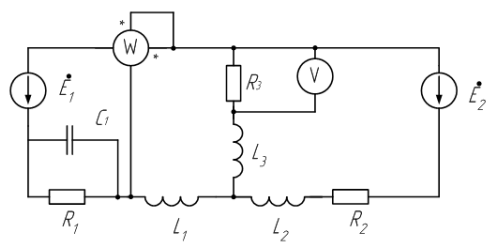
24



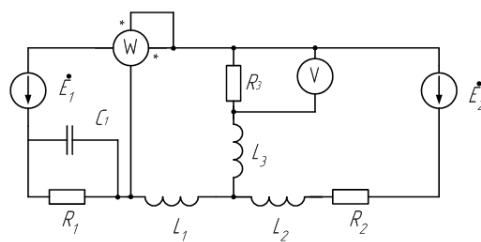
25



26



27



28

Рисунок 3

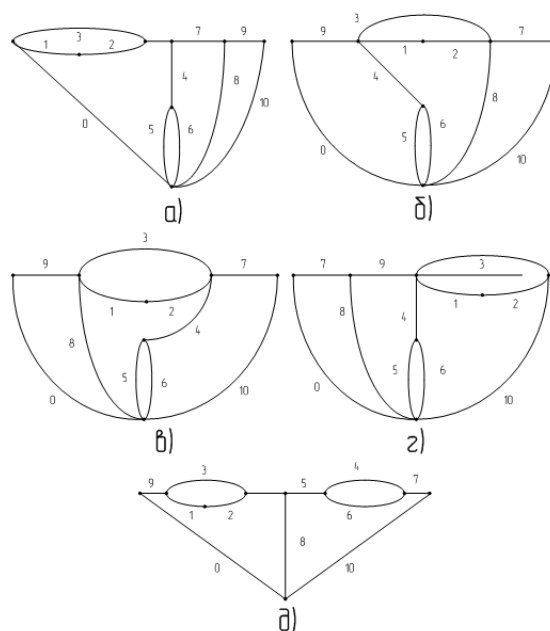


Рисунок 4

2. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ К НАПИСАНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Оформление РГР: РГР выполняется на листах стандартных размеров формата А4, заполненных с одной стороны. Листы нумеруются и оставляются поля: слева для подшивки – 30 мм, справа – 15 мм, снизу и сверху – 20 мм. При оформлении отчета строго соблюдаются ГОСТ и ЕСКД. Титульный лист оформляется по прилагаемому образцу (приложение).

Первые листы содержат текст задания, схемы и исходные данные расчетного варианта. Расчеты и необходимые пояснения выполняются на остальных листах отчета. В конце текста прилагаются необходимые распечатки, отражающие машинный расчет электрических схем.

Структура РГР должна соответствовать пунктам задания. Отдельные части должны иметь заголовки, комментарии и выводы. Записи и формулировки должны быть точными и ясными. При численных значениях должны быть обязательно указаны единицы измерения. У графиков и диаграмм по осям координат должны быть указаны единицы измерения. В конце должен быть приведен список используемых источников.

3. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ, ПРИМЕРНЫЙ КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ

3.1. Последовательность расчета токов в цепи законами Кирхгофа

1. Выбрать произвольные положительные направления токов ветвей и обозначить их на схеме.
2. Составить $(y - I)$ уравнений по первому закону Кирхгофа, где y – число узлов схемы. Следует учесть и токи источников тока:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (1)$$

Если ток подходит к узлу, то его значение берется со знаком «+»; если отходит от узла – со знаком «-».

3. Выбрать произвольные направления обхода контуров. По второму закону Кирхгофа составить $(\nu - \nu_{um}) - (y - I)$ уравнений для независимых контуров (ν – число ветвей, ν_{um} – число ветвей, содержащих источники тока):

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^n E_i \quad (2)$$

4. Объединить и совместно решить систему уравнений (1) и (2), находя токи в ветвях схемы. Если в результате решения этих уравнений получится отрицательное значение какого-либо тока, то действительное его направление противоположно принятому за положительное.

При составлении уравнений законами Кирхгофа для цепей синусоидального тока необходимо помнить о том, что законы Кирхгофа справедливы для мгновенных величин или комплексов:

$$a) \sum_{i=1}^n i = 0 \quad (3)$$

$$б) \sum_{i=1}^m I_1 R_1 + \sum_{i=1}^n L \frac{di}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_1} \int i dt = \sum_{i=1}^n e \quad (4)$$

где соотношения между мгновенными напряжениями на индуктивности, емкости и активном сопротивлении:

$$u_L = L \cdot di/dt, \quad u_C = 1/C \int i dt, \quad u_R = i \cdot R.$$

Для написания уравнений в комплексной или символической форме записи необходимо в системе уравнений (3 – 4) провести следующие замены:

$$e \rightarrow E_m, \quad i \rightarrow I_i, \quad u_R \rightarrow I_i, \quad u_L \rightarrow j\omega L \cdot I_m, \quad u_C \rightarrow (j/\omega C) \cdot I_m.$$

После перехода к символической форме решить совместно уравнения, записанные по первому и второму законам Кирхгофа.

3.2. Последовательность расчетов токов методом узловых потенциалов

1. Обозначить узлы в схеме, потенциал одного из узлов принять равным 0.
2. Для оставшихся $y - 1$ узлов записать следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} G_{11}\varphi_1 - G_{12}\varphi_2 - G_{13}\varphi_3 - \dots - \varphi_1 G_{(y-1)} &= J_{11} \\ -G_{21}\varphi_1 + G_{22}\varphi_2 - G_{23}\varphi_3 - \dots - G_{2(y-1)} &= J_{22} \end{aligned} \quad (5)$$

.....

$$-G_{(y-1)1} \cdot \varphi_1 - G_{(y-1)2} \cdot \varphi_2 - G_{(y-1)3} \cdot \varphi_3 - \dots + \varphi_y \cdot G_{(y-1)(y-1)} = J_{(y-1)(y-1)}$$

где G_{pp} с двумя одинаковыми индексами представляет собой суммарную проводимость ветвей, присоединенных к узлу p и называется собственной узловой проводимостью, проводимость $G_{ip} = G_{pj}$ с двумя различными индексами равна сумме проводимости ветвей, соединяющих между собой рассматриваемые узлы i и p , и называется общей узловой проводимостью этих узлов.

$$J_{ii} = \sum_{i=1}^n J_i + \sum_{i=1}^n E_i G_i \quad (6)$$

где J_{ii} – узловый ток, состоящий из J_i – токов источников тока, присоединенных к i -му узлу и токов $E_i G_i$ ветвей с источниками ЭДС, присоединенных к узлу.

Алгебраическое суммирование выполняется с учетом знаков. Знак «+» ставится в том случае, если ток источника тока и ЭДС источника ЭДС направлены к узлу. Если в схеме имеется ветвь с идеальным источником ЭДС, то разность потенциалов между зажимами источника ЭДС известна и равна ЭДС. Если принять один из потенциалов равным 0, второй определяется как $\varphi = \pm E$, и число уравнений сократится до $(y - 2)$.

3. Решить систему (5 – 6) уравнений относительно потенциалов узлов схемы.

4. Рассчитать токи в ветвях, пользуясь законом Ома для участка цепи:

$$I_i = \frac{(\varphi_i - \varphi_k) \pm \sum E_i}{R_i} \quad (7)$$

где φ_i – потенциал узла, от которого течет ток I_i ; φ_k – потенциал узла, к которому подтекает I_i ; E_i – величина источника ЭДС i -й ветви (берется со знаком «+», если направление ЭДС E_i совпадают с током I_i , и «-», если оно противоположно); R_i – сопротивление i -й ветви.

Для цепи синусоидального тока:

– заменить мгновенные значения ЭДС и токов на комплексные, ввести комплексную проводимость $Y = g \pm jb$, где g – активная часть, b – реактивная часть проводимости;

– для каждого из $(y - 1)$ узлов составить уравнения:

$$\underline{Y}_{11}\underline{\varphi}_1 - \underline{Y}_{12}\underline{\varphi}_2 - \dots - \underline{Y}_{1(y-1)}\underline{\varphi}_{(y-1)} = \underline{I}_{11} \quad (8)$$

$$\underline{Y}_{21}\underline{\varphi}_1 - \underline{Y}_{22}\underline{\varphi}_2 - \dots - \underline{Y}_{2(y-1)}\underline{\varphi}_{(y-1)} = \underline{I}_{22}$$

.....

$$\underline{Y}_{(y-1)1}\underline{\varphi}_1 - \underline{Y}_{(y-1)2}\underline{\varphi}_2 - \dots - \underline{Y}_{(y-1)(y-1)}\underline{\varphi}_{(y-1)} = \underline{I}_{(y-1)(y-1)},$$

где $\underline{\varphi}_i$ – потенциал соответствующего узла, $\underline{Y}_{ij}$ – комплексная проводимость i -го узла, $\underline{Y}_{ji}$ – сумма проводимостей ветвей, соединяющих узлы i и j . Далее решение системы производится аналогично цепи постоянного тока.

3.3. Последовательность расчета токов в цепи методом контурных токов

При расчете методом контурных токов полагают, что в каждом независимом контуре схемы течет свой контурный ток. Число уравнений, которые необходимо было бы составить для схемы по второму закону Кирхгофа, то есть $n = b - b_{um}$.

Последовательность расчета:

- выбрать взаимно независимые контуры;
- выбрать направления контурных токов (желательно для всех токов одинаковые);
- записать следующую систему уравнений для n контуров:

$$\begin{aligned} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} + \dots + I_{nn}R_{1n} &= E_{11} \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} - I_{33}R_{23} + \dots + I_{nn}R_{2n} &= E_{22} \\ I_{11}R_{31} + I_{22}R_{32} + I_{33}R_{33} + \dots + I_{nn}R_{3n} &= E_{33} \end{aligned} \tag{9}$$

.....

$$I_{11}R_{n1} + I_{22}R_{n2} + I_{33}R_{n3} + \dots + I_{nn}R_{nn} = E_{nn}$$

где R_{11} – собственные сопротивления контуров, равные сумме сопротивлений, входящих в i -й контур, R_{ji} – сопротивление смежных ветвей между j и i контурами. E_{ii} – контурная ЭДС 1-го контура, равная алгебраической сумме ЭДС, входящих в i -й контур. В неё со знаком «+» входят те ЭДС, напряжение которых совпадает с направлением контурных токов. Если направления контурных токов выбраны одинаково, то сопротивления смежных ветвей R_{ji} входят в (9) со знаком «–», т.к. направления контурных токов I_{ii} и I_{jj} в этой ветви противоположны. Если направления токов в смежных ветвях одинаковы, то сопротивление R_{ji} входит в систему (9) со знаком «+»;

– решить систему (9) относительно контурных токов. Рассчитать токи в ветвях как $I_i = \pm I_{ii}$ для ветвей, по которым протекает один контурный ток и $I_i = \pm I_{ii} \pm I_{jj}$ для токов в ветвях, где встречаются два контурных тока, причем слагаемое берется со знаком «+», если направление тока в ветви и контурного тока совпадают, и со знаком «–», если они противоположны. Составлению уравнений по методу контурных токов для схем с источниками тока присущи некоторые особенности. Ток каждого из источников тока полагают входящим в контур, замыкающийся по любым ветвям схемы. Падение напряжения, вызываемое током такого источника на каждом из сопротивлений контура учитывается при записи левой части уравнений.

Уравнения составляются лишь для контуров с неизвестными токами. Например, для схемы, изображенной на рисунке 5, контурный ток $I_{11} = J_k$ течет согласно направлению обхода по часовой стрелке по ветвям 1 и 2.

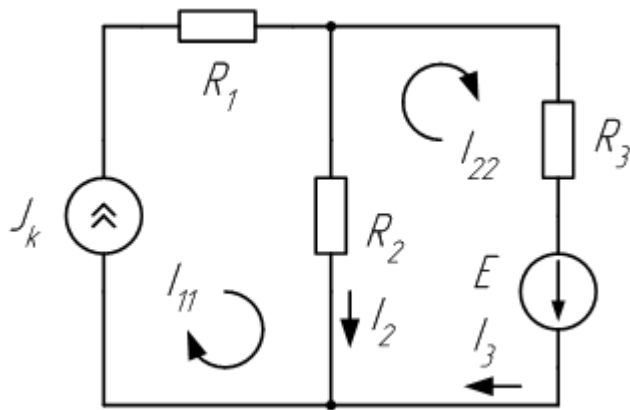


Рисунок 5

По методу контурных токов необходимо составить уравнение:

$$-J_k R_{21} + I_{22} R_{22} = E_{22}, \text{ отсюда } I_{22} = \frac{E_{22} + J_k R_{21}}{R_{22}}.$$

Ток $I_2 = J_k - I_{22}$, $I_3 = I_{22}$.

Для цепи синусоидального тока:

– заменить мгновенные значения ЭДС, токов на комплексные, ввести комплексные сопротивления $\underline{Z}_{n1}\underline{I}_{jj} + \underline{Z}_{ij}\underline{I}_{22} + \underline{Z}_{in}\underline{I}_{nn} = \underline{E}_{11} = R \pm jX$ с действительной частью R и мнимой частью X . При наличии в схеме источника тока либо преобразовать его в источник ЭДС, либо добавить к выбранным контурам еще один контур с ветвью, содержащей источник тока, контурный ток этого контура известен и равен току источника тока;

– для каждого независимого контура составить контурные уравнения:

$$\underline{Z}_{11}\underline{I}_{11} + \underline{Z}_{12}\underline{I}_{22} + \underline{Z}_{1n}\underline{I}_{nn} = \underline{E}_{11}$$

$$\underline{Z}_{21}\underline{I}_{11} + \underline{Z}_{22}\underline{I}_{22} + \underline{Z}_{2n}\underline{I}_{nn} = \underline{E}_{22}$$

.....

$$\underline{Z}_{n1}\underline{I}_{11} + \underline{Z}_{n2}\underline{I}_{22} + \underline{Z}_{nn}\underline{I}_{nn} = \underline{E}_{nn}$$

где $\underline{I}_{ii}$ – контурный ток i -го контура; $\underline{Z}_{ii}$ – собственное сопротивление i -го контура, равное сумме сопротивлений ветвей, входящих в этот контур, $\underline{Z}_{ij}$ – сопротивление ветви, входящей одновременно в i и j контуры, взятое со знаком «+», если направления контурных токов $\underline{I}_{ii}$ и $\underline{I}_{jj}$ вдоль этой ветви совпадают, и со знаком «–» – если они противоположны, $\underline{E}_{11}$ – контурная ЭДС i -го контура, равная алгебраической сумме ЭДС, входящих в этот контур и взятых со знаком «+», если направления этих ЭДС совпадают с направлением тока $\underline{I}_{jj}$;

– решить систему (10) и найти контурные токи аналогично постоянному току.

3.4. Порядок расчета в ветви методом эквивалентного генератора

В заданной схеме требуется найти ток в одной её ветви. Необходимо выделить ветвь, в которой течет искомый ток, а остальную схему представить в виде активного двухполюсника. По отношению к выделенной ветви двухполюсник можно заменить эквивалентным генератором. ЭДС эквивалентного генератора равна напряжению холостого хода на зажимах, а его внутреннее сопротивление равно входному сопротивлению двухполюсника.

Порядок расчета:

– заключить всю схему в прямоугольник, выделив из неё одну ветвь ab , в которой требуется найти ток I (рис. 6). Ток в искомой ветви:

$$I = \frac{U_{abxx} + E}{R_{BX} + R} ; \quad (11)$$

где U_{abxx} – напряжение холостого хода, равное эквивалентной ЭДС двухполюсника, R_{BX} – входное сопротивление двухполюсника относительно зажимов ab , E и R – соответственно ЭДС и сопротивление выделенной ветви;

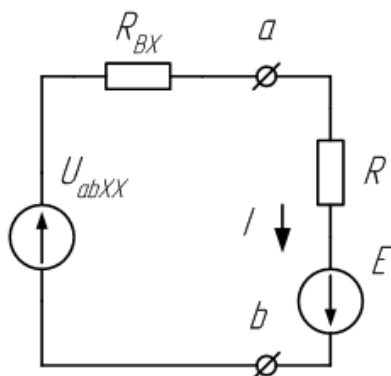


Рисунок 6

– для нахождения U_{abxx} разомкнутой ветви воспользоваться любым из ранее рассмотренных методов расчета;

– определить входное сопротивление R_{BX} по отношению к зажимам ab при закороченных источниках ЭДС (т.к. $R_{вн}$ идеального источника тока равно 0) и разомкнутых источников тока (т.к. $R_{вн}$ идеального источника тока равно ∞);

– определить ток в ветви I по формуле (11).

Перед ЭДС в (8) знак «+» ставится в том случае, если её направление совпадает с направлением тока в ветви, и «–», если оно противоположно.

3.5. Составление энергетического баланса в электрической схеме

Баланс в электрической схеме составляется на основе закона сохранения энергии. При составлении энергетического баланса необходимо:

– рассчитать выделенную источниками энергию в единицу времени по формуле:

$$P_1 = \sum_{i=1}^n E_i I_i + \sum_{i=1}^n I_i U_i \quad ; \quad (12)$$

где первое слагаемое представляет собой мощность источников ЭДС, а второе – мощность источников тока. Если направление тока I , протекающего через источник ЭДС E совпадает с направлением ЭДС, то источник ЭДС доставляет в цепь в единицу времени энергию, равную произведению $E \cdot I$ и входит с положительным знаком в уравнение энергетического баланса. Если направление тока I не совпадает с направлением ЭДС, то перед произведением $E \cdot I$ ставим знак «–». Энергия, доставленная источниками тока J рассчитывается как произведение $J \cdot U_{ав}$, где $U_{ав}$ – напряжение на источнике тока. Считается, что к узлу (а) ток J_k источника тока подтекает, а от узла (в) он оттекает;

– рассчитать выделившуюся на сопротивлениях мощность по формуле:

$$P_2 = \sum_{i=1}^n I_i^2 R_i \quad ; \quad (13)$$

– проверить уравнение энергетического баланса, приравняв и потребляемую мощность $P_1 = P_2$.

Энергетический баланс в цепи синусоидального тока составляется также на основании закона сохранения энергии и говорит о том, что выработанная мощность равна потребляемой.

$$\underline{S} = \sum \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ \quad , \quad (14)$$

где $\underline{U}$ – комплексная разность потенциалов на зажимах источников, $\underline{I}^*$ – сопряженный комплекс тока, протекающий через источник.

Активная мощность P есть действительная часть (R_e), а реактивная мощность Q – мнимая часть (I_m) мощности источника. Потребленная мощность $\underline{S}$ выражается как $\underline{S} = \sum I^2 (R + jX)$, где I – действующее значение тока.

3.6. Показания приборов

Ваттметр, изображенный на рис. 7, измеряет активную мощность участка цепи, на котором он включен. Он содержит две катушки: подвижную и неподвижную.

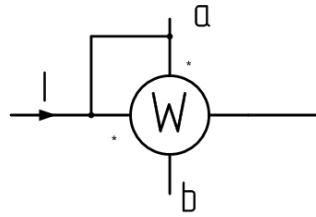


Рисунок 7

Подвижная катушка выполняется из тонкого провода. Её включают параллельно участку цепи подобно вольтметру. Неподвижная катушка, выполненная из толстого провода, имеет сопротивление. Она включается в цепь последовательно. На концах одноименных зажимов (их соединяют) принято ставить звездочки или точки. Вращающий момент ваттметра, а следовательно, и его показания пропорциональны скалярному произведению напряжения U_{ab} параллельной обмотки на ток I , протекающий по последовательной обмотке. Напряжение на параллельной обмотке берется равным разности потенциалов между концом её, обозначенным звездочкой, и концом, не обозначенным звездочкой. Ток I входит в конец последовательной обмотки, обозначенной звездочкой. $P = U_{ab} I \cos(\angle U_{ab}, I)$. Если известны комплексы тока I и напряжения U_{ab} , то показания вольтметра можно определить как $P = \operatorname{Re}[U_{ab} I^*]$, где I^* – сопряженный комплекс тока $I^* = I e^{i\varphi}$, если прямой комплекс тока $I = I e^{-i\varphi}$.

3.7. Векторная диаграмма токов и топографическая диаграмма

Для построения векторной диаграммы токов необходимо все токи схемы представить векторами на комплексной плоскости, как показано на рис. 8.

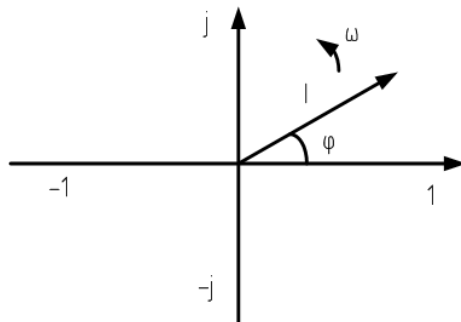


Рисунок 8

Длина вектора I соответствует модулю комплексной величины, а угол φ откладывается от оси действительных чисел в сторону вращения вектора, т.е. против часовой стрелки (рис. 8). После изображения всех видов токов необходимо проверить графически выполнение первого закона Кирхгофа на комплексной плоскости.

Построим топографическую диаграмму для схемы, изображенной на рис.9. Направим вектор тока I , как показано на рисунке. Примем потенциал точки g равным нулю ($\varphi_g = 0$). Определим потенциалы остальных точек.

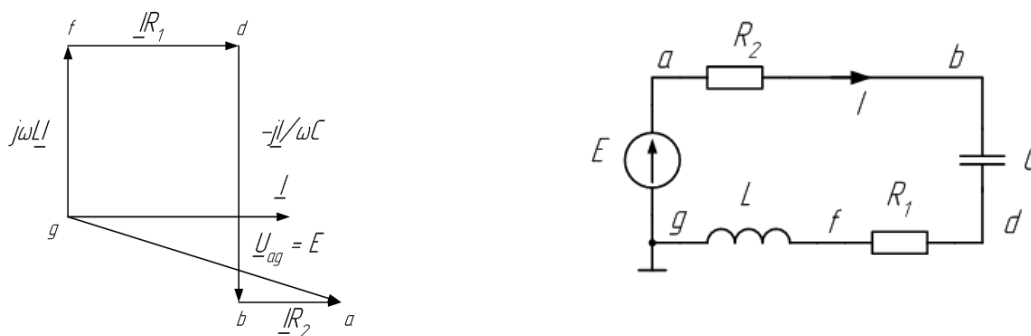


Рисунок 9

Будем обходить схему, начиная от точки g навстречу положительному направлению тока. Потенциал точки f больше потенциала точки g на величину падения напряжения на катушке индуктивности: $\varphi_f = \varphi_g + j\omega LI$. Конец его обозначают буквой f , т.к. он определяет потенциал этой точки. Потенциал точки d выше потенциала точки f на величину падения напряжения на сопротивлении R : $\varphi_d = \varphi_f + R_1 \cdot I$. Отложим от конца вектора gf вектор IR_1 , параллельный току. Конец вектора IR_1 обозначим буквой d . Аналогично находим $\varphi_b = \varphi_d(j/\omega C)I$, и потенциал точки a : $\varphi_a = \varphi_b + IR_2$ (рис. 9).

3.8. Расчет разветвленных цепей при наличии взаимной индуктивности

Расчет разветвленных цепей можно выполнить, составляя уравнения по первому и второму законам Кирхгофа. При составлении уравнения по второму закону Кирхгофа ЭДС взаимной индукции обычно учитывается как соответствующие напряжения на индуктивностях. Знак магнитного комплексного напряжения на элементе k определяется на основании сопоставления направления обхода контура через элемент k и положительного направления тока в элементе s . Если эти направления относительно одноименных выводов одинаковы, то составляющая напряжения $j\omega m_{ks}i_s$ берется со знаком «+». В противном случае со знаком «-». Найти величину и можно, используя соотношение $K = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$, где

L_1, L_2 – индуктивности катушек, M – взаимная индуктивность.

Задание на РГР выдается преподавателем каждому студенту индивидуально. При этом указывается вариант задания. Предлагаемые к решению задачи РГР должны рассматриваться и решаться студентами по мере прочтения лекционного материала и представляться для обсуждения и проверки преподавателю. Успешное выполнение РГР во многом зависит от систематического и планомерного выполнения студентом графика календарного плана его выполнения (табл. 5). При необходимости после представления РГР защищается студентом.

Таблица 5 – сроки представления материалов РГР

Разделы задания	Наименование раздела в задания	Объем в %	Срок представления
	Выдача задания		1 неделя
1	Расчет линейных цепей постоянного тока	50	4 неделя
2	Расчет линейных цепей переменного тока	50	8 неделя
3	Сдача готовой РГР на проверку преподавателю		Не позднее 12 недели
4	Защита работы		14 неделя

4. ПОРЯДОК ЗАЩИТЫ И ОТВЕТСТВЕННОСТЬ СТУДЕНТА ЗА ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТНО – ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Защита осуществляется в форме собеседования по теме работы. РГР считается зачтенной, если студент показал владение материалом работы.

5. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ РАБОТЫ

5.1. Основная литература

1. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник / Л.А. Бессонов. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Гардарики, 1999, – 638 с.
2. Сборник задач по теоретическим основам электротехники: учебное пособие для студентов энергетических и приборостроительных специальностей вузов / под ред. Л.А. Бессонова. – М.: Высшая школа, 2000. – 289 с.
3. Новгородцев, А.В. 30 лекций по теории электрических цепей / А.В. Новгородцев. – СПб.: Политехника, 1996. – 347 с.
4. Зевеке, Г.В. Основы теории цепей/ Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин.– М.: Энергоиздат, 2001.– 528 с.
5. Теоретические основы электротехники / Л.Р. Нейман, К.С. Демирчан, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. Т. 1. – Л.: Энергоиздат, 2003. – 462 с.
6. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники / под редакцией П.А. Ионкина. – М.: Энергоиздат, 1982. – 768 с.

5.2. Дополнительная литература

1. Теоретические основы электротехники – методические указания и контрольные задания / сост. Л.А. Бессонов. – М.: Высшая школа, 2001 (1982). – 128 с.
2. Кузнецов, И.Н. Рефераты, курсовые и дипломные работы: методическое пособие / И.Н. Кузнецов. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2002. – 352 с.

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра физики, электротехники и электроники

Расчетно – графическая работа

По теме _____

Выполнил: _____

Студент _____ (Ф.И.О.)

Группа: _____

Работу принял: _____

Ставрополь. 20 ____

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по организации практической работы обучающихся
по дисциплине «Теоретические основы электротехники»
для студентов направления подготовки /специальности
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
Направленность (профиль) Цифровые технологии в электроэнергетике

Ставрополь, 2026

В настоящих методических указаниях (МУ) приведены теоретические сведения и разработки для выполнения практических задач по дисциплине «Теоретические основы электротехники». Часть II. МУ составлены в соответствии с программой дисциплины и дают возможность студентам приобрести практические навыки в решении задач.

Составители: Кожевников В. М.,
Чуенкова И. Ю.,
Данилов М. И..

Рецензент: д.т.н. профессор Кононов Ю. Г.

Содержание

Практическое занятие 1

Расчет линейных электрических цепей периодического несинусоидального тока

Практическое занятие 2

Расчет трехфазных цепей несинусоидального тока

Практическое занятие 3

Расчет переходных процессов в неразветвленных линейных электрических цепях первого порядка классическим методом

Практическое занятие 4

Расчет переходных процессов в разветвленных линейных электрических цепях первого порядка классическим методом

Практическое занятие 5

Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях второго порядка классическим методом

Практическое занятие 6

Расчет переходных процессов при некорректной коммутации

Практическое занятие 7

Операторный метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях первого порядка

Практическое занятие 8

Операторный метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях второго порядка

Практическое занятие 9

Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях с помощью интеграла Дюамеля

Практическое занятие 10

Расчет неразветвленных нелинейных электрических цепей постоянного

тока с одним источником электрической энергии

Практическое занятие 11

Расчет разветвленных нелинейных электрических цепей постоянного тока с одним источником электрической энергии

Практическое занятие 12

Расчет нелинейных цепей постоянного тока с несколькими источниками электрической энергии

Практическое занятие 13

Анализ режимов нелинейных магнитных цепей при постоянных потоках

Практическое занятие 14

Анализ периодических процессов в электрических цепях, содержащих нелинейные реактивные элементы

Приложение А

Список рекомендуемой литературы

5.

Практическое занятие 1

Расчет линейных электрических цепей периодического несинусоидального тока

1. Теоретическая часть

В основе анализа режимов линейных электрических цепей с несинусоидальными напряжениями и токами лежат: представление несинусоидальных периодических напряжений и токов в виде тригонометрического ряда Фурье и принцип наложения для расчета мгновенных и действующих значений напряжений и токов. Разложение периодической функции в тригонометрический ряд может быть записано:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A'_{km} \sin k\omega t + A''_{km} \cos k\omega t), \quad (4.1)$$

где $A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) d\omega t$ – постоянная составляющая; $\omega = \frac{\pi}{T}$ – частота основной гармоники; A_{km} и ψ_k – амплитуда и начальная фаза k -й гармоники;

$A'_{km} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin k\omega t d\omega t$; $A''_{km} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos k\omega t d\omega t$.

Если периодическая кривая обладает тем или иным видом симметрии, то при ее разложении в ряд Фурье отсутствуют некоторые составляющие гармонического ряда.

Действующие значения периодических величин не зависят от начальных фаз гармоник и определяются по действующим значениям их гармонических составляющих

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^2 dt} = \sqrt{A_0^2 + A_{(1)}^2 + A_{(2)}^2 + \dots + A_{(n)}^2}. \quad (4.2)$$

Если периодическое несинусоидальное напряжение подключено к какой угодно разветвленной или неразветвленной линейной цепи, то расчет токов производится для каждой из гармоник в отдельности с использованием

методов расчета цепей переменного тока. При этом индуктивные и емкостные сопротивления для каждой гармоники равны соответственно $k\omega L$ и $1/k\omega C$, где k – номер гармоники. Расчет постоянной составляющей тока производится с использованием методов расчета цепей постоянного тока. После этого величина тока ищется путем суммирования всех гармонических составляющих.

Внимание! Нельзя складывать комплексы токов и напряжений, если соответствующие им синусоиды имеют разные циклические частоты.

Активная и полная мощность в цепи несинусоидального тока определяется:

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cdot \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cdot \cos \varphi_2 + \dots + U_n I_n \cdot \cos \varphi_n, \quad (4.3)$$

$$S = UI = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2} \cdot \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2}. \quad (4.4)$$

2. Задачи

1. Вычислить мгновенные значения напряжений u на выводах источников тока в схемах рисунок 4.1 а и б.

Дано: $J(t) = 2\sin \omega t + 1\sin 3\omega t$ А; $r = 12$ Ом; $\omega L = 12$ Ом; $1/\omega C = 12$ Ом.

(а – $34,0\sin(\omega t + 45^\circ) + 37,9\sin(3\omega t + 71^\circ 35')$ В; б – $34,0\sin(\omega t - 45^\circ) + 12,6\sin(3\omega t - 18^\circ 305)$ В).

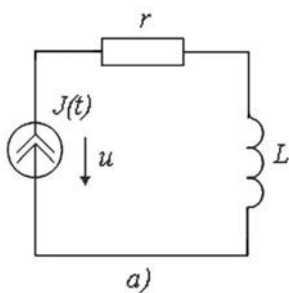


Рисунок – 4.1

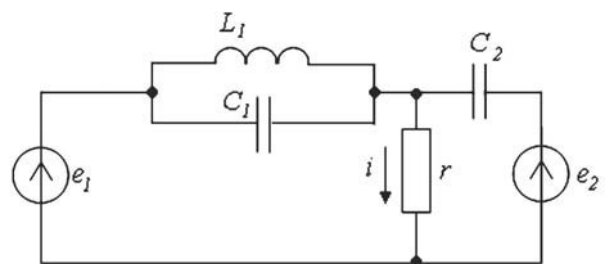
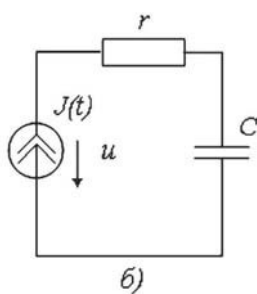


Рисунок – 4.2

2. Найти ток i в цепи представленной на рисунке 4.2.

Дано: $e_1 = 100$ В; $e_2 = 100\sin \omega t + 50\sin(3\omega t + 30^\circ)$ В; $\omega = 500$ рад/с; $r = 100$ Ом; $L_1 = 1$ Гн, $C_1 = 4$ мкФ, $C_2 = 20$ мкФ. $(1 + 0,707\sin(\omega t + 45^\circ) + 0,408\sin(3\omega t + 45^\circ 50'))$ А).

3. Определить показания приборов электромагнитной системы в цепи рисунок 4.3 при $u = 20\sqrt{2} \sin \omega t + 6,5\sqrt{2} \sin 2\omega t$ В; $\omega L_1 = 1/\omega C_1 = r$; $2\omega L_2 = 1/2\omega C_2$. (21,0 В; 20,0 В; 6,5 В).

4. Показанный на рисунке 4.4 электрический фильтр не пропускает в сопротивление нагрузки 5-й гармоники тока и не создаёт сопротивления 3-й гармонике тока.

Найти напряжение на сопротивлении $r_H = 1$ кОм при $L_1 = L_2 = 10$ мГн, $f = 2$ кГц и $u = 120 \sin \omega t + 60 \sin 3\omega t + 30 \sin 5\omega t$ В. ($39,2 \sin(\omega t + 74^\circ) + 60 \sin(3\omega t)$ В).

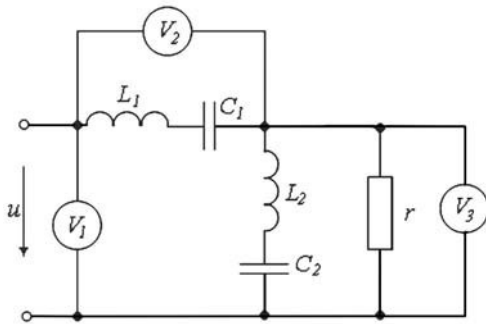


Рисунок – 4.3

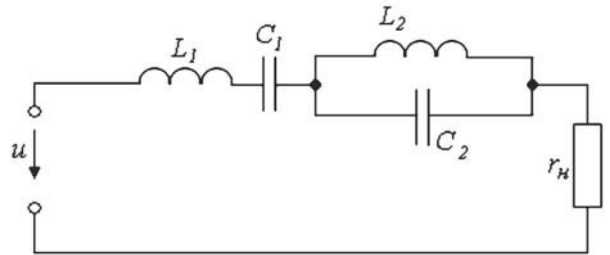


Рисунок – 4.4

Вопросы к практическому занятию

1. В каких случаях могут возникать несинусоидальные токи и напряжения в электрических цепях?
2. Что такое гармоника и ее действующее значение?
3. Изложите основные положения, на которых основывается методика расчета линейных цепей при периодических несинусоидальных воздействиях.
4. Почему нельзя складывать действующие значения токов различных частот?
5. Как определяется действующее значение несинусоидального напряжения.
6. Какую величину измеряют вольтметры электромагнитной системы при несинусоидальных токах?
7. Какое напряжение измеряют мультиметры в цепях несинусоидального тока?
8. С помощью какого прибора можно узнать, что в электрической цепи протекают несинусоидальные токи?

Практическое занятие 2

Расчет трехфазных цепей несинусоидального тока

1. Теоретическая часть

Система мгновенных значений фазных напряжений для гармонических составляющих:

$$\begin{cases} u_A = \sum \sqrt{2} U_{A(k)} \sin(k\omega t + \psi_{A(k)}) \\ u_B = \sum \sqrt{2} U_{B(k)} \sin(k\omega t + \psi_{B(k)} - k \cdot 120^\circ) \\ u_C = \sum \sqrt{2} U_{C(k)} \sin(k\omega t + \psi_{C(k)} + k \cdot 120^\circ) \end{cases}, \quad (5.1)$$

где $U_{A,k}$, $U_{B,k}$, $U_{C,k}$ – действующие значения напряжений фаз k -й гармоники;

$\psi_{A,k}$, $\psi_{B,k}$, $\psi_{C,k}$ – начальные фазы k -й гармоники.

Если $k=1, 4, 7, 10$, то эти гармоники образуют систему прямой последовательности фаз (рисунок 5.1 а).

Если $k=2, 5, 8, 11$, то эти гармоники образуют систему обратной последовательности фаз (рисунок 5.1 б).

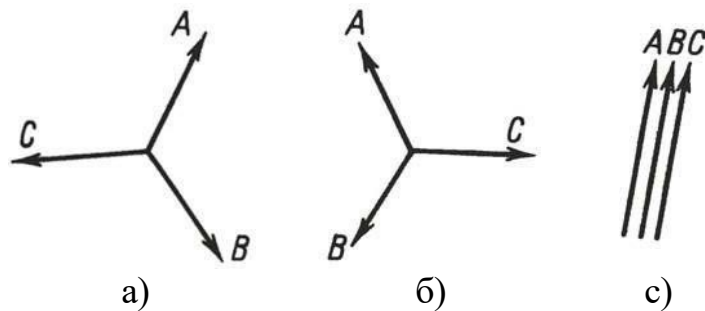


Рисунок 5.1

Если $k=3, 6, 9, \dots$, то эти гармоники образуют систему нулевой последовательности (рисунок 5.1 в).

Расчет трехфазной цепи несинусоидального тока выполняется символическим методом отдельно для каждой гармоники. При этом необходимо учитывать последовательность чередования фаз, индуктивные и емкостные сопротивления для каждой гармоники (см. практическое занятие 4).

2. Задачи

1. Найти показания приборов электромагнитной системы в цепи рисунок 5.2 при фазном напряжении генератора $u_{AB} = 220\sin \omega t + 80\sin 5\omega t$ В и сопротивлениях $r=60$ Ом; $\omega L=1$ Ом; $1/\omega C=75$ Ом. (3,69 А; 2,13 А; 179 В).

2. Найти показания вольтметра (при разомкнутом ключе) и показания амперметра (при замкнутом ключе) в схеме рисунок 5.3 с параметрами $r = 48$ Ом; $\omega L = 4$ Ом, $\omega L_N = 4$ Ом. Фазная ЭДС симметричного трехфазного генератора $e_A(t) = 59,56\sin(\omega t) + 10,71\sin(3\omega t) - 1,97\sin(7\omega t) - 0,74\sin(9\omega t)$. Приборы электромагнитной системы. (7,58 В; 0,111 А).

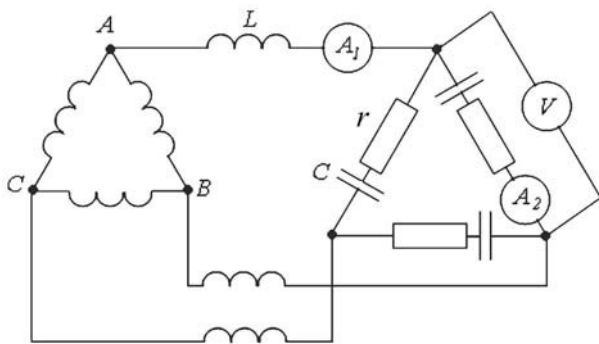


Рисунок – 5.2

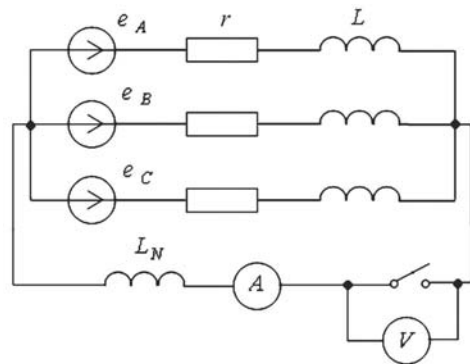


Рисунок – 5.3

Вопросы к практическому занятию

1. Объясните понятие прямое чередование фаз.
2. Какие гармоники образуют нулевую последовательность?
3. Что означает обратное чередование фаз?
4. Изложите основные положения, на которых основывается методика расчета трехфазных цепей при периодических несинусоидальных воздействиях.
5. Какова особенность протекания тока гармоник кратных трем в трехфазной системе при соединении обмоток генератора: а) в треугольник, б) в звезду, в) в звезду с нулевым проводом?

Практическое занятие 3

Расчет переходных процессов в неразветвленных линейных электрических цепях первого порядка классическим методом

1. Теоретическая часть

Согласно классическому методу анализа переходных процессов решение неоднородного линейного дифференциального уравнения представляет собой сумму его частного (принужденная составляющая) и общего решения, получаемого при равенстве нулю правой части (свободная составляющая). Принужденная составляющая определяется путем расчета установившегося режима в послекоммутационной схеме и представляет собой установившееся значение искомого переходного тока (напряжения). Свободная составляющая искомого тока (напряжения) обусловлена только внутренними источниками энергии электрического и магнитного поля.

При анализе переходного процесса в электрической цепи *классическим методом* можно рекомендовать следующий порядок расчета искомой величины:

1. Подготовить схему электрической цепи к расчету: выбрать направления токов в ветвях схемы при переходном процессе.

2. Определить независимые начальные условия – ток в индуктивности $i_L(0-)$ и напряжение на емкости $u_C(0-)$ из расчета цепи до коммутации. На основании законов коммутации ток на индуктивности и напряжение на емкости не могут измениться скачком:

$$i_L(0-)=i_L(0+)=i_L(0), \quad u_C(0-)=u_C(0+)=u_C(0). \quad (6.1)$$

3. Представить искомую величину, например ток, в виде суммы двух составляющих: свободной и установившийся (принужденной) $i = i_{св} + i_y$.

4. Определить установившуюся составляющую искомой величины после коммутации, когда переходной процесс закончился.

5. Определить общий вид закона изменения свободной составляющей:

5.1 Составить характеристическое уравнение для заданной схемы. Для этого в цепи после коммутации необходимо разорвать ветвь с искомой величиной (или какую-либо другую ветвь, которая не содержит источника тока). Найти комплексное входное сопротивление цепи $Z(j\omega)$ относительно точек разрыва. Заменить $j\omega$ на p , приравнять входное сопротивление к нулю, получив, таким образом, характеристическое уравнение $Z(p) = 0$.

5.2 Определить корни характеристического уравнения.

5.3 Определить общий вид свободной составляющей в зависимости от вида корней характеристического уравнения, например, для тока:

– если корень характеристического уравнения один, вещественный, то

$$i_c = A \cdot e^{pt};$$

– если корней два, различных, вещественных, то $i_{cв} = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}$;

– если корней два, одинаковых, вещественных, то $i_{cв} = A_1 \cdot e^{pt} + A_2 t \cdot e^{pt}$;

– если корней два, комплексных, сопряженных ($p_{-1,2} = \alpha \pm j\omega_c$), то

$$i_{cв} = B \cdot e^{\alpha t} \sin(\omega_c t + \beta).$$

6. Согласно п.3 записать общий вид искомого полного тока (напряжения).

7. Определить постоянные интегрирования, используя законы коммутации и систему дифференциальных уравнений, составленных по законам Кирхгофа для момента времени $t=0+$. При этом учитывать п.2 и соотношения $i_C(0+) = C \frac{du_C(0+)}{dt}$, $u_L(0+) = L \frac{di_L(0+)}{dt}$.

2. Задачи

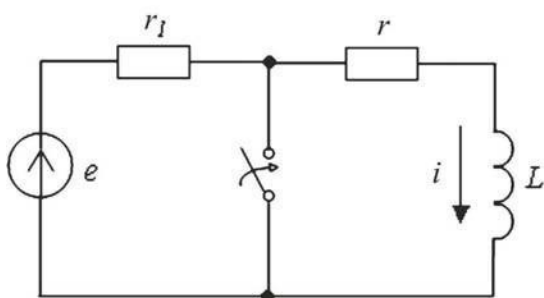


Рисунок – 6.1

1. Для схемы (рисунок 6.1) дано:
 $e = 50 \sqrt{2} \sin(100t + 30^\circ)$ В; $r = 20$ Ом;
 $r = 30$ Ом; $L = 0,5$ Гн. Найти ток i после замыкания ключа. ($0,5e^{-60t}$ А).

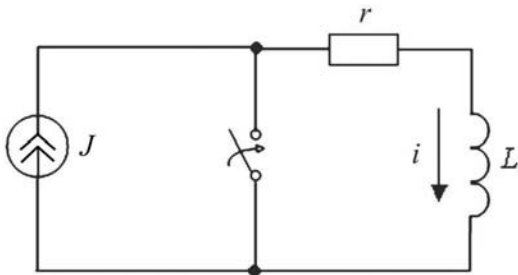


Рисунок – 6.2

2. Определить ток i в схеме (рисунок 6.2) после замыкания ключа. Дано: $J=6$ А; $r=10$ Ом; $L=0,25$ Гн. ($6e^{-40t}$ А).

3. В схеме рисунок 6.3 с параметрами: $J=0,3$ А; $r_1=500$ Ом; $C=10$ мкФ; $r=250$ Ом происходит размыкание ключа. Найти зависимости $u_C(t)$ и $i(t)$. ($50e^{-400t}$ В; $0,2e^{-400t}$ А).

4. В схеме рисунок 6.4 с синусоидальной ЭДС $e = 100 \sin(2500t - 30^\circ)$ В происходит размыкание ключа. Параметры схемы: $r_1=100$ Ом; $r=500$ Ом; $C=2$ мкФ. Найти напряжение на емкости u_C . ($-61,2e^{-1000t}$ В).

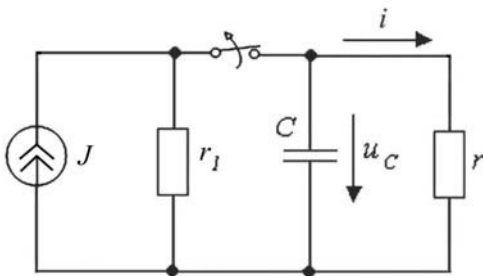


Рисунок – 6.3

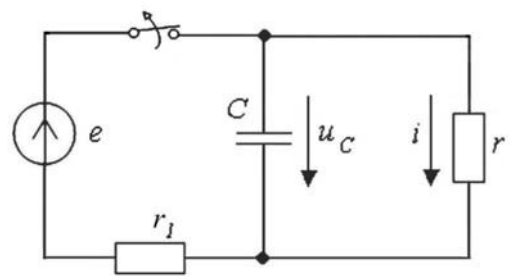


Рисунок – 6.4

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение переходному процессу.
2. Что означает понятие переходной процесс в цепи первого порядка.
2. Что понимают под установившимися (принужденными) и свободными токами и напряжениями.
3. Сформулируйте законы (правила) коммутации.
4. Дайте определение зависимым и независимым начальным условиям.

Практическое занятие 4

Расчет переходных процессов в разветвленных линейных электрических цепях первого порядка классическим методом

1. Теоретическая часть

Теория, необходимая для выполнения заданий, приведена в практическом занятии 6.

2. Задачи

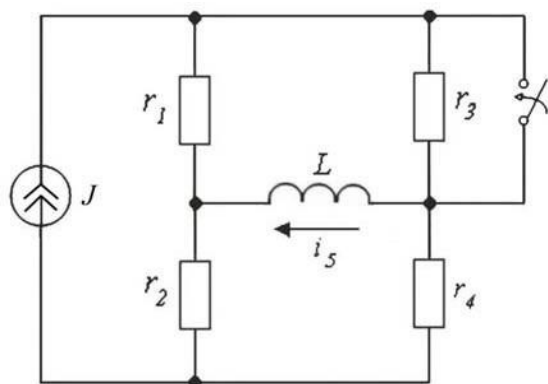


Рисунок – 7.1

1. Определить ток i_5 в схеме (рисунок 7.1) при замыкании ключа.

Параметры схемы: $J=2$ А; $r_1=r_4=80$ Ом; $r_2=r_3=20$ Ом; $L=0,01$ Гн.

$(1,6 - 0,4e^{-445t}$ А).

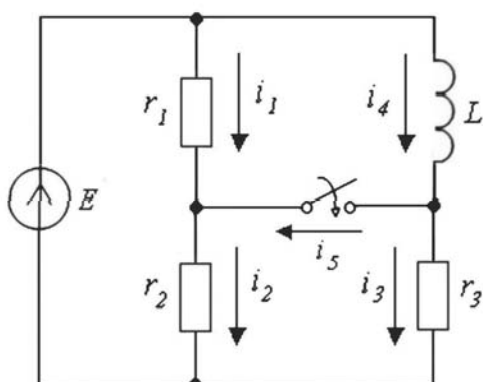


Рисунок – 7.2

2. Рассчитать токи во всех ветвях схемы рисунок 7.2 после коммутации при $E=90$ В; $r_1=10$ Ом; $r_2=30$ Ом; $r_3=15$ Ом; $L=0,04$ Гн.

$(1,5e^{-125t}$ А; $3 - 0,5e^{-125t}$ А; $6 - 1e^{-125t}$ А; $9 - 3e^{-125t}$ А).

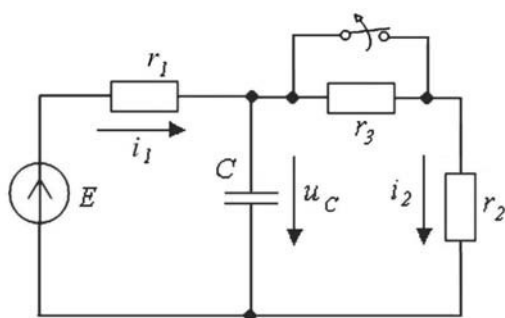


Рисунок – 7.3

3. В результате увеличения сопротивления в одной из ветвей цепи (рисунок 7.3) возникает переходный процесс.

Определить напряжение u_C и токи i_1 , i_2 при заданных параметрах: $E=180$ В; $r_1=60$ Ом; $r_2=20$ Ом; $r_3=100$ Ом; $C=25$ мкФ.

$(120 - 75e^{-1000t}$ В; $1,0 + 1,25e^{-1000t}$ А; $1,000 - 0,625e^{-1000t}$ А).

Вопросы к практическому занятию

1. Что такое и как составляется характеристическое уравнение?
2. Чем определяется число корней характеристического уравнения?
3. Что означают и показывают корни характеристического уравнения?
4. Изложите сущность классического метода расчета и принцип составления уравнений для определения постоянных интегрирования.

Практическое занятие 5

Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях второго порядка классическим методом

1. Теоретическая часть.

Теория, необходимая для выполнения заданий, приведена в практическом занятии №6.

2. Задачи

1. Последовательный контур rLC подключается к источнику постоянной ЭДС E рисунок 8.1. Определить напряжение u_C и ток i , а также их максимальные значения во время переходного процесса, если $E = 120$ В; $r = 20$ Ом; $L = 0,1$ Гн; $C = 2,49$ мкФ.

$(120 - 120,1e^{-100t} \sin(2000t + 87,1^\circ)$ В; $0,6e^{-100t} \sin 2000t$ А; 222,5 В; 0,555 А).

2. Определить ток i_2 и напряжение u_1 в цепи рисунок 8.2. Дано: $E = 10$ В; $r_1 = r_2 = 100$ Ом; $L = 1,0$ Гн; $C = 10$ мкФ.

$(-0,0023e^{-115t} + 0,0523e^{-435t}$ А; $10 + 1,8e^{-115t} - 6,8e^{-435t}$ В).

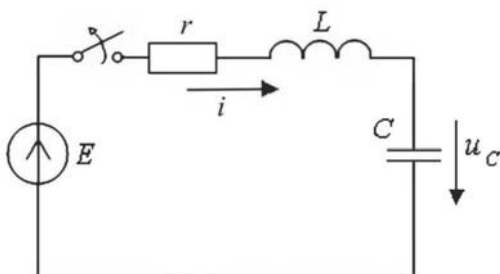


Рисунок – 8.1

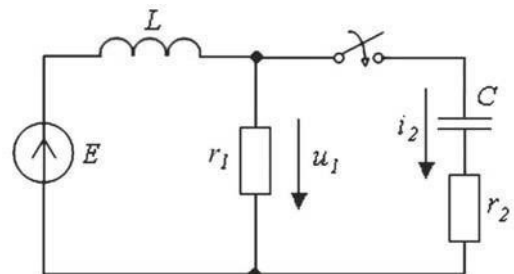


Рисунок – 8.2

Вопросы к практическому занятию

1. Что означает понятие переходной процесс в цепи второго порядка?
2. Что понимают под величинами, подчиняющимися и не подчиняющимися законам коммутации?
3. Как можно определить величину, не подчиняющуюся законам коммутации, через известные величины, подчиняющиеся этим законам?

Практическое занятие 6

Расчет переходных процессов при некорректной коммутации

1. Теоретическая часть

Обобщенные законы коммутации

В случае, когда в результате коммутации две (или более) емкости с разными начальными напряжениями оказываются соединенными параллельными или две (или более) индуктивности с разными начальными токами соединены последовательно, независимые начальные условия определяются из обобщенных законов коммутации

$$\sum q(0+) = \sum q(0-); \quad \sum \psi(0+) = \sum \psi(0-). \quad (9.1)$$

Для двух параллельно соединенных емкостей

$$(C_1 + C_2)u(0+) = C_1u_1(0-) + C_2u_2(0-). \quad (9.2)$$

Для двух последовательно соединенных индуктивностей

$$(L_1 + L_2)i(0+) = L_1i_1(0-) + L_2i_2(0-). \quad (9.3)$$

2. Задачи

1. В цепи (рисунок 9.1) практически мгновенно происходит разрыв быстродействующим выключателем ветви с током i_B . Определить ток после коммутации, если $E = 120$ В; $r_1 = 10$ Ом; $r_2 = 30$ Ом; $L_1 = 0,1$ Гн; $L_2 = 0,4$ Гн. ($3 - 0,6e^{-80t}$ А).

2. Определить ток i_2 второго конденсатора рисунок 9.2 после коммутации. В цепи действует источник синусоидальной ЭДС $e = 100 \sin(10^3 t + 30^\circ)$ В. Заданы параметры: $r = 100$ Ом; $C_1 = 10$ мкФ; $C_2 = 30$ мкФ.

$(0,7276 \sin(10^3 t + 44,04^\circ) - 0,0965 e^{-250t} \text{ А}).$

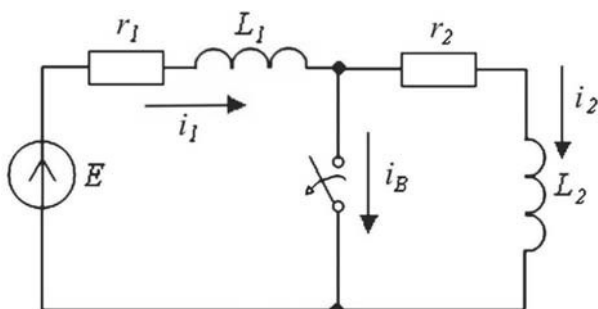


Рисунок – 9.1

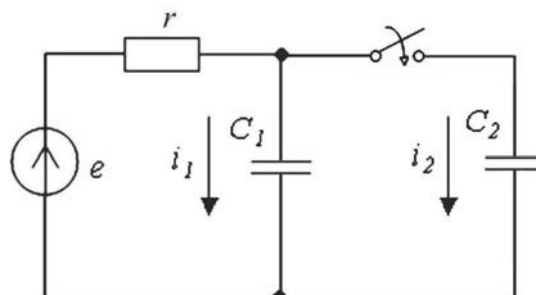


Рисунок – 9.2

Вопросы к практическому занятию

1. Что называется некорректной коммутацией?
2. При каких условиях возникает некорректная коммутация?
3. Каковы особенности расчета переходных процессов при некорректной коммутации?
4. Сформулируйте обобщенные законы (правила) коммутации.

Практическое занятие 7

Операторный метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях первого порядка

1. Теоретическая часть

Сущность операторного метода анализа переходных процессов заключается в том, что действительные функции времени, описывающие процессы в электрических цепях и называемые оригиналами, заменяют их операторными изображениями с помощью преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt. \quad (10.1)$$

Преобразование Лапласа приводит к замене операций дифференцирования и интегрирования оригиналов при решении дифференциальных уравнений на алгебраические операции умножения и деления изображений. Решив полученные алгебраические уравнения в операторной форме относительно изображений искомых величин, переходят к оригиналам, получают решения исходных дифференциальных уравнений, описывающих переходный процесс в электрической цепи.

При анализе переходного процесса в электрической цепи **операторным методом** рекомендуется следующий порядок расчета:

1. Из расчета цепи до коммутации найти токи в индуктивностях $i_L(0-)$ и напряжения на емкостях $u_C(0-)$.
2. По виду исследуемой электрической цепи после коммутации составить операторную схему (рисунок 10.1). По операторной схеме известными методами расчета цепей найти изображение искомой величины.
3. По изображению искомой величины найти оригинал, т. е. искомую функцию времени.

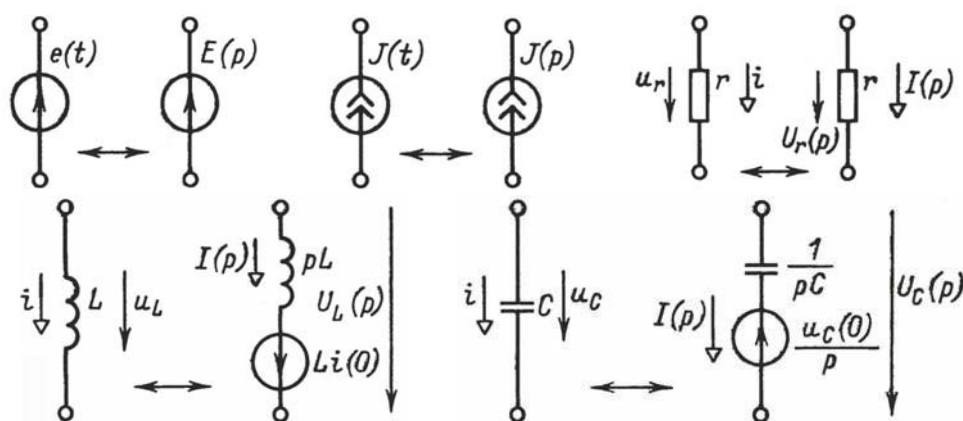


Рисунок – 10.1

Способы перехода от изображения к оригиналу

1. Применение теоремы разложения. Если изображение искомой величины имеет вид рациональной дроби:

$$\frac{F(p)}{F(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_k p^k + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_k p^k + \dots + b_1 p + b_0}, \quad (10.2)$$

где a_k и b_k – действительные числа; $p_1, p_2, \dots$ – действительные и различные корни характеристического уравнения $F_2(p) = 0$, то

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} \quad (10.3)$$

Если многочлен $F_2(p)$ имеет один нулевой корень, т.е. $F_2(p) = pF_3(p)$, то

$$\frac{F_1(p)}{pF_3(p)} = f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{pF_3'(p_k)} e^{p_k t} \quad (10.4)$$

Если многочлен $F_2(p)$ имеет n пар комплексных сопряженных корней, то

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = f(t) = \sum_{k=1}^n 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} \right] \quad (10.5)$$

и при одном нулевом корне

$$\frac{F_1(p)}{pF_3(p)} = f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=1}^n 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t} \right] \quad (10.6)$$

Если в цепи действует синусоидальная ЭДС, то задачу рекомендуется решать для свободных составляющих искомых величин. Далее, для полученной схемы рассчитать изображения искомых величин одним из известных ранее методов (контурных токов, узловых потенциалов и т.д.)

По найденному изображению определить оригинал искомой величины. Для этого воспользоваться либо таблицами соответствия (см. приложение), либо теоремой разложения, представленной выше.

2. Задачи

1. Расчет операторным методом задачи 2 практического занятия 6.
2. Расчет операторным методом задачи 4 практического занятия 6.

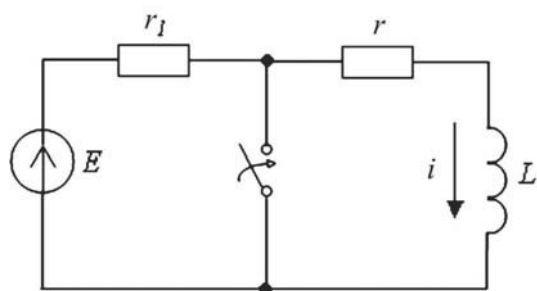


Рисунок – 10.2

3. В схеме рисунок 10.2 происходит замыкание ключа. Параметры схемы: $E = 90$ В; $r_1 = 30$ Ом; $r = 15$ Ом; $L = 0,1$ Гн. Найти и построить зависимость $i(t)$. ($2e^{-150t}$ А).

Вопросы к практическому занятию

1. Изложите сущность и этапы расчета операторным методом.
2. Как учитываются начальные условия в операторном методе?
3. Изобразите операторную схему замещения катушки индуктивности.
4. Изобразите операторную схему замещения конденсатора.
5. Как осуществляется переход от изображения к оригиналу?
6. О чём свидетельствует нулевой корень характеристического уравнения?
7. Запишите законы Кирхгофа и Ома в операторной форме.

Практическое занятие 8

Операторный метод расчета переходных процессов в линейных электрических цепях второго порядка

1. Теоретическая часть

Теория, необходимая для выполнения заданий, приведена в практическом занятии 10.

2. Задачи

1. Расчет операторным методом задачи 1 практического занятия 8.
2. В схеме рисунок 11.1 параллельно ветви r_2C подключается ветвь с сопротивлением r_1 . Найти зависимость $i_1(t)$ и $u_C(t)$ при $E=10$ В; $r_1=r_2=100$ Ом; $L=1,0$ Гн; $C=10$ мкФ.
($0,1-0,144e^{-115t}+0,088e^{-435t}$ А; $10-15,63e^{-115t}+15,63e^{-435t}$ В).

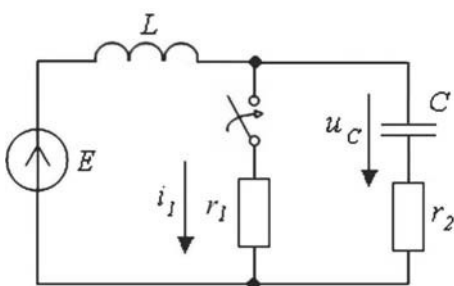


Рисунок – 11.1

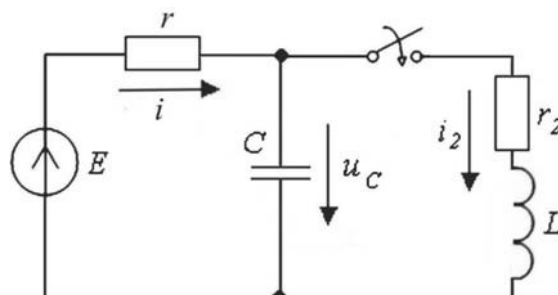


Рисунок – 11.2

3. К источнику с постоянной ЭДС $E = 100$ В и внутренним сопротивлением $r = 20$ Ом (рисунок 11.2) дополнительно подключается катушка с индуктивностью $L = 0,05$ Гн и сопротивлением $r_2 = 30$ Ом.

Определить токи i , i_2 и напряжение u_C на емкости конденсатора $C = 50$ мкФ.

$(2 + 3,33e^{-800t} \sin(600t - 144^\circ))$ А; $2 + 2,11e^{-800t} \sin(600t - 71^\circ)$ А;

$60 + 66,7e^{-800t} \sin(600t + 37^\circ)$ В).

Вопросы к практическому занятию

(см. практическое занятие 10).

Практическое занятие 9

Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях с помощью интеграла Дюамеля.

1. Теоретическая часть

Для расчета переходного процесса при воздействии на электрическую цепь источников напряжения или тока произвольной формы можно применить интеграл Дюамеля. Существует несколько форм записи интеграла Дюамеля, одна из которых представлена ниже.

Первая форма записи интеграла Дюамеля при непрерывном воздействии $x(t)$:

$$y(t) = x(0)h(t) + \int_0^t x'(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (12.1)$$

где $h(t)$ – переходная функция, т.е. реакция цепи на единичный скачок входного воздействия, $x(t)$ – входная величина (воздействие), $y(t)$ – искомая величина (реакция цепи на воздействие), $x'(\tau) = dx/dt|_{\tau}$; при различных законах воздействия $x_1(t)$ и $x_2(t)$ в интервалах времени $0 \leq t \leq t_1$ и $t \geq t_1$

$$y(t) = x_1(0)h(t) + \int_0^t x'_1(\tau)h(t-\tau)d\tau; \quad (12.2)$$

$$y(t) = x_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} x'_1(\tau)h(t-\tau)d\tau + [x_2(t_1) - x_1(t_1)]h(t-t_1) + \int_{t_1}^t x'_2(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (12.3)$$

и аналогично при большем числе интервалов.

2. Задачи

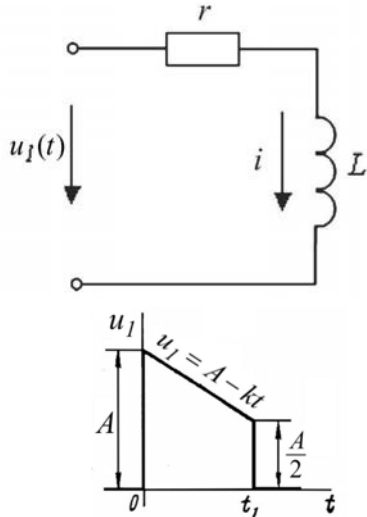


Рисунок – 12.1

1. Дана электрическая схема (рисунок 12.1 а), на входе которой действует напряжение, изменяющееся во времени по заданному закону $u_I(t)$ рисунок 12.1 б. При этом $A=5$, $k=2$, $t_1=1,25$.
- а) Требуется определить закон изменения во времени тока i . Параметры цепи $r=10$ Ом, $L=1$ мГн. (при $0 \leq t < t_1$ $0,5 - 0,5 \cdot e^{-1000t} - 0,2 \cdot t$; при $t_1 \leq t \leq \infty$ $-0,5 \cdot e^{-1000t} + 0,25 \cdot e^{(-1000t+1250)}$).

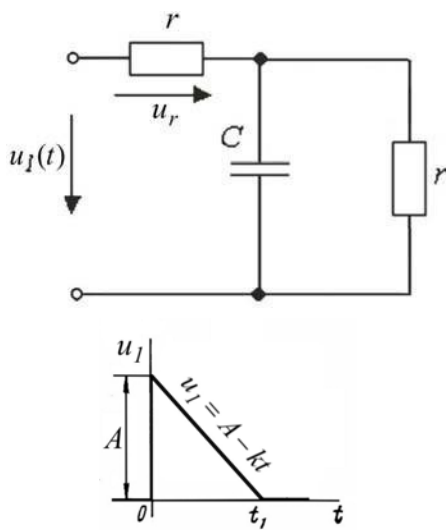


Рисунок – 12.2

2. Дана электрическая схема (рисунок 12.2 а), на входе которой действует напряжение, изменяющееся во времени по заданному закону $u_I(t)$ рисунок 12.2 б. При этом $A=10$, $k=4$, $t_1=2,25$. Требуется определить закон изменения во времени напряжения u_r . Параметры цепи $r=1000$ Ом, $C=10$ мкФ. (при $0 \leq t < t_1$ $0,5 + 0,5 \cdot e^{-200t} - 2 \cdot t$; при $t_1 \leq t \leq \infty$ $0,5 + 5,01 \cdot e^{(-200t)} - (1/100) \cdot e^{(-200t+450)}$).

Вопросы к практическому занятию

1. Изложите сущность и охарактеризуйте идею расчета с помощью интеграла Дюамеля.

2. В каких случаях необходимо рассчитывать переходной процесс с помощью интеграла Дюамеля?
3. Дайте сравнительную характеристику известных вам методов расчета переходных процессов.

Практическое занятие 10

Расчет неразветвленных нелинейных электрических цепей постоянного тока с одним источником электрической энергии

1. Теоретическая часть

Для расчета нелинейных цепей постоянного тока применяются графические, аналитические, графо-аналитические и численные методы. При расчете целесообразно предварительно провести преобразование схемы таким образом, чтобы упростить уравнения цепи. В частности, для цепи с одним нелинейным элементом можно преобразовать линейную часть схемы, применяя теорему об активном двухполюснике.

Для графического расчета цепи нужно характеристики всех ветвей записать в функции одного и того же аргумента. В этом случае система уравнений цепи приводится к одному уравнению с одним неизвестным. Решение часто целесообразно проводить методом пересечений, при котором нелинейное уравнение разбивается на две части

$$f_1(x) = f_2(x) . \quad (14.1)$$

После чего строятся характеристики $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и решение определяется точкой их пересечения.

При аналитическом методе расчета вначале аппроксимируют характеристики нелинейных элементов и затем решают задачу аналитически.

Для численного расчета нелинейных цепей широко применяются итерационные методы.

2. Задачи

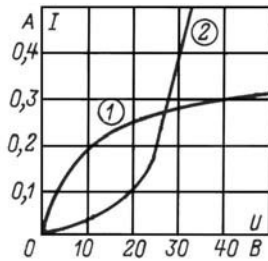
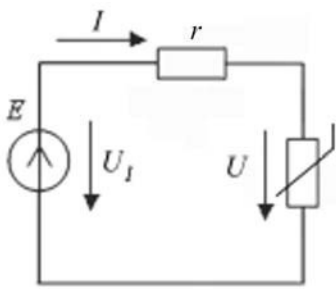


Рисунок – 13.1

а)

1. Нелинейных двухполюсник (рисунок 13.1 а) состоит из линейного резистора с сопротивлением $r = 80$ Ом и нелинейного резистора, характеристика которого приведена на рисунке 13.1 б (кривая 1).

Построить: 1) вольт-амперную характеристику двухполюсника $I(U_1)$; 2) зависимость напряжения U на нелинейном элементе от входного напряжения U_1 . Определить ток I

б) при ЭДС $E = 40$ В.

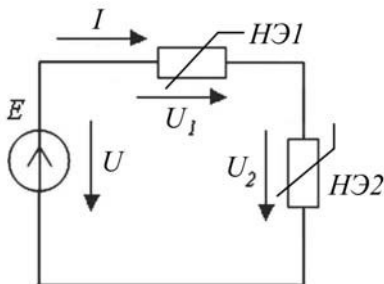


Рисунок – 13.2

2. Характеристики нелинейных элементов $HЭ1$ и $HЭ2$ (симметричные) схемы (рисунок 13.2) показаны на рисунке 13.1 б (кривые 1 и 2 соответственно). Определить при ЭДС $E = 35$ В ток I , напряжения U_1 , U_2 и мощность источника. Построить вольт-амперную характеристику (ВАХ) цепи $I(U)$ и зависимость напряжения U_2 от напряжения источника U .

(0,2 А; 10 В; 25 В; 7 Вт).

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение нелинейной цепи постоянного тока.
2. Изобразить качественно ВАХ нелинейного элемента.
3. Объясните понятия статическое и дифференциальное сопротивления нелинейного элемента.
4. Изобразите ВАХ с отрицательным дифференциальным сопротивлением.

Практическое занятие 11

Расчет разветвленных нелинейных электрических цепей постоянного тока с одним источником электрической энергии

1. Теоретическая часть

Теория, необходимая для выполнения заданий, приведена в практическом занятии 13.

2. Задачи

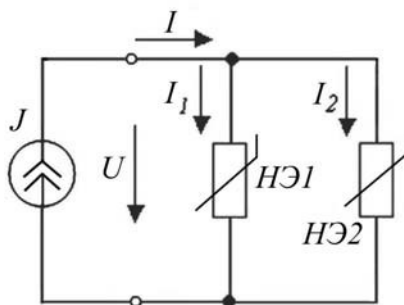


Рисунок – 14.1

1. В схеме (рисунок 14.1) ток источника $J=0,35$ А, характеристики нелинейных элементов НЭ1 и НЭ2 (симметричные) приведены на рисунке 13.1 б – соответственно кривые 1 и 2. Определить токи I_1 , I_2 нелинейных элементов и мощность источника. Построить вольт-амперную характеристику цепи $I(U)$. (0,25 А; 0,1 А; 7 Вт).

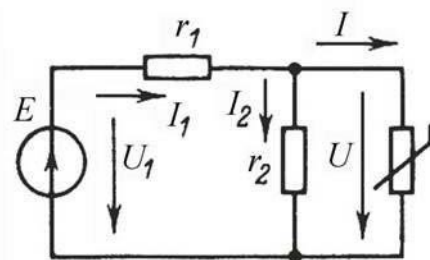


Рисунок – 14.2

2. В схеме (рисунок 14.2) $r_1=50$ Ом; $r_2=200$ Ом, $E=30$ В характеристика нелинейного элемента (симметричная) приведена на рисунке 13.1 б (кривая 2).

Определить токи. Построить вольт-амперную характеристику $I_1(U_1)$ и зависимость $U(U_1)$. (0,1 А; 0,2 А; 0,1 А).

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение неуправляемым нелинейным элементам.
2. Перечислите этапы расчета нелинейных цепей методом эквивалентного генератора.

3. В чем заключается препятствие, затрудняющее применение метода контурных токов или метода узловых потенциалов для расчета сложных разветвленных нелинейных цепей.

Практическое занятие 12

Расчет нелинейных цепей постоянного тока с несколькими источниками электрической энергии

1. Теоретическая часть

Теория, необходимая для выполнения заданий, приведена в практическом занятии 13.

2. Задачи

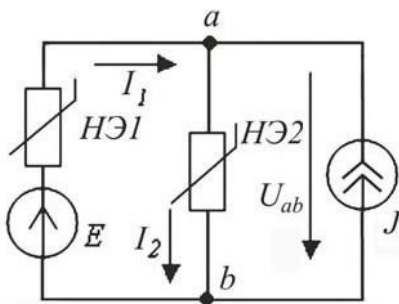


Рисунок – 15.1

1. В схеме (рисунок 15.1) ток источника $J = 0,2 \text{ А}$; $E = 40 \text{ В}$; характеристики нелинейных элементов НЭ1 и НЭ2 (симметричные) приведены на рисунке 13.1 б – соответственно кривые 1 и 2.

Определить токи и напряжения нелинейных элементов. (0,2 А; 0,4 А; 10 В; 30 В).

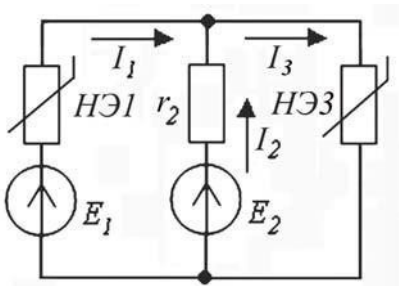


Рисунок – 15.2

2. В схеме (рисунок 15.2) $r_2 = 100 \text{ Ом}$; $E_1 = 30 \text{ В}$; $E_2 = 40 \text{ В}$ нелинейные резисторы имеют характеристики (симметричные), изображенные на рисунке 13.1 б: НЭ1 – кривая 1; НЭ3 – кривая 2.

Найти токи и напряжения на резисторах. (0,04 А; 0,21 А; 0,25 А; 11 В; 21 В; 19 В).

Вопросы к практическому занятию

1. Может ли для реальных нелинейных элементов статическое сопротивление быть отрицательным?
2. Перечислите этапы расчета нелинейных цепей методом двух узлов.

3. Какими свойствами при определенных условиях могут обладать нелинейные цепи в отличие от линейных?

Практическое занятие 13

Анализ режимов нелинейных магнитных цепей при постоянных потоках

1. Теоретическая часть

Расчет нелинейных магнитных цепей при постоянных потоках аналогичен расчету нелинейных электрических цепей постоянного тока.

При расчетах магнитных цепей необходимо помнить следующее:

– для участка магнитной цепи магнитная индукция

$$B = \Phi/S, \quad (16.1)$$

где Φ – магнитный поток, S – поперечное сечение участка;

– магнитное напряжение

$$U_M = Hl = \Phi R_M, \quad (16.2)$$

где H – напряженность магнитного поля; l – средняя длина участка;

магнитное сопротивление участка

$$R_M = l/\mu_r\mu_0S, \quad (16.3)$$

где μ_r – относительная магнитная проницаемость материала участка,

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Магнитная индукция и напряженность магнитного поля участка связаны соотношением

$$B = \mu_r\mu H. \quad (16.4)$$

При расчете магнитных цепей при постоянных потоках зависимость B и H для ферромагнитных участков задается кривой намагничивания (см. приложение А). Для воздуха и для воздушных зазоров $\mu_r = 1$.

Магнитодвижущая сила (МДС)

$$F = Iw, \quad (16.5)$$

где I – ток в обмотке, w – число витков обмотки.

Между величинами, характеризующими магнитные и электрические цепи, существует формальная аналогия, которая распространяется и на методы расчета магнитных цепей.

Электрические цепи	Магнитные цепи
Ток I , А	Поток Φ , Вб
ЭДС E , В	МДС F , А
Сопротивление r , Ом	Магнитное сопротивление R_m , 1/Гн
Напряжение U , В	Магнитное напряжение U_m , А

Первый закон Кирхгофа для магнитных цепей: алгебраическая сумма магнитных потоков в узле равна нулю $\sum \Phi = 0$.

Второй закон Кирхгофа для магнитных цепей: алгебраическая сумма магнитных напряжений равна алгебраической сумме МДС в замкнутом контуре $\sum F = \sum U_m = \sum H \cdot l = \sum \Phi \cdot R_m$.

Аналогом вольт-амперной характеристики $U(I)$ является вебер-амперная характеристика $\Phi(U_m)$, которая рассчитывается по заданным кривым намагничивания $B(H)$ и геометрическим размерам участков магнитной цепи.

Вебер-амперная характеристика (часто называют магнитной характеристикой) рассчитывается в следующем порядке: задают индукцию B , вычисляют поток $\Phi = BS$, по кривой $B(H)$ определяют H и находят $U_m = Hl$.

В слабых полях $\mu_r \approx \text{const}$, следовательно, и $R_m \approx \text{const}$, поэтому магнитная цепь рассчитывается как линейная.

2. Задачи

1. Магнитопровод состоит из двух П-образных частей (рисунок 16.1), разделенных двумя зазорами длиной $l_B = 0,4$ мм каждый. Средняя длина магнитных линий в ферромагнетике 8 см, сечение магнитопровода $0,25 \text{ см}^2$. Относительная магнитная проницаемость материала $\mu_r = 200$.

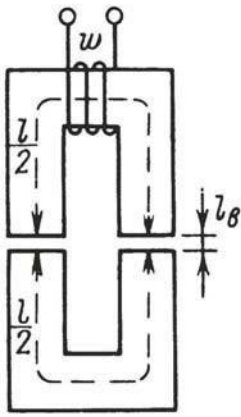


Рисунок – 16.1

Рассчитать магнитное сопротивление магнитной цепи и его изменение при увеличении и уменьшении длины воздушного зазора на 50%.

Выразить магнитный поток, который сцеплен с обмоткой, охватывающей магнитопровод, через число ее витков и ток, пользуясь понятием магнитного сопротивления.

($3,82 \cdot 10^7$ 1/Гн; на $\pm 33\%$; $\Phi = 2,62 \cdot 10^{-8} Iw$ Вб, где ток – в амперах).

2. Магнитопровод (рисунок 16.2) выполнен из электротехнической стали 1512 и имеет следующие размеры: $l_1=30$ см; $l_2=12$ см; $l_3=30$ см; $S_1=S_2=S_3=15$ см²; $F_1=I_1\omega_1=100$ А; $F_2=I_2\omega_2=470$ А.

Определить магнитную индукцию в каждом стержне.

Кривая намагничивания для стали 1512 приведена в приложении.

($B_1 = -0,38$ Тл; $B_2 = 1,53$ Тл; $B_3 = 1,15$ Тл).

3. Во втором стержне магнитной системы (рисунок 16.3) выполненной из электротехнической стали 1211 индукция равна 0,8 Тл. Магнитопровод имеет следующие размеры: $l_1'=20$ см; $l_1''=10$ см; $l_B=0,1$ см; $l_2=15$ см; $l_3=30$ см; $S_1=S_3=4$ см²; $S_2=6$ см².

Определить ток в обмотке с числом витков $w=200$.

Кривая намагничивания для стали 1211 приведена в приложении. (10 А).

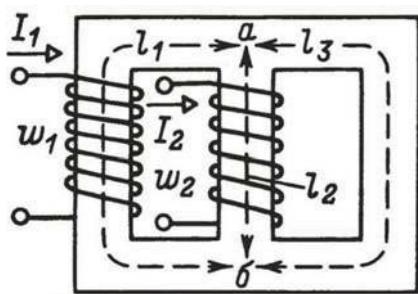


Рисунок – 16.2

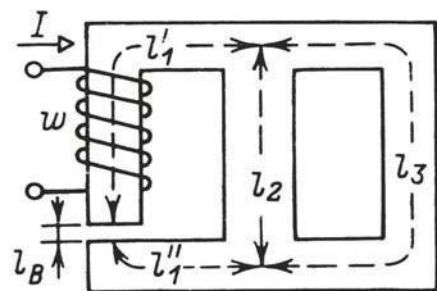


Рисунок – 16.3

Вопросы к практическому занятию

1. Дайте определение следующим понятиям: МДС, магнитная цепь, магнитопровод, ветвь магнитной цепи.
2. Как определить направление МДС?

3. Как выбирают направление магнитных потоков в ветвях?
4. Что понимают под магнитным сопротивлением участка цепи?
5. Сформулируйте законы Кирхгофа для магнитной цепи.
6. Как экспериментально получить постоянный магнит?

Практическое занятие 14

Анализ периодических процессов в электрических цепях, содержащих нелинейные реактивные элементы

1. Теоретическая часть

Методы анализа нелинейных цепей можно подразделить на две большие группы: аналитическую и графическую.

Наиболее широко распространены следующие методы:

- графический при использовании характеристик нелинейных элементов для мгновенных значений;
- аналитический при использовании характеристик нелинейных элементов для мгновенных значений при их кусочно-линейной аппроксимации;
- аналитический или графический при использовании ВАХ по первым гармоникам;
- аналитический или графический при использовании ВАХ по действующим значениям несинусоидальных величин;
- аналитический путем расчета по первой и одной или нескольким высшим или низшим гармоникам;
- моделирования и др.

Тот или иной метод целесообразно применять в зависимости от характера цепи, формы ВАХ нелинейного элемента, а также от того, какое нелинейное явление в цепи исследуется. Чем сложнее характер нелинейного явления, тем более сложным и громоздким оказывается метод его анализа. И наоборот, анализ грубых нелинейных явлений производится простыми средствами.

Графический метод расчета при использовании характеристик нелинейных элементов для мгновенных значений. Этот метод применим, как правило, к цепям, в которых известен закон изменения во времени какой-либо одной, определяющей работу нелинейного элемента, величины, например, тока, напряжения, заряда.

Аналитический метод расчета при использовании характеристик нелинейных элементов для мгновенных значений при их кусочно-линейной аппроксимации. Основой метода является сведение задачи о нахождении периодического решения нелинейных уравнений к определению периодического решения системы линейных уравнений.

Аналитический (графический) метод расчета по первым гармоникам токов и напряжений. В этом методе по сложному закону изменяющиеся токи и напряжения на нелинейном элементе заменяют их первыми гармониками. Это возможно при изучении некоторых простейших свойств нелинейных электрических цепей, когда несинусоидальные токи и напряжения, не содержат постоянных составляющих и в которых высшие гармоники выражены слабо. Действующее значение синусоидального тока принимают равным действующему значению заменяемого несинусоидального тока, а действующее значение синусоидального напряжения – равным действующему значению несинусоидального напряжения.

Сдвиг фаз $\phi_{ЭК}$ между эквивалентными синусоидами напряжения и тока берут таким, чтобы активная мощность эквивалентного синусоидального тока была равна активной мощности несинусоидального тока, т. е.

$$\cos \phi_{ЭК} = P / UI.$$

В расчете используют ВАХ по первым гармоникам в аналитической форме или в виде графической зависимости.

Основные этапы расчета в графическом варианте:

- в качестве зависимости между амплитудой первой гармоники напряжения на нелинейном элементе и амплитудой первой гармоники тока через него берется нелинейная зависимость в виде графика;
- произвольно задаются амплитудой I_{1m} первой гармоники тока через нелинейный элемент, из графика находят соответствующую ей амплитуду первой гармоники напряжения на нем и затем путем построения векторной диаграммы по первой гармонике для всей схемы определяют амплитуду U_{1m} первой гармоники напряжения на входе схемы. Построение векторной диаграммы производится так же, как и для обычных линейных цепей синусоидального тока, а именно: если не учитывать потери в сердечнике, то первая гармоника напряжения на нелинейной индуктивной катушке опережает первую гармонику протекающего через нее тока на 90° , первая гармоника напряжения на нелинейном конденсаторе отстает от протекающего через него тока на 90° , первые гармоники напряжения и тока на нелинейном резисторе по фазе совпадают;
- путем построения нескольких векторных диаграмм для различных значений I_{1m} находят соответствующие им U_{1m} и строят ВАХ всей схемы $U_{1m} = f(I_{1m})$.

Данный метод позволяет рассматривать такие нелинейные явления, как преобразование постоянного тока в переменный и обратное преобразование, явление резонанса на основной гармонике, триггерный эффект на первой гармонике. Но он не позволяет исследовать более сложные явления, как, например, резонанс на других гармониках.

Анализ нелинейных цепей переменного тока путем использования ВАХ для действующих значений аналогичен методу расчета по первым гармоникам.

2. Задачи

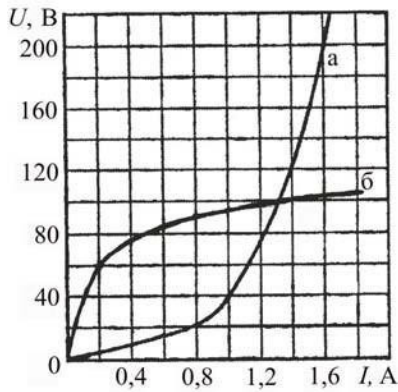
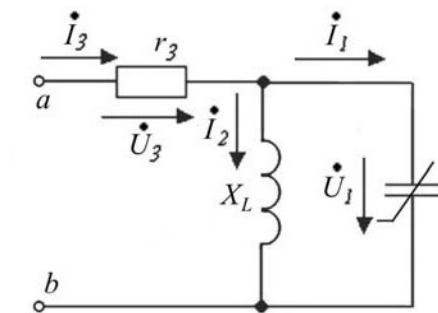


Рисунок – 17.1

а)

б)

1. Схема рисунок 17.1 а состоит из линейного активного сопротивления $r = 100$ Ом, нелинейной емкости, вольт-амперная характеристика которой по первой гармонике дана на рисунке 17.1 б (кривая а), и линейной индуктивности, сопротивление которой по первой гармонике $X_L = 100$ Ом.

Задаваясь различными значениями тока I_1 , построить для всей схемы несколько векторных диаграмм по первой гармонике и найти зависимость $U_{ab}(U_3)$.

2. Нелинейная индуктивность, линейная емкость и активное сопротивление r присоединены к источнику синусоидального напряжения рисунок 17.2. Частота $f = 50$ Гц. Вольт-амперная характеристика нелинейной индуктивности по первой гармонике для указанной частоты изображена на рисунке 17.1 б (кривая б). Пренебрегая потерями в сердечнике нелинейной индуктивности и высшими гармониками, найти параметры схемы C и r , чтобы триггерный скачок на увеличение тока происходил при напряжении $U_1 = 26$ В, а на уменьшение тока – при напряжении $U_2 = 14$ В.

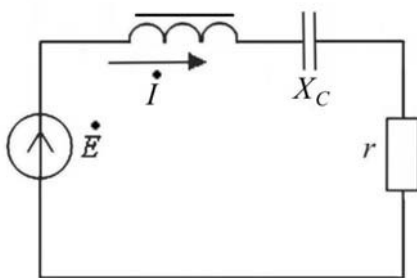


Рисунок –17.2

Построить в масштабе векторные диаграммы токов и напряжений до «скачка» и после «скачка» тока для некоторого произвольного напряжения, находящегося в интервале между U_1 и U_2 .

Вопросы к практическому занятию

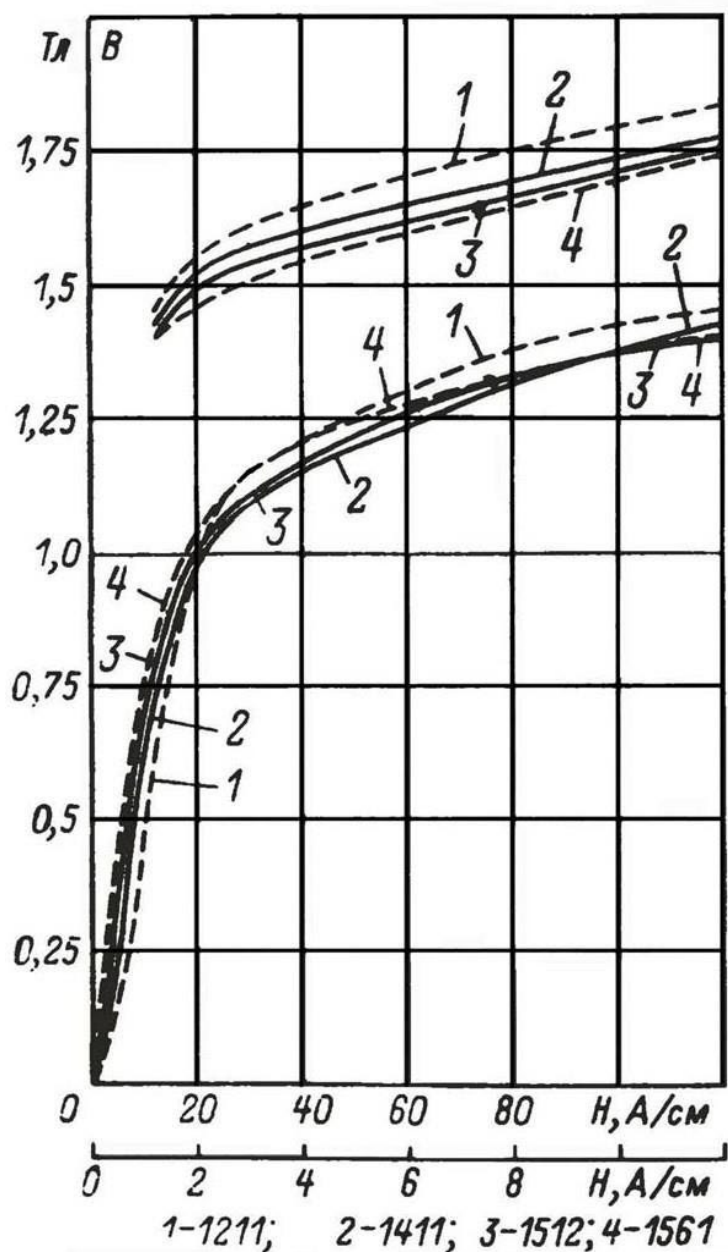
1. Охарактеризуйте известные вам типы нелинейных резистивных, индуктивных и емкостных элементов.
2. Какое влияние оказывает нелинейный элемент на процессы, протекающие в электрической цепи синусоидального тока?
3. Чем обусловлены потери в сердечниках нелинейных индуктивных катушек?
4. Чем обусловлены потери в ферромагнитном сердечнике?
5. Назовите наиболее распространенные методы анализа и расчета нелинейных цепей переменного тока.
6. Дайте понятия феррорезонансных цепей.
7. Какие методы используются для расчета феррорезонансных цепей?
8. Что такое триггерный эффект?
9. Что такое феррорезонанс токов и напряжений?
10. Дайте определения понятий «индуктивность рассеяния», «намагничивающий ток» и «ток потерь».

Таблица А.1 – Оригиналы и их изображения по Лапласу

Оригинал	Изображение
$E = \text{const}$	E/p
$\delta(t)$	1
t	$1/p^2$
e^{-at}	$1/(p+a)$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
te^{-at}	$1/(p+a)^2$
$(1-at)e^{-at}$	$\frac{p}{(p+a)^2}$
$\frac{1}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{ab} + \frac{1}{b-a}(\frac{e^{-bt}}{b} - \frac{e^{-at}}{a})$	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$
$\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{e^{-at}}{a^2}$	$\frac{1}{p^2(p+a)}$
$\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at}(1+at))$	$\frac{1}{p(p+a)^2}$
$e^{j(\omega t + \psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{(p-j\omega)}$
$\cos \omega t$	$p/(p^2 - \omega^2)$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p^2 - \omega^2)}$
$\cos(\omega t + \psi)$	$\frac{p \cos \psi - \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t + \psi)$	$\frac{(p+a) \cos \psi - \omega \sin \psi}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t + \psi)$	$\frac{(p+a) \sin \psi - \omega \cos \psi}{(p+a)^2 + \omega^2}$

Таблица А.2 – Кривые намагничивания сталей 1211, 1411, 1512, 1561

	H, A/см																		
Марка Стали	0	0,2	0,4	1	1,4	1,8	2,4	4	6	8	10	12	14	18	22	24	40	80	120
1211,В, Тл	0	0,03	0,11	0,53	0,73	0,90	1,10	1,23	1,32	1,38	1,42	1,45	1,48	1,54	1,57	1,59	1,64	1,75	1,83
1411,В, Тл	0	0,04	0,18	0,67	0,81	0,92	1,05	1,14	1,23	1,30	1,38	1,42	1,46	1,50	1,53	1,55	1,59	1,69	1,78
1512,В, Тл	0	0,11	0,35	0,73	0,87	0,96	1,06	1,16	1,25	1,32	1,37	1,40	1,44	1,48	1,50	1,51	1,57	1,68	1,76
1561,В, Тл	0	0,20	0,44	0,75	0,88	0,98	1,11	1,20	1,27	1,32	1,37	1,40	1,42	1,44	1,46	1,47	1,54	1,65	1,74



Список рекомендуемой литературы

Основная учебная литература

1. **Нейман, Л. Р.** Теоретические основы электротехники: учеб. для вузов / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчан. – СПб. : Энергоиздат, 2003. – 467 с.
2. **Бессонов, Л. А.** Теоретические основы электротехники – методические указания и контрольные задания / Л. А. Бессонов. – М. : Высшая школа, 2001. – 128 с.
3. **Зевеке, Г. В.** Основы теории цепей: учеб. для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин. – М.: Энергоиздат, 2001. – 528 с.
4. **Сборник задач по теоретическим основам электротехники:** учеб. пособие для студентов энергетических и приборостроительных специальностей вузов / под ред. Л. А. Бессонова – М. : Высшая школа, 2000. – 289 с.

Дополнительная литература

1. **Новгородцев, А. В.** 30 лекций по теории электрических цепей / А. В. Новгородцев. – СПб. : Политехника, 1996. – 347 с.
2. **Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники:** учеб. пособие для студентов / под ред. П. А. Ионкина. – М.: Энергоиздат, 1982. – 768 с.
3. **Шебес, М. Р.** Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах / М. Р. Шебес. – М. : Высшая школа, 1998. – 655 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по организации лабораторных работ обучающихся
по дисциплине «Теоретические основы электротехники»
для студентов направления подготовки /специальности
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
Направленность (профиль) Цифровые технологии в электроэнергетике

Содержание

Лабораторная работа 5. Исследование электрических цепей при действии несинусоидальных токов

Лабораторная работа 6. Исследование переходных процессов в цепях первого порядка

Лабораторная работа 7. Исследование переходных процессов в цепях второго порядка

Лабораторная работа 8 Исследование формы токов в нелинейных цепях при гармоническом воздействии

Лабораторная работа 9 Исследование формы токов в нелинейных цепях при гармоническом воздействии

Лабораторная работа 10 Исследование формы токов в нелинейных цепях при гармоническом воздействии

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ТОКОВ

Цель и содержание

Цель работы: Экспериментальное исследование входных и передаточных характеристик последовательного контура, исследование влияния характеристик цепи на преобразование спектра сигнала.

Содержание работы:

1. Изучение спектра сигналов синусоидальной и несинусоидальной форм.
2. Исследование частотных характеристик колебательного RLC -контура.
3. Исследование влияния характеристик колебательного контура на преобразование спектра сигнала.

Теоретическое обоснование

1 Спектральное представление периодических сигналов

Один из путей анализа цепей при действии несинусоидальных сигналов основан на представлении действующих в цепи несинусоидальных сигналов в виде совокупности синусоидальных составляющих гармоник с различными частотами – спектрами сигнала.

Математической базой для спектрального представления сигналов являются аппарат рядов Фурье для периодических функции и интегралов Фурье – для непериодических.

Периодические сигналы несинусоидальных форм состоят, в общем случае, из гармоник с частотами, кратными основной частоте f_1 :

$$f_1 = \frac{1}{T}, 2f_1, 3f_1, 4f_1, \dots, \quad (1)$$

где T – период сигнала несинусоидальной формы.

Таким образом, каждый сигнал можно представить или как совокупность мгновенных значений, т. е. во временной форме $f(t)$, или как совокупность напряжений (токов) на различных частотах – в спектральной форме $F(j\omega)$. Прибор, который позволяет получить спектральные характеристики сигналов, называется анализатором спектра.

Например, синусоидальное напряжение во временной форме имеет вид (рисунок 1 а), а в спектральной форме (рисунок 1 б).

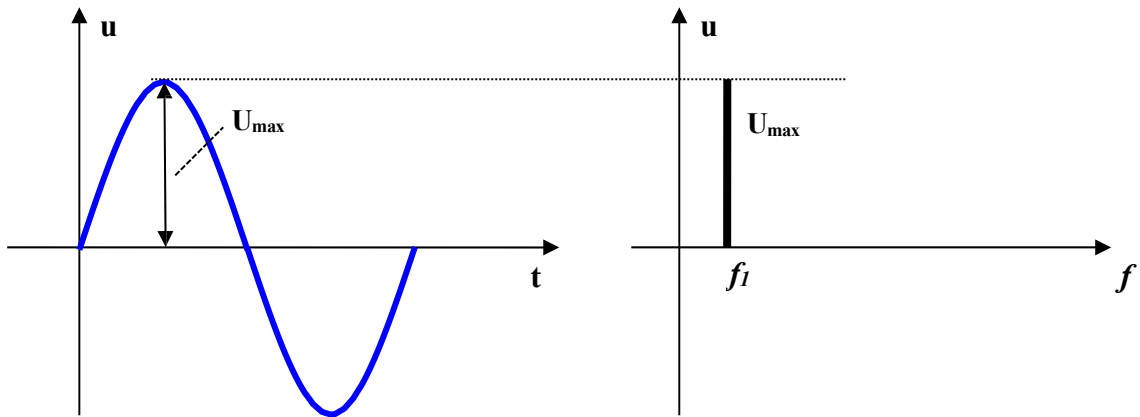


Рисунок 1 – Временная (а) и спектральная (б) характеристики синусоидального сигнала

Аналогично, напряжение прямоугольной формы (рисунок 2 а) имеет спектр, показанный на (рисунок 2 б).

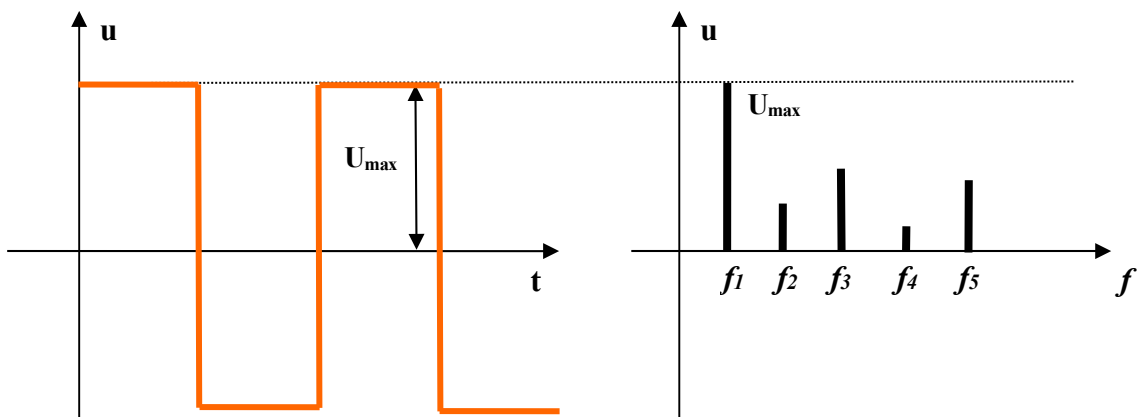


Рисунок 2 – Временная (а) и спектральная (б) характеристики сигнала прямоугольной формы

2 Частотные свойства последовательного колебательного контура

При анализе процессов преобразования сигналов электрическими цепями представляет интерес исследование зависимостей передаточных и входных функций рассматриваемой цепи от частоты. При данной частоте передаточная функция является комплексным числом

$$\underline{K}(j\omega) = \frac{F_1}{F_2} K(\omega) e^{j\theta(\omega)}, \quad (2)$$

где $K(\omega)$ – модуль выражает отношение действующих значений (или амплитуд) выходного и входного синусоидальных сигналов (напряжений);

$\theta(\omega)$ – аргумент, определяющий фазовый сдвиг между выходной и входной величинами

$$\theta(\omega) = \psi_1 - \psi_2, \quad (3)$$

где ψ_1, ψ_2 – начальные фазы обоих сигналов.

График частотной зависимости модуля передаточной функции $K(\omega)$ называется **амплитудно-частотной характеристикой**, а график зависимости аргумента передаточной функции от частоты – **фазо-частотной характеристикой**. Обе зависимости, построенные в широком частотном диапазоне, дают наглядное представление о характере передачи сигналов данной цепью.

Частотные зависимости действующих значений тока $I(\omega)$ в последовательном колебательном контуре (рисунок 3) и напряжений на его элементах $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$, $U_R(\omega)$ определяются частотной зависимостью полного сопротивления контура (рисунок 4)

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \\ I(\omega) &= U / Z(\omega), & U_R(\omega) &= I(\omega)R, \\ U_L(\omega) &= \frac{\omega L}{Z(\omega)} U, & U_C(\omega) &= \frac{U}{Z(\omega)C\omega}. \end{aligned} \quad (4)$$

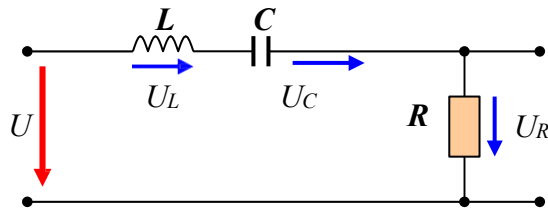


Рисунок 3 – Последовательный колебательный контур

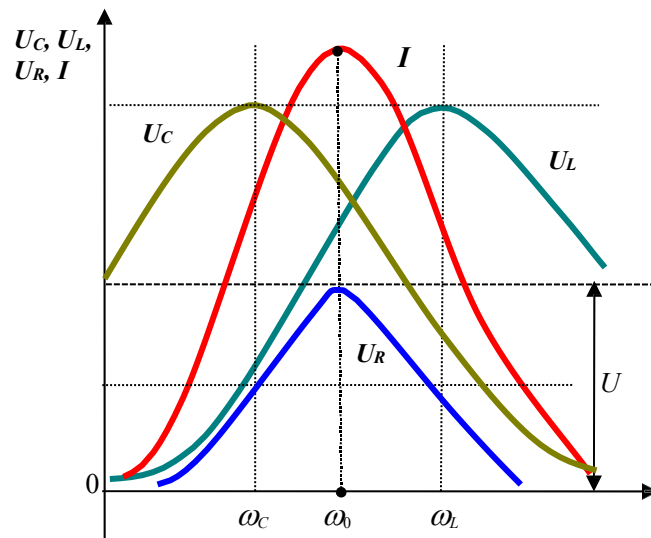


Рисунок 4 – Зависимости действующих значений тока и напряжений на элементах последовательного контура от частоты

Зависимости $I(\omega)$ и $U_R(\omega)$ имеют максимум на резонансной частоте:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (5)$$

Тогда

$$I(\omega) = U/R, \quad U_R(\omega_0) = U. \quad (6)$$

На резонансной частоте напряжения U_L и U_C равны:

$$U_C(\omega_0) = U_L(\omega_0) = \frac{U \sqrt{L/C}}{R} = U \cdot Q, \quad (7)$$

где

$$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R}, \quad (8)$$

Q – добротность контура.

Если рассматривать напряжение U_R в качестве выходного сигнала цепи, то передаточная функция будет иметь вид:

$$K(j\omega) = U_R / U = R / Z(j\omega). \quad (9)$$

Амплитудно-частотная характеристика $K(\omega)$ при резонансе имеет максимум, равный единице. Частоты $\omega_1(\omega_C)$ и $\omega_2(\omega_L)$, при которых значение $K(\omega)$ уменьшается до $\frac{1}{\sqrt{2}}$, называются граничными и определяются как

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{-RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC}, \\ \omega_2 &= \frac{RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC}. \end{aligned} \quad (10)$$

Разность частот $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ ($f_2 - f_1 = \Pi$) называется полосой пропускания цепи и определяет диапазон частот, в котором отличие сигнала на выходных клеммах цепи не превосходит $\sqrt{2}$ от своего максимального значения. Используя выражения граничной частоты, для полосы пропускания последовательного контура можно записать:

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L}. \quad (11)$$

Отношение резонансной частоты к полосе пропускания определяет добротность контура

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{\sqrt{LC}}{R} = Q. \quad (12)$$

Таким образом, чем выше добротность резонансного контура, тем уже ширина полосы пропускания. Это свойство колебательных контуров используется на практике для выделения сигнала данной частоты из совокупности различных частот.

3 Влияние характера цепи на преобразование спектра сигнала

Расчёт реакции цепи на действие несинусоидального сигнала $f_1(t)$ сводится к определению спектра входного периодического сигнала

$$F_1(j\omega k). \quad (13)$$

Это преобразование осуществляется с помощью прямого преобразования Фурье. Далее спектральные характеристики выходного сигнала $F_2(j\omega)$ находят умножением $F_1(j\omega)$ на передаточную функцию цепи

$$F_2(j\omega) = F_1(j\omega) \cdot K(j\omega). \quad (14)$$

Если реакция цепи определяется на той же паре зажимов, к которой приложено напряжение, то вместо передаточной функции используют входную проводимость $Y(j\omega)$ или входное сопротивление $Z(j\omega)$:

$$I_1(j\omega) = U_1(j\omega) \cdot Y(j\omega) \quad \text{или} \quad U_1(j\omega) = I_1(j\omega) \cdot Z(j\omega). \quad (15)$$

Для нахождения временной зависимости искомой величины $f_2(t)$ используют формулы обратного преобразования Фурье.

Пример: Амплитудный спектр тока в последовательном контуре при действии периодического напряжения прямоугольной формы U_1 (рисунок 2а) можно найти как

$$I_1(\omega k) = Y(\omega k) \cdot U_1(\omega k) = \frac{1}{Z(\omega k)} \cdot U_1(\omega k), \quad (16)$$

$$\text{где } U_1(\omega k) = \frac{U_M}{\pi(2k+1)}; \quad k = 1, 2, 3, \dots;$$

U_M — амплитуда входного импульса;

$$Z(\omega k) = \sqrt{R^2 + (\omega k - 1/\omega k C)^2};$$

$$\omega k = (2k+1) \cdot (2\pi/T) = 2\pi f(2k+1).$$

Рассмотрим прохождение сигналов произвольной формы через последовательный колебательный контур:

а) если к входу контура приложено напряжение гармонической формы с частотой f и контур настроен на эту же частоту $f_0 = f$, то напряжение на входе контура будет иметь гармоническую форму вне зависимости от добротности контура и полосы пропускания цепи;

б) если к входу контура приложено негармоническое напряжение, то форма выходного напряжения будет зависеть от полосы пропускания контура, которая, в свою очередь, определяется его добротностью.

Примем, что к входу контура приложено напряжение, линейчатый спектр которого показан на рисунке 6, а резонансная частота контура $f_0 = f_1$.

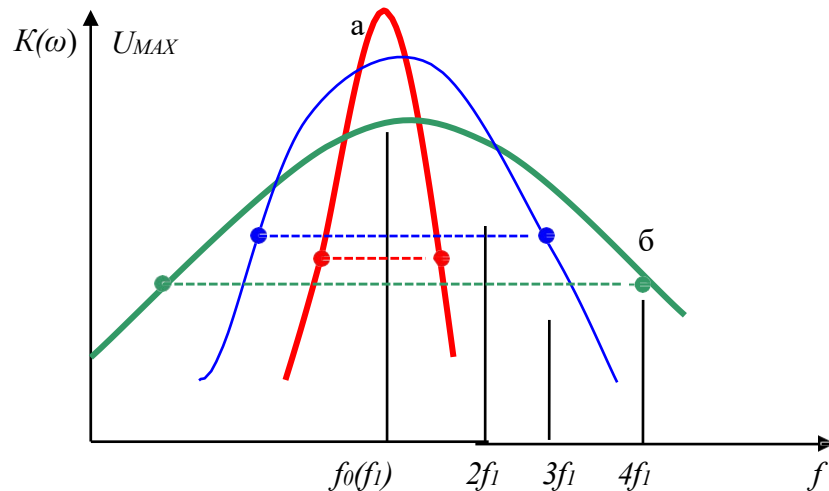


Рисунок 6 – Прохождение спектра сигнала в контурах с различной добротностью

Если контур обладает большой добротностью, то полоса пропускания будет узкой (рисунок 6а) и через контур пройдут колебания только с частотой f_1 , а все остальные частоты останутся за пределами полосы пропускания. Напряжение на выходе контура будет синусоидальным, так как его форма состоит из одного спектра сигнала (первой гармоники). Таким образом, из-за большой добротности форма и спектр выходного сигнала будут отличаться от формы и спектра входного, т.е. сигнал при прохождении через контур претерпевает искажения. При уменьшении добротности контура полоса пропускания расширяется и на выходе контура оказываются напряжения не только с частотой f_1 , но и с другими частотами (рисунок 6б), а форма выходного напряжения становится отличной от синусоидальной.

Если бы коэффициент передачи контура ($K(\omega)$) на всех частотах был одинаковым, то форма выходного напряжения совпадала с формой входного, но так как $K(\omega)$ в зависимости от частоты различен, то формы напряжения на входе и выходе контура отличаются. Например, чтобы передать сигнал 1 без искажений, необходимо иметь контур с такой добротностью, при которой весь спектр данного сигнала оказывается в пределах полосы пропускания контура (рисунок 7), а спектр сигнала 2, который необходимо не пропустить через контур, находился бы за пределами полосы пропускания. Напряжения, получающиеся на выходе контура от сигнала 2, будут при этом значительно ослаблены по сравнению с напряжениями того сигнала, на который данный контур настроен. Таким образом, колебательный контур обладает избирательными, а, следовательно, и фильтрующими свойствами.

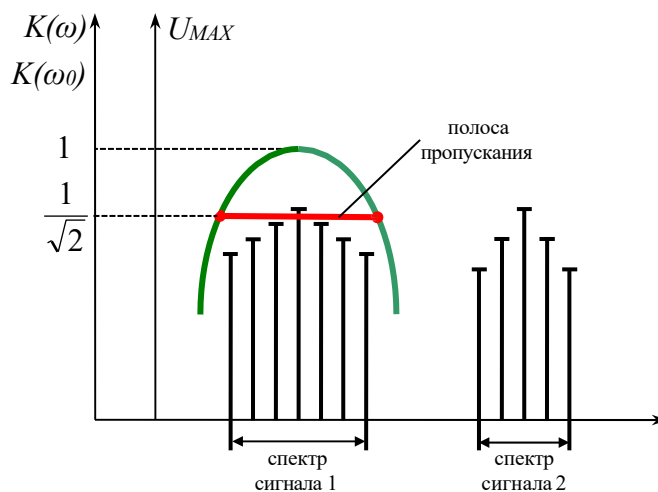


Рисунок 7 – Фильтрация входных сигналов

Аппаратура и материалы

Для выполнения работы необходим специализированный лабораторный стенд «Луч», включающий в себя: комплексы источников электрических сигналов, исследуемых элементов и устройств и измерительных приборов.

Комплекс источников сигналов включает в свой состав: генератор сигналов, преобразователь и усилитель мощности.

Генератор вырабатывает сигналы гармонической и прямоугольной разнополярной формы в диапазоне частот от 200 Гц до 200 кГц с разбивкой на три диапазона: 200 Гц – 2 кГц; 2 кГц – 20 кГц; 20 кГц – 200 кГц. Схема генератора построена по классу RC-генераторов с использованием современной элементной базы. Преобразователь осуществляет преобразование сигналов фиксированной частоты $f = 2$ кГц, поступающих с генератора сигналов в сигналы различных форм и обеспечивает регулировку выходных сигналов по амплитуде, размаху и скважности.

Комплекс измерительных приборов содержит в своем составе следующие измерительные приборы: двухлучевой осциллограф, анализатор спектра и измерители напряжения и фазы. Двухлучевой осциллограф состоит из двух блоков – электронного коммутатора (ЭК) и осциллографа (ОСЦ).

Измеритель напряжения U_2 измеряет действующее значение переменной величины и имеет пределы измерения (0,1 – 1 – 10 – 100) с автоматическим переключением пределов измерения и световой индикацией используемого предела. Измеритель напряжения и фазы U_3 представляет собой комбинированный аналоговый электронный прибор, совмещающий в себе функции электронного вольтметра с пределами измерения 1 В и 10 В и электронного фазометра с пределами измерения фазы $\pm 90^\circ$. Анализатор спектра обеспечивает выделение гармонических составляющих на фиксированных частотах (2, 4, 6, 8 и 10) кГц при размахе входного напряжения от 0,1 до 1,0 В.

Указания по технике безопасности

1. Перед началом занятий в лаборатории необходимо ознакомиться с настоящими методическими указаниями и пройти инструктаж по «Технике безопасности для студентов, выполняющих учебные занятия в лабораториях кафедры теоретической и общей электротехники» Северо-Кавказского госу-

дарственного технического университета. Инструктаж фиксируется преподавателем в журнале. Студенты, не прошедшие инструктаж по технике безопасности, к работе не допускаются.

2. Перед началом сборки цепи следует убедиться в том, что стенд обесточен. Во время сборки схемы нужно прокладывать провода так, чтобы было меньше их пересечений. Неиспользованные соединительные провода следует убрать с лабораторного стола.

3. Собранная цепь должна быть проверена преподавателем и может включаться только по его разрешению. Преобразования схем нужно производить только при выключенном напряжении, которые проверяются преподавателем.

4. Все работы на установках должны производиться не менее чем двумя студентами. О включении напряжения следует предупредить всех членов бригады, совместно выполняющих эту работу.

5. В ходе работы запрещается оставлять включенную цепь без наблюдения. После окончания испытания или при перерыве в работе исследуемую цепь отключают от сети тумблером «Сеть». Разборку цепи осуществлять только с разрешения преподавателя и после предъявления ему протокола испытаний.

6. При неисправностях в аппаратах, приборах, проводах исследуемую цепь отключают и сообщают об этом преподавателю.

Методика и порядок выполнения работы

1 Изучение спектра сигналов синусоидальной и несинусоидальной форм

1.1 Убедиться, что сигнал синусоидальной формы состоит из одной спектральной составляющей, а сигналы, отличные от гармонических, например, прямоугольный – из нескольких спектральных частот. Для этого необходимо проделать следующее:

- а) включить на блоке питания тумблеры: «сеть», «генератор», «коммутатор осциллограф», «анализатор спектра»;
- б) тумблер «генератор» на блоке Г1 установить в позицию «внутри»;
- в) переключатель P_{ϕ} на блоке Г2 установить в 3-ю позицию «»;
- г) тумблер блока анализатора спектра – в положение «внутри» (верхнее);
- д) тумблер «пределы» на блоке Г-3 – в положение «1В», регулятором выходного напряжения установить стрелку вольтметра $V-I$ на отметку 30 по верхней шкале (входное напряжение равно 0,3 В);
- е) на ЭК (регуляторах осциллографа) тумблер «каналы» установить в среднее положение (включены оба канала); тумблер первого канала – в положение «внутри», а тумблеры «ослабление» обоих каналов – в позицию 1:10; регуляторы «усиление» и «расхождение» – в положения, при которых на экране осциллографа оказываются два изображения верхнее – временное (синусоидальная кривая с размахом в 2 клетки) и нижнее – спектральное (одна тонкая вертикальная линия в левой части экрана размером в 3 клетки).

Иметь в виду, что при включенном анализаторе спектра регулятор «развертка» автоматически отключается, количество периодов на экране осциллографа остается постоянным и не может быть изменено какими-либо внешними регуляторами. Получившееся нижнее изображение – это спектр сигнала синусоидальной формы, состоящий из одной спектральной линии

Регулятором напряжения на блоке Г-3 медленно изменять напряжение от 0,3 до 0,5 В, при этом размах синусоидальной кривой напряжения и длина спектральной линии будет изменяться, но новых спектральных линий образовываться не будет. Зарисовать временное и спектральное изображения при выходных напряжениях 0,3 и 0,5 В.

1.2 Переключатель P_{ϕ} на блоке Г-2 перевести в позицию «»;

регулятор «подстройка P » повернуть до отказа против часовой стрелки, а регулятором напряжения на блоке Г-3 установить выходное напряжение 0,3 В. Убедиться, что временная форма напряжения отлична от гармонической, а

спектр состоит из нескольких спектральных линии (следовательно, из нескольких частот) с различными амплитудами.

Медленно изменять входное напряжение от 0,3 до 0,5 В. Убедиться, что изменение размаха временного сигнала влечёт изменение размера спектральных линий. Зарисовать, получающиеся изображения при 0,3 и 0,5 В. Установить на вольтметре «V-1» напряжение 0,5В, затем медленно поворачивать регулятор «подстройка П» по часовой стрелке. При этом форма выходного напряжения станет изменяться и, следовательно, будет изменяться спектральный состав сигнала. Зарисовать три характерных изображений.

2 Исследование частотных характеристик колебательного RLC-контура

В данном пункте работы исследуются частотные зависимости тока в контуре, который оценивается по падению напряжения на R_{III} , и напряжения на емкости U_C (рисунок 8).

2.1 Собрать цепь по схеме рисунка 8. Установить на магазине сопротивлений величину $R_m = 80$ Ом. При сборке иметь в виду, что линии, показанные на рисунке пунктирами, собраны внутри стенда постоянно, а сопротивление $R_L = 25$ Ом является резистивным сопротивлением катушки L . Записать в таблицу 1 параметры соответствующих элементов C и L .

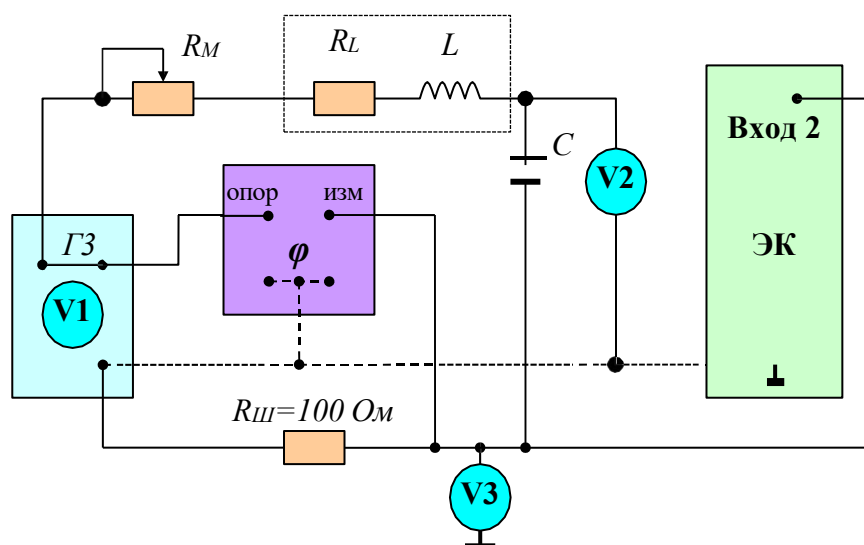


Рисунок 8 – Схема исследуемого колебательного контура

2.2 Регуляторы на блоках установить в следующие позиции:

- а) на блоке питания включить тумблеры « V_2 » и « $V_3-\varphi$ »;
- б) тумблер «анализатор спектра» перевести в положение «выкл.»;
- в) на блоке Г-1 тумблер «генератор» – в положение «внутр.»; переключатель диапазонов – в позицию (2–20) кГц, регулятор частоты повернуть до отказа против часовой стрелки (установить наименьшую частоту диапазона);
- г) на блоке ГШ-2 переключатель $П_\phi$ – в первое положение с изменением частоты сигнала ($f-var$ «»);
- д) на блоке Г-2 тумблер «пределы» – 10 В и плавным регулятором установить выходное напряжение 2 В;
- е) на ЭК осциллографа установить:
 - тумблеры первого канала в положение «внутр» с ослаблением 1:10;
 - регуляторы «вход X», «развертка» и «усиление» – в такие положения, при которых на экране укладывается один период синусоиды при размахе две клетки;
 - тумблер ослабление второго канала в положение 1:10, а регулятор «усиление» повернуть до отказа по часовой стрелке;
 - регуляторы «расхождение» на ЭК и «» на блоке ЭЛТ установить в такие положения, при которых синусоида первого канала касается верхней клетки сетки, а синусоида 2-го канала находится в центре экрана.

Так как частота генератора при таком положении регуляторов меньше резонансной частоты контура (f_0), то входное сопротивление контура имеет емкостной характер, на фазометре должен светиться индикатор «С»(+). Занести в таблицу 1 показания приборов V_1 , V_2 , V_3 и φ . Зарисовать изображение с экрана осциллографа.

Примечание: Измерительный блок « $\varphi - V_3$ » может быть использован для измерения фазы и действующего значения напряжения. При использовании измерительного блока « $\varphi - V_3$ » в качестве вольтметра тумблер «вид работы» перевести в положение « V », а в качестве фазометра – в положение « φ ».

2.3 Медленно увеличивать частоту регулятором на блоке Г-1. При этом внешняя частота станет приближаться к резонансной частоте (f_0). Фазный угол уменьшается, а действующее значение тока в цепи и напряжение на конденсаторе – увеличиваются. Найти частоты, при которых фазный угол равен: $+70^\circ$, $+60^\circ$, $+45^\circ$, $+30^\circ$, $+15^\circ$. Показания приборов занести в таблицу 1.

Зарисовать изображения кривых на экране осциллографа. Обратить внимание, что при частотах, меньших резонансной, характер цепи является емкостным и синусоида тока опережает синусоиду напряжения.

2.4 Увеличивать частоту до тех пор, пока фазометр не покажет значение, близкое к нулю, что является признаком резонанса в цепи. При этом ток в контуре будет иметь наибольшее значение. Определить f_0 , записать показания приборов и зарисовать изображение с экрана осциллографа (кривые напряжения и тока совпадают по фазе).

2.5 Продолжать медленно увеличивать частоту. Так как внешняя частота теперь оказывается больше резонансной, то характер цепи станет индуктивным (на фазометре должен светиться индикатор «L»(–)). Фазный угол будет возрастать, а кривая тока уменьшится по амплитуде и будет отставать от кривой напряжения, что соответствует индуктивному характеру цепи. Найти частоты, при которых $\varphi = -15^\circ$, -30° , -45° , -60° , -70° .

Показания приборов при этих частотах занести в таблицу 1.

2.6 Исследование частотных зависимостей при больших потерях в контуре. Для этого необходимо установить наименьшую частоту диапазона, т.е. плавный регулятор «частота» на блоке Г-1 повернуть до отказа против часовой стрелки. Увеличить сопротивление магазина в 4 раза ($R_M=320 \text{ Ом}$). Повторить измерения при этом значении R_M согласно пунктам 2.1...2.5.

2.7 Исследование частотных зависимостей при других параметрах емкости. Регулятором частоты установить наименьшую частоту диапазона на блоке Г-1. Установить на магазине сопротивлений исходное сопротивление

$R_M=80$ Ом, вместо конденсатора C_A , подключать конденсатор C_B . Повторить измерения согласно пунктам 2.1...2.5.

3 Исследование влияния характеристик колебательного контура на преобразование спектра сигнала

3.1 Установить плавным регулятором «частота» на блоке Г-1 резонансную частоту f_0 . Переключатель $П_\phi$ на блоке Г-2 – в положение « $f - var \rightarrow \square$ ». Входное напряжение при этом станет прямоугольным (состоящим из нескольких частот), но ток в цепи останется близкий к синусоидальной форме, так как контур при данной добротности обладает такой полосой пропускания, через которую проходит одна из спектральных частот, образующих сигнал прямоугольной формы.

Если сигнал состоит из одной частоты, то форма сигнала синусоидальная, поэтому напряжение прямоугольной формы вызывает ток не прямоугольной, а синусоидальной формы. Сопротивление контура на резонансной частоте мало, а на частотах, отличных от резонансной – велико, поэтому токи на остальных частотах малы и практически не сказываются на его форме.

Увеличить сопротивление R_M до 5 кОм. При этом добротность контура будет уменьшаться (полоса пропускания расширяться), а частоты, отличные от резонансных, будут проходить с меньшим ослаблением. Кривая тока будет приближаться к форме воздействующего напряжения. Изменяя R_M от 80 Ом до 5 кОм зарисовать изображения при трёх значениях R_M .

Примечание: При выполнении экспериментов с входными напряжениями, отличными от гармонических, фазометр показывает случайные значения, т.к. фазометр – прибор, показывающий разность начальных фаз только при напряжении гармонической формы.

3.2 Уменьшить частоту до минимальной (в диапазоне 2–20 кГц). Установить исходное значение сопротивления $R_M = 80$ Ом. Так как на данной ча-

стоте контур не настроен в резонанс на частоты спектра прямоугольного напряжения, то не будет частоты, которая выделялась бы контуром. Поэтому спектр сигнала будет отличным от спектра синусоидального сигнала. Изменять частоту начиная от минимальной до частоты $2f_0$. Наблюдать и зарисовать формы тока при различных значениях частоты. Убедиться, что форма тока близка к синусоидальной при частотах, близких к резонансной.

Содержание отчета и его форма

1. Рассчитать для контура резонансную частоту f_0 , характеристическое сопротивление ρ , добротность Q , относительную полосу пропускания S , абсолютную полосу пропускания Π , граничные частоты f_1 и f_2 последовательного контура (рисунок 9), при $R_{ш}=100$ Ом. Резистивное сопротивление катушки $R_L=25$ Ом. Результаты расчётов занести в таблице 2. Рассчитать для контура с ёмкостью C_B величины f_0 , ρ , Q , Π , S и также занести в таблицу 2.

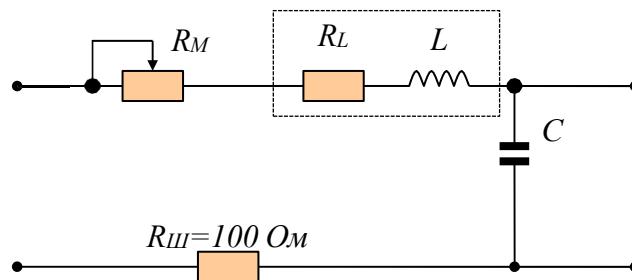


Рисунок 9 – Расчетная схема колебательного контура

2. Построить временные и спектральные характеристики напряжений синусоидальной и прямоугольной формы, наблюдаемые в п.1.

3. По экспериментальным данным пп.2–3 построить частотные характеристики и резонансные кривые:

- а) $\varphi = F(f)$ для $R = R_M$, $R = 4R_M$; б) $I = F(f)$ для $R = R_M$, $R = 4R_M$;
- в) $U_C = F(f)$ для C_1 выбранного согласно варианту и C_B .

4. Построить в масштабе векторные диаграммы RLC-цепи для:

- а) $f = f_0$; б) $f = f_1$ – нижней граничной частоты;

в) $f = f_2$ – верхней граничной частоты.

5. По экспериментальным данным определить для всех условий измерений по п.2: добротность Q ; полосу пропускания Π и сопротивление потерь контура R_K .

6. Рассчитать и построить амплитудные спектры входного напряжения и тока при воздействии на контур периодическим входным напряжением для условий измерения п.3:

1) $f = f_0$, $R_M = 80 \text{ Ом}$; 2) $f = f_0$, $R_M = 5 \text{ кОм}$; 3) $f_{\min} = 2 \text{ кГц}$, $R_M = 80 \text{ Ом}$.

Вопросы для защиты работы

1. Как определить резонансную частоту f_0 , добротность Q цепей?
2. Чему равна реактивная мощность контура в резонансном режиме?
3. Вычислить комплексное входное сопротивление и ток RLC -контура при: а) резонансе; б) расстройке.
4. Определить напряжение на R , L , C при: а) резонансе; б) расстройке.
5. Как найти разность фаз между входным напряжением и током при: а) резонансе; б) расстройке?
6. Как определить ширину полосы пропускания контура?
7. Как рассчитать граничные частоты для последовательного контура?
8. Как изменяться при резонансе ток в цепи I , активная мощность, потребляемая контуром P , напряжения U_R , U_L , U_C , если сопротивление контура R увеличить в два раза?
9. Построить векторные диаграммы при: а) резонансе; б) расстройке.
10. На некоторой частоте $X = X_L - X_C = 2R$. Вычислить Z_{BX} , I_{BX} , φ .
11. Найти мгновенное значение тока i и напряжение на емкостном элементе U_C , если частота генератора равна: а) резонансной f_0 ; б) нижней граничной частоте f_1 ; в) верхней граничной частоте f_2 .
12. Какие способы настройки в резонансе последовательного колебательного контура вы знаете?

13. Изменяется ли абсолютная ширина полосы пропускания Π , если уменьшить в два раза: а) индуктивность; б) ёмкость; в) активное сопротивление контура.

14. Во сколько раз активная мощность, выделяемая в контуре на граничной частоте, отличается от мощности на резонансной частоте?

15. В схеме рисунка 9 контур настроен на резонанс. На какое значение ΔC следует изменить ёмкость C , чтобы контур был настроен не на резонансную, а на граничную частоту?

16. Выберите R, L, C последовательного контура так, чтобы обеспечить $f_0 = 5$ кГц.

17. Изложите основные положения, на которых основана методика расчёта линейных цепей при периодических несинусоидальных токах.

18. Охарактеризуйте физический смысл действующего значения несинусоидального тока.

19. Назовите условие передачи сигнала без искажения.

20. В каких случаях следует ожидать возникновения несинусоидальных токов и напряжений в электрических цепях?

21. Входное напряжение $U_{BX}(t)$ (рисунок 10) содержит первую, третью и пятую гармоники. Как выбрать величины C_1 и C_2 , чтобы в нагрузку R_H проходила только первая гармоника, полагая ω , L_1 и L_2 известными? Сколько решений имеет задача?

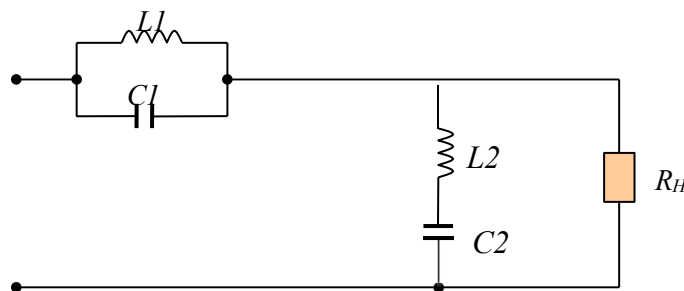


Рисунок 10 – Расчетная схема

Таблица 1 – Результаты исследования частотных характеристик контура

$U_1 =$; $L_A =$; $R_L = 25 \text{ Ом}; R_{III} = 100 \text{ Ом.}$												
, град	$R_M = 80 \text{ Ом},$ $C = C_A$				$R_M = 320 \text{ Ом},$ $C = C_A$				$R_M = 80 \text{ Ом},$ $C = C_B =$			
	$f,$ кГц	$U_3,$ В	$U_2,$ В	$I,$ мА	$f,$ кГц	$U_3,$ В	$U_2,$ В	$I,$ мА	$f,$ кГц	$U_3,$ В	$U_2,$ В	$I,$ мА
+70												
+60												
+50												
+45												
+30												
+15												
0												
-15												
-30												
-45												
-50												
-60												
-70												

Таблица 2 – Результаты расчетов для последовательного контура

При $U_1 = 2 \text{ В}; L =$; $R_L = 25 \text{ Ом}; R_{III} = 100 \text{ Ом.}$														
Условия измерения	$f_0, \text{ кГц}$		$R_K, \text{ Ом}$	Q	S		$\Pi, \text{ кГц}$		$f_1, \text{ кГц}$		$f_2, \text{ кГц}$			
	1	2			1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
$R_M = 80 \text{ Ом},$ $C =$														
$R_M = 320 \text{ Ом},$ $C =$														
$R_M = 80 \text{ Ом},$ $C = C_B =$														

1 – рассчитано теоретически; 2 – получено из эксперимента

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Цель и содержание

Цель работы: Экспериментально изучить переходные процессы в цепях первого порядка при подключении цепи к источнику постоянного и гармонического напряжений.

Содержание работы:

1. Экспериментальное установление законов изменения напряжений и токов в цепях первого порядка при скачкообразном изменении входного напряжения.
2. Исследование переходных процессов в цепи первого порядка при подключении к источнику гармонического напряжения.
3. Определение переходного процесса и установившегося режима при воздействии периодических импульсов напряжения на цепь первого порядка.

Теоретическое обоснование

Переходной процесс – процесс перехода от одного периодического режима работы электрической цепи к другому, отличающемуся от первого. Периодическими режимами являются режимы синусоидального и постоянного тока, а также режим отсутствия тока в ветвях цепи.

Переходные процессы вызываются коммутацией в цепи. Коммутация – замыкание (размыкание) выключателей, обрыв или короткое замыкание.

Физической причиной переходного процесса является наличие в цепях катушек индуктивностей и конденсаторов, т.к. энергия магнитного и электрического полей в этих элементах не может изменяться скачком.

Переходные процессы быстропротекающие. Переходные токи и напряжения на отдельных участках цепи могут достигать больших значений,

опасных для электроустановок. Токи и напряжения переходных процессов необходимо уметь рассчитывать, чтобы на основании расчетных величин переходного процесса разрабатывать меры защиты электрической цепи.

Переходной процесс описывается дифференциальными уравнениями:

- 1) неоднородным – если схема цепи содержит источники ЭДС и тока;
- 2) однородным – если в схеме нет источников ЭДС и тока.

В линейной цепи переходной процесс описывается линейными дифференциальными уравнениями, а в нелинейной – нелинейными дифференциальными уравнениями. Решение линейных дифференциальных уравнений проводят несколькими методами, основные из которых это: классический метод, операторный метод и метод интеграла Дюамеля.

Законы коммутации

1-й закон коммутации: В индуктивном элементе ток непосредственно после коммутации сохраняет свое значение, которое он имел до коммутации $i_L(0_-) = i_L(0_+)$, т.е. ток на индуктивности скачком изменяться не может.

2-й закон коммутации: На емкостном элементе напряжение непосредственно после коммутации сохраняет то значение, которое оно имело перед коммутацией $u_C(0_-) = u_C(0_+)$, т.е. напряжение на емкости скачком не изменяется.

Цепями первого порядка называются цепи RC и RL , поскольку процессы, происходящие в этих цепях, описываются дифференциальными уравнениями первой степени.

Включение RL и RC - цепей на постоянное напряжение

Из курса математики известно, что уравнение, содержащее неизвестную функцию и ее производные, называется дифференциальным уравнением. В случае подключения RL -цепи на постоянное напряжение (рисунок 11) уравнение, составленное по второму закону Кирхгофа:

$$L \frac{di}{dt} + R \cdot i = E. \quad (17)$$

– дифференциальное уравнение, где неизвестная функция – это ток i , а ее производная – $\frac{di}{dt}$. Таким образом, определение тока как функции времени – это и есть решение дифференциального уравнения.

Согласно классическому методу расчета решение линейного дифференциального уравнения равно сумме:

- 1) частного решения неоднородного уравнения;
- 2) общего решения однородного уравнения.

1) Частным решением неоднородного уравнения (17) является постоянный ток $I = \frac{E}{R} = i$, т. к. $di/dt = 0$. Это установившийся режим работы цепи, когда в цепи действует постоянная ЭДС.

2) Общее решение однородного дифференциального уравнения описывает процесс работы цепи без источников. Токи и напряжения этого процесса называют свободными и обозначают $i_{св}$ и $u_{св}$. В линейных цепях свободные составляющие затухают по экспоненциальному закону e^{pt} .

Если RL-цепь без начального запаса энергии $i(0) = 0$ подключить к источнику постоянного напряжения (рисунок 11а), то ток i будет нарастать по закону $i = I_0(1 - e^{-(R/L)t})$ при $t \geq 0$, где i – мгновенное значение тока, а I_0 – установившееся значение тока после коммутации. Напряжение на индуктивной катушке изменяется скачком до значения E , а затем убывает по степенному закону (рисунок 11 б).

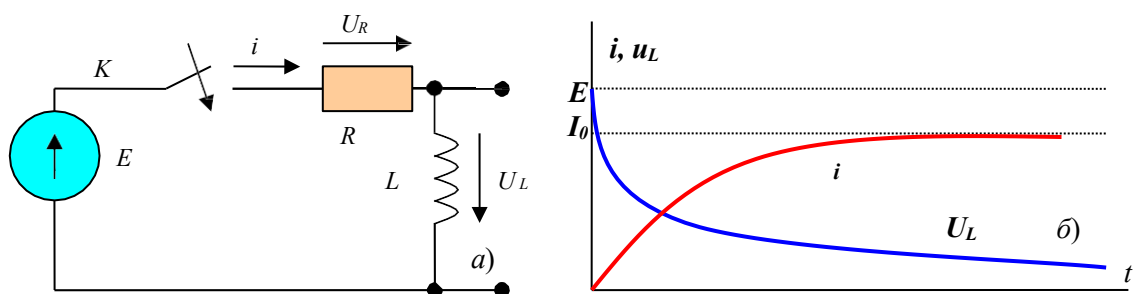


Рисунок 11 – Изменение тока и напряжения в цепи с последовательным соединением R и L при включении на постоянное напряжение

Решение однородного уравнения – показательная функция

$$A \cdot e^{pt}, \quad (18)$$

где A – постоянная интегрирования;

p – корень характеристического уравнения.

Постоянная интегрирования определяется из начальных условий. Начальными условиями являются величины переходных токов на индуктивностях и напряжений на емкостях при $t=0$. Т. е. величины, которые в момент коммутации не могут изменяться скачком. Величины токов в индуктивных элементах (i_L) и напряжений на емкостных элементах (u_C) непосредственно перед коммутацией ($t=0$) – независимые начальные условия. Для всех переходных процессов считается, что момент $t=0$ соответствует моменту коммутации.

Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (17) записывается следующим образом

$$L \cdot p + R = 0. \quad (19)$$

Откуда его корень $p = -\frac{R}{L}$.

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{E}{R} + A. \quad (20)$$

Откуда постоянная интегрирования определяется как $A = -\frac{E}{R}$.

После нахождения A и p получаем решение уравнения (17):

$$i = \frac{E}{R} + A \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = I(1 - e^{-\frac{R}{L}t}). \quad (21)$$

Разбиение токов и напряжений на установившиеся и свободные значения играет вспомогательную роль, так как они являются только расчетными компонентами. Сумма их дает действительное значение тока или напряже-

ния. Ток определяется как сумма свободной и установившейся составляющих: $i = i_Y + i_{CB}$.

Величина $\tau = \frac{L}{R}$ имеет размерность времени [с] и называется постоянной времени цепи. Она характеризует скорость протекания переходного процесса. Чем больше (больше L), тем медленнее затухает свободный ток. За промежуток времени ток убывает в $e=2,718$ раз (рисунок 12).

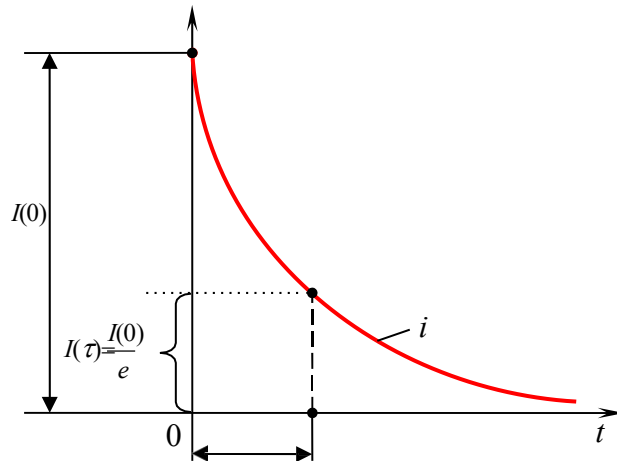


Рисунок 12 – Определение постоянной времени τ

При подключении резистивно-емкостной цепи без начального запаса энергии к источнику постоянной ЭДС E (рисунок 13а) напряжение на конденсаторе u_C изменяется по экспоненциальному закону, ток i нарастает скачкообразно, а убывает по экспоненте (рисунок 13 б).

Постоянная времени $\tau = RC$ характеризует скорость зарядки конденсатора. Чем меньше R или C , тем быстрее заряжается конденсатор. В данном случае напряжение на конденсаторе изменяется согласно уравнению (22)

$$u_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}); \quad i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{при } t \geq 0. \quad (22)$$

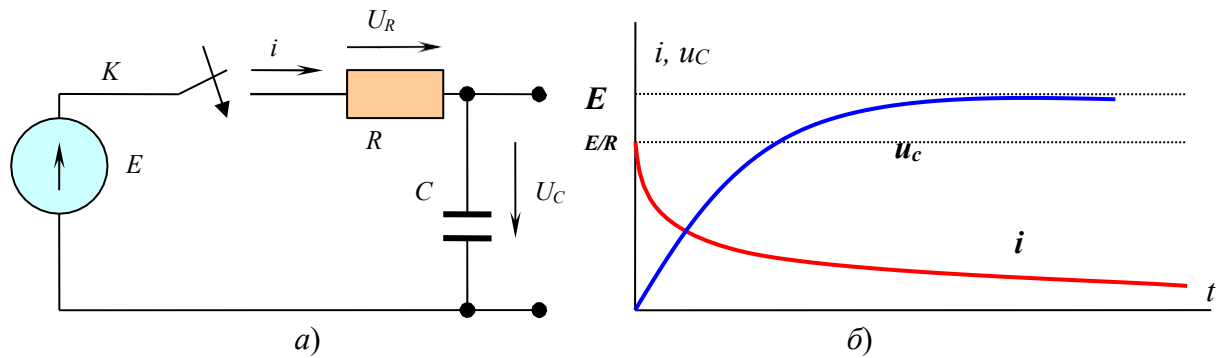


Рисунок 13 – Изменение тока и напряжения в RC -цепи при включении на постоянное напряжение

При подключении цепи к источнику постоянного напряжения ток i (в RL -цепи) или напряжение u_c (в RC -цепи) за время достигает 0,63 от установившегося значения. Теоретически установившиеся значения тока или напряжения достигаются через бесконечно большое время. Существуют различные критерии оценки практического окончания переходного процесса. За время $t = 3\tau$ напряжение на конденсаторе (ток в индуктивной катушке) достигает 0,95 от установившегося значения, а через время $t = 5\tau$ – более 0,99 от установившегося значения.

Кривые изменения напряжения и тока на рисунке 13 б показывают, что напряжение на емкости и ток в цепи не устанавливаются мгновенно. Напряжение возрастает, а ток спадает тем медленнее, чем больше постоянная времени цепи, т. е. чем медленнее затухает свободное напряжение u_{CB} . Аналогичные процессы происходят и при скачкообразном отключении напряжения питания.

Таким образом, если к RL или RC -цепи подключить генератор, ЭДС которого имеет прямоугольную форму, то это будет равносильно тому, что постоянное напряжение периодически отключается и подключается к цепи $(R_{BH} + R)L$ и $(R_{BH} + R)C$, где R_{BH} – внутреннее сопротивление генератора сигналов Π -образной формы (рисунок 14). Чем меньше R в RL -цепи, тем

больше и тем медленнее нарастает и спадает ток. Чем больше R в RC -цепи, тем больше τ , и тем медленнее нарастает и спадает напряжение на конденсаторе (рисунок 15).

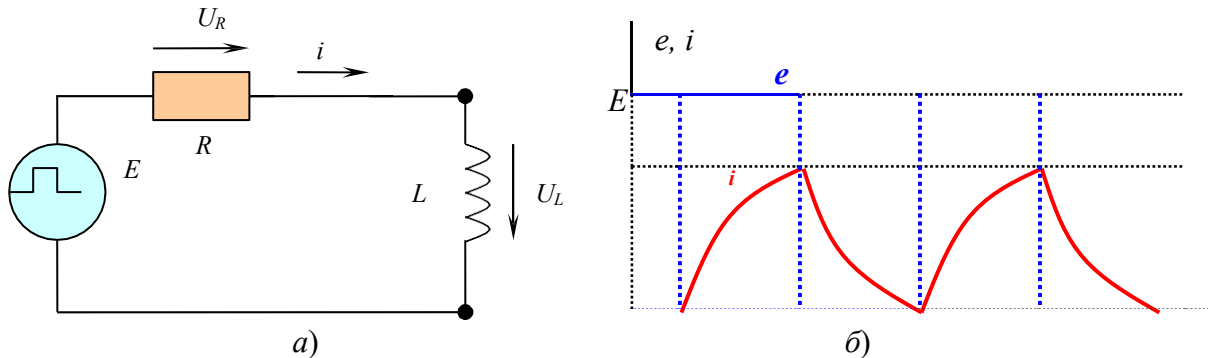


Рисунок 14 – Подключение RL - цепи к генератору прямоугольных импульсов

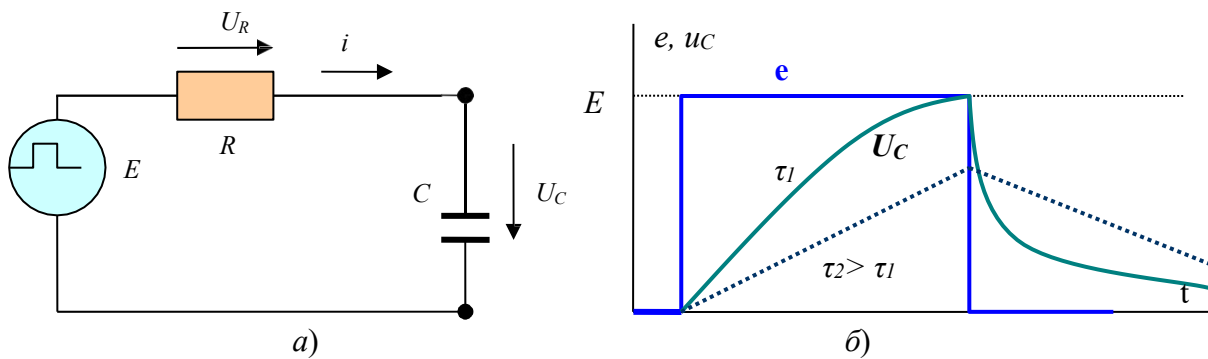


Рисунок 15– Подключение RC - цепи к генератору прямоугольных импульсов

Включение RL -цепи на синусоидальное напряжение

При включении RL -цепи на синусоидальное напряжение $U = U_m \sin(\omega t + \psi)$ устанавливается также синусоидальный ток

$$i = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \phi), \quad (23)$$

где $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, $\tan \phi = \omega L / R$, а свободный ток определяется

$$i_{св} = A e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (24)$$

Тогда ток переходного процесса равен

$$i = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi - \phi) - \frac{U_m}{Z} \sin(\psi - \phi) e^{-t/\tau}. \quad (25)$$

Напряжение на индуктивности

$$U_L = L \frac{di}{dt} = U_m \left[\sin \phi \cdot \sin(\omega t + \psi - \phi + \frac{\pi}{2}) + \cos \phi \cdot \sin(\psi - \phi) e^{-t/\tau} \right]. \quad (26)$$

При $t = 0$ для напряжения на индуктивности получим $U_L(0) = U_m \sin \psi$. Действительно, в момент включения напряжение на индуктивном элементе равно напряжению источника, так как напряжение на резистивном $U_R = Ri$ равно нулю. Кривая тока i изображена на рисунке 16. Она показывает, что по мере затухания тока i_{CB} переходный ток стремится к значению установившегося тока. Однако через промежуток времени от $T/4$ до $3T/4$ после включения, что зависит от угла ψ , ток может достигать значений, превышающих амплитуду установившегося тока.

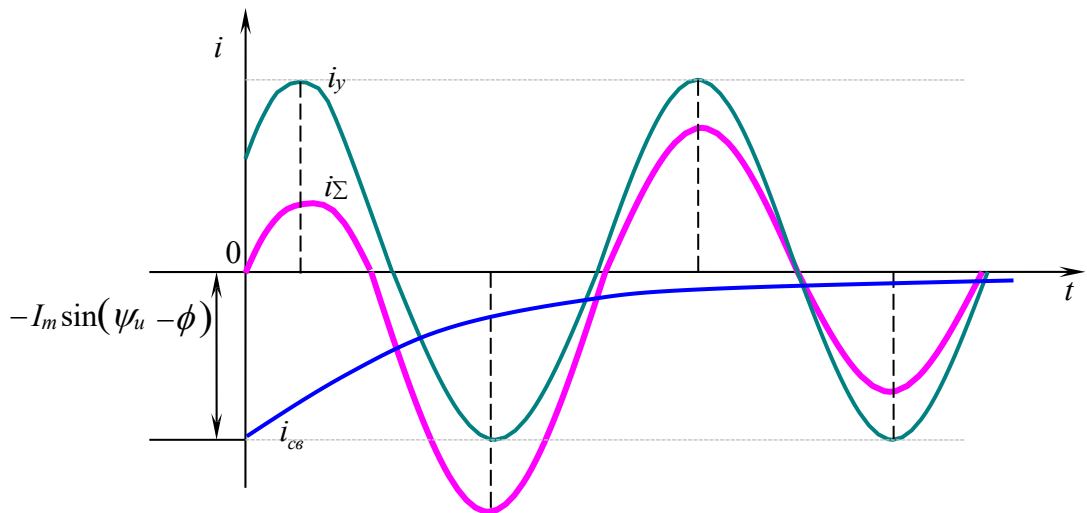


Рисунок 16 – Изменение тока в цепи с последовательными RL -элементами

Наибольшего значения ток достигает, если в момент включения цепи установившийся ток равен амплитуде, т.е. $\psi - \phi = \pi/2$, а постоянная времени цепи велика ($R \approx 0, \tau \rightarrow \infty, \psi \approx \frac{\pi}{2}$), i_{CB} затухает очень медленно. При этих условиях $\psi \approx \frac{\pi}{2}$, и приложенное напряжение в момент коммутации проходит через нулевое значение. Кривая тока при $\psi - \phi = \pi/2$ и достаточно больших значениях τ приведена на рисунке 17.

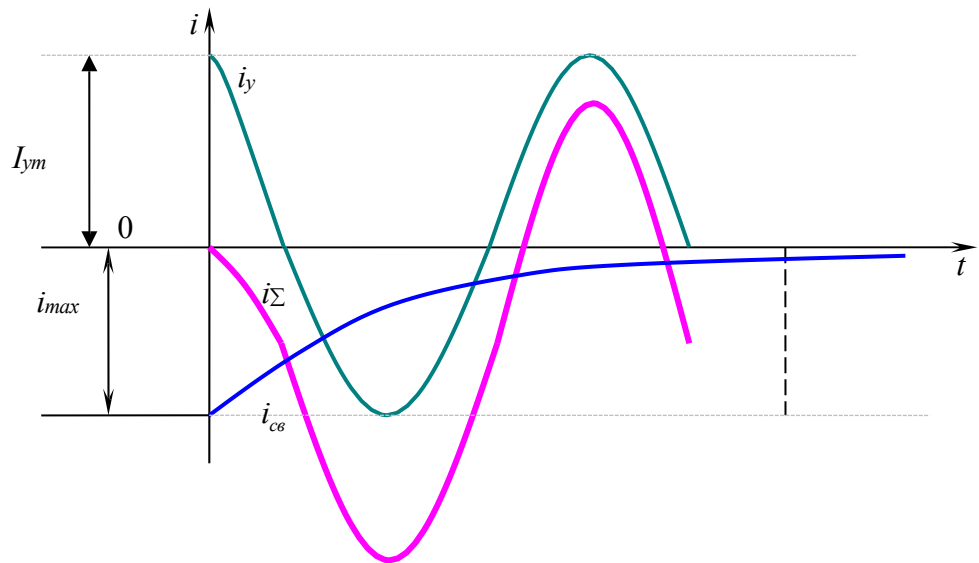


Рисунок 17 – Кривая тока в RL -цепи при τ_{max}

Примерно через половину периода после включения цепи ток достигает почти удвоенной амплитуды установившегося тока $|i_{max}| \approx 2I_{уст}$.

Итак, при включении RL - цепи на синусоидальное напряжение переходный ток ни при каких условиях не может превысить удвоенной амплитуды установившегося тока. Свободный ток вообще не возникает, и в цепи сразу устанавливается установившийся режим, если $\psi - \phi = 0$ или $\psi - \phi = \pi$.

Определение переходного процесса и установившегося режима при воздействии периодических импульсов напряжения и тока

Рассмотрим метод, основанный на непосредственном суммировании токов или напряжений, созданных отдельными импульсами, что реализуется учетом запаздывания последующих импульсов относительно предыдущих. Поясним метод на примере расчета тока в RC -цепи (рисунок 18 а), которая в момент $t = 0$ подключается к источнику, создающему бесконечную последовательность импульсов напряжения, представленную на рисунке 18 б. Вначале определим ток в цепи от воздействия первого импульса напряжения

$U_1 = U(1 - t/t_0)$ при $0 \leq t \leq t_0$ и $U_1 = 0$ при $t \geq t_0$. Переходная функция цепи находится классическим или операторным методами

$$h(t) = \frac{1}{R} e^{-t/RC}. \quad (27)$$

Применяя интеграл Дюамеля при $0 \leq t \leq t_0$, получаем

$$i = U(0)h(t) + \int_0^t U'(\tau)h(t-\tau)d\tau = \frac{U}{R} e^{-t/RC} - \frac{U}{Rt_0} \int_0^t e^{-(t-\tau)/RC} d\tau = \frac{U}{Rt_0} [-RC + (t_0 + RC)e^{-t/RC}]. \quad (28)$$

Для $t \geq t_0$ получаем

$$i = U(0)h(t) + \int_0^{t_0} U'(\tau)h(t-\tau)d\tau = \frac{U}{R} e^{-t/RC} - \frac{U}{Rt_0} \int_0^{t_0} e^{-(t-\tau)/RC} d\tau = K e^{-t/RC}, \quad (29)$$

где $K = \frac{U}{Rt_0} (t_0 + RC - RCe^{t_0/RC})$.

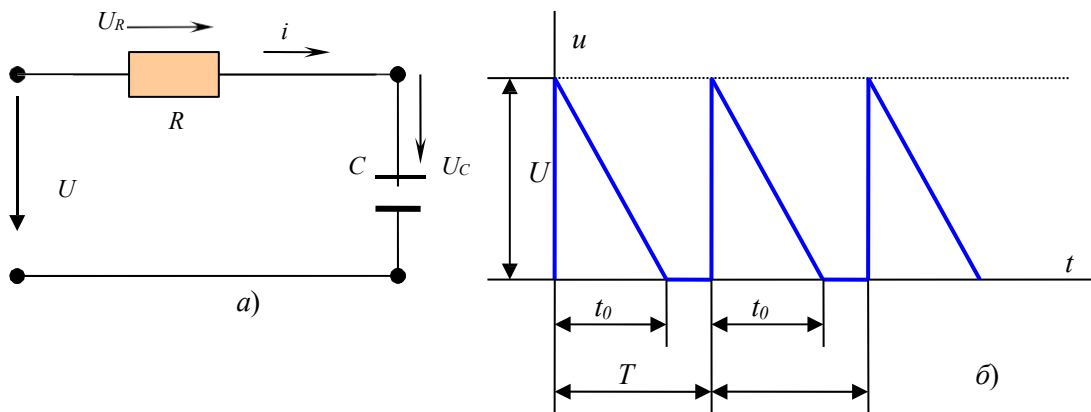


Рисунок 18 – Воздействие импульсов тока и напряжение на RC -цепь

Аппаратура и материалы

Для выполнения работы необходим специализированный лабораторный стенд «Луч», включающий в себя комплексы: источников электрических сигналов; исследуемых элементов и устройств и измерительных приборов.

Комплекс источников сигналов включает в свой состав: генератор сигналов, преобразователь и усилитель мощности – выходной каскад. Генератор вырабатывает сигналы гармонической и прямоугольной разнополярной фор-

мы в диапазоне частот от 200 Гц до 200 кГц с разбивкой на три диапазона: 200 Гц – 2 кГц; 2 кГц – 20 кГц; 20 кГц – 200 кГц.

Преобразователь осуществляет преобразование сигналов фиксированной частоты $f = 2$ кГц, поступающих с генератора в сигналы различных форм и обеспечивает регулировку выходных сигналов по амплитуде, размаху и скважности.

Комплекс измерительных приборов содержит в своем составе: двухлучевой осциллограф, анализатор спектра, измерители напряжения и фазы. Двухлучевой осциллограф состоит из двух блоков – электронного коммутатора (ЭК) и осциллографа (ОСЦ). Измеритель напряжения U_2 измеряет действующее значение переменной величины и имеет пределы измерения (0,1 – 1 – 10 – 100) с автоматическим переключением пределов измерения и световой индикацией используемого предела. Измеритель напряжения и фазы – комбинированный аналоговый электронный прибор, совмещающий в себе функции электронного вольтметра и электронного фазометра.

Комплекс исследуемых элементов и устройств – набор применяемых на практике различных электронных схем и устройств, объединенных в комплексе под названием «Плата активных элементов» и «плата пассивных элементов», на которой размещены различного рода резисторы, индуктивности и емкости. Они предназначены для составления и исследования переходных процессов как первого, так и второго порядков в схемах, состоящих из индуктивных, емкостных и резистивных элементов.

Указания по технике безопасности

Так как лабораторная работа выполняется на специализированных лабораторных стендах «Луч», содержащих стандартный набор элементов и приборов, то при ее выполнении необходимо придерживаться требований к технике безопасности, изложенным в лабораторной работе 5 (страница 12).

Методика и порядок выполнения работы

1 Исследование переходных процессов в RC-цепи

Для исследования переходных процессов тока и напряжения в цепи RC собрать цепь по схеме рисунка 19, подключив конденсатор C_A .

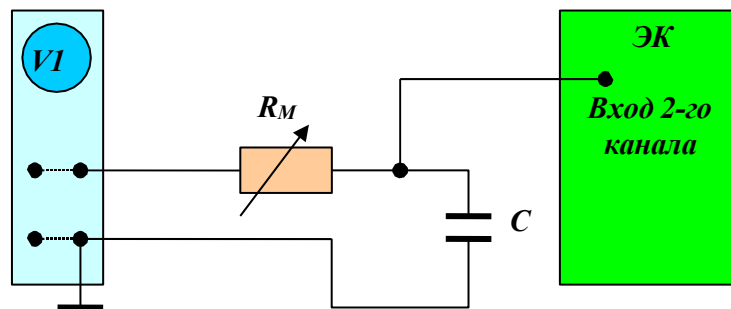


Рисунок 19 – Схема цепи для исследования переходных процессов

1.1. Регуляторы на блоках стенда установить в следующие позиции:

- на блоке питания включить тумблеры «сеть», «генератор», «коммутатор-осциллограф»;
- на блоке Г-1: тумблер «генератор» установить в положение «внутр.», диапазон частот – (0,2-2 кГц);
- на блоке Г-2: переключатель Π_{Φ} – в положение «», регуляторы «подстройка 1 и 2» повернуть до отказа против часовой стрелки;
- на блоке Г-3: тумблер «пределы» в положение – 10 В, регулятором выходного напряжения установить стрелку вольтметра на отметку 30–40 по верхней шкале. При напряжениях, имеющих форму, отличную от гармонической, показания вольтметра V_I представляют условные деления, а не величины напряжения в вольтах. Измерять размах напряжений произвольной формы можно только осциллографом, произведя его калибровку;
- на магазине R_M установить сопротивление 20 Ом;
- на блоке ЭК: тумблер «каналы» – в среднее положение (1+2), тумблеры «ослабление» – 1:10, тумблеры «1 канал» и «вход X» – в положение

«внутр.», при этом к каждому каналу осциллографа будет подведено напряжение прямоугольной формы с периодом 500 мкс (рисунок 20 а).

Регулятор «усил. X» установить в такое положение, при котором размер изображения по горизонтали находится в пределах сетки на экране осциллографа, а регулятор «развертка» – в положение, при котором период каждой кривой занимает 8 клеток, при этом цена клетки по горизонтали получается $500/8 = 62,5$ мкс/кл. Регуляторы «усиление плавно» установить в положения, при которых размах каждого изображения составляет 3 клетки. С помощью регулятора «расхождение» установить кривую напряжения первого канала в верхней части экрана, а второго канала – в нижней. Если длительность импульса и паузы прямоугольного напряжения несколько отличается друг от друга, то регулятором «подстройка 2» на блоке Г-2 сделать эти длительности одинаковыми.

После произведенных установок верхняя кривая будет показывать напряжение, подведенное к входу цепи, а нижняя – напряжение на конденсаторе C_A . Так как при $R_M = 20$ Ом постоянная времени RC-цепи мала ($\tau = RC$), то конденсатор заряжается и разряжается достаточно быстро, поэтому в этом случае кривая напряжения на конденсаторе мало отличается от кривой входного напряжения. Зарисовать получившиеся изображения.

Примечание: при снятии кривых следует зарисовывать и координатную сетку с указанием цены деления, около каждой кривой указывать значения элементов, из которых собрана цепь и постоянную времени этой цепи.

1.2. Устанавливать на магазине R_M сопротивления от 20 до 5120 Ом, наблюдать за изменением кривой напряжения на конденсаторе, зарисовать три характерных изображения.

1.3. По любой величине сопротивления R_M и кривой разрядного напряжения на конденсаторе (рисунок 20 б) определить величину емкости C цепи.

Указание: напряжение на конденсаторе при его разряде на любое сопротивление R определяется выражением:

$$U_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (30)$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени цепи RC . Для момента времени начала разряда конденсатора $t = 0$ и $t = t_1$ (рисунок 20 б) соответственно имеем:

$$U_C(0) = U_0 \quad U_C(t_1) = U_0 e^{-\frac{t_1}{\tau}} \quad (31)$$

Тогда, составив отношение этих двух напряжений и учитывая, что эксперимент выполняется при известном R_M , определяем величину емкости:

$$C = \frac{t_1}{R_M \ln(U_C(0)/U_C(t_1))}. \quad (32)$$

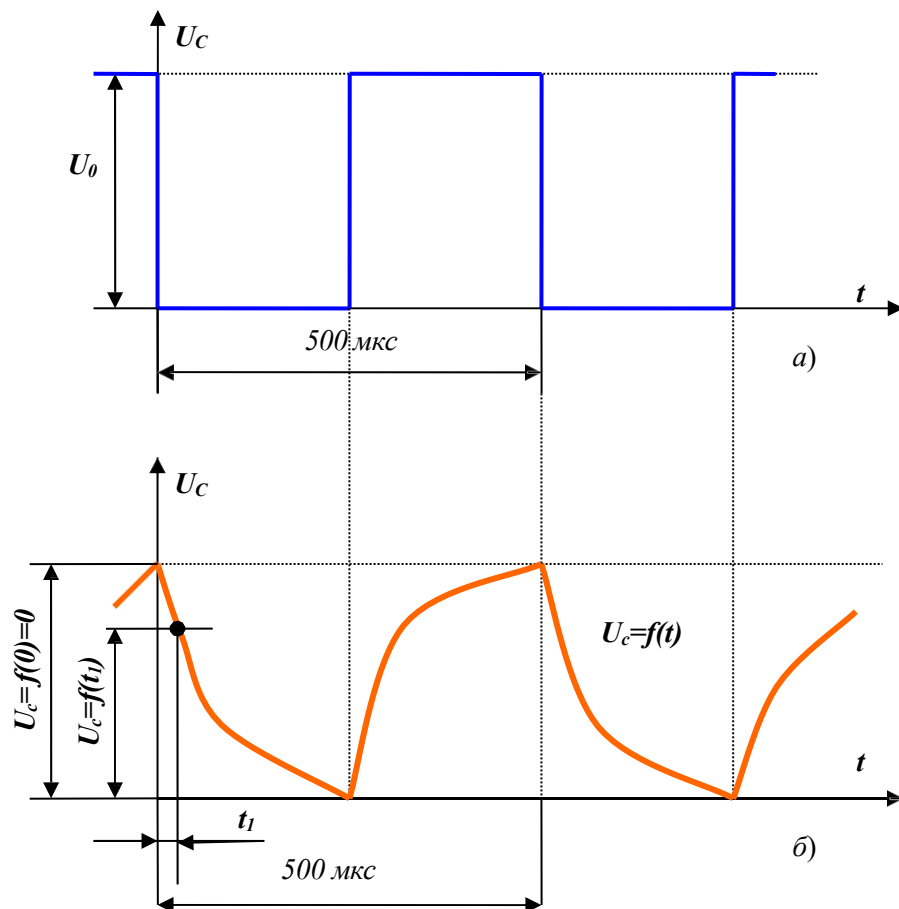


Рисунок 20 – Формы напряжения на двух каналах осциллографа

Для определения емкости по осциллограмме разрядного напряжения (рисунок 20 б) определить напряжения $U_C(0)$ и $U_C(t_1)$, а также t_1 . Так как в выражении для определения емкости C используется отношение напряжений, то напряжения можно фиксировать в условных делениях, не прибегая к определению масштаба по напряжению.

1.4 Установить на магазине R_M сопротивление 20 Ом. Поменять местами проводники, подходящие к выходным гнездам блока Г-3. При этом на первом канале по-прежнему будет напряжение, подведенное к входу цепи, (это напряжение подается с генератора на вход первого канала осциллографа внутри стенда), а на втором канале – напряжение U_R , снимаемое с резистивного сопротивления, и, следовательно, повторяющее форму тока. Изменяя сопротивление R_M от 20 до 5120 Ом, зарисовать три наиболее характерных изображения. Определить для трех случаев постоянные времени цепи.

1.5. Вместо конденсатора C_A подключать поочередно конденсаторы C_H и C_K . Повторить опыты, проведенные в п.п. 1.2–1.4.

1.6. Провести исследование переходного процесса и установившегося режима в RC -цепи при воздействии периодических импульсов напряжения. Для этого произвести следующие переключения на стенде. Переключатель $П_\Phi$ на блоке Г-2 установить в позицию 9. Подключить конденсатор C_A . На магазине R_M установить сопротивление 160 Ом. С помощью регуляторов на ЭК установить изображение импульса напряжения, подведенного к входу первого канала, в соответствии с рисунком 18 б. Размах – 3 клетки, период – 8 клеток. Убедиться, что длительность пилообразного импульса составляет одну клетку (регуляторы: «подстройка 1» повернуть против часовой стрелки до отказа, «подстройка 2» – установить требуемую длительность импульса). Во всех стендах $T = 500$ мкс, следовательно, длительность импульса 500/8 мкс. Далее с помощью регуляторов на ЭК изображение импульса

напряжения 1 и 2 каналов установить: размах 3 клетки, длительность 3 клетки. Зарисовать получившееся изображение.

1.7. Измерить значение размаха напряжения и импульсов тока. Для этого необходимо определить цену деления по вертикали каждого канала осциллографа при данном положении регуляторов «усиление». Делается это следующим образом. Регулятор «тарировочное напряжение» следует повернуть до отказа против часовой стрелки и нажать кнопку «тарировка» первого канала, при этом изображение импульса входного напряжения исчезнет и вместо него появится горизонтальная линия, а вольтметр V_I на блоке Г-3 покажет нулевое значение. Держа кнопку нажатой, поворачивать регулятор «тарировочное напряжение» по часовой стрелке, пока тарировочный импульс не достигнет размаха в 1 или 2 клетки. При этом вольтметр покажет по верхней шкале значение тарировочного напряжения U_K . Зная величину U_K и количество клеток, занимаемых тарировочным напряжением, определить цену деления одной клетки и по количеству клеток, занимаемых исследуемым напряжением – значение этого напряжения.

1.8. Увеличить сопротивление магазина R_M от 20 до 5120 Ом. Зарисовать три характерных изображения, не изменяя положения тумблеров «усиление».

2 Исследование переходных процессов в цепи RL

Для исследования переходных процессов тока и напряжения в RL -цепи подключить в схеме рисунка 19 вместо конденсатора C_A катушку индуктивности L_A .

2.1. Постоянная времени RL -цепи определяется из выражения $\tau = L / R$, и при большом значении R_M ($R_M = 5120$ Ом) получается величиной малой, форма тока в этом случае оказывается близкой к форме входного напряжения. Уменьшать сопротивление R_M от 5120 до 20 Ом, при этом постоянная времени будет возрастать, форма напряжения на резистивном со-

противлении R_M , а, следовательно, и форма тока в цепи, станут все больше отличаться от формы входного напряжения. Зарисовать полученные изображения для трех характерных случаев.

2.2. Поменять местами проводники, подходящие к входным гнездам блока Г-3, при этом к входу второго канала осциллографа будет подведено напряжение, снимаемое с катушки L_A . Изменять сопротивление R_M от 20 до 5120 Ом, зарисовать три характерных изображения.

2.3. Аналогично п.1.3 рассчитать индуктивность катушки формуле:

$$L = \frac{t_1 \cdot R_M}{\ln \frac{I(0)}{I(t_1)}}. \quad (33)$$

2.4. Вместо катушки L_A подключать поочередно катушки L_B и L_H . Повторить опыты, проведенные в п.п. 2.1-2.3.

2.5. Исследовать переходные процессы при подключении цепи RL к генератору синусоидального напряжения. Для этого произвести следующие переключения на стенде:

- регулятор «частота плавно» на блоке Г-1 повернуть против часовой стрелки до отказа;
- переключатель $П_\phi$ на блоке Г-2 установить в позицию «» (последняя позиция по часовой стрелке);
- регулятор выходного напряжения на блоке Г-3 повернуть по часовой стрелке до отказа, поменять местами проводники, подходящие к выходным гнездам блока Г-3, при этом к входу второго канала осциллографа будет подведено напряжение, снимаемое с резистивного элемента R_M , и, следовательно, повторяющее форму тока;
- установить на магазине R_M сопротивление 160 Ом.

С помощью регулятора на ЭК установить изображение напряжения высокочастотного пакета (рисунок 21). Сигналы такого вида представляют со-

бой гармоническое напряжение, включающееся и выключающееся через промежутки времени, равные

$$T/2 \gg \frac{2\pi}{\omega}, \quad (34)$$

где ω – круговая частота высокочастотного заполнения.

Установить по двум каналам величину высокочастотного пакета с размахом в 2 клетки и временем заполнения порядка 5 клеток.

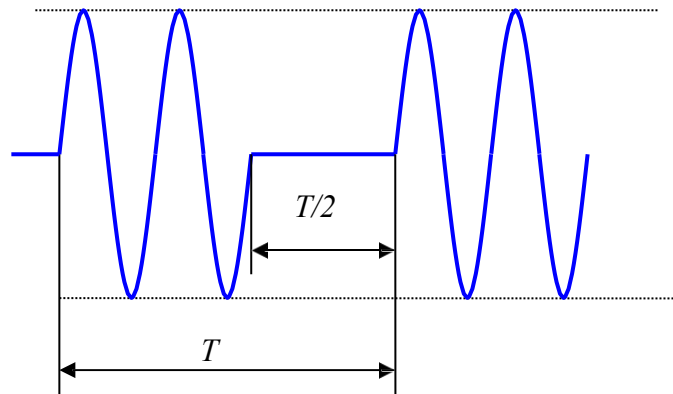


Рисунок 21– Форма напряжения высокочастотного пакета

Если $f = 2 \text{ кГц}$, т.е. период гармонического заполняющего напряжения составляет 50 мкс , а время заполнения 250 мкс , то в пакете уложится пять периодов гармонического заполняющего напряжения. Убедиться, что осциллограмма тока (второй канал) в период гармонического заполнения напряжения стремится к значению установившегося тока. Однако через промежуток времени от $t/4$ до $3t/4$ после включения ток может достигать значений, превышающих амплитуду установившегося тока. Это зависит от начальной фазы напряжения. Наблюдать и зарисовать полученные изображения.

2.6. Увеличивать сопротивление магазина R_M от 20 до 5120 Ом . Зарисовать три характерных изображения. Убедиться, что по мере увеличения сопротивления цепи наблюдаемое превышение амплитуды установившегося тока исчезнет.

Содержание отчета и его форма

1. Нанести числовые значения времен на горизонтальных осях сеток для всех произведенных экспериментов.
2. Рассчитать постоянные времени RC - и RL -цепей для всех случаев C и L , R_M принимает значения от 20 до 5120 Ом.
3. Сравнить постоянную времени цепи со временем, практически занимаемым переходным процессом для всех произведенных экспериментов.
4. Рассчитать переходный процесс в RL -цепи при воздействии синусоидального напряжения $U = U_m \sin(\omega t + \psi)$, когда $U_M = 1$ В, $f = 2$ кГц, а начальная фаза $\psi = 0$ и $\psi = \phi + \pi / 2$, где $\phi = \arctg \omega L / R$. Результаты сравнить с результатами, полученными в п.п. 2.5, 2.6. (при $R_M = 160$ Ом и $R_M = 2560$ Ом). Изобразить графически ток и напряжение на катушке индуктивности во время переходного процесса.
5. Рассчитать переходный процесс тока в RC -цепи ($R_M = 160$ Ом и $R_M = 1230$ Ом) при воздействии пилообразного импульса. Данные о параметрах напряжения взять из опыта. Изобразить графически ток и напряжение на конденсаторе во время переходного процесса. Сравнить с результатами, полученными в п.п. 1.6–1.8.

Каждый студент, выполнивший лабораторную работу, должен оформить отчет и предоставить его преподавателю.

Отчет должен содержать:

1. Название и цель работы.
2. Принципиальные схемы исследуемых цепей; таблицы и графики, заполненные и построенные по результатам измерений и расчетов.
3. Выводы по результатам работы, в которых должна быть дана оценка исследуемых явлений, объяснение характера кривых.

Отчет должен иметь титульный лист с указанием ФИО студента, номера группы и даты выполнения работы.

Вопросы для защиты работы

1. Почему ток в катушке и напряжение на конденсаторе не могут изменяться скачком, а напряжение на катушке и ток через конденсатор могут? Сформулируйте первый и второй законы коммутаций.
2. Каков физический смысл принужденной и свободной составляющих токов и напряжений?
3. Рассчитать τ для схем, приведенных на рисунке 22 а, б.

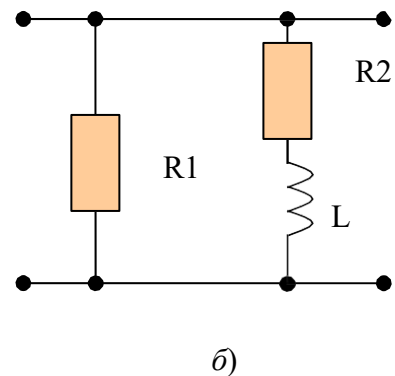
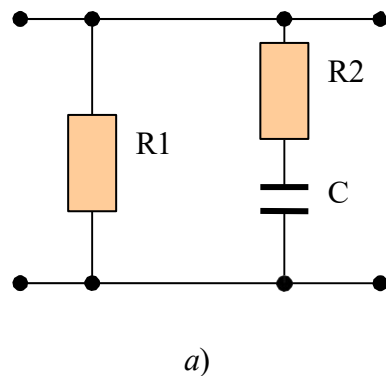


Рисунок 22 – Схемы с параллельным соединением RC и RL –элементов

4. Получите выражения для мгновенных значений тока в RL - и RC - цепях и напряжений на реактивных элементах при воздействии на них скачкообразного напряжения. Начертите кривые мгновенных напряжений на катушке индуктивности, конденсаторе и токов в ветвях.
5. Возможны ли случаи, когда при подключении RL или RC -цепи к источнику напряжения переходный процесс в цепях отсутствует?
6. Может ли при подключении RC -цепи к источнику напряжение на конденсаторе оказаться больше напряжения входного источника? Если может, то при каких условиях и в течение какого времени?
7. Изобразите форму напряжения на выводах вольтметра для схемы рисунка 23 после размыкания ключа K .

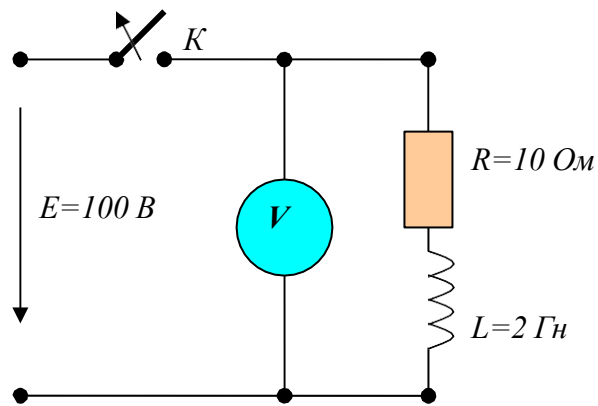


Рисунок 23 – Схема для определения формы напряжения в RL -цепи

8. Рассчитайте и начертите соответствующие кривые напряжения на выходе, входного тока для цепей, указанных в п. 3, если входной сигнал имеет вид, изображенный на рисунке 24 а, б.

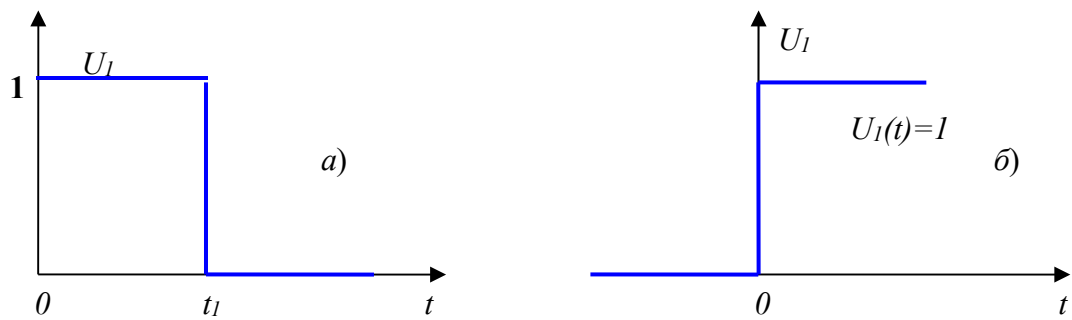


Рисунок 24 – Формы входного сигнала для схем рисунка 22 а, б

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 7

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦЕПЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Цель и содержание

Цель работы:

Изучить переломные процессы в цепях второго порядка при подключении цепи к источникам постоянного и гармонического напряжения.

Содержание работы:

1. Исследовать переходный процесс в неразветвленной цепи с различными затуханиями при ее подключении к источнику постоянного напряжения.
2. Исследовать переходный процесс в неразветвленной цепи с малым затуханием при ее подключении к источнику гармонического напряжения (при воздействии на цепь радиоимпульсов).

Теоретическое обоснование

Если к входу схемы рисунка 25 подключить источник постоянного напряжения E , то при малых затуханиях ($R < 2L / C$, следовательно; $Q > 0,5$) переходный процесс имеет колебательный характер, причем принужденная составляющая напряжения на конденсаторе равна напряжению источника $U_C = E$, а свободная

$$U_{C_{св}} = E e^{-\delta \cdot t} \sin \omega_C t, \quad (35)$$

где $\omega_{CB} = \sqrt{(1/LC - R^2 / 4L^2)}$ – частота свободных колебаний в цепи; $\delta = R / 2L$.

Время практического существования переходного процесса $t_{ПЕР}$ определяется временем затухания экспоненты $e^{-\delta}$, которое составляет

$$(3 \div 5) \frac{1}{\delta} = (3 \div 5) \frac{2L}{R} \frac{\omega}{\omega_{CB}} = (3 \div 5) \frac{2Q}{\omega_{CB}}. \quad (36)$$

За время $t_{ПЕР}$ укладывается N периодов свободной составляющей, причём

$$N = \frac{t_{ПЕР}}{T_{CB}} = \frac{(3 \div 5) 2Q \omega_{CB}}{\omega_{CB} 2\pi} \approx Q. \quad (37)$$

При колебательном режиме корни характеристического уравнения цепи комплексно сопряженные:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{CB} = -\frac{\omega_{CB}}{2Q} \pm j\omega_{CB}. \quad (38)$$

Отношение собственной частоты контура к затуханию равно $2Q$. Так как $Q = N$, то

$$N = \frac{\omega_{CB}}{2\delta} \text{ или } \delta = \frac{\omega_{CB}}{2N}. \quad (39)$$

Таким образом, число периодов, укладывающихся за практическое время переходного процесса, приблизительно равно добротности контура Q . Свободные колебания затухают тем быстрее, чем меньше добротность контура и чем больше собственная частота контура ω_{CB} . Зная цену деления шкалы по горизонтали на экране осциллографа и число периодов свободных колебаний, можно определить затухание цепи.

Если затухание цепи велико ($R > 2\sqrt{L/C}$ или $Q < 0,5$), то свободная составляющая представляет собой разность двух экспонент и отклик на выходе имеет апериодический характер (рисунок 25 б).

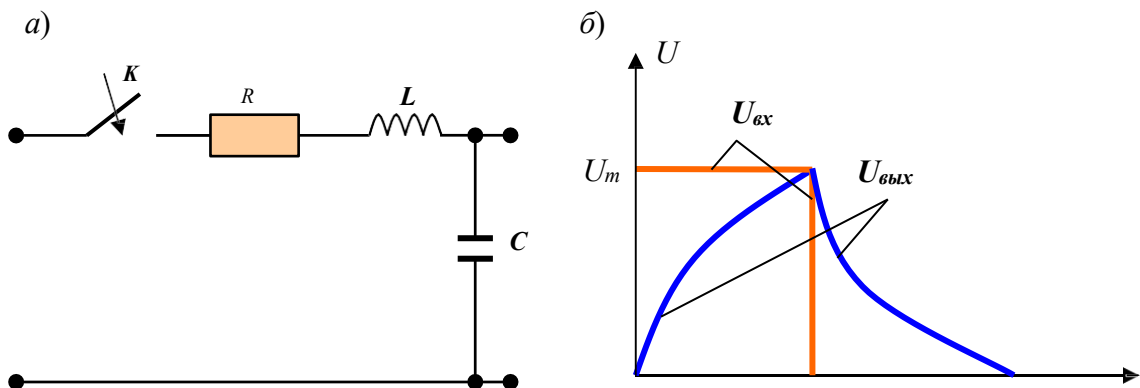


Рисунок 25 – Подключение RLC -цепи на постоянное напряжение

При $R = R_{KP} = 2 \sqrt{L/C}$ режим является критическим, то есть промежуточным между колебательным и апериодическим.

При подключении к выходу высокодобротной RLC -цепи радиоимпульса с высокочастотным заполнением, т. е. сигналов гармонической формы с паузами (рисунок 26 б), могут иметь место два случая. При частоте внешнего воздействия, незначительно отличающейся от собственной частоты контура, выходное напряжение представляет собой сумму двух колебаний с различными частотами (ω и ω_{CB}), причем амплитуда свободной составляющей уменьшается во времени. Получаются биения (рисунок 26 а), частота которых Ω определяется разностью частот свободной и вынужденной составляющих

$$\Omega = (\omega - \omega_{CB}) / 2. \quad (40)$$

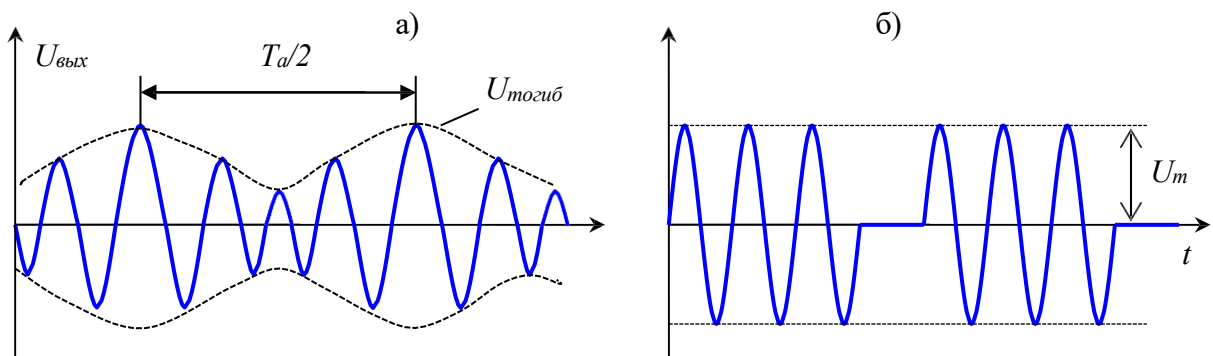


Рисунок 26— Подключение радиоимпульса (б) к RLC -цепи и полученные биения (а)

Огибающей называют воображаемую кривую, показывающую закон изменения выходного мгновенного напряжения (на рисунке 26,а – пунктирная линия). В нашем случае

$$U_{C_{огиб}} = \frac{U_m Q}{\sqrt{1 + \xi}} \sqrt{1 + e^{-\delta t} - 2e^{-\delta t} \cos \Omega t}, \quad (41)$$

где U_m – максимальное значение входного напряжения.

Если собственная частота контура ω_{CB} и частота приложенного напря-

жения равны, то биения отсутствуют. Огибающая выходного напряжения

$$U_{C_{огиб}} = U_m Q(1 - e^{-\delta t}) . \quad (42)$$

Очевидно, что при $\omega = \omega_{CB}$ амплитуда напряжения U_C нарастает монотонно, причем, чем больше добротность, тем сильнее явление «затягивания» фронта огибающей (рисунок 27).

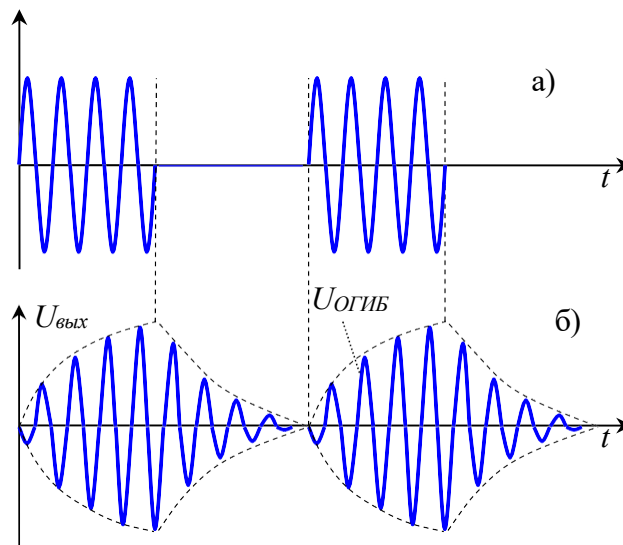


Рисунок 27– Подключение радиоимпульса (а) к RLC -цепи и изменение выходного напряжения (б)

При увеличении скорости передачи сигналов время паузы между ними уменьшается, сигнал «смазывается» и искажения увеличиваются. Чтобы уменьшить влияние «затягивания», нужно увеличить затухание (уменьшить добротность), что приводит к ухудшению избирательных свойств контура.

Аппаратура и материалы

Для выполнения работы необходим специализированный лабораторный стенд «Луч», включающий в себя все элементы, применяемые в лабораторной работе №8.

Указания по технике безопасности

Так как лабораторная работа выполняется на специализированных лабораторных стендах «Луч», содержащих стандартный набор элементов и приборов, то при ее выполнении необходимо придерживаться требований к технике безопасности, изложенным в лабораторной работе 5 (страница 12).

Методика и порядок выполнения работы

1. Для наблюдения формы кривой напряжения на конденсаторе при подаче постоянного напряжения собрать цепь по схеме рисунок 28 а. Регуляторы на блоках стенда установить в следующие позиции:

- на блоке питания включить тумблеры «сеть», «генератор», «коммутатор-осциллограф»;

- переключатель P_{ϕ} на блоке Г-2 установить в положение « - var»;

- на блоке Г-1: тумблер «генератор» установить в позицию «внутр», переключатель диапазонов – в положение «0,2–2 кГц». Плавным регулятором установить частоту 500 Гц (отметка 50 на шкале частотомера);

- на блоке Г-3: тумблер «пределы» – 10 В, а регулятором выходного напряжения установить стрелку вольтметра V_I на отметку 40 по верхней шкале;

- на магазине сопротивлений R_M установить сопротивление 2560 Ом;

- на блоке ЭК: тумблер «каналы» – в среднее положение (1+2), тумблер «ослабление» – 1:10, а тумблеры «1 канал» и «Вход X» – в положение «внутр.». При этом к первому каналу будет подведено напряжение прямоугольной формы с периодом $2 \text{ мс} = 2000 \text{ мкс}$, а ко второму каналу – напряжение с таким же периодом, но формой несколько отличающейся от прямоугольной, так как это напряжение снимается с конденсатора C_{ϕ} . Регулятор «усил. X» установить в такое положение, при котором размер изображения по горизонтали находится в пределах сетки на экране, а регулятор «разверт-

ка» – в такое положение, при котором период каждого изображения занимает 8 клеток, при этом цена клетки будет $2000/8=0,25$ мс/кл. С помощью регулятора «расхождение» установить изображение первого канала в верхней части экрана, а второго канала в нижней. С помощью регуляторов «усиление плавно» установить размах изображения по 3 клетки каждое. Так как при $R_M = 2560$ Ом режим работы цепи близок к критическому, т.е. $R \approx 2 \sqrt{L/C}$, то форма напряжения на конденсаторе будет близкой к форме входного напряжения. Уменьшить сопротивление R_M до 160 Ом. При этом $R < 2 \sqrt{L/C}$, и режим окажется колебательным. Причем, чем меньше будет сопротивление R , тем больше будет добротность цепи Q и меньше декремент затухания, тем медленнее устанавливается вынужденный режим и тем большее количество колебаний N совершится за время переходного процесса.

Зарисовать получившиеся осциллограммы с координатной сеткой, указать параметры цепи.

2. Устанавливать на магазине R_M поочередно величины сопротивления 160–320–640–1280–2560–5120 Ом. Зарисовать три характерных изображения. Указать параметры цепи.

3. Вместо конденсатора C_v включить конденсатор C_a , емкость которого больше, чем емкость конденсатора C_v (номиналы емкостей приведены в таблице на лабораторном стенде). Сопротивления магазина R_M изменять от 160 до 5120 Ом, зарисовать три характерных изображения.

4. Вместо конденсатора C_a подключить конденсатор C_n , емкость которого $C_n > C_a$. Прodelать аналогичные эксперименты.

5. Вместо конденсатора C_n подключить конденсатор C_k , у которого $C_k \ll C_v$. Прodelать аналогичные эксперименты. Сравнить кривые напряжения на конденсаторе при различных значениях емкости C .

6. Вместо конденсатора C_k подключить конденсатор C_v . Конденсатор и активное сопротивление R_M поменять местами, при этом получится цепь,

указанная на рисунок 28 б. При этом ко второму каналу осциллографа будет подводиться напряжение U_R , снимаемое с R_M . Это обеспечит возможность

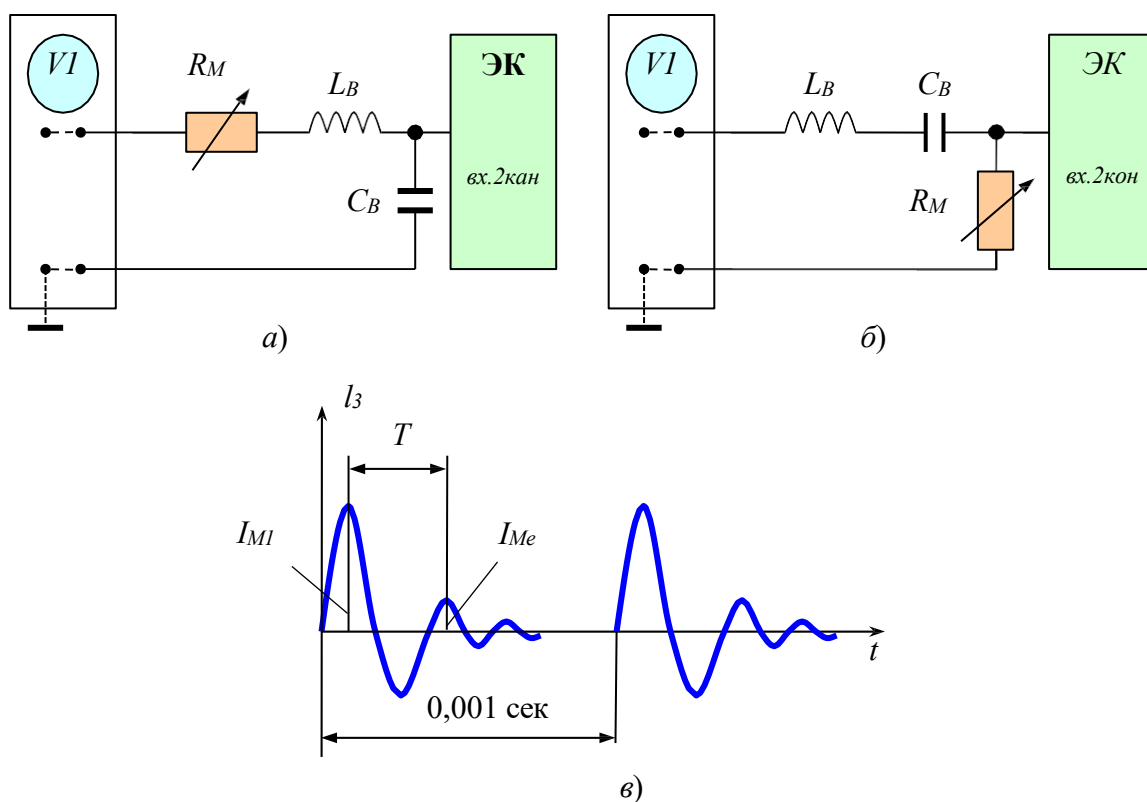


Рисунок 28 – Схемы исследуемых цепей (а, б) и примерная кривая изменения тока (в) для схемы (б)

наблюдать на экране осциллографа формы кривых зарядного тока i_3 , т. к. напряжение U_R равно: $U_R = R_M i_3$.

Изменять сопротивление R_M от 160 до 5120 Ом. Зарисовать три характерные кривые тока i_3 . Эксперименты проделать при емкостях C_B и C_K .

6.1. Для одной из снятых выше осциллограмм при включенной в схему емкости C_K рассчитать параметры R и L активно-индуктивной цепи. Примерная кривая изменения тока i_3 приведена на рисунке 28 в.

Для вычисления параметров R и L по кривой колебательного заряда определить коэффициент затухания δ и частоту собственных затухающих колебаний.

Для решения поставленной задачи необходимо определить масштаб времени (рисунок 28 в), найти период собственных затухающих колебаний T , который равен времени между двумя ближайшими точками кривой тока i_3 , имеющими одну и ту же фазу колебаний. В качестве таких точек целесообразно взять амплитудные значения (рисунок 28 в).

Определив период T , необходимо найти угловую частоту собственных затухающих колебаний.

Коэффициент затухания δ определяется следующим образом. Уравнение, описывающее форму зарядного тока

$$i_3(t) = Ae^{-\delta t} \sin \omega t \quad (43)$$

справедливо для любого момента времени, в том числе и для выделенных через период T двух соседних максимальных значений тока (рисунок 28 в).

Тогда

$$I_M = Ae^{-\delta t_1} \quad \text{и} \quad I_M = Ae^{-\delta(t_1-T)}. \quad (44)$$

Разделив второе уравнение на первое и прологарифмировав, получим выражение для определения коэффициента затухания

$$\delta = \frac{\ln(I_{M1} / I_{M2})}{T}. \quad (45)$$

По δ и T вычислить параметры R и L заданной цепи.

Известно, что при колебательном заряде корни характеристического уравнения должны получиться комплексно сопряженными:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega = -\frac{R}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \quad (46)$$

7. Для наблюдения формы кривой напряжения на индуктивности собрать цепь, указанную на рисунке 29. При этом ко второму каналу осциллографа будет подведено напряжение, снимаемое с катушки индуктивности. Изменяя сопротивление R_M от 160 до 5120 Ом, зарисовать три характерных осциллограммы.

8. Исследовать переходный процесс при подключении цепи к генератору радиоимпульсов. Радиоимпульсами называются сигналы (рисунок 30), у которых половина периода представляет паузу, а вторая половина периода заполнена гармоническими колебаниями с частотой ω , период колебаний которых много меньше времени заполнения ($2\pi/\omega \ll T/2$).

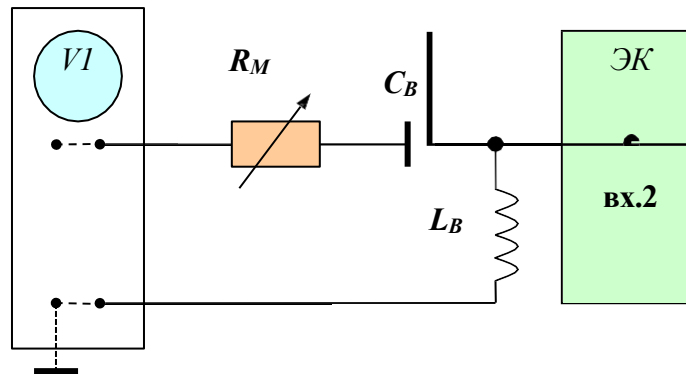


Рисунок 29 – Исследование напряжения на индуктивном элементе

Такие сигналы часто называют также «пакетами с высокочастотным заполнением». Сигналы такого вида представляют гармоническое напряжение, включающееся и выключающееся через промежутки времени, равные $T/2 \gg 2\pi/\omega$, где ω – круговая частота высокочастотного заполнения. Во всех стендах $T = 500$ мкс.

Если частота ω отличается от частоты свободных колебаний контура ω_{CB} , то напряжение на выходе контура будет представлять биения с частотой $\omega = (\omega - \omega_{CB})/2$, если $\omega = \omega_{CB}$, то $\omega = 0$, и в этом случае амплитуда огибающей выходного напряжения нарастает и спадает по экспоненциальному закону.

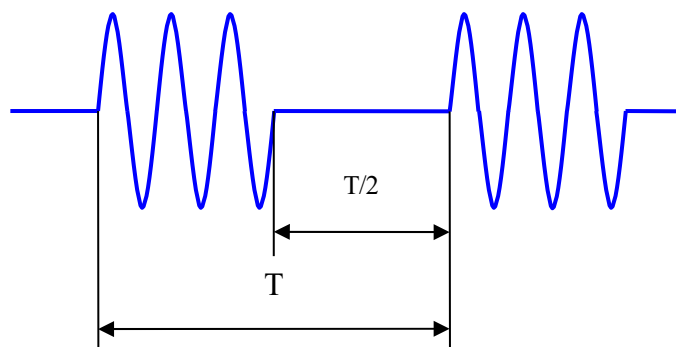


Рисунок 30 – Сигналы вида «радиоимпульсов»

Произвести следующие переключения на стенде. Регулятор «частота плавно» на блоке Г-1 повернуть против часовой стрелки до отказа; переключатель Пф на блоке Г-2 установить в позицию «». Регулятор выходного напряжения на блоке Г-3 повернуть по часовой стрелке до отказа, на магазине R_M установить сопротивление 80 Ом, с помощью регуляторов на ЭК изображение напряжения высокочастотного пакета, подведенного к входу первого канала, установить так, как показано на рисунке 31 (размах – 1 клетка; время заполнения – 3 клетки: паузы – 3 клетки). Если $f = 2$ кГц, т.е. период гармонического заполняющего напряжения составляет 50 мкс, время пакета – 200 мкс, то в пакете уложится пять периодов заполняющего напряжения. Так как внешняя частота и при этом отличается от частоты свободных колебаний контура ω_{CB} , то амплитуда выходного напряжения будет малой.

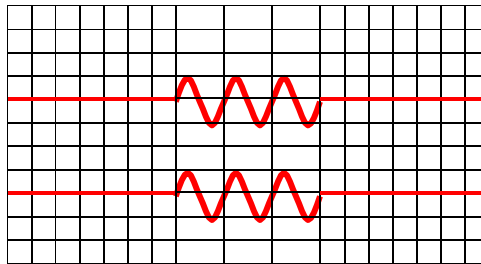


Рисунок 31 – Вид радиочастотного сигнала на экране осциллографа

9. Медленно увеличивать частоту на генераторе. По мере приближения внешней частоты к частоте свободных колебаний амплитуда огибающей выходного напряжения будет возрастать и биения станут более заметными. Найти частоту, при которой внешняя частота f совпадает с частотой свободных колебаний f_{CB} . При этом амплитуда огибающей выходного напряжения возрастает и спадает по экспоненциальному закону за счет резонансных явлений (рисунок 32). Записать величину частоты и зарисовать изображения.

10. Зарисовать изображения при двух различных частотах биений. Убедиться, что биения получаются как при $f < f_{CB}$, так и при $f > f_{CB}$.

11. Установить на генераторе резонансную частоту $f = f_{CB}$. Увеличи-

вать сопротивление магазина R_M от 160 до 1280 Ом. Зарисовать три характерных изображения.

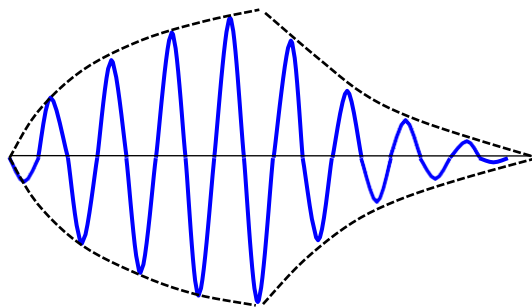


Рисунок 32 – Вид резонансной кривой при подключении RLC-цепи к генератору радиоимпульсов

Убедиться, что по мере увеличения сопротивления цепи добротность и практическое время переходного процесса уменьшаются. Размах выходного напряжения при этом становится меньше, но вынужденный режим устанавливается быстрее, выходное напряжение оказывается менее искаженным по сравнению с входным.

Содержание отчета и его форма

1. Рассчитать критическое сопротивление цепи R_{KP} (L_B , C_B).
2. Рассчитать добротности и периоды свободных колебаний при $R_M = 320 - 640 - 1280 - 2560 - 5120$ Ом. Сопротивление катушки R_K принять равным 25 Ом. Результаты расчетов занести в таблицу 3.

Таблица 3 – Результаты аналитических расчетов добротности контуров

$L_B =$	$C_B =$		$R_{KP} =$		
R_M	320	640	1280	2560	5120
Q					
T_{CB}					

Указание:

$$T_{CB} = \frac{2\pi}{\omega_{CB}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(1/LC - R^2/4L^2)}} \quad (\text{с}) = \frac{2\pi \times 10^6}{\sqrt{(1/LC - R^2/4L^2)}} \quad (\text{мкс}). \quad (47)$$

3. Зарисовать с экрана осциллографа кривые, указать цену деления в единицах времени.

4. Сравнить частоту свободных колебаний, критическое сопротивление и частоту биений, полученных экспериментально, с аналогичными, найденными теоретически.

5. Определить корни характеристического уравнения, соответствующего кривым в колебательном режиме, полученном экспериментально.

6. Аналитически рассчитать переходной процесс операторным методом при подключении постоянного источника к схеме, содержащей активное сопротивление, индуктивность и емкость. Для этого составить операторную схему замещения цепи и для заданных вариантов параметров U_0 , R , L , и C получить выражение тока i и напряжений U_C и U_L .

Вопросы для защиты работы

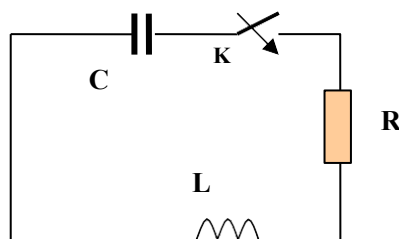
1. В каких случаях свободная составляющая напряжения на конденсаторе в RLC-цепи изменяется: а) по колебательному закону; б) по апериодическому закону?

2. Сколько колебаний практически совершит свободная составляющая за время переходного процесса, если корни характеристического уравнения, описывающие свободный процесс, $p_{1,2} = -300 + j3140 \text{ с}^{-1}$?

3. Цепь на рисунке 33 ($R = 20 \text{ Ом}$, $L = 16,61 \text{ мГн}$, $C = 5,92 \text{ мкФ}$) питается от источника постоянного напряжения. Рассчитайте декремент затухания, практическое время переходного процесса, число периодов, укладывающихся за время переходного процесса.

4. Как будет изменяться δ в зависимости от параметров в задаче 3, если увеличить:

а) сопротивление R ; б) индуктивность L ; в) емкость C ? При каких значениях параметров элементов режим становится критическим?

Рисунок 33 – Неразветвленная RLC -цепь

5. Через какое время в цепи (п. 3) амплитуда свободной составляющей уменьшится:

а) в два раза; б) в пять раз; в) в десять раз; г) в двадцать раз; д) в сто раз по сравнению с амплитудой в начальный момент времени?

6. Через какое время после замыкания ключа K в схеме (рисунок 33) ток в цепи достигнет наибольшего значения? Определите наибольшее значение тока i_{MAX} , если $L = 10 \text{ мГн}$, $C = 1 \text{ мкФ}$, $R = 1 \text{ кОм}$, $U_{CB} = 10 \text{ В}$.

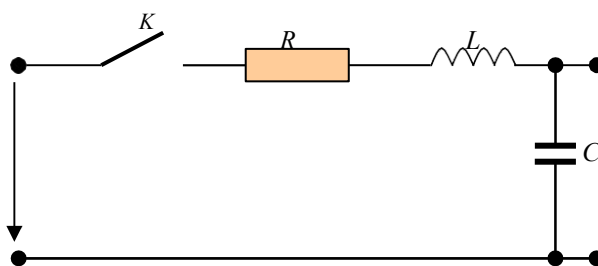
7. Какой характер имеют процессы в RLC - цепи с малым затуханием при подключении цепи к источнику синусоидального напряжения, если:

а) $\omega = \omega_{CB}$, б) $\omega \approx \omega_{CB}$?

8. Докажите, что число свободных колебаний N близко к добротности цепи Q ?

9. Что произойдет с практическим временем переходного процесса, если собственную частоту контура ω_{CB} уменьшить?

10. Изобразите форму напряжения на индуктивном элементе в цепи рисунка 34. Сравните ее с формой напряжения на емкостном элементе. Что в этих кривых общего и чем они отличаются друг от друга?

Рисунок 34 – Схема RLC -цепи к вопросу для защиты п.10

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 8

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ ТОКОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Цель и содержание

Цель работы:

Экспериментально исследовать динамические процессы в нелинейных цепях.

Содержание работы:

1. Исследовать вольтамперные характеристики двух нелинейных резистивных элементов.
2. Исследовать форму тока и его спектральный состав на нелинейных элементах при гармоническом воздействии.
3. Исследовать феррорезонанс в нелинейных цепях.

Теоретическое обоснование

Все цепи подразделяются на линейные, нелинейные и параметрические. Нелинейными называются цепи, сопротивления которых изменяются в зависимости от значения протекающего через них тока или приложенного к ним напряжения. Вольтамперные характеристики (ВАХ) нелинейных цепей описываются уравнениями, степень которых выше первой. Поскольку сопротивления в таких цепях представляют величины переменные, то мгновенные значения тока в них не пропорциональны мгновенным значениям напряжения, поэтому форма тока оказывается отличной от формы воздействующего напряжения. Таким образом, если к нелинейной цепи приложить напряжение гармонической формы, то форма тока будет отличаться от гармонической. Известно, что негармонический сигнал состоит из нескольких частот (гармоник). В общем случае отклики в цепях с нелинейными элементами содержат частоты, которые отсутствуют в воздействующем напряжении.

Например, если к входу нелинейной цепи приложить гармоническое напряжение с некоторой частотой f_1 , то входной ток окажется негармоническим и, следовательно, содержащим спектр частот. Если данный ток протекает через резистивное сопротивление, то форма падения напряжения на нем будет также негармонической. Форма тока и значения амплитуд гармоник определяется видом ВАХ нелинейного участка цепи. Если ВАХ описывается полиномом $i = a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + a_4 u^4 + a_5 u^5 + \dots$, то амплитуды гармонических составляющих тока I_{mk} можно определить из следующих выражений (таблица 4).

Таблица 4 – Величины амплитуд гармонических составляющих тока

№ п/п	Частота	Амплитуда гармонической составляющей тока
1	f_1	$I_{m1} = a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 U_m^5,$
2	$f_2 = 2f_1$	$I_{m2} = \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{2} a_4 U_m^4,$
3	$f_3 = 3f_1$	$I_{m3} = \frac{1}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{16} a_5 U_m^5,$
4	$f_4 = 4f_1$	$I_{m4} = \frac{1}{8} a_4 U_m^4,$
5	$f_5 = 5f_1$	$I_{m5} = \frac{1}{16} a_5 U_m^5,$

где U_m и f_1 — амплитуда и частота воздействующего напряжения.

Обратная задача состоит в том, что, зная амплитудные значения токов на различных частотах, можно рассчитать коэффициенты полинома, описывающего вольт-амперную характеристику цепи по формулам

$$a_1 = \frac{I_{m1} - 3I_{m3} + 5I_{m5}}{U_m}; \quad a_2 = \frac{2(I_{m2} - 4I_{m4})}{U_m^2}; \quad (48)$$

$$a_3 = \frac{4(I_{m3} - 5I_{m5})}{U_m^3}; \quad a_4 = \frac{8I_{m4}}{U_m^4}; \quad a_5 = \frac{16I_{m5}}{U_m^5}.$$

Из приведенных выражений следует, что гармонические составляющие откликов с частотами, отличающимися от частоты воздействия в 1, 3, 5... раз, зависят от членов полинома с нечетными степенями, а гармонические со-

ставляющие, отличающиеся в 2, 4 раза, зависят от членов полинома с четными степенями. Если ВАХ содержит члены полинома только с нечетными степенями, то и ВАХ, и кривые откликов будут симметричны относительно горизонтальной оси, а при наличии членов с четными степенями – несимметричны. Следовательно, если напряжение гармонической формы приложено к двухполюснику с линейной характеристикой (рисунок 35,а), то ток во входной цепи будет иметь также гармоническую форму. Если ВАХ нелинейна, но симметрична относительно горизонтальной оси (рисунок 35,б), то форма тока будет несинусоидальной и симметричной относительно горизонтальной оси, в такой зависимости будут только нечетные гармоники. Если ВАХ нелинейна и несимметрична относительно горизонтальной оси (рисунок 35,в), то кривая тока будет несинусоидальной и несимметричной относительно горизонтальной оси, такая кривая содержит четные гармоники. Например, чтобы напряжение синусоидальной формы $u = U_m \sin \omega_1 t$ вызвало входной ток прямоугольной периодической формы

$$i = \frac{4I_m}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right], \quad (49)$$

необходимо это напряжение приложить к нелинейному элементу с ВАХ, описываемой уравнением

$$i = \frac{4I_m}{\pi} \left[\frac{u}{U_m} - \frac{8}{3} \frac{u^3}{U_m^3} + \frac{16}{5} \frac{u^5}{U_m^5} \right], \quad (50)$$

или через нормированные величины

$$i_H = u_H - \frac{8}{3} u_H^3 + \frac{16}{5} u_H^5, \text{ где } i_H = \frac{i}{I_m}, u_H = \frac{u}{U_m}. \quad (51)$$

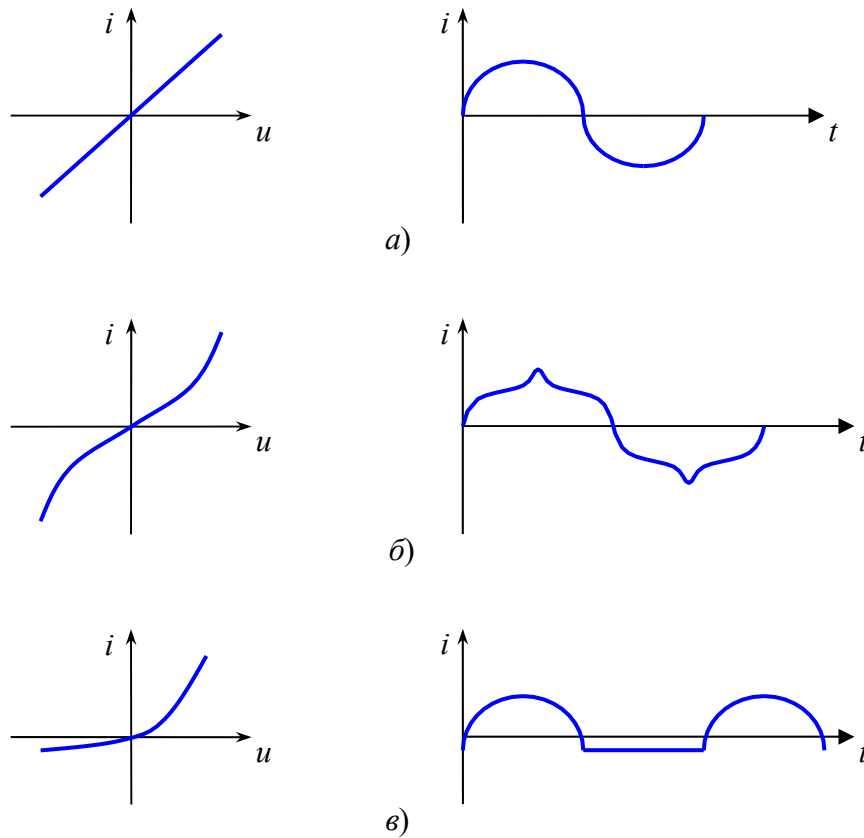


Рисунок 35 – Виды нелинейных вольт-амперных характеристик и соответствующие им временные зависимости токов

Экспериментальное определение ВАХ нелинейного элемента

Экспериментальное определение ВАХ нелинейного элемента производится с помощью схемы, представленной на рисунке 38. Схема работает следующим образом. К каналу «X» (горизонтальному каналу осциллографа) подводится напряжение, имеющееся на зажимах элемента, ВАХ которого определяется, а к вертикальному каналу (каналу «Y») – напряжение, пропорциональное току, протекающему через исследуемый элемент. При этом на экране осциллографа получается кривая $i = f(u)$, т.е. вольт-амперная характеристика исследуемого элемента или участка цепи.

Напряжение, подаваемое на вертикальный канал, снимается с резистивного сопротивления $R_{и}$, включенного последовательно с исследуемым элементом. Величина сопротивления $R_{и}$ должна быть такой, при которой

включение этого сопротивления практически не изменит параметры исследуемой цепи. В типовом режиме осциллографы показывают кривые напряжения, подводимые к входу горизонтального канала в функции времени. При этом к входу горизонтального канала подводится развертывающее напряжение пилообразной формы, вырабатываемое внутри осциллографа. Для снятия ВАХ усилитель горизонтального канала следует отключить от генератора пилообразных напряжений и подключить к входному гнезду «Х».

Феррорезонанс в нелинейных цепях

Гармоническая линеаризация (метод эквивалентных синусоид), т.е. замена несинусоидальных периодических кривых токов и напряжений на элементах цепи эквивалентными синусоидами, позволяет использовать при анализе нелинейных цепей методы расчета линейных цепей синусоидального тока – комплексный метод, векторные диаграммы и др.

Воспользуемся этими методами для изучения процессов в цепях, включающих нелинейные катушки с ферромагнитными сердечниками и конденсаторы. Напомним, что в линейной цепи при последовательном и параллельном соединении этих элементов имеют место резонансные явления, выражающиеся в резком увеличении напряжений или токов на обоих элементах. Так как параметры и резонансная частота линейной цепи связаны условием $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то для достижения резонанса необходимо изменять частоту, индуктивность или емкость. Индуктивность нелинейной катушки непостоянна, а зависит от напряжения, поэтому феррорезонанс, т. е. резонанс в цепи, включающей катушку с ферромагнитным сердечником и линейный конденсатор, может возникнуть с изменением величины приложенного к цепи напряжения.

Феррорезонанс при последовательном соединении катушки и конденсатора. Вольтамперная характеристика катушки $U_L(I)$ для действующих значений тока и напряжения аналогична ее вебер-амперной характеристике

$\psi(i)$ – с увеличением тока по мере насыщения скорость роста напряжения замедляется. Рассмотрим контур с последовательным соединением катушки и линейного конденсатора (рисунок 36, а), ВАХ которого имеет вид прямой $U_c = I \cdot \frac{1}{\omega C}$. Для получения вольт-амперной характеристики цепи пренебрегаем потерями в катушке, и будем считать, что зависимость $U_L(I)$ отвечает эквивалентным синусоидам. При этих допущениях U_L опережает ток I на угол $\frac{\pi}{2}$, а U_C отстает от него на тот же угол (рисунок 36,б). Поэтому U_L и U_C находятся в противофазе, т.е. разность их фаз равна π , и для получения результирующей характеристики $U(I)$, где U – напряжение на зажимах цепи, следует определить U как $U = |U_L - U_C|$. Кривые U_L , U_C и U изображены на рисунке 36 в.

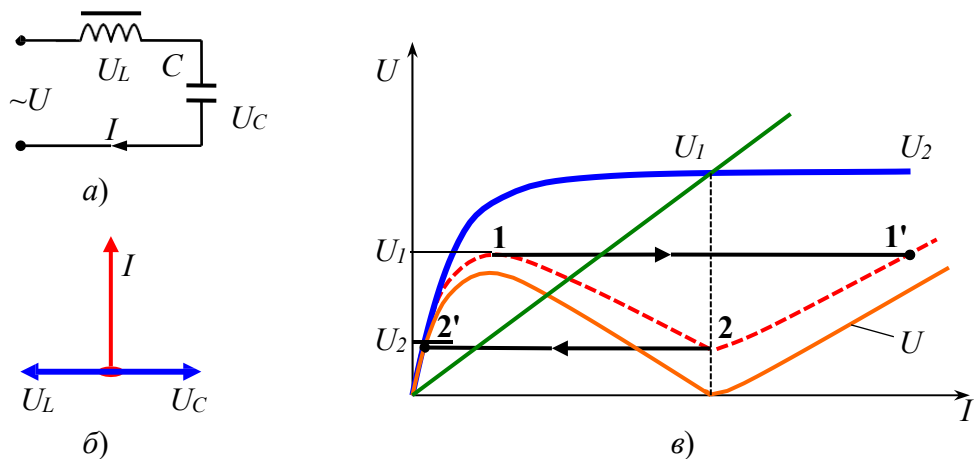


Рисунок 36 – Последовательный контур с нелинейной катушкой и линейным конденсатором

Если параметры цепи подобраны так, что характеристики $U_L(I)$ и $U_C(I)$ пересекаются, полученная результирующая кривая $U(I)$ неоднозначна по напряжению. В точке резонанса, где U_L и U_C компенсируют друг друга, результирующее напряжение U падает до нуля. Однако это является следствием принятой идеализации процессов в контуре, в первую очередь, пренебре-

жения потерями в сердечнике катушки. Реальная зависимость $U(I)$, получаемая экспериментально, изображена на рисунке 26 в штриховой линией. Она имеет падающий участок, но минимум напряжения на зажимах цепи отличен от нуля, поскольку при наличии в цепи потерь напряжения U_L и U_C не могут полностью скомпенсировать друг друга, так как не находятся в противофазе.

При питании последовательного феррорезонансного контура от источника синусоидального напряжения по мере роста напряжения сначала наблюдается плавное увеличение тока до достижения напряжения U_1 (точка 1). Затем происходит бросок тока и переход в точку 1', после которого ток вновь плавно увеличивается. При уменьшении напряжения плавный характер уменьшения тока наблюдается до точки 2, из которой при напряжении U_2 имеет место скачкообразный переход в точку 2'. Таким образом, при питании цепи от источника напряжения падающий участок характеристики 1–2 не может быть снят экспериментально.

В режиме питания цепи от источника тока, который обеспечивается включением последовательно с контуром линейного элемента с большим сопротивлением, изменение тока в цепи имеет плавный характер, и при увеличении тока мы последовательно проходим всю немонотонную характеристику, включая ее падающий поток.

Феррорезонанс в контуре с параллельным соединением катушки и конденсатора. Анализ процессов в контуре (рисунок 37 а) при тех же допущениях об отсутствии потерь в катушке и замене несинусоидальных кривых эквивалентными синусоидами производится аналогично.

При равенстве напряжений на элементах цепи токи в обеих ветвях находятся в противофазе (рисунок 37 б), и результирующая вольт-амперная характеристика цепи получается в результате вычитания абсцисс кривых $U(I_L)$ и $U\omega C = I_C$ (рисунок 37 в): $I = I_L - I_C$. Это приводит к немонотонной характеристике, неоднозначной по току. Как и в предыдущем случае, полная

компенсация токов в точке резонанса является следствием принятой идеализации и в реальном феррорезонансном контуре не наблюдается. Экспериментально наблюдаемая кривая проходит правее, но тоже имеет немонотонный характер (штриховая линия на рисунке 37 в). В точке резонанса ненулевой минимум тока определяется, с одной стороны, нескомпенсированными высшими гармониками тока в катушке (компенсация токов существует для 1-й гармоники, так как при питании от синусоидального источника ток конденсатора содержит только 1-ю гармонику, а ток катушки содержит высшие гармоники). С другой стороны, при резонансе не компенсируется активная составляющая тока в катушке, обусловленная потерями в сердечнике.

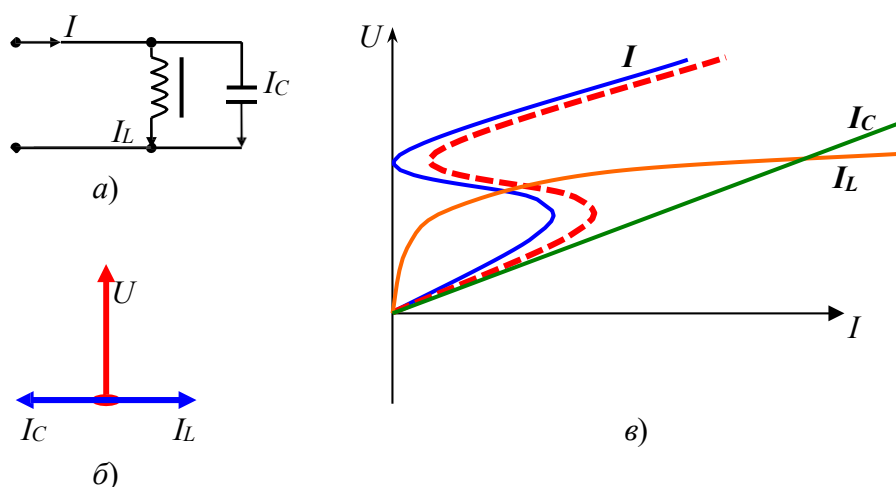


Рисунок 3 – Параллельный контур с нелинейной катушкой и линейным конденсатором

Многозначность характеристики $U(I)$ определяет возможность скачкообразных изменений напряжения на контуре при его питании от источника тока, в этом случае при регулировании тока мы не попадаем на падающий участок характеристики. Наоборот, при питании параллельного контура от источника напряжения из-за однозначности зависимости $I(U)$ изменение тока при регулировании напряжения имеет плавный характер, и возможно экспериментальное снятие падающего участка характеристики.

Такой же подход, основанный на графическом суммировании характеристик, можно использовать и при анализе более сложных цепей. Наличие активных и реактивных составляющих токов или напряжений требует осуществлять их суммирование геометрически в соответствии с правилами построения векторных диаграмм. При этом необходимо учитывать, что у феррорезонансных контуров при переходе через точку резонанса характер цепи изменяется с емкостного на индуктивный или наоборот.

Аппаратура и материалы

Для выполнения работы необходим специализированный лабораторный стенд «Луч», включающий в себя элементы, аналогичные применяемым в лабораторной работе 5. Дополнительно используется линейный конденсатор с номинальной емкостью 2 мкФ.

Указания по технике безопасности

Так как лабораторная работа выполняется на специализированных лабораторных стендах «Луч», содержащих стандартный набор элементов и приборов, то при ее выполнении необходимо придерживаться требований к технике безопасности, изложенным в лабораторной работе 5 (страница 12).

Методика и порядок выполнения работы

1. Исследование вольт-амперных характеристик резистивных нелинейных элементов

1.1. Собрать цепь по схеме рисунка 38, используя нелинейный элемент НЭ1. Регуляторы на блоках стенда установить в следующие позиции:

– на блоке питания включить тумблеры «сеть», «генератор», «коммутатор-осциллограф»;

- на блоке $\Gamma 1$: тумблер «генератор» установить в положение «внутр», переключатель диапазонов – (0,2–2 кГц);
- на блоке $\Gamma 2$: переключатель $ПФ$ – в третье положение (~ 2 кГц), регуляторы «подстройка» – до отказа против часовой стрелки;
- на блоке $\Gamma 3$: тумблер пределов – 10 В, регулятором выходного напряжения установить максимально возможное выходное напряжение. На магазине R_M установить сопротивление 40 Ом;
- на блоке ЭК: тумблер «каналы» – в правое положение, тумблеры «ослабление» – 1:10 или 1:1, тумблер «1 канал» – в положение «внутр», тумблер «Вх X» – в положение «внеш». Регуляторы «усиление плавно», «усиление X», «расхождение» установить в такие положения, при которых на экране оказывается вольт-амперная характеристика (ВАХ) вида «N» на втором канале. Если ВАХ находится на зеленоватом фоне, то этот фон можно оставить (практически он не мешает наблюдению) или убрать поворотом регулятора «развертка». Нелинейная ВАХ элемента НЭ1, наблюдаемая на экране осциллографа, содержит участок с отрицательным сопротивлением. Если необходимо, то сопротивление R_M можно изменять в пределах от 10 до 160 Ом, а напряжение на блоке $\Gamma 3$ от 0,9 до 2 В. Зарисовать получившееся изображение ВАХ. Нанести координатные оси. Определить начало отсчета, выводя регулятор выходного напряжения блока $\Gamma 3$ или регулятор «усиление» на нулевую отметку. Измерить значения размаха напряжения и тока. Для этого необходимо определить цену деления по горизонтали и вертикали второго канала осциллографа при данном положении регуляторов «усиление». Делается это следующим образом. Максимальное отклонение луча от начала отсчета по горизонтали определяется по выходному напряжению на блоке $\Gamma 3$ (верхняя шкала вольтметра $V1$). Для определения цены деления по вертикали регулятор «тарировочное напряжение» повернуть до отказа против часовой стрелки, нажать кнопку «тарировка» второго канала, при этом вместо изображения входного напряжения появится горизонтальная линия, а вольтметр

$V1$ на блоке $\Gamma3$ покажет нулевое значение. Удерживая кнопку нажатой, поворачивать регулятор «тарировочное напряжение» по часовой стрелке, пока тарировочный импульс не достигнет размаха 1 или 2 клетки. Вольтметр $V1$ покажет значение тарировочного напряжения U_K . Зная величину U_K и количество клеток, занимаемых тарировочным напряжением, определить цену деления.

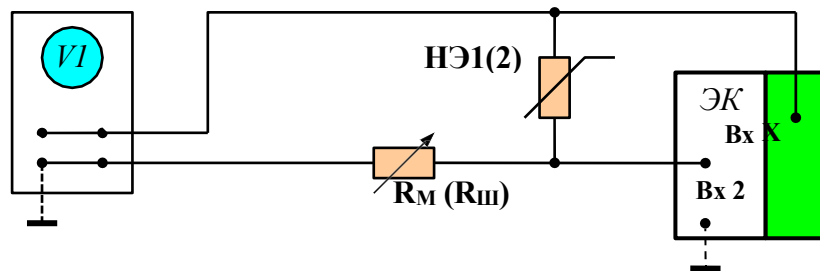


Рисунок 38 – Схема для исследования ВАХ нелинейных элементов

1.2. Снять вольт-амперную характеристику второго нелинейного элемента НЭ2. Перенести штекеры проводников с элемента НЭ1 на элемент НЭ2. Регулятор напряжения на блоке $\Gamma3$ установить в положение максимального выходного напряжения. Тумблер пределов – в положение 10В. На панели активных элементов пятипозиционный переключатель ПНЭ2, находящийся ниже элемента НЭ2, повернуть до отказа против часовой стрелки. На магазине R_M установить сопротивление 160 Ом. При этом на экране осциллографа окажется характеристика ВАХ элемента НЭ2. Зарисовать получившиеся изображения, нанести координатные оси.

1.3. Переключатель ПНЭ2 на плате активных элементов поворачивать по часовой стрелке, при этом форма нелинейной ВАХ будет изменяться и приближаться к линейной. Зарисовать изображения в каждом положении переключателя. Повернуть переключатель до отказа против часовой стрелки.

2 Исследование формы тока и его спектрального состава на нелинейных элементах при гармоническом воздействии

2.1. Исследовать цепь, изображенную на рисунке 38 с НЭ2. На блоке ЭК тумблер «Вх Х» перевести в положение «внутри», при этом внешнее напряжение от усилителя горизонтального канала осциллографа будет отключено, а развертывающее пилообразное напряжение – подключено. Тумблер «каналы» перевести в среднее положение. На экране осциллографа окажутся две кривые: верхняя – временная зависимость гармонического напряжения на входе цепи, а нижняя – временная зависимость тока цепи, которая определяется ВАХ ПНЭ2. Регулятор «развертка» удобнее всего поставить в такое положение, при котором на экране укладываются два периода кривых. Указать, при каком виде ВАХ нелинейного элемента получается данная кривая тока. Зарисовать кривые тока в каждом положении переключателя ПНЭ2. Регуляторы «усиление» на ЭК установить в такие положения, при которых кривые удобны для наблюдения. Нанести горизонтальную ось нулевого уровня.

Переключатель ПНЭ2 повернуть против часовой стрелки до отказа.

2.2. Исследовать спектры периодических сигналов негармонической формы, полученных в пункте 2.1. Для этого проделать следующее: регулятором выходного напряжения на блоке ГЗ установить на вольтметре $V_I = 1,5$ В. Тумблер «вход» на блоке анализатора спектра привести в положение «внеш» (нижнее). Проводник отсоединить от входа второго канала осциллографа и перенести на вход анализатора спектра. На блоке питания включить тумблер «анализатор спектра». Регуляторы на ЭК установить в положения, при которых в верхней части экрана окажется кривая негармонической формы, а в нижней части – спектр сигнала. Регулятором «усиление плавно» второго канала на блоке ЭК установить спектральную линию в три клетки. Зарисовать получившиеся изображения при разных положениях переключателя ПНЭ2.

3 Исследование феррорезонанса в нелинейных цепях

3.1. Исследовать феррорезонанс в параллельной цепи. Собрать цепь по рисунку 39, где L^* – вторичная обмотка трансформатора (ТР). Регуляторы на блоках стенда установить в следующие позиции:

- на блоке питания выключить тумблер «анализатор спектра»;
- на блоке Г1 переключатель диапазонов частоты в – (0,2–2 кГц);
- на блоке Г2 переключатель ПФ – в первое положение ($\sim fvar$);
- на блоке Г3 тумблер пределов в положение 10 В, а регулятором выходного напряжения установить напряжение $2/3$ от максимального;
- на блоке осциллографа тумблер «X» – в положение «внеш». Регулятор «развертка канала X» – в крайнее левое положение. На экране появится фигура, близкая к эллипсу, что свидетельствует о наличии разности фаз между напряжением и током на входе цепи.

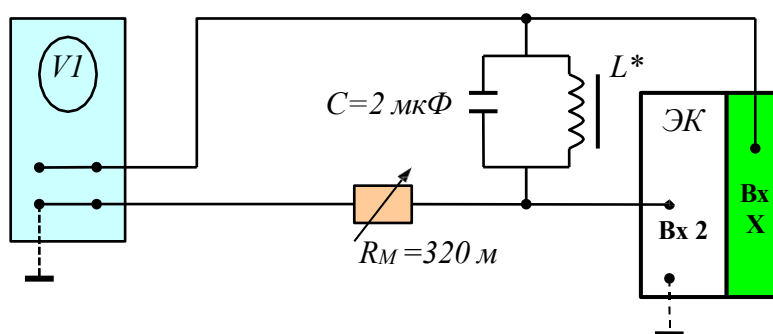


Рисунок 39 – Схема исследования феррорезонанса в параллельном контуре

3.2. Снять вольтамперную характеристику нелинейной цепи, включая режим феррорезонанса. Для этого при напряжении на выходе Г3, равном $\frac{2}{3} U_{\max}$, изменяя частоту генератора «плавно» на блоке Г1, добиться вырождения эллипса в линию. Режим цепи, соответствующий этой картинке на экране, будет соответствовать феррорезонансу на частоте порядка 500-700 Гц.

Перенести проводник с входа канала «Вх 2» осциллографа на вход вольтметра V2. При плавном увеличении напряжения U1 от 0 до максимального значения снять показания приборов V1 и V2 в 10 точках. Повторить

опыт, уменьшая напряжение от максимального значения до нуля. Отметить немонотонность в показаниях вольтметра $V2$ при плавном изменении напряжения $U1$. Данные представить в виде таблицы.

3.3. Исследовать феррорезонанс в последовательной цепи. Собрать цепь по рисунку 40. Прodelать в стенде аналогичные пп 3.1 и 3.2 переключения. Изменением частоты добиться вырождения эллипса в линию. Ориентировочно резонанс наблюдается при частоте 300-400 Гц.

Снять вольтамперную характеристику цепи. Перенести проводник с входа канала «X» на вход вольтметра $V2$. Снять показания приборов $V1$ и $V2$ при плавном увеличении напряжения не менее чем в 10 точках. Убедиться в наличии триггерного скачка. Уменьшая напряжение до нуля, отметить напряжение триггерного скачка. Данные представить в виде таблицы.

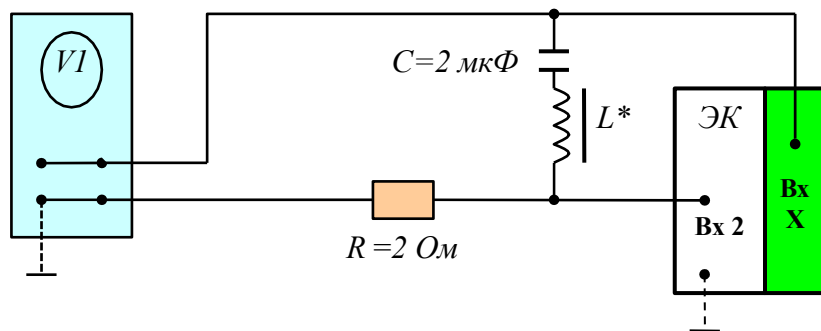


Рисунок 40 – Схема исследования феррорезонанса
в последовательном контуре

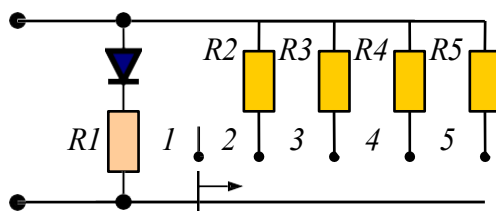
Содержание отчета и его форма

1. Объяснить вид и ход кривой, полученной в эксперименте п. 1.1. Рассчитать статическое и дифференциальное сопротивления цепи для спадающего участка кривой BAX .

2. Построить результирующую вольт-амперную характеристику нелинейной цепи, включающей идеальный диод и линейные резистивные элементы (параметры элементов цепи указаны на рисунок 41) при одном положении

ключа по указанию преподавателя. Полученную ВАХ сравнить с экспериментальными ВАХ НЭ2 в п. 1.2, реализованного по той же схеме:

3. На основании экспериментальных результатов, полученных в п. 2.2, сделать вывод об изменении спектра тока в нелинейной цепи. Объяснить вид кривых $i(t)$ и их спектральный состав. Построить кривую тока графическим методом при источнике синусоидального напряжения, используя ВАХ НЭ2.



$$R1=100 \text{ Ом}, R2=5,1 \text{ Ом}, R3=1,5 \text{ Ом}, R4=300 \text{ Ом}, R5=180 \text{ Ом}$$

Рисунок 41 – Нелинейная цепь с идеальным диодом

4. Предположить, что ВАХ НЭ2 описывается полиномом 5-й степени

$$i = a_0 u + a_1 u^2 + a_2 u^3 + a_3 u^4 + a_4 u^5. \quad (52)$$

Рассчитать коэффициенты полинома, если напряжение синусоидальной формы $u = U_m \sin \omega t$ вызывает входной ток однополупериодной формы

$$i(t) = \frac{I_m}{2} \left[\frac{2}{\pi} + \frac{1}{3\pi} \sin(\omega t) + \frac{4}{15\pi} \sin(2\omega t - 90^\circ) - \frac{4}{35\pi} \sin(4\omega t + 90^\circ) + \dots \right]. \quad (53)$$

Рассчитать и построить график полученной зависимости ВАХ $i_H(u_H)$, где $i_H = \frac{i}{I_m}$ и $u_H = \frac{u}{U_m}$, сравнить его с экспериментальными ВАХ НЭ2, полученных в пункте 1.2.

5. Построить зависимости $U(I)$ по данным пп.3.2 и 3.3. Объяснить вид и ход каждой экспериментальной кривой.

Вопросы для защиты работы

1. Какие цепи называются линейными, нелинейными и параметрическими?
2. Что такое феррорезонанс?
3. В каких случаях напряжение гармонической формы вызывает ток:
 - а) гармонической формы;
 - б) негармонической симметричной относительно горизонтальной оси;
 - в) негармонической несимметричной относительно горизонтальной оси?
4. Как определить дифференциальное и статическое сопротивления цепи по ВАХ нелинейного элемента?
5. Могут ли для реальных нелинейных резисторов статическое и дифференциальное сопротивления быть отрицательными?
6. Перечислите свойства, которыми при определенных условиях могут обладать нелинейные цепи и не обладают линейные цепи.
7. Какая цепь переменного тока называется нелинейной? Приведите примеры нелинейных сопротивлений.
8. Что представляют собой нелинейные емкостное и индуктивное сопротивления и каковы их основные характеристики?
9. Какие преобразования можно осуществить с помощью нелинейных электрических цепей?
10. Чем отличается явление феррорезонанса от явления резонанса в линейных цепях?
11. Как определяется вольтамперная характеристика всей феррорезонансной цепи?
12. Почему цепь, в которой содержится выпрямитель, следует считать нелинейной цепью?
13. В чем заключается сложность расчета рабочих режимов для нелинейных схем?
14. На чем основаны графические методы расчета нелинейных цепей?

15. В чем состоит отличие расчета режима магнитной цепи от расчета электрической цепи?

Список рекомендуемой литературы

Основная учебная литература

1. Нейман Л. Р., Демирчан К. С. Теоретические основы электротехники. Т. 1, 2, 3. – СПб.: Энергоиздат, 2003. 467 с.
2. Сборник задач по теоретическим основам электротехники: Учеб. пособие для энерг. и приборост. спец. вузов / Под ред. Л. А. Бессонова. – М.: Высшая школа, 2000. 528 с.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Высшая школа, 2003. 747 с.

Дополнительная литература

1. Основы теории цепей/ Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин и др. – М.: Энергоатомиздат, 1989. 528 с.
2. Матханов П. Н. Основы анализа электрических цепей. Линейные цепи. – М.: Высшая школа, 1984. 400 с.
3. Шебес М. Р. Теория линейных электрических цепей в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1998. 655 с.
4. Новгородцев А. Б. ТОЭ₁. 30 лекций по теории электрических цепей. – СПб.: Политехника, 1995. 519 с.

Лабораторная работа №9

Исследование формы токов в нелинейных цепях при гармоническом воздействии

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Экспериментальное исследование динамических процессов в нелинейных цепях.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. Исследовать вольтамперные характеристики двух резистивных нелинейных элементов.

1.1. Собрать цепь по схеме рис. 1. Регуляторы на блоках стенда установить в следующие позиции. На блоке питания включить тумблеры: “сеть”, “коммутатор-осциллограф”; на блоке Г1: тумблер “генератор” установить в положение “внутр”, переключатель диапазонов – (0.2–2 кГц); на блоке Г2: переключатель P_{Φ} – в третье положение (~ 2 кГц), регуляторы “подстройка” – до отказа против часовой стрелки. На блоке Г3: тумблер пределов – 10 В., регулятором выходного напряжения установить максимально возможное выходное напряжение. На магазине R_M установить сопротивление 40 Ом; на блоке ЭК: тумблер “каналы” - правое положение, тумблеры “ослабление” – 1:10 или 1:1, тумблер “1 канал” – в положение “внутр”, тумблер “вход X” – в положение “внеш”. Регуляторы “усиление плавно”, “усиление X”, “расхождение” и регуляторы ЭЛТ установить в такие положения, при которых на экране оказывается вольтамперная характеристика (ВАХ): вида “N” на втором канале. Если ВАХ находится на зеленоватом фоне, то этот фон можно либо оставить (практически он мешает наблюдению), либо убрать поворотом регулятора “развертка”. Нелинейная ВАХ элемента НЭ1, наблюдаемая на ЭК, содержит участок с отрица-

тельным сопротивлением. Если необходимо, то сопротивление на R_M можно изменять в пределах от 10 до 160 Ом, а напряжение на блоке ГЗ от 0,9 до 2 В. Зарисовать получившееся изображение ВАХ. Нанести координатные оси. Определить начало отсчета, выводя регулятор выходного напряжения блока ГЗ или регулятор “усиление” на ноль. Измерить значения размаха напряжения и тока. Для этого необходимо определить цену деления по горизонтали и вертикали второго канала осциллографа при данном положении регуляторов “усиление”. Делается это следующим образом. Максимальное отклонение луча от начала отсчета по горизонтали определяется по выходному напряжению на блоке ГЗ (верхняя шкала вольтметра V_1). Для определения цены деления по вертикали регулятор “тарировочное напряжение” следует повернуть до отказа против часовой стрелки, нажать кнопку “тарировка” второго канала, при этом изображение входного напряжения исчезнет и вместо него появится горизонтальная линия, а вольтметр V_1 на блоке ГЗ покажет нулевое значение. Удерживая кнопку нажатой, поворачивать регулятор “калибр. напр.” По часовой стрелке, пока тарировочный импульс не достигнет размаха 1 или 2 или 4 клетки. Вольтметр при этом по верхней шкале покажет значение калибровочного напряжения U_K . Зная величину U_K и количество клеток, занимаемых тарировочным напряжением, определить цену деления клетки.

1.2. Снять вольтамперную характеристику НЭ2. Перенести штекеры проводников с элемента НЭ1 на элемент НЭ2. Регуляторы выходного напряжения на блоке ГЗ повернуть до отказа по часовой стрелке (в положение максимального выходного напряжения). Тумблер пределов установить в максимальное положение 10 В. На панели активных элементов пятипозиционный переключатель ПНЭ2, находящийся ниже элемента НЭ2, повернуть до отказа против часовой стрелки. На магазине R_M установить сопротивление 160 Ом. При этом на экране осциллографа окажется характеристика – ВАХ элемента НЭ2. Зарисовать получившиеся изображения, нанести координатные оси.

1.3. Переключатель ПНЭ2 на плате активных элементов поворачивать по часовой стрелке, при этом форма нелинейной ВАХ будет изменяться и прибли-

жаться к линейной. Зарисовать изображения в каждом положении переключателя. Повернуть переключатель до отказа против часовой стрелки.

2. Исследовать форму тока и его спектральный состав на нелинейных элементах при гармоническом воздействии.

2.1. Исследовать цепь, изображенную на рис. 1 с НЭ2. На блоке ЭК тумблер “вход X” перевести в положение “внутр”, при этом внешнее напряжение от усилителя горизонтального канала осциллографа будет отключено, а развертывающее пилообразное напряжение – подключено. Тумблер “каналы” в среднее положение. На экране осциллографа окажутся две кривые: верхняя – временная зависимость гармонического напряжения на входе цепи, а нижняя – временная зависимость тока цепи, которая определяется ВАХ ПНЭ2. Регулятор “развертка” удобнее всего поставить в такое положение, при котором на экране укладываются два периода кривых. Указать, при какой ВАХ нелинейного элемента получается данная кривая тока. Зарисовать кривые тока в каждом положении переключателя ПНЭ2. Если необходимо, регуляторы “усиление плавно” на ЭК установить в такие положения, при которых кривые наиболее удобны для наблюдения. Нанести горизонтальную ось нулевого уровня.

Переключатель ПНЭ2 повернуть против часовой стрелки.

2.2. Исследовать спектры сигналов негармонической формы, полученных в пункте 2.1. Для этого проделать следующее: регулятором выходного напряжения на блоке ГЗ установить на вольтметре U_1 1,5 В. Тумблер “вход” на блоке анализатора спектра привести в положение “внешн.”(нижнее). Проводник отсоединить от входа второго канала осциллографа и перенести на вход анализатора спектра. На блоке питания включить тумблер “анализатор спектра”. Регуляторы на ЭК установить в такие положения, при которых в верхней части экрана окажется кривая негармонической формы, а в нижней части - спектр сигнала. Регулятором “усиление плавно” второго канала на блоке ЭК установить спектральную линию в три клетки, Зарисовать получившиеся изображения при разных положениях переключателя ПНЭ2.

3. Исследовать феррорезонанс в нелинейных цепях.

3.1. Исследовать феррорезонанс в параллельной цепи. Собрать цепь по рисунку 2, где L^* - вторичная обмотка трансформатора (ТР). Регуляторы на блоках стенда установить в следующие позиции: на блоке питания выключить “анализатор спектра”, на блоке Г1 тумблер в положение (0.2-2 кГц), на блоке Г2 переключатель ПФ – в первое положение ($\sim f \text{ var}$), на блоке Г3 тумблер в положение 10 В., регулятор выходного напряжения – на $2/3$ от максимально возможного. На блоке ”Х” тумблер переключить в положение “внешн.”. Регулятор “развертка канала Х” - в крайнее левое положение. При этом на экране появится фигура, близкая к эллипсу, что свидетельствует о наличии разности между напряжением и током на входе цепи.

3.2. Снять вольтамперную характеристику нелинейной цепи, включая режим феррорезонанса. Для этого при напряжении на выходе Г3, равном $2/3 U_{\max}$, изменяя частоту “плавно” генератора на блоке Г1, добиться вырождения эллипса в линию. Режим цепи, соответствующий этой картинке на экране, будет соответствовать феррорезонансу на частоте порядка 500-700 Гц. Затем перенести проводник с входа канала “ВХ2” осциллографа на вход вольтметра V_2 . При плавном увеличении напряжения U_1 от 0 до максимального значения снять показания приборов V_1 и V_2 не менее, чем в 10 точках. Повторить опыт, уменьшая напряжение от максимального значения до 0. Отметить немонотонность в показаниях вольтметра V_2 при плавном изменении напряжения V_1 . Данные представить в виде таблицы.

3.3. Исследовать феррорезонанс в последовательной цепи. Собрать цепь по рис. 3. Прodelать в стенде аналогичные пп 3.1 и 3.2 переключения. Снять вольтамперную характеристику цепи. Убедиться в наличии триггерного скачка. Для этого путем изменения частоты генератора “плавно” добиться вырождения эллипса в линию. Ориентировочно резонанс наблюдается при частоте 300-400 Гц. Перенести проводник с входа канала “Х” на вход вольтметра V_2 . Снять по-

казания приборов V_1 и V_2 при плавном увеличении напряжения не менее чем в 10 точках. Повторить опыт, уменьшая напряжение от максимума до 0. Особо отметить напряжения триггерного скачка. Данные представить в виде таблицы.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Объяснить вид и ход кривой, полученной в эксперименте п. 1.1. Рассчитать статическое и дифференциальное сопротивления цепи для спадающего участка кривой ВАХ.

2. Построить результирующую вольтамперную характеристику нелинейной цепи, включающей идеальный диод и линейные резистивные элементы (параметры элементов цепи указаны на рис. 4) при одном положении ключа по указанию преподавателя. Полученную ВАХ сравнить с экспериментальными ВАХ НЭ2 в п.1.2, реализованного по той же схеме.

3. На основании экспериментальных результатов, полученных в п. 2.2, сделать вывод об изменении спектра тока в нелинейной цепи. Объяснить вид кривых $i(t)$ и их спектральный состав в п. 2.2. Построить кривую тока в цепи п. 2.2. графическим методом при источнике синусоидального напряжения, используя ВАХ НЭ2.

4. Предположить, что ВАХ НЭ2 описывается полиномом 5-ой степени

$$i = a_1 \cdot u + a_2 \cdot u^2 + a_3 \cdot u^3 + a_4 \cdot u^4 + a_5 \cdot u^5 \dots$$

Рассчитать коэффициенты полинома, если напряжение синусоидальной формы

$u = U_m \cdot \sin \omega t$ вызывает выходной ток однополупериодной формы

$$i(t) = \frac{I_m}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} + \sin(\omega t) + \frac{3^4}{15 \cdot \pi} \sin(2\omega t - 90^\circ) - \frac{4}{35 \cdot \pi} \sin(4\omega t + 90^\circ) + \dots \right)$$

Рассчитать и построить график полученной зависимости ВАХ $i_H(u_H)$, где

$i_H = i/I_m$ и $u_H = u/U_m$, сравнить его с экспериментальными ВАХ НЭ2, полученных в п. 1.2.

5. Построить зависимости $U(I)$ по данным пп. 3.2 и 3.3. Объяснить ход каждой экспериментальной кривой.

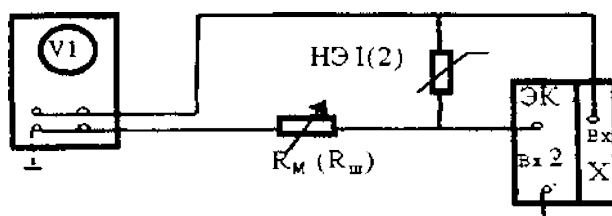


Рис. 1

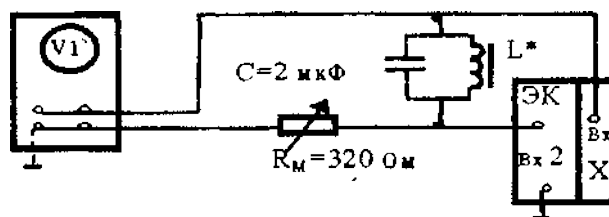


Рис. 2

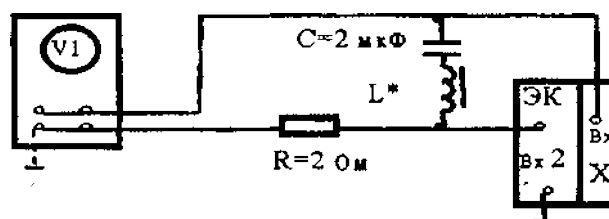
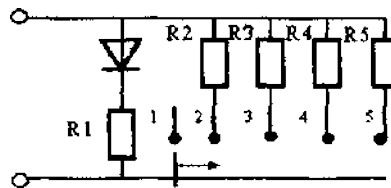


Рис. 3

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие цепи называют линейными, нелинейными, параметрическими?
2. Что такое феррорезонанс?
3. В каких случаях напряжение гармонической формы вызывает ток а) гармонической формы, б) негармонической симметричной относительно горизонтальной оси, в) негармонической несимметричной относительно горизонтальной оси формы?
4. Как определить дифференциальное и статическое сопротивления цепи по ВАХ нелинейного элемента?
5. Могут ли для реальных нелинейных резисторов статическое и дифференциальное сопротивления быть отрицательными?
6. Перечислите свойства, которыми при определенных условиях могут обладать нелинейные цепи и не обладают линейные цепи.



$R1=100 \text{ Ом}, R2=5,1 \text{ Ом}, R3=1,5 \text{ Ом},$
 $R4=300 \text{ Ом}, R5=180 \text{ Ом}.$

Рис. 4

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №10

Исследование формы токов в нелинейных резистивных цепях при гармоническом воздействии

Все цепи делятся на линейные, нелинейные, и параметрические. Нелинейными называются цепи, сопротивления которых изменяются в зависимости от значения протекающего через них тока или приложенного к ним напряжения. Вольтамперные характеристики (ВАХ) нелинейных цепей описываются уравнениями, степень которых выше первой. Поскольку сопротивления в таких цепях представляют величины переменные, то мгновенные значения тока в них не пропорциональны мгновенным значениям напряжения, поэтому форма тока оказывается отличной от формы воздействующего напряжения. Таким образом, если к нелинейной цепи приложить напряжение гармонической формы, то форма тока будет отличной от гармонической, но всякий негармонический сигнал, как известно, состоит из нескольких частот (гармоник). В общем случае отклики в цепях с нелинейными элементами содержат частоты, которые отсутствуют в воздействующем напряжении.

Рассмотрим пример, если ко входу нелинейной цепи приложить гармоническое напряжение с некоторой частотой f_1 , то входной ток окажется не гармоническим и, следовательно, содержащим спектр частот. Если данный ток протекает через резистивное сопротивление, то форма падения напряжения на нем будет также негармонической. Форма тока и значения амплитуд гармоник определяются видом ВАХ нелинейного участка цепи. Если ВАХ описывается полиномом $i = a_1 \cdot u + a_2 \cdot u^2 + a_3 \cdot u^3 + a_4 \cdot u^4 + a_5 \cdot u^5 + \dots$, то амплитуды гармонических составляющих тока I_{mk} можно определить из следующих выражений. На частоте f_1 :

$$I_{m1} = a_1 \cdot U_m + \frac{3}{4} a_3 \cdot U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 \cdot U_m^5;$$

на частоте $f_2 = 2f_1$

$$I_{m2} = \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{2} a_4 U_m^4;$$

на частоте $f_3 = 3f_1$

$$I_{m3} = \frac{1}{4} a_3 U_m^3 + \frac{1}{16} a_5 U_m^5;$$

$$\text{на частоте } f_4 = 4f_1 \quad I_{m4} = \frac{1}{8} a U_m^4;$$

$$\text{на частоте } f_5 = 5f_1 \quad I_{m5} = \frac{1}{16} a U_m^5;$$

где U_m и f_1 - амплитуда, и частота воздействующего напряжения. Обратная задача, зная амплитудные значения токов на различных частотах (или иных откликов) можно рассчитать коэффициенты полинома, описывающего амперную характеристику цепи по формулам:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{I_{m1} - 3I_{m3} + 5I_{m5}}{U_m}; & a_2 &= \frac{2 \cdot (I_{m2} - 4I_{m4})}{U_m^2}; \\ a_3 &= \frac{4 \cdot (I_{m3} - 5I_{m5})}{U_m^3}; & a_4 &= \frac{8I_{m4}}{U_m^4}; & a_5 &= \frac{16I_{m5}}{U_m^5}. \end{aligned}$$

Из приведенных выражений следует, что гармонические составляющие откликов с частотами, отличающимися от частоты воздействия в 1, 3, 5 ... раз, зависят от членов полинома с нечетными степенями, а гармонические составляющие, отличающиеся в 2, 4 ... раза зависят от членов с четными степенями. Если ВАХ содержит члены полинома только с нечетными степенями, то и ВАХ, и кривые откликов будут симметричны относительно горизонтальной оси, а при наличии членов с четными степенями - несимметричны. Следовательно, если напряжение гармонической формы приложено к двухполюснику с линейной характеристикой (рис. 5а), то ток во входной цепи будет иметь также гармоническую форму. Если ВАХ нелинейная, но симметричная относительно горизонтальной оси (рис. 5б), то форма тока будет несинусоидальной, но симметричной относительно горизонтальной оси, в такой зависимости будут только нечетные гармоники. Если ВАХ нелинейна и несимметрична относительно горизонтальной оси (рис. 5в), то кривая тока будет несинусоидальной и несимметричной относительно горизонтальной оси, такая кривая содержит четные гармоники.

Например, чтобы напряжение синусоидальной формы $u = U_m \sin \omega_1 t$ вызвало входной ток прямоугольной периодической формы:

$$i = \frac{4I_m}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right),$$

необходимо это напряжение приложить к нелинейному элементу с ВАХ, описанной уравнением

$$i = \frac{4I_m}{\pi} \left(1 \cdot \frac{u}{U_m} - \frac{8}{3} \frac{u^3}{U_m^3} + \frac{16}{5} \frac{u^5}{U_m^5} \right),$$

или через нормированные величины

$$i_H = 1 \cdot u_H - \frac{8}{3} \cdot u_H^3 + \frac{16}{5} \cdot u_H^5, \quad \text{где} \quad i_H = \frac{i}{I_m}, \quad u_H = \frac{u}{U_m}.$$

Экспериментальное определение ВАХ нелинейного элемента

Экспериментальное определение ВАХ нелинейного элемента производится с помощью схемы представленной на рис. 1. Схема работает следующим образом. К горизонтальному каналу осциллографа (каналу X) подводится напряжение, имеющее на зажимах элемента, ВАХ которого определяется, а к вертикальному каналу (каналу Y) – напряжение, пропорциональное току, протекающему через исследуемый элемент. При этом на экране осциллографа получается кривая, $i = f(u)$ т.е. вольт – амперная характеристика исследуемого элемента или участка цепи. Напряжение, подаваемое на вертикальный канал, снимается с резистивного сопротивления $R_{из}$, включенного последовательно с исследуемым элементом. Сопротивление $R_{из}$ должно быть такой величины, при которой включение этого сопротивления практически не изменит параметры исследуемой цепи. В типовом режиме осциллографы показывают кривые напряжения, подведенного ко входу горизонтального канала в функции времени. При этом ко входу горизонтального канала подводится развертывающее напряжение пилообразной формы, вырабатываемое внутри осциллографа. Для снятия ВАХ усилитель горизонтального канала следует отключить от генератора пилообразных напряжений и подключить к внешнему входному гнезду “X”.

Феррорезонанс в нелинейных цепях

Гармоническая линеаризация (метод эквивалентных синусоид), т.е. замен несинусоидальных периодических кривых токов и напряжений на элементах цепи эквивалентными синусоидами, позволяет использовать при анализе нелинейных цепей синусоидального тока – комплексный метод, векторные диаграммы и др.

Воспользуемся этими методами для изучения процессов в цепях, включающих нелинейные катушки с ферромагнитными сердечниками и конденсаторы. Напомним, что в линейной цепи при последовательном и параллельном соединении этих имеют место резонансные явления, выражающие в резком увеличении напряжений или токов на обоих элементах в окрестности резонансной частоты. Поскольку параметры и частота резонанса ω_0 линейной цепи связаны условием $\omega_0 = 1/\sqrt{L \cdot C}$, то для достижения резонанса необходимо изменять либо частоту, либо индуктивность или емкость, но не напряжение. Индуктивность нелинейной катушки непостоянна, а зависит от напряжения, поэтому феррорезонанс, т.е. резонанс в цепи, включающей катушку с ферромагнитным сердечником и линейный конденсатор, может быть, достигнут изменением величины приложенного к цепи напряжения.

Феррорезонанс при последовательном соединении катушки и конденсатора. Вольтамперная характеристика катушки $U_L(I)$ для действующих значений тока и напряжения аналогична ее вебер-амперная характеристика $\Psi(i)$ – с увеличением тока по мере насыщения скорость роста напряжения замедляется. Рассмотрим контур с последовательным соединением катушки и линейного конденсатора (рис. 6а), характеристика которого имеет вид прямой $U_C = I \cdot (1/\omega C)$. Для получения вольтамперной характеристики цепи пренебрежем потерями в катушке и будем считать, что зависимость $U_L(I)$ отвечает эквивалентным синусоидам. При этих допущениях U_L опережает ток I на угол $\pi/2$, а

U_C отстает от него на тот же угол (рис. 6,б). Поэтому U_L и U_C находятся в противофазе, т.е. разность их фаз равна π , и для получения результирующей характеристики $U(I)$ - напряжение U на зажимах цепи следует определить как модуль разности $U = |U_L - U_C|$. Кривые U_L , U_C и U изображены на рис. 6в.

Если параметры цепи подобраны так, что характеристики $U_L(I)$ и $U_C(I)$ пересекаются, полученная результирующая кривая $U(I)$ неоднозначна по напряжению. В точке резонанса, где U_L и U_C компенсируют друг друга, результирующее напряжение U падает до нуля. Однако это является следствием принятой идеализации процессов в контуре, в первую очередь, пренебрежения потерями в сердечнике катушки. Реальная зависимость $U(I)$, получаемая экспериментально, изображена на (рис. 6в) штриховой линией. Она имеет падающий участок, но минимум напряжения на зажимах цепи отличен от нуля, поскольку при наличии в цепи потерь напряжения U_L и U_C не могут полностью скомпенсировать друг друга, так как не находятся в противофазе.

При питании последовательного феррорезонансного контура от источника синусоидального напряжения по мере роста напряжения сначала наблюдается плавное увеличение тока до достижения напряжения U_1 (точка 1). Затем происходит бросок тока и переход в точку 1', после которого ток вновь плавно увеличивается. При уменьшении напряжения плавный характер уменьшения тока наблюдается до точки 2, из которой при напряжении U_2 имеет место скачкообразный переход в точку 2'. Таким образом, при питании цепи от источника напряжения падающий участок характеристики 1 – 2 не может быть снят экспериментально.

В режиме питания цепи от источника тока, который обеспечивается включением последовательно с контуром линейного элемента с большим сопротивлением, изменение тока в цепи имеет плавный характер, и при увеличении тока мы последовательно проходим всю немонотонную характеристику, включая ее падающий поток.

Феррорезонанс в контуре с параллельным соединением. Анализ процессов в контуре (рис. 7а) при тех же допущениях об отсутствии потерь в катушке и замене несинусоидальных кривых эквивалентными синусоидами производится аналогично. При равенстве напряжений на элементах цепи токи в обеих ветвях находятся в противофазе (рис. 7б), и результирующая вольтамперная характеристика цепи получается в результате вычитания абсцисс кривых $U(I_L)$ и $U\omega C = I_C$ (рис. 8в): $I = I_L - I_C$. Это приводит к немонотонной характеристике, неоднозначной по току (см. рис. 7в). Как и в предыдущем случае, полная компенсация токов в точке резонанса является следствием принятой идеализации и в реальном феррорезонансном контуре не наблюдается. Экспериментально наблюдаемая кривая проходит правее, но тоже имеет немонотонный характер (штриховая линия на рис. 7в). В точке резонанса ненулевой минимум тока определяется, с одной стороны, некомпенсированными высшими гармониками тока в катушке (компенсация токов имеет место лишь для 1-ой гармоники, так как при питании от синусоидального источника ток конденсатора содержит лишь 1-ю гармонику, а ток катушки содержит высшие гармоники). С другой стороны, при резонансе не компенсируется активная составляющая тока в катушке, обусловленная потерями в сердечнике.

Многозначность характеристики $U(I)$ определяет возможность скачкообразных изменений напряжения на контуре при его питании от источника тока, в этом случае при регулировании тока мы не попадаем на падающий участок характеристики. Наоборот, при питании параллельного контура от источника напряжения из-за однозначности зависимости $I(U)$ изменение тока при регулировании напряжения имеет плавный характер и возможно экспериментальное снятие падающего участка характеристики.

Такой же подход, основанный на графическом суммировании характеристик, можно использовать и при анализе более сложных цепей. Наличие активных и реактивных составляющих токов или напряжений требует осуществлять их суммирование геометрически в соответствии с правилами построения векторных диаграмм. При этом необходимо учитывать, что у феррорезонансных

контуров при переходе через точку резонанса изменяется характер цепи с емкостного на индуктивный или наоборот.

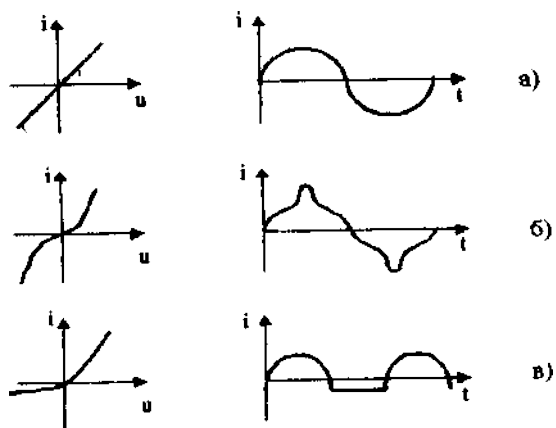


Рис. 5

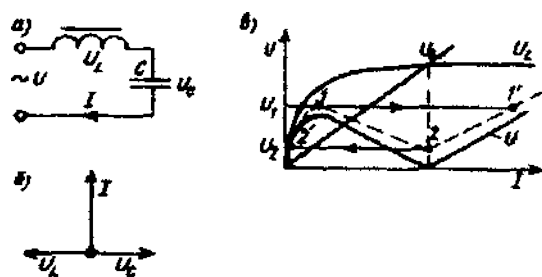


Рис. 6

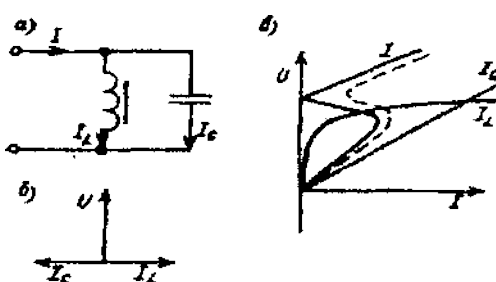


Рис. 7

РЕКОМЕНДУЕМЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. М.: Высшая школа, 1984, 559 с.
2. Нейман Л. Р., Демирчан К. С. Теоретические основы электротехники. Л.: Энергоиздат, 1981, 520 с.
3. Зевеке Г. В., Ионкин П. А. Основы теории цепей. М.: Энергоатомиздат, 1989, 528 с.
4. Добротворский И. Н. Лабораторный практикум по основам теории цепей. М.: Высшая школа, 1986, 205 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение выс-
шего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по организации самостоятельной работы обучающихся
по дисциплине

Теоретические основы электротехники

для студентов направления подготовки /специальности

13.03.02 Электроэнергетика и электротехника

Направленность (профиль) Цифровые технологии в электроэнергетике

Ставрополь, 2026

В инженерной практике расчёта линейных электрических цепей с сосредоточенными параметрами помимо установившихся режимов существенное место занимают переходные процессы, наступающие после тех или иных коммутаций (выключение и включение нагрузки или источников питания), а также после изменения параметров цепи.

Эти процессы не могут протекать мгновенно, т.к. невозможны мгновенные изменения энергии, записанной в электромагнитном поле цепи.

В цепях с сосредоточенными параметрами энергия запасается в ёмкостях в виде энергии $\frac{1}{2} C U^2$ электрического поля и индуктивностях в виде энергии $\frac{1}{2} L I^2$ магнитного поля. Из невозможности мгновенных изменений энергии на конечную величину вытекает невозможность скачков напряжений U_C в ёмкостях C и токов I_L в индуктивностях L ; это определяет начальные условия для U_C и I_L при переходных процессах. Вместе с тем, возможны скачки токов в ёмкостях и напряжений на индуктивностях, а также скачки напряжений и токов в сопротивлениях R , так как это сопротивление не запасает электромагнитную энергию. Анализ переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами сводится к решению линейных дифференциальных уравнений, составляемых на основании законов Кирхгофа. Так как общее решение неоднородных линейных дифференциальных уравнений равно сумме частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения, то действительный ток или напряжение в цепи во время переходного процесса представляется в виде суммы соответственно токов или напряжений принуждённого и свободного режимов.

В цепи физически существуют только действительные токи и напряжения, а разложение их на принуждённые и свободные составляющие является математическим приёмом, упрощающим расчёт.

Расчет токов и напряжений принуждённого режима $LL_{\text{пр}}$ и $VV_{\text{пр}}$ (нахождение частного решения неоднородного дифференциального уравнения) не требует применения излагаемых в курсе высшей математики приёмов, т.к. токи и напряжения принуждённого режима определяются общими методами расчёта цепей постоянного или переменного тока.

Общее решение однородного дифференциального уравнения, которое даёт ток или напряжение свободного режима ($LL_{\text{св}}$, $VV_{\text{св}}$), содержит постоянные интегрирования.

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий, т.е. на основании значений действительных токов в индуктивностях и напряжений на ёмкостях в момент, когда изменяются условия электрического состояния цепи, т.е. в момент $tt = 0_+$. Если число постоянных интегрирования больше одной, что соответствует дифференциальному уравнению второго, третьего и т.д. порядков, то должны быть дополнительно найдены из дифференциальных уравнений величины производных от токов и напряжений в момент коммутации.

Таким образом, **классический метод** решения задач на переходные процессы сводится к следующему:

1. Искомый ток (или напряжение).

Его представляют в виде суммы принуждённой и свободной составляющих:

$$i = LL_{\text{пр}} + LL_{\text{св}} \quad \text{или} \quad V = VV_{\text{пр}} + VV_{\text{св}}$$

Принуждённая составляющая определяется из установившегося режима электрической цепи после коммутации.

2. Общая формула свободного тока.

$$LL_{\text{св}} = \sum_{k=1}^n AA_k e^{P_k t},$$

где

n – порядок характеристического уравнения цепи;

PP_k – значения корней характеристического уравнения;

AA_k – постоянные интегрирования.

3. Характеристическое уравнение.

Наиболее простой способ составления характеристического уравнения цепи состоит в следующем:

- а) записывают формулу входного сопротивления цепи в комплексной форме;
- б) в выражении ZZ производят замену сомножителя $j\omega$ на p ;
- в) полученное выражение $ZZ(p)$ приравнивают нулю $ZZ(p) = 0$.

Характеристическое уравнение можно получить путем приравнивая нулю входного сопротивления $ZZ(p)$ относительно любой ветви с источником тока. Его следует рассчитать относительно любой другой ветви схемы, полагая при этом ветвь с источником тока разомкнутой.

4. Свободный ток.

Выражение свободного тока определяется видом корней характеристического уравнения.

При различных вещественных корнях выражение свободного тока имеет вид:

$$LL_{CB} = AA_1 e^{p_1 t} + AA_2 e^{p_2 t} + \dots + AA_n e^{p_n t};$$

Если корни характеристического уравнения равны между собой (т.е. корень p имеет кратность m), то

$$LL_{CB} = AA_0 e^{pt} + AA_1 t e^{pt} + AA_2 t^2 e^{pt} + \dots + AA_m t^m e^{pt};$$

В случае пары комплексно-сопряженных корней $pp_{1,2} = -\alpha \pm jjj_{CB}$;

$$LL_{CB} = AA e^{-\alpha t} SLLSS(jj_{CB} t + \Psi\Psi);$$

В последнем случае постоянными интегрирования являются A и Ψ .

5. Начальные условия.

Для определения постоянных интегрирования используются начальные условия. В качестве независимых начальных условий берут значения токов

индуктивных катушек $LL_L(0_-)$ и напряжений на конденсаторах $VV_C(0_-)$ к моменту коммутации, что позволяет использовать законы коммутации:

$$LL_L(0_-) = LL_L(0_+), \quad VV_C(0_-) = VV_C(0_+);$$

Начальные значения токов в ветвях без индуктивных катушек или напряжений на элементах, не являющимися конденсаторами в момент коммутации могут изменяться скачком. Эти начальные значения токов и напряжений (зависимые начальные условия) определяются по законам Кирхгофа с применением законов коммутации.

6. Постоянные интегрирования.

Постоянные интегрирования определяют следующим образом:

а) в случае цепи первого порядка постоянную интегрирования находят из выражения $i(t)$, рассматриваемого при $i = 0_+$

б) в случае цепи второго порядка для определения постоянных интегрирования используют уравнения $LL(0_+)$ и $LL^i(0_+)$

$$LL(0_+) = LL_{\text{пр}}(0_+) + AA;$$

$$LL^i(0_+) = LL^i_{\text{пр}}(0_+) + pp_1AA_1 + pp_1AA_1;$$

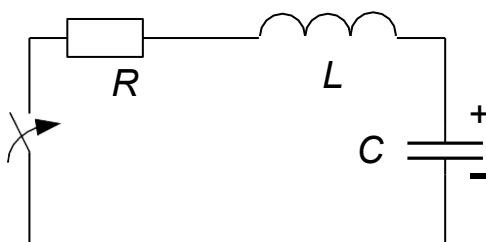
Или

$$LL(0_+) = LL_{\text{пр}}(0_+) + AAAALLSS \Psi\Psi$$

$$LL^i(0_+) = LL^i_{\text{пр}}(0_+) + jjAA\omega\omega\omega AA \Psi\Psi - QQAAAALLSS\Psi\Psi;$$

ЗАДАЧА

Конденсатор, заряженный до напряжения $CC_{\text{то}}$, замыкается на цепь, содержащую R и L.



Решение классическим методом.

Уравнение напряжений для этого контура имеет вид

$$CC_R + CC_L + CC_C = 0$$

Выразим все величины через CC_C

$$i = C \frac{dU_C}{dt}; \quad \frac{CC}{R} = iR = RC \frac{dU_C}{dt};$$

$$\frac{CC}{L} = L \frac{ddLL}{ddtt} = \frac{dd^2CC}{ddtt^2}$$

Подставив эти значения в исходное уравнение, получим

$$\frac{LLCC}{dt^2} \frac{d^2U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + \frac{CC}{L} U_C = 0;$$

$$\frac{dd^2CC}{ddtt^2} + \frac{RR}{LL} \frac{ddCC}{ddtt} + \frac{1}{LLCC} CC = 0;$$

Мы получим однородное линейное дифференцированное уравнение второго порядка. Его решение, как известно, имеет вид

$$CC_c = AA_1 e^{p_1 t} + AA_2 e^{p_2 t};$$

Где AA_1, AA_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий, pp_1, pp_2 – корни характеристического уравнения

$$p^2 + \frac{RR}{LL} p + \frac{1}{LLCC} = 0;$$

$$pp_{1,2} = -\frac{RR}{2LL} \pm \sqrt{\frac{RR^2}{4LL^2} - \frac{1}{LLCC}};$$

$$pp_1 = -\frac{RR}{2LL} + \sqrt{\frac{RR^2}{4LL^2} - \frac{1}{LLCC}};$$

$$pp_2 = -\frac{RR}{2LL} - \sqrt{\frac{RR^2}{4LL^2} - \frac{1}{LLCC}};$$

Из выражения $pp_{1,2}$ следует, что корни могут быть комплексными или вещественными. Ниже рассмотрим этот вопрос подробнее, а сейчас определим постоянные интегрирования, исходя из начальных условий и используя закон коммутации

$$CC_c(0_-) = CC_c(0_+) = CC_{co};$$

$$i(0_-) + LL(0_+) = 0;$$

В предположении, что pp_1 и pp_2 уже определены, получим выражение тока

$$i = C \frac{dU_c}{dt} = CC(pp_1 AA_1 e^{p_1 t} + pp_2 AA_2 e^{p_2 t});$$

Применим к выражениям CC_c и i начальные условия, получим

$$AA_1 + AA_2 = CC_{co};$$

$$pp_1 AA_1 + pp_2 AA_2 = 0;$$

Отсюда получим выражения для AA_1 и AA_2

$$AA_1 = \frac{-pp_2 CC_{co}}{pp_1 - pp_2}; \quad AA_2 = \frac{pp_1 CC_{co}}{pp_1 - pp_2};$$

а для CC_c и i

$$CC_c = \frac{CC_{co}}{pp_1 - pp_2} (-pp_2 e^{p_1 t} + pp_1 e^{p_2 t});$$

$$LL = CC \frac{1}{pp_1 - pp_2} CC_{co} (-e^{p_1 t} + e^{p_2 t}).$$

Для исследования характера полученных выражений мы должны отдельно рассмотреть случаи вещественных и комплексных корней:

а) в случае вещественных корней имеем апериодический разряд, т.е. каждая из искомых величин CC_c и i состоит из двух слагаемых: одного медленно затухающего и другого, быстро затухающего;

б) в случае комплексных корней возникает колебательный разряд. В этом случае будем иметь

$$pp_{1,2} = -\frac{RR}{2LL} \pm jj \frac{1}{LLCC} - \frac{RR^2}{4LL^2};$$

Введём следующие обозначения

$$\frac{RR}{2LL} = bb; \quad \frac{1}{LLCC} - \frac{RR^2}{4LL^2} = jj^0;$$

тогда

$$pp_1 = -bb + jjj_0;$$

$$pp_1 - pp_2 = 2 jjj_0;$$

$$pp_2 = -bb - jjj_0;$$

$$bb^2 + jj^2 = \frac{1}{LLCC};$$

а выражения CC_c и i будут иметь вид

$$CC_c = \frac{CC_{co}}{jj_0 \sqrt{LLCC}} SSLLSS(jj_{tt} + \Psi\Psi)\Psi\Psi \frac{jj}{bb};$$

$$LL = \frac{CC_{co}}{jj_0 LL} ee^{-bt} SSLLSS(jj_{tt});$$

что говорит о наличии затухающих колебаний.

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

В основе операторного метода расчёта переходных процессов в электрических цепях лежит преобразование Лапласа.

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt$$

$\Phi(p)$ – функция, преобразованная по Лапласу или изображение,

$\varphi(t)$ – функция независимой переменной t или оригинал,

p – комплексное число.

Эту связь сокращённо записывают в виде $\Phi(p) \stackrel{.}{=} \varphi(t)$

При её составлении, во-первых, все переменные величины заменяются их операторным изображениями $LL(tt)$ на $II(\overline{PP})$, $CC(tt)$ на $ee(LL)$ соответственно на $CC(\overline{PP})$ и $\overline{EE}(PP)$; во-вторых, индуктивности L заменяются последовательными схемами, состоящими из операторного сопротивления pL и источника напряжения э.д.с. $LLLL(0_-)$, где (0_-) начальное значение тока в индуктивности; в-третьих, ёмкости C заменяются операторными сопротивлениями $1/pp\omega\omega$ и источником напряжения с э.д.с. $CC_c(0_-)/pp$, где $CC_c(0_-)$ – начальное значение

напряжения на ёмкости. Э.д.с. $LLLL(0_-)$ имеет напряжение, совпадающее с током $LL(tt)$, а э.д.с. $CC_c(0_-)/pp$ направлена против напряжения на ёмкости.

Дальнейший путь расчёта связан с составлением уравнений на основе законов Кирхгофа в операторной форме.

$$1 \quad \sum_{K=1}^m II_K(\bar{PP}) = 0;$$

$$2. \sum_{K=1}^{NB} [EE_K(PP) + LL_K LL_K(0_-) - \frac{U_{CK}(0_-)}{P}] = \sum_{K=1}^{NB} II_K(PP) ZZ_K(PP);$$

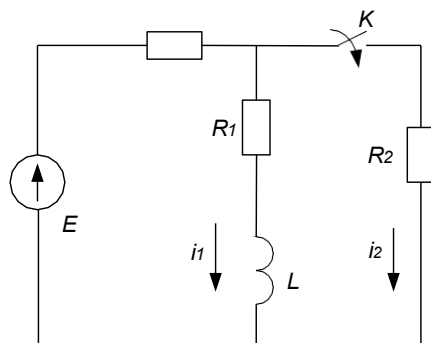
с последующим определением изображения искомой величины тока, либо напряжения. Переход от изображения к оригиналу осуществляется известными в операционном исчислении методами.

Таким образом, методика решения задач операторным методом сводится к следующему:

- 1) составлению операторной схемы замещения;
- 2) составлению уравнений Кирхгофа (или соответствующих им уравнений по тому или иному методу расчёта) в операторной форме с учётом начальных условий;
- 3) их решению относительно изображения искомой величины;
- 4) нахождению оригинала (с помощью теоремы разложения, таблиц, связывающих оригиналы и их изображения или другими методами) по найденному изображению.

Рассмотрим решение задачи операторным методом.

ЗАДАЧА.



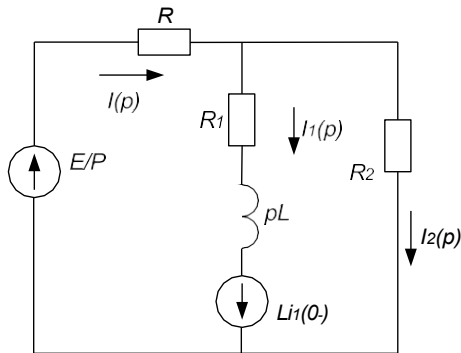
$$E = 12 \text{ В}, \quad R=R_1=R_2=4 \text{ Ом}, \quad L=0,1$$

Гн

Найти ток i_1 после замыкания К.

РЕШЕНИЕ.

1. Осуществляем построение операторной схемы замещения



2. Составляем уравнения Кирхгофа

$$II(pp) - I_1(pp) - I_2(pp) = 0;$$

$$RRII(pp) + RR_2I_2(pp) = EE(pp);$$

$$RRII(pp) + (RR_1 + ppLL)I_1(pp) = EE(pp) + LLL_1(00.);$$

В этих уравнениях $EE(pp) = EE/pp$

$$I_1(pp) = \frac{2pp + 11,25}{pp(pp + 6,25)};$$

$$LL_1(tt) = (1,8 + 0,2ee^{-6,25t})AA$$

Содержание самостоятельной работы:

1. Классическим методом для первой, второй и третьей коммутации определить $LL_1(tt)$, $LL_2(tt)$. При этом рубильники включать последовательно в соответствии с указанными на схеме номерами через t сек. При возникновении колебательного процесса принять $t = T/8$, где T – период собственных колебаний. При возникновении аperiodического процесса принять $tt = \frac{1}{|p_1|}$, где pp_1 – корень характеристического уравнения, причём $|pp_1| < |pp_2|$.

2. Используя метод переменных состояния, записать уравнение состояния электрической цепи в форме Коши после замыкания 3-го рубильника. Произвести расчёт токов $LL_1(tt)$ и $LL_2(tt)$ с использованием ЭВМ.

3. Операторным методом определить $LL_2(tt)$.

4. Построить график тока $LL_1(tt)$.

Оригиналы простейших функций и их изображений, полученные на основании преобразования Лапласа, могут быть найдены в соответствующих таблицах.

Использование операционного исчисления для анализа переходных процессов позволяет перейти от дифференциальных уравнений к алгебраическим.

Этот переход включает в себя введение операторного сопротивления $Z(p)$ вместо сопротивления цепи Z путём замены $j\omega$ на p . Так для цепи, состоящей из последовательно-соединённых элементов R, L и C , операторное сопротивление имеет вид

$$Z(p) = R + pL + 1/pC ;$$

Уравнения, для изображения тока и напряжения произвольной цепи, могут быть получены по законам электрических цепей (Ома и Кирхгофа), записанными для операторным схем замещения. Операторная схема замещения произвольной ветви (Рис. 1) показана на рис. 2.

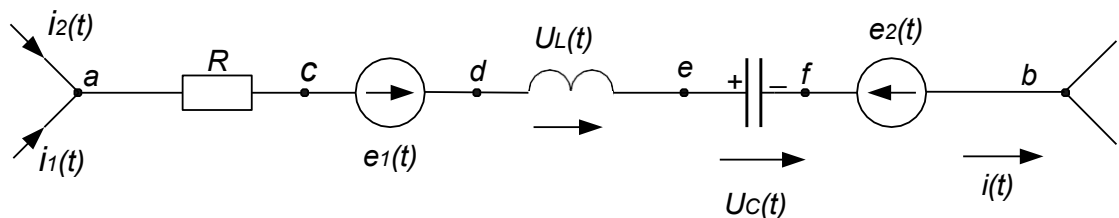


Рис. 1

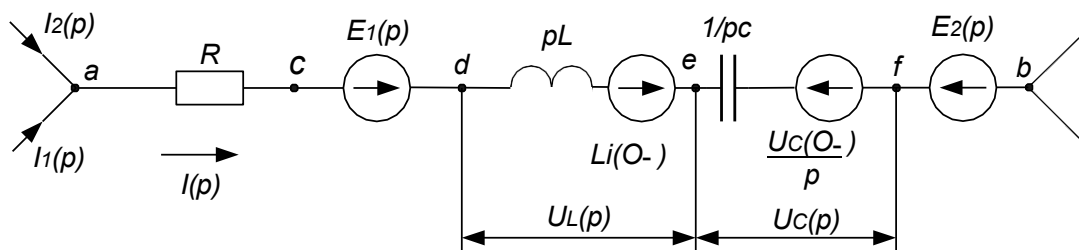


Рис. 2

Таблица значений ёмкостей C в мкФ

№ ва р	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
№ гр.														
1	40	50	60	70	80	90	10	11	12	13	14	15	16	17
							0	0	0	0	0	0	0	0
2	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

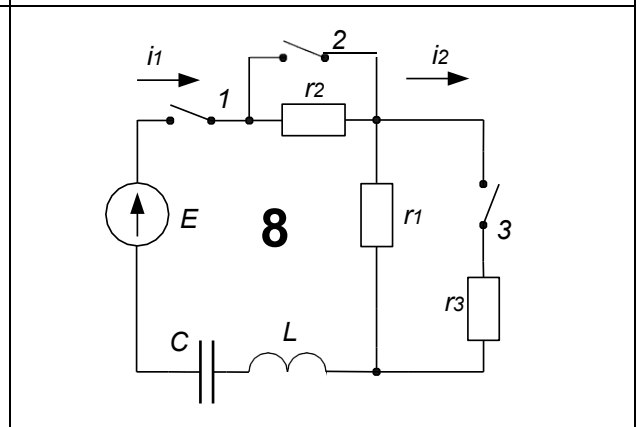
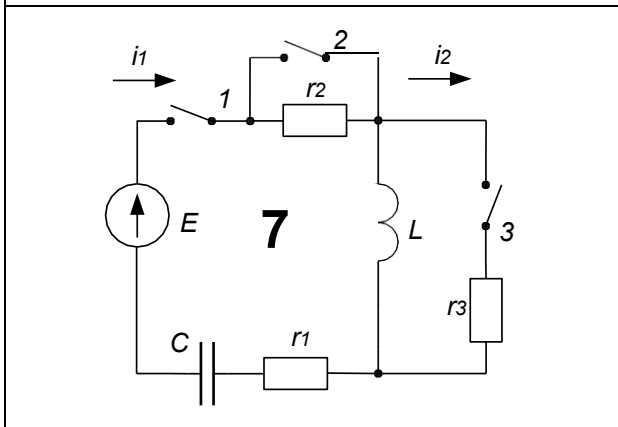
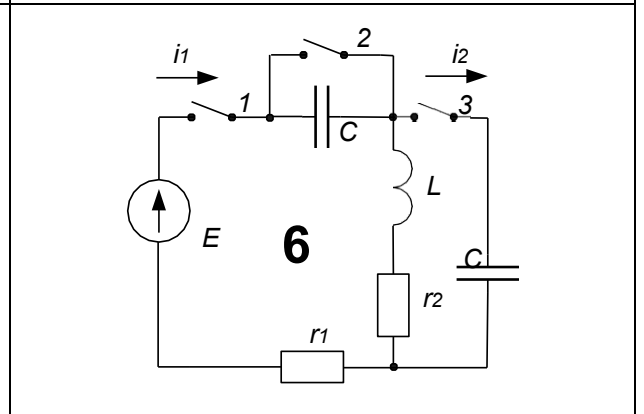
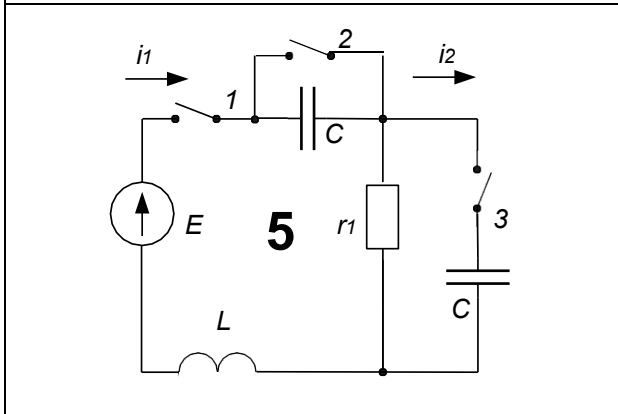
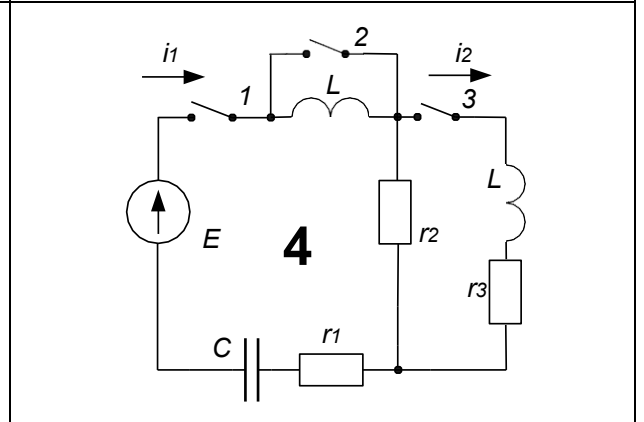
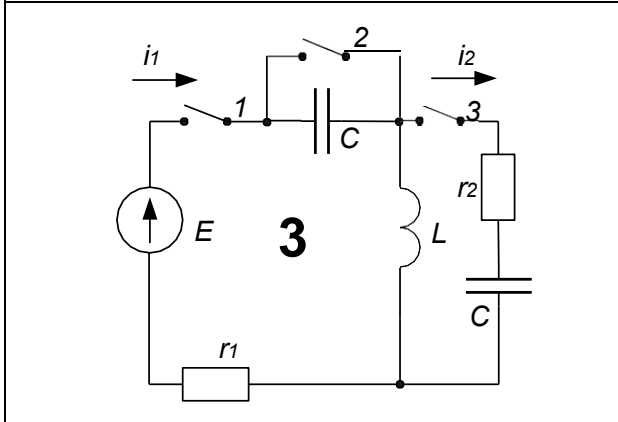
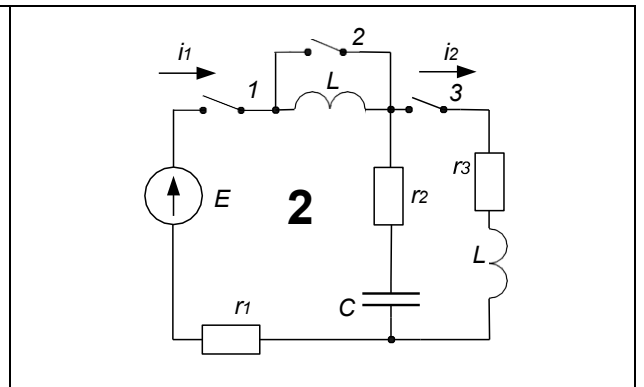
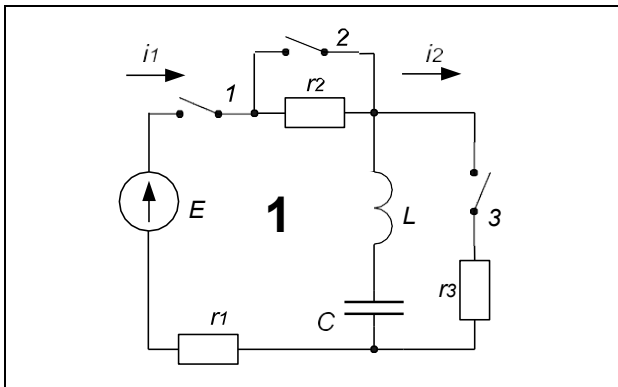
№ ва р	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
№ гр.														
1	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

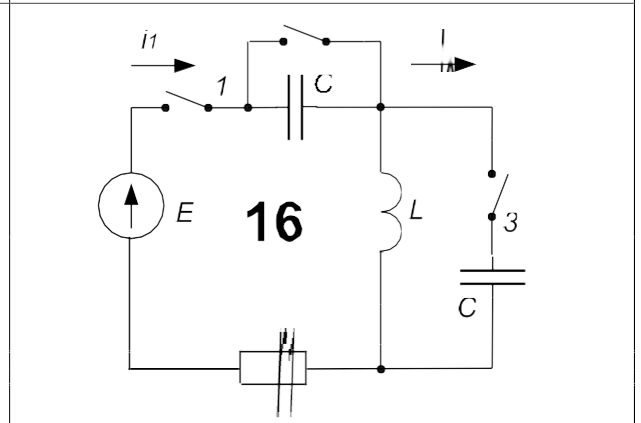
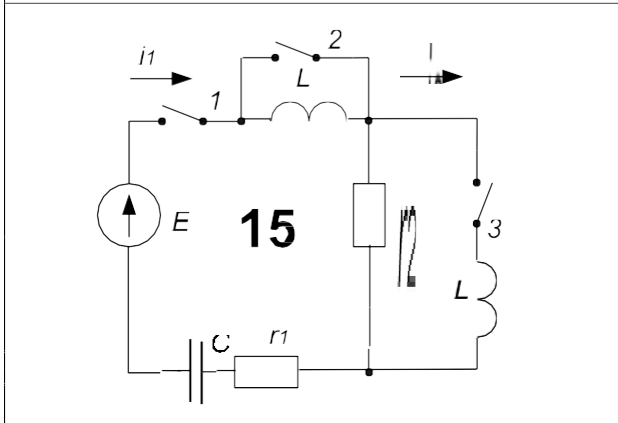
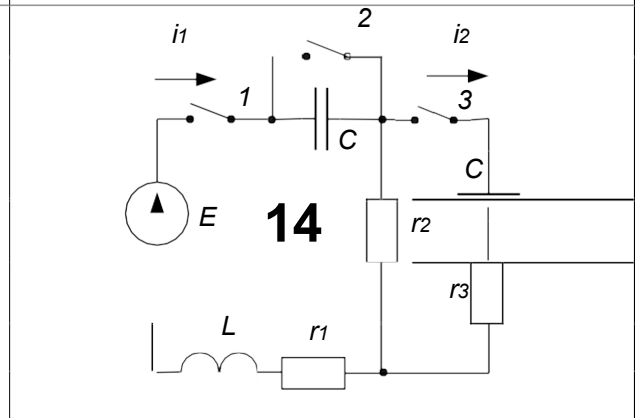
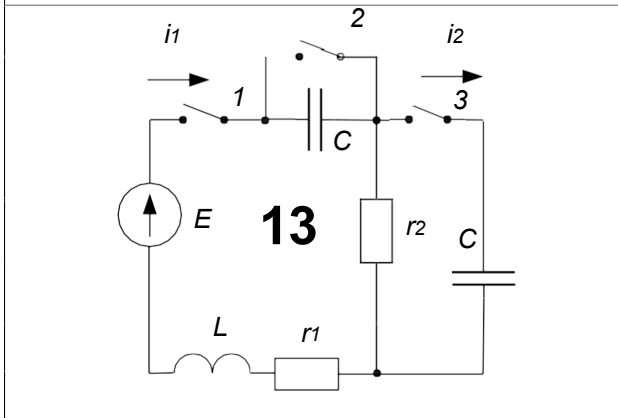
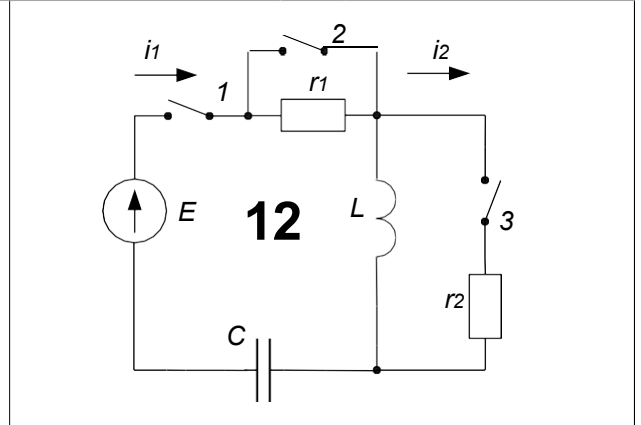
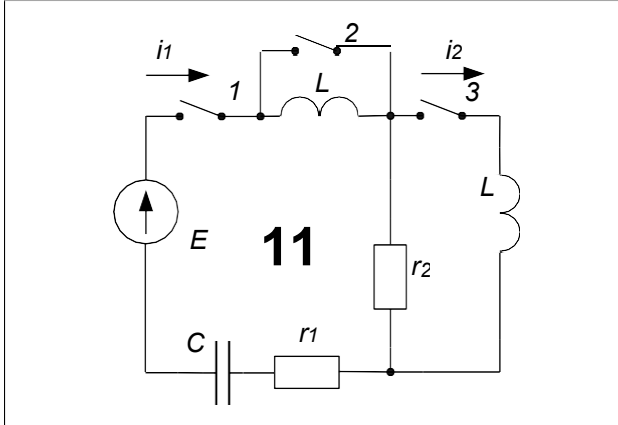
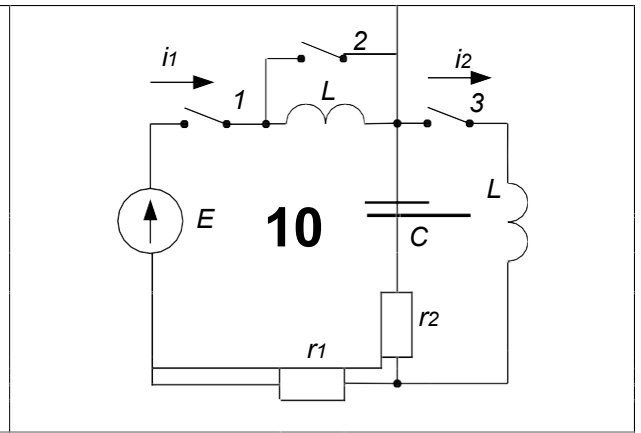
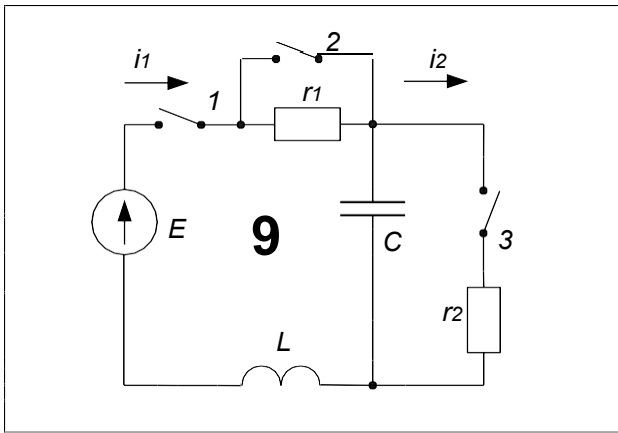
Для всех схем принять: $E = 100 \text{ В}; \quad L = 125 \text{ мГн}$

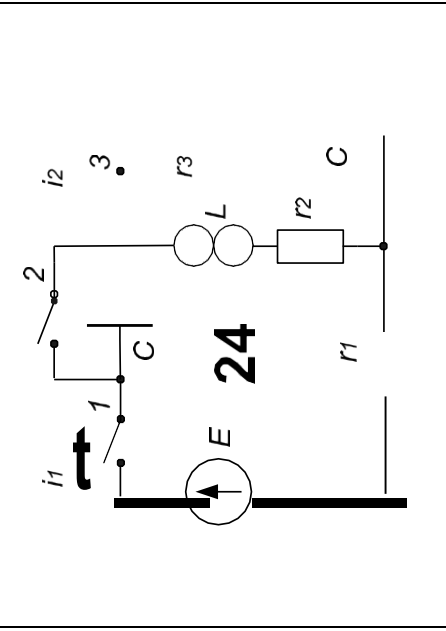
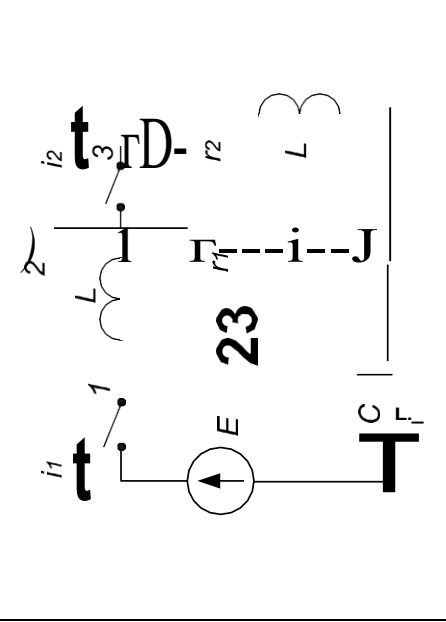
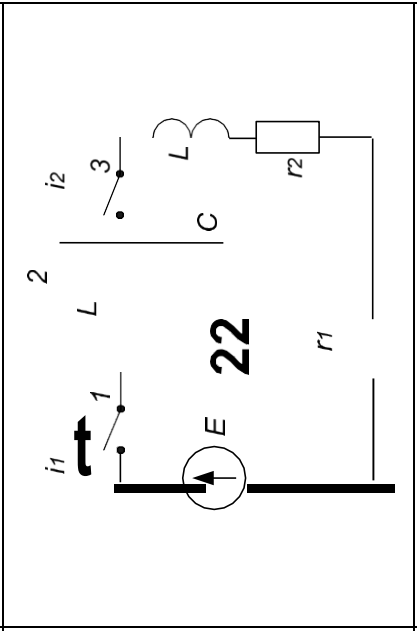
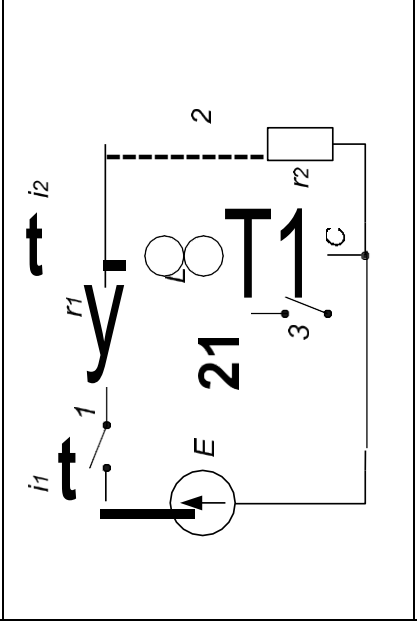
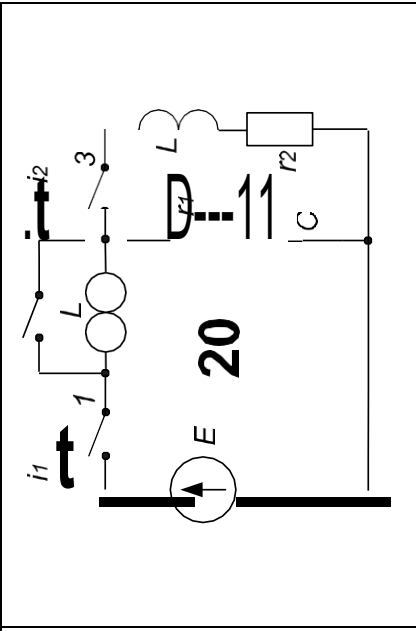
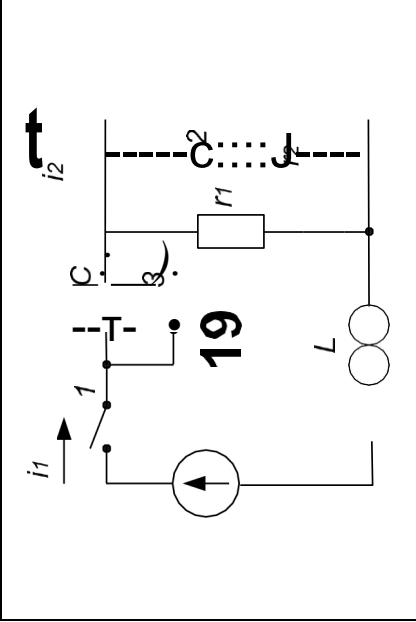
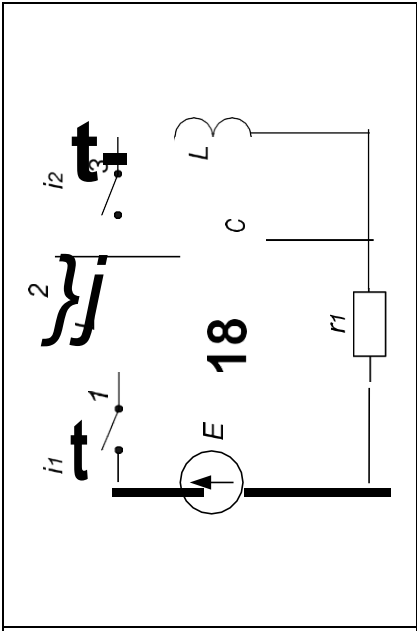
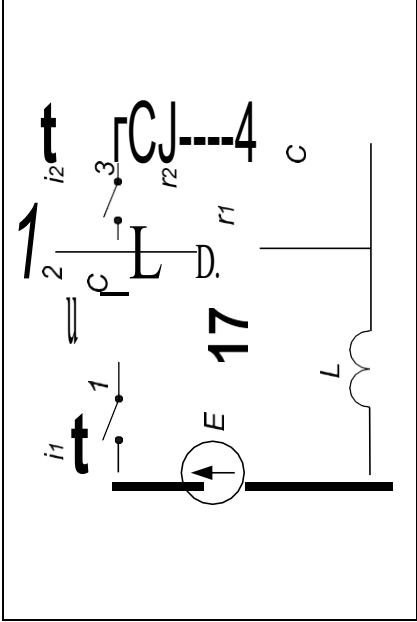
Вариант А: $r_1 = 25 \text{ Ом}; \quad r_2 = r_3 = 500 \text{ Ом}.$

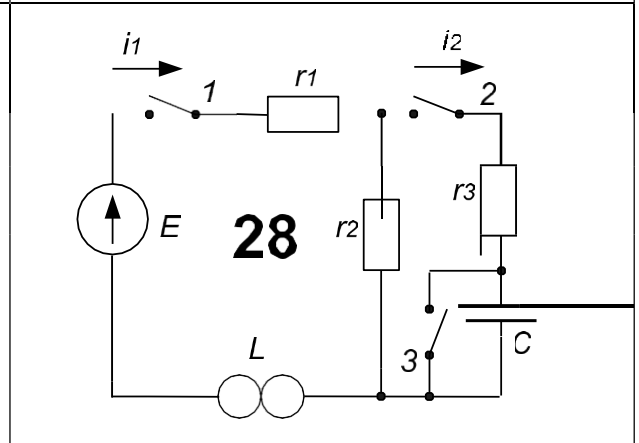
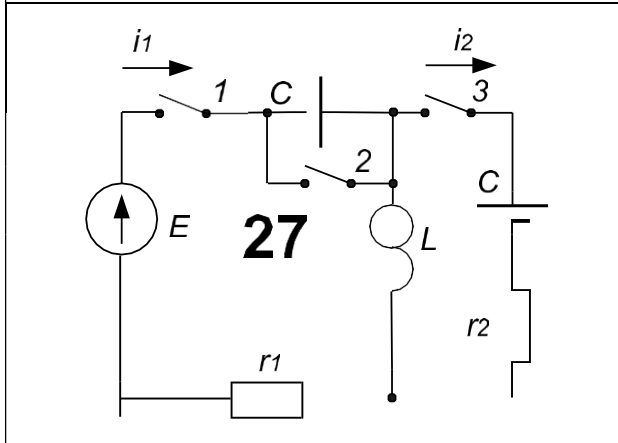
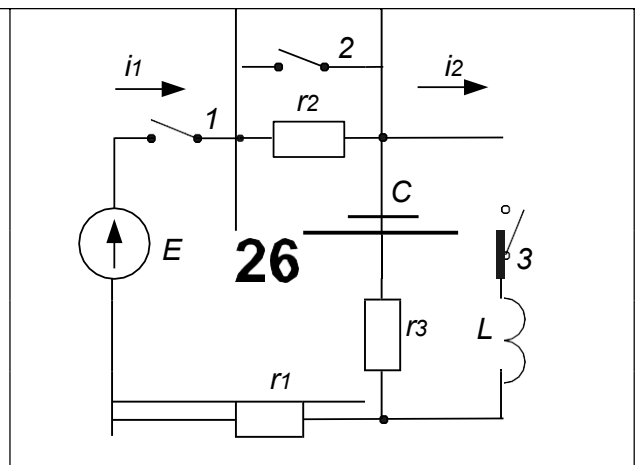
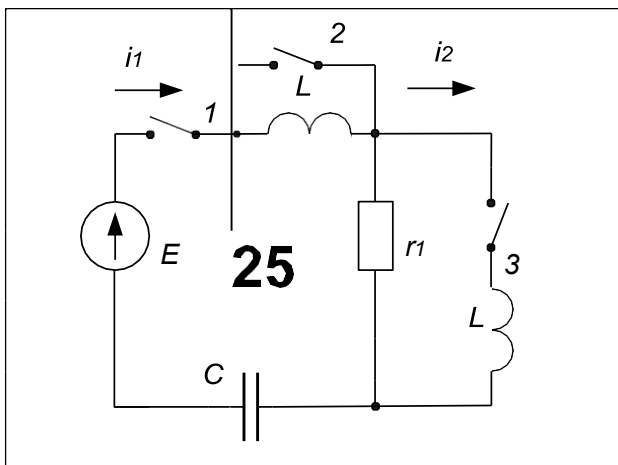
Вариант В: $r_1 = r_2 = 500 \text{ Ом}; \quad r_3 = 250 \text{ Ом}.$

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ









МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по организации самостоятельной работы обучающихся
по дисциплине «Теоретические основы электротехники»
для студентов направления подготовки /специальности
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
Направленность (профиль) Цифровые технологии в электроэнергетике

Ставрополь, 2026

1. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧ

Линия передачи может рассматриваться как элемент цепи, с помощью которого энергия в виде электромагнитной волны переносится из одной области пространства в другую. Конструкция линии определяется как рабочим диапазоном частоты, так и областью её применения. Двухпроводная линия используется на относительно низких частотах; сложная комбинация из медных проводников диэлектрика (полосковая линия, коаксиальная линия, волноводы) – в диапазонах ОВЧ, УВЧ и СВЧ; твердые диэлектрики типа пластика или стекла – в оптическом диапазоне. Умело используя те или иные особенности конкретной линии передачи, можно спроектировать и практически реализовать разнообразные устройства, такие, например, как фильтры, согласующие цепи и др.

При больших напряжениях, встречающихся в электроэнергетике, и при больших частотах, с которыми имеет дело электросвязь, а также при значительной длине линий пренебрегать токами смещения и утечки, обусловленными емкостью между проводами (токи смещения) и проводимостью изоляции (токи утечки через гирлянды изоляторов и токи, обусловленные коронным электрическим разрядом вблизи проводов) недопустимо. Следовательно, ток в проводах не одинаков в разных сечениях линий.

Ток в проводах линии вызывает падение напряжения в активном сопротивлении проводов и создает переменное магнитное поле, которое, в свою очередь, наводит вдоль всей линии ЭДС самоиндукции. Поэтому напряжение между проводами также не остается постоянным вдоль линии.

Чтобы учесть изменений тока и напряжения вдоль линии, нужно считать, что каждый сколь угодно малый элемент обладает сопротивлением и индуктивностью, между проводами – проводимостью и ёмкостью, т.е. рассматривать линию как **цепь с распределёнными параметрами**. Таковую цепь называют **длинной**.

Соответственно необходимо разработать теоретические основы цепей с распределёнными параметрами. (В первом приближении элемент цепи можно отнести к сосредоточенным, если его размеры меньше $1/12$ длины волны, и к распределённым, если больше этой величины).

Простейшая линия передачи состоит из пары проводников, каждый из которых обладает определённым сопротивлением и вносит некоторое затухание. Будем считать сопротивление, индуктивность, проводимость и ёмкость равномерно распределёнными вдоль линии, что является некоторой идеализацией действительных условий. Таковую линию условимся называть **однородной**. Один из элементов подходов, с помощью которого можно описать свойства такой линии, основан на представлении её в виде искусственной длинной линии, состоящей из сосредоточенных элементов (рис. 1.1).

На этом рисунке достаточно короткий отрезок линии длиной Δl заменён тремя секциями из сосредоточенных элементов. В каждую из секций входит последовательно включенное активное сопротивление R_0 , учитывающее

возможные тепловые потери в проводнике и параллельно включенная активная проводимость G_0 , учитывающая потери в диэлектрическом заполнении. Кроме того, в них входят включенные последовательно индуктивность L_0 и параллельно ёмкость C_0 , учитывающие запасённую в линии энергию. Величины всех элементов определяются на единицу длины линии, поэтому, например, сопротивление R_0 , учитывающее потери, имеет размерность Ом/м. Предположим, что сопротивление нижнего проводника на рис. 1.1 для тока, текущего по нему, равно нулю, и линия на обоих концах нагружена на сопротивление Z_B .

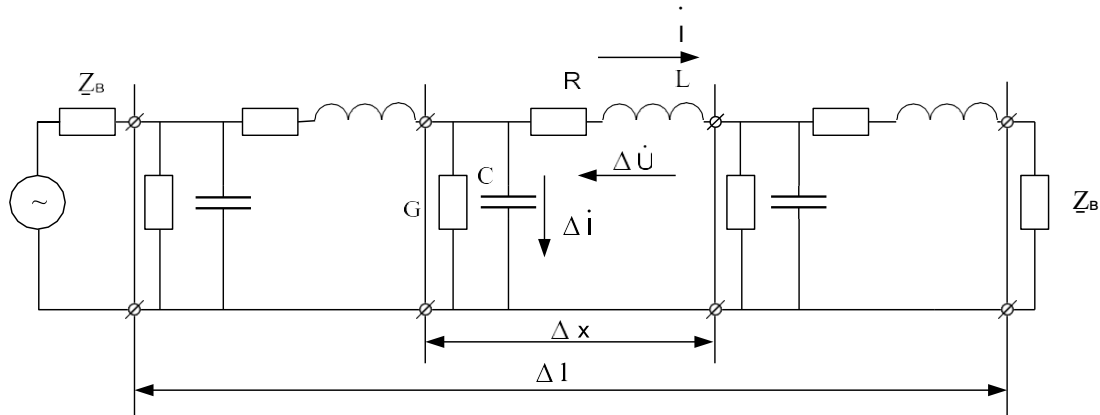


Рис. 1.1 Эквивалентная схема отрезка линии передачи на сосредоточенных элементах

Если линия состоит из двух параллельных **бесконечно длинных** проводов, то напряжение и ток в произвольных её сечениях (рис. 1.2) связаны соотношением

$$\frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2}{I_2} = \dots = \frac{U_K}{I_K} = \text{const} = Z_{\underline{Z}}^B,$$

где $Z_{\underline{Z}}^B$ – волновое сопротивление линии, Ом.

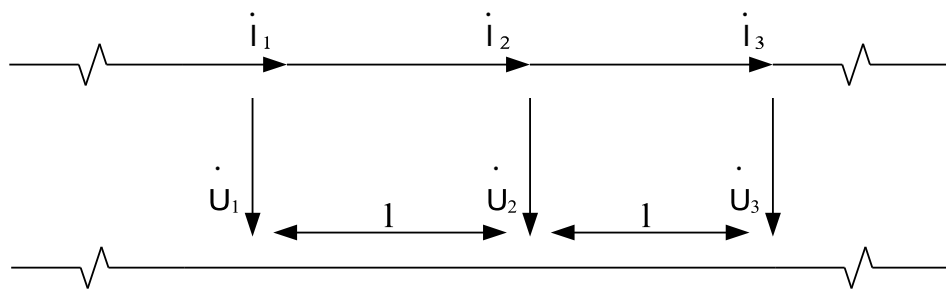


Рис. 1.2 Однородная линия передачи

В бесконечно длинной линии отношение $\frac{U_1}{I_1}$ везде равно $Z_{\underline{Z}}^B$. В общем

случае величина $Z_{\underline{Z}}^B$ комплексна и может зависеть от частоты. Эквивалентная схема элемента линии, изображённого на рис. 1.1, в виде Г-образной цепи показана на рис. 1.3; она содержит эквивалентные комплексные последовательное сопротивление $Z_{\underline{Z}}^0$ и параллельную проводимость $Y_{\underline{Y}}^0$.

Подчеркнём, что $\underline{Z}\underline{Z}_0$ и $\underline{Y}\underline{Y}_0$ не являются величинами, обратными друг другу.

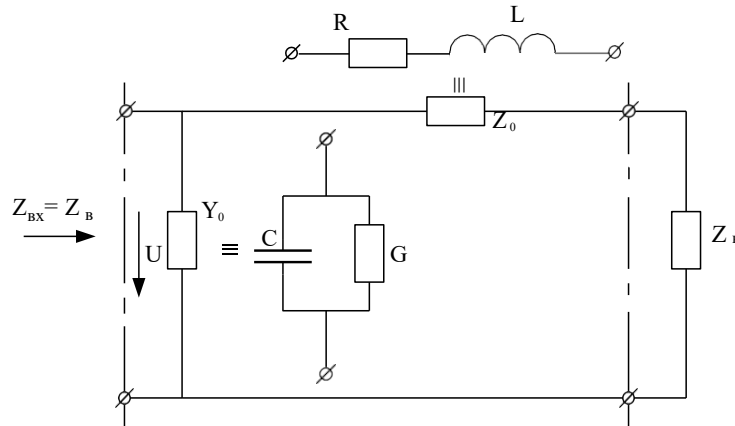


Рис. 1.3 Определение волнового сопротивления линии передачи

Входное сопротивление $\underline{Z}\underline{Z}_{BX}$ Г-образной цепи на рис. 1.3 определяются элементарно:

$$\underline{Z}\underline{Z}_{BX} = \underline{Z}\underline{Z}_B = \frac{(\underline{Z}_B + \underline{Z}_0)1/\underline{Z}_0}{\underline{Z}_B + \underline{Z}_0 + 1/\underline{Z}_0} \sim \frac{\underline{Z}_B + \underline{Z}_0}{1 + \underline{Z}_B \underline{Y}_0} \quad \text{при } \underline{Z}\underline{Z}_0, \underline{Y}\underline{Y}_0 \rightarrow 0$$

Из этого равенства находим $\underline{Z}\underline{Z}_B = \overline{J\underline{Z}\underline{Z}_0 / \underline{Y}\underline{Y}_0}$,

где $\underline{Z}\underline{Z}_0 = R + jjL$ и $\underline{Y}\underline{Y}_0 = G + jjC$, т.е.

$$\underline{Z}_B = J \frac{(R + j\omega L)}{G + j\omega C} \quad [\text{Ом}] \quad (1.1)$$

Последнее соотношение является фундаментальным, т.к. устанавливается связь между первичными параметрами эквивалентной схемы отрезка линии передачи и одним из вторичных её параметров – **волновым сопротивлением**.

На низких частотах, когда jj стремится к нулю, из (1.1) следует

$$\underline{Z}\underline{Z}_B = J \frac{R}{G} \quad [\text{Ом}] \quad (1.2)$$

На высоких частотах, когда $jjL \gg R$ и $jjC \gg G$,

$$\underline{Z}\underline{Z}_B = J \frac{L}{C} \quad [\text{Ом}] \quad (1.3)$$

Поскольку большинство цепей, содержащих отрезки линий передачи, работает на достаточно высоких частотах, вполне можно пользоваться приближенным равенством (1.3) вместо (1.1), или в тех случаях, когда потери в

линии малы, или ими просто пренебрегают. Такие линии будем называть **линиями без потерь**. В остальных случаях следует учитывать влияние потерь.

Рассмотрим установившийся режим в длинной линии при синусоидальном напряжении источника питания. Запишем уравнения однородной двухпроводной линии для установившегося режима, вводя комплексные напряжения, токи CC^* , II^* , сопротивления и проводимости. Из рис. 1.1 следует, что падение напряжения на одной секции из сосредоточенных элементов

$$\Delta CC^* = -II^*(R + j\omega L) \Delta x,$$

Где Δx – достаточно малый отрезок линии, по своим свойствам эквивалентный секции из сосредоточенных элементов. Напомним, что R и L определены на единицу длины линии. Разделив обе части равенства на Δx , получим

$$\frac{\Delta CC^*}{\Delta x} = -(R + j\omega L) II^* \quad (1.4)$$

При $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{d CC^*}{dx} = -(R + j\omega L) II^* \quad (1.5)$$

Аналогично изменение тока на одной секции из сосредоточенных элементов

$$\Delta II^* = -(G + j\omega C) CC^* \Delta x$$

Так, что при $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{d II^*}{dx} = -(G + j\omega C) CC^* \quad (1.6)$$

Дифференцируя обе части равенства (1.5) и подставляя полученное выражение в (1.6), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 II^*}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C) CC^*,$$

которое удобно записать в виде

$$\frac{d^2 II^*}{dx^2} = \gamma^2 CC^* \quad (1.7)$$

где

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (1.8)$$

постоянная или коэффициент распространения. Этот параметр обычно комплексный, т.е.

$$\gamma = \alpha + j\beta,$$

где

α – коэффициент затухания, т.е. величина потерь, вносимая отрезком линии единичной длины (измеряется в неперах на единицу длины (Нп/ед.длины));

β – коэффициент фазы, т.е. фазовый сдвиг на той же длине (измеряется в радианах на единицу длины (рад/ед.длины)).

Более детально эти величины рассмотрены ниже.

Вернёмся снова к уравнению (1.7). Это дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, и его решение имеет вид

$$CC_{(x)} = AA_{\text{exp}}(-\gamma\gamma xx) + BB_{\text{exp}}(\gamma\gamma xx) \quad (1.9)$$

Выразив комплексы А и В, имеющие размерность напряжения в показательной форме

$$A = |AA|ee^{jPA}; \quad B = |BB|ee^{jPB}$$

можно записать мгновенные значения напряжения:

$$u = \sqrt{2} |AA|ee^{-\alpha x} \sin(j\omega t - \beta x + \Psi_A) + \sqrt{2} |BB|ee^{\alpha x} \sin(j\omega t + \beta x + \Psi_B)$$

Каждое из слагаемых правой части выражения можно рассматривать как бегущую волну, движущуюся в направлении возрастания или убывания координаты xx и затухающую в направлении движения.

Итак, по линии могут распространяться две волны: одна в направлении положительных значений координаты xx , и ей соответствует слагаемое

$\exp(-\gamma\gamma xx)$, а другая – в направлении отрицательных значений xx , и ей соответствует слагаемое $\exp(\gamma\gamma xx)$. Условимся волну, движущуюся от начала линии, называть прямой, а движущуюся от конца линии – обратной (встречной).

Введённые понятия о прямых и обратных волнах в линии при установленном синусоидальном режиме облегчает представление и анализ процессов. Однако нужно иметь ввиду, что физически существуют в линии только результирующие ток i и напряжение u , и что разложение их на прямые и обратные волны следует считать лишь удобным приёмом.

Константы А и В несут информацию о начальных значениях амплитуды и фазы и обратной прямой волн в сечении $xx = 0$. Чтобы пояснить смысл величин А и В, рассмотрим, что происходит на конце **бесконечно длинной** линии, когда она возбуждается падающей синусоидальной волной с амплитудой $CC_{\text{вх}}$ в сечениях $xx = 0$. Полагая, что величина резистивных элементов отлична от нуля, можно утверждать, что в сечении $xx = \infty$ разность потенциалов уменьшается до нуля. В этом случае из (1.9) следует, что

$$0 = AA_{\text{exp}}(-\gamma\gamma \infty) + BB_{\text{exp}}(\gamma\gamma \infty) = A0 + B \text{ (бесконечно большая величина)}$$

Подобное равенство возможно только при $B = 0$. Теперь вернёмся к началу линии (сечение $xx = 0$), где действует напряжение $CC_{\text{вх}}$. Из (1.9) находим

$$CC_{\text{вх}} = AA_{\text{exp}}(-\gamma\gamma 0) + 0 = A$$

Объединяя всю информацию о постоянных A и B , из (1.9) получаем

$$CC_{(x)} = CC_{\text{вх}} \exp(-\gamma\gamma xx)$$

Более детально рассмотрим понятия коэффициента распространения. Т.к. согласно (1.8) $\gamma\gamma = \alpha\alpha + j\beta\beta$, то можно записать

$$CC_{(x)} = CC_{\text{вх}} \exp(-\alpha\alpha xx) \exp(-j\beta\beta xx) \quad (1.10)$$

В первый из экспоненциальных множителей входит коэффициент затухания $\alpha\alpha$. Полагая, что потери на единицу длины линии на рис 1.2 постоянны, можно записать для **действующих значений напряжения** в бесконечно длинно линии:

$$CC_{(x)} = CC_{\text{вх}} \exp(-\alpha\alpha xx) \quad (1.11)$$

или

$$\ln\left(\frac{I_{(x)}}{I_{\text{вх}}}\right) = -\alpha\alpha xx$$

$\alpha\alpha xx$ – характеризует общее затухание в линии длиной xx и измеряется в неперах (Нп). Перейдём от неперов к общепринятым единицам – децибелам (Дц).

По определению:

$$\text{Затухание (Дц)} = 20 \lg[\exp(-\alpha\alpha xx)] = -20 \alpha\alpha xx \lg[\exp(1)] = -8,696 \alpha\alpha xx$$

Это выражение устанавливает искомую связь между затуханием, выраженным в неперах, и децибелах. Очевидно, что

$$1(\text{Нп}) = 8,686 (\text{Дц})$$

Выясним физический смысл множителя $\exp(-j\beta\beta xx)$ (1.10)

Пусть потерями в отрезке линии, которому соответствует эквивалентная схема на рис. 1.1, можно пренебречь. Полагая известным ток II^* , можем записать падение напряжения на индуктивности бесконечно малого отрезка линии в виде $j\beta\beta LL II^* \Delta xx$, а на сопротивлении $ZZ_{\text{в}}$ в виде $II^* ZZ_{\text{в}}$. Напряжения в начале и конце маленького отрезка Δxx сдвинуты по фазе на величину $\Delta\Psi\Psi$, которая в соответствии с рис. 1.4 определяется как

$$\Delta\Psi\Psi = \arctg(j\beta\beta LL II^* \Delta xx / II^* ZZ_{\text{в}}).$$

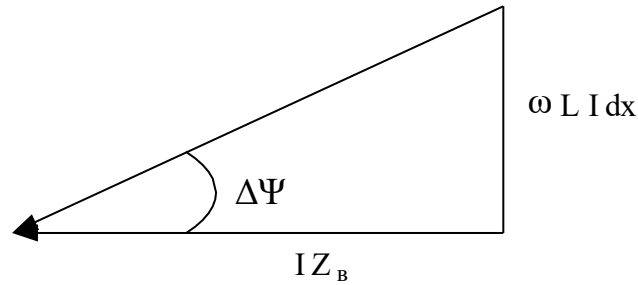


Рис. 1.4 Фазовая диаграмма для отрезка линии передачи на сосредоточенных элементах

При малых углах $\text{tg } \theta \cong \theta$, поэтому в отрезке линии достаточно малой длины

$$\Delta\Psi = jjLL\Delta xx / Z_B \quad (1.12)$$

Поскольку потерями пренебрегли, то в (1.12) можно подставить (1.3), что даёт

$$\Delta\Psi = jjLL\Delta xx / \sqrt{LL/CC} = jj\sqrt{LLCC} \Delta xx$$

Отношение $\Delta\Psi / \Delta xx$, названное фазовой постоянной (фазовым коэффициентом), численно равно сдвигу по фазе в отрезке линии единичной длины и обычно обозначается буквой β ; и в линии без потерь

$$\beta = jj\sqrt{LLCC} \quad (1.13)$$

Выпишем соотношения, которые характеризуют свойства однородной линии передачи и понадобятся в дальнейшем. Скорость перемещения фронта волны (**фазовая скорость волны**) может быть выражена через произведение длины волны λ частоты f :

$$v_{\Phi} = f\lambda \quad \text{или} \quad v_{\Phi} = \lambda f / 2\pi$$

Где $f = 1/T$, λ – (длина волны) путь, который должна пройти волна, чтобы получить фазовый сдвиг, равный 2π (360°). С другой стороны, величина β равна фазовому сдвигу, получаемому на единице длины линии. Поэтому

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad \text{или} \quad \beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.14)$$

$$\text{т.е.} \quad v_{\Phi} = \frac{v}{\beta} \quad (\text{м/с}).$$

Подставляя в эту формулу выражение для β из (1.13), получаем для линии без потерь:

$$vv = \frac{1}{\sqrt{Lc}} \quad (\text{м/с}) \quad (1.15)$$

В воздушной линии без потерь $RR_0 = 0$, $GG_0 = 0$ фазовая скорость наибольшая: $vv_\Phi = C = 3 \cdot 10^8$ м/с. В кабеле без потерь, изоляция которого имеет относительную диэлектрическую ($\epsilon\epsilon_r$) и магнитную ($\mu\mu_r$) проницаемости:

$$vv_\Phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\epsilon_r \mu\mu_r}}$$

2. УРАВНЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ ЛИНИИ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ.

$$II_{(x)} = II_{\text{пад}(x)} - II_{\text{отр}(x)}$$

$$II_{(x)} = \frac{A}{Z_B} \exp(-\gamma\gamma x) - \frac{B}{Z_B} \exp(\gamma\gamma x) \quad (2.1)$$

Полный ток II^* в некотором сечении линии (рис.2.1) равен сумме токов, которые создаются падающей волной $II_{\text{пад}}$, распространяющейся в направлении от сечения $xx = 0$ до $xx = l$ и отражённой волной $II_{\text{отр}}$ в сечении $xx = l$, где подключено сопротивление ZZ_H .

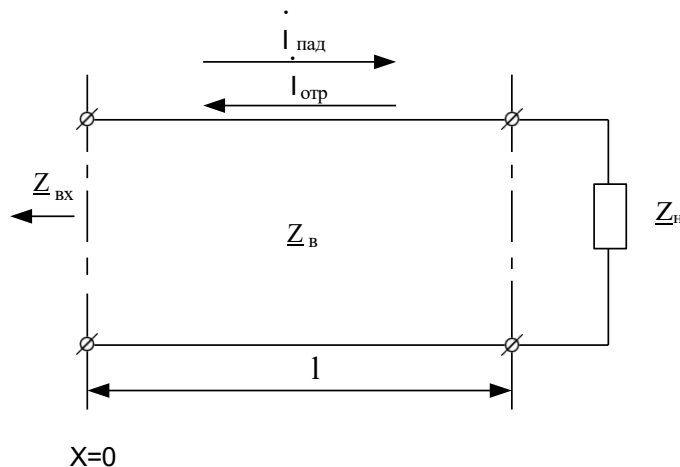


Рис. 2.1 Отрезок линии, нагруженной на сопротивление ZZ_H

В (1.9) и (2.1) постоянные A и B можно определить, если известны граничные условия.

Пусть заданы напряжение CC_1 и ток II_1^* в начале линии ($xx = 0$). Отметим, что выбрать произвольно CC_1 и II_1^* – значит задать определённое сопротивление нагрузки ZZ_H в конце линии. Если же наоборот, задано сопротивление нагрузки ZZ_H , то выбрана может быть только одна из величин CC_1 или II_1^* .

Их (1.9) и (2.1) при $xx = 0$ получим

$$CC_1 = A + B;$$

$$II_1^* ZZ_B = A - B$$

откуда

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} (CC_1 + II_1 ZZ_B) \\ B &= \frac{1}{2} (CC_1 - II_1 ZZ_B) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставив А и В в (1.9) и (2.1), для напряжения CC^* и тока II^* в любой точке линии (на расстоянии xx от её начала) получим

$$\begin{aligned} CC_{(x)}^* &= CC_1^* \frac{e^{yx} + e^{-yx}}{2} - II_1^* ZZ_B \frac{e^{yx} - e^{-yx}}{2} = CC_1^* \frac{\omega \omega h(\gamma \gamma xx)}{1} - II_1^* ZZ_B \frac{AAh(\gamma \gamma xx)}{1} \\ &= \frac{CC_1^*}{II_{(x)}} \cdot \frac{AAh(\gamma \gamma xx) + II_1^* \omega \omega h(\gamma \gamma xx)}{ZZ_B} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Эти формулы позволяют определить ток и напряжение в любой точке линии по их значениям в начале линии.

Пусть теперь заданы значения напряжения CC_2^* и тока II_2^* в конце линии, т.е. задан режим приемника, а значит, и сопротивление

$$ZZ_H = \frac{II_2^*}{CC_2^*}$$

В том случае

$$\begin{aligned} CC_{(x)}^* &= CC_2^* \omega \omega h(\gamma \gamma xx) + II_2^* ZZ_B AAh(\gamma \gamma xx), \\ II_{(x)} &= \frac{CC_2^*}{ZZ_B} AAh(\gamma \gamma xx) + II_2^* \omega \omega h(\gamma \gamma xx) \end{aligned} \quad \text{где}$$

ll — длина всей линии, где

$$xx = ll - xx \quad (2.4)$$

xx — отсчитываемое расстояние от конца линии.

В частности, при $xx = ll$ получается $CC(ll) = CC_1^*$ и $II = II_1$.

Соотношение для линий постоянного тока, у которых сопротивление проводов и утечка между проводами, обусловленная несовершенством изоляции, равномерно распределены вдоль линии, могут быть получены из выведенных соотношений (2.4) при $jj = 0$.

В самом деле, $jj = 0$ означает, что при постоянных во времени токах и напряжениях отсутствуют ЭДС самоиндукции (но не магнитное поле между проводами) и токи смещения между проводами (но не электрическое поле между ними). Поэтому, отложив в (1.8) и (1.1) $jj = 0$, получим для линий постоянного тока

$$\gamma\gamma = \alpha\alpha = \sqrt{RRGG}; \quad Z\underline{Z} = aa_B = J \frac{=}{G} \quad (2.5)$$

Кроме того, для линий постоянного тока не приходится говорить ни о каких фазовых соотношениях, т.е. ни о каких сдвигах по фазе между напряжениями и токами. Поэтому, например, формулы (2.4) для линии постоянного тока переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned} CC_{(x)} &= CC_2 \omega \omega h(ddxx) + II_2 aa_B AAh(ddxx) \\ II_{(x)} &= \frac{u^2}{r_B} \frac{AAh(ddxx) + II_2 \omega \omega h(ddxx)}{r_B} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если источник питания (генератор) присоединён в начале линии, а приёмник с сопротивлением ZZ_H – в конце, то мощность генератора и приёмника равны соответственно:

$$SS_1 = PP_1 + jjQQ_1 = CC_1 II_1; \quad SS_2 = PP_2 + jjQQ_2 = CC_2 II_2$$

3. ВХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЛИНИИ. ТРАНСФОРМАЦИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ.

При исследовании процессов в линии часто важно знать входное сопротивление линии. Под входным сопротивлением линии ZZ_{BX} понимают сопротивление двухполюсника, которым можно заменить линию вместе с приёмником на её конце при расчёте режима в начале линии. По определению в начале линии $xx = ll$ (2.4) получим:

$$\underline{ZZ}_{BX} = \frac{CC_1}{II_1} = \frac{CC_2 \omega \omega h(\gamma\gamma ll) + II_2 \underline{ZZ}_B AAh(\gamma\gamma ll)}{\frac{CC_2}{\underline{ZZ}_B} AAh(\gamma\gamma ll) + \frac{II_2}{2} \omega \omega h(\gamma\gamma ll)} \quad (3.1)$$

Выражение (3.1) устанавливает искомую связь между сопротивлением нагрузки на конце линии длиной ll и входным сопротивлением последней. Равенство (3.1) можно записывать по – разному, например:

$$\underline{ZZ}_{BX} = \underline{ZZ}_B \frac{\underline{ZZ}_H + \underline{ZZ}_B tth(\gamma\gamma ll)}{\underline{ZZ}_H tth(\gamma\gamma ll) + \underline{ZZ}_B} \quad (3.2)$$

Итак, отрезок линии, нагруженной на одном конце на некоторое сопротивление, обладает трансформирующими свойствами, поскольку его входное сопротивление отличается от сопротивления нагрузки, что создаёт определённые трудности при расчёте линий передачи, однако оказывается полезным, если правильно используется разработчиком.

Из (3.2) следует, что при равенстве сопротивлений нагрузки и волнового $ZZ_H = ZZ_B$ входное сопротивление ZZ_{BX} линии совпадает с волновым, т.е.

$ZZ_{\text{вх}} = ZZ_{\text{в}}$. В этом случае исчезает волна, отражённая от нагрузки, и говорят, что линия идеально согласована.

Расчёты по формуле (3.2) проводят либо используя таблицы функции $tth(\gamma\gamma ll)$, либо опираясь на графическое представление. Следует учитывать, что в общем случае величина $\gamma\gamma$ комплексна, т.е. $\gamma\gamma = \alpha\alpha + jj\beta\beta$, и гиперболический тангенс от комплексного аргумента принимает комплексные значения. При численных расчётах можно воспользоваться известной формулой из тригонометрии

$$tth(\gamma\gamma ll) = tth(\alpha\alpha ll + jj\beta\beta ll) = \frac{tth(\alpha\alpha ll) + ttaa(\beta\beta ll)}{1 - j tth(\alpha\alpha ll) ttaa(\beta\beta ll)}$$

Поскольку $ttaa(jj\beta\beta ll) = j tth(\beta\beta ll)$. Значения функции $ttaa(\beta\beta ll)$ и $tth(\alpha\alpha ll)$ находятся обычным способом. Более удобная формула

$$tth(\alpha\alpha ll \pm jj\beta\beta ll) = \frac{AAh(2\alpha\alpha ll) \pm jjAALLSS(2\beta\beta ll)}{\omega\omega h(2\alpha\alpha ll) + \cos(2\beta\beta ll)}$$

где действительная и мнимая часть разделена.

Входное сопротивление при любом сопротивлении нагрузки можно выразить через входные сопротивления линии при холостом ходе $ZZ_{\text{х}}$ и коротком замыкании $ZZ_{\text{к}}$. Из (3.2) находим при холостом ходе ($ZZ_{\text{н}} = \infty$; $II_2 = 0$)

$$ZZ_{\text{х}} = \frac{CC \cdot 1_{\text{х}}}{II_{1\text{х}}} = \frac{CC \cdot 2\omega\omega h(\gamma\gamma ll)}{CC_2} = \frac{ZZ_{\text{в}} \omega\omega tth(\gamma\gamma ll)}{tth(\gamma\gamma ll)} \quad (3.3)$$

и при коротком замыкании ($ZZ_{\text{н}} = 0$; $CC_2 = 0$)

$$ZZ_{\text{к}} = \frac{CC \cdot 1_{\text{к}}}{II_{1\text{к}}} = \frac{II_2 \cdot ZZ_{\text{в}} AAh(\gamma\gamma ll)}{II_2 \cdot \omega\omega h(\gamma\gamma ll)} = ZZ_{\text{в}} tth(\gamma\gamma ll) \quad (3.4)$$

Получим

$$ZZ_{\text{вх}} = ZZ_{\text{в}} \frac{ZZ_{\text{н}} + ZZ_{\text{к}}}{ZZ_{\text{н}} + ZZ_{\text{х}}}$$

Этой формулой удобно пользоваться, если известны $ZZ_{\text{х}}$ и $ZZ_{\text{к}}$, которые могут быть определены, например, из опытов холостого хода и короткого замыкания линии.

Отметим также, что через входные сопротивления линии при холостом ходе и коротком замыкании легко выразить $ZZ_{\text{в}}$ и $\gamma\gamma$. Перемножив, а затем, разделив почленно (3.3) и (3.4) и извлекая корень, получим

$$ZZ_B = J \overline{ZZ_K ZZ_X} \quad (3.5)$$

$$\text{th}(\gamma\gamma ll) = J \overline{\frac{Z_K}{Z_X}} \quad (3.6)$$

3.1. РЕЖИМ ПОЛНОГО ОТРАЖЕНИЯ.

Пусть к входу линии подключен генератор гармонических колебаний с фиксированной частотой, являющийся источником распространяющей в линии волны. Если длина линии бесконечна, эта волна никогда не достигнет конца линии. Какое бы расстояние ни прошла волна, её структура остаётся неизменной, однако амплитуда волны будет меньше, чем на зажимах генератора, поскольку из-за потерь в линии, обусловленных конечностью сопротивления проводников и несовершенством диэлектрика, часть энергии теряется. В линии без потерь сохраняется неизменными, как структура, так и амплитуда волны; имеет место лишь задержка во времени, величина которой пропорционально пути, пройденному волной вдоль линии.

Все реальные линии имеют конечную длину и вносят затухание. Ограничимся случаем, когда потерями в линии можно пренебречь. Попробуем ответить на вопрос, что происходит в линии, когда волна от генератора достигает разомкнутого конца линии? Так как потери равны нулю, вся энергия волны доходит до конца линии, где ток при идеальном режиме холостого хода равен нулю. Поэтому какое-либо рассеяние энергии на конце линии невозможно. В результате вся энергия волны, распространяющейся вдоль линии в прямом направлении (падающая волна), должна вернуться обратно к генератору, т.е. в сечении, где линия разомкнута, образуется такая обратная (отражённая) волна, что полный ток на разомкнутом конце обращается в нуль. Поскольку отражённая волна распространяется по той же самой линии, что и падающая, но в обратном направлении, в отдельных сечениях линии она суммируется с падающей и в результате образуются максимумы (пучность). В тех сечениях, где волны вычитаются, образуются минимумы (узлы). На разомкнутом контуре линии располагается узел тока и пучность напряжения. Во всех сечениях, где образуются пучности тока, располагаются узлы напряжения и наоборот. Процедура формирования стоячей волны при полном отражении иллюстрируется на рис. 3.1

На левой диаграмме 1 на рис. 3.1 видно, что в начальный момент времени падающая и отражённая волны тока противофазны, а суммарный ток в любом сечении линии равен нулю. В тот же момент времени падающая и отражённая волны напряжения сифазны (правая диаграмма 1), суммарное напряжение в отдельных сечениях вдвое превышает то, которое имеет место в бесконечно длинной либо идеально согласованной линии. Диаграмма 2 и далее соответствует более позднему моменту времени.

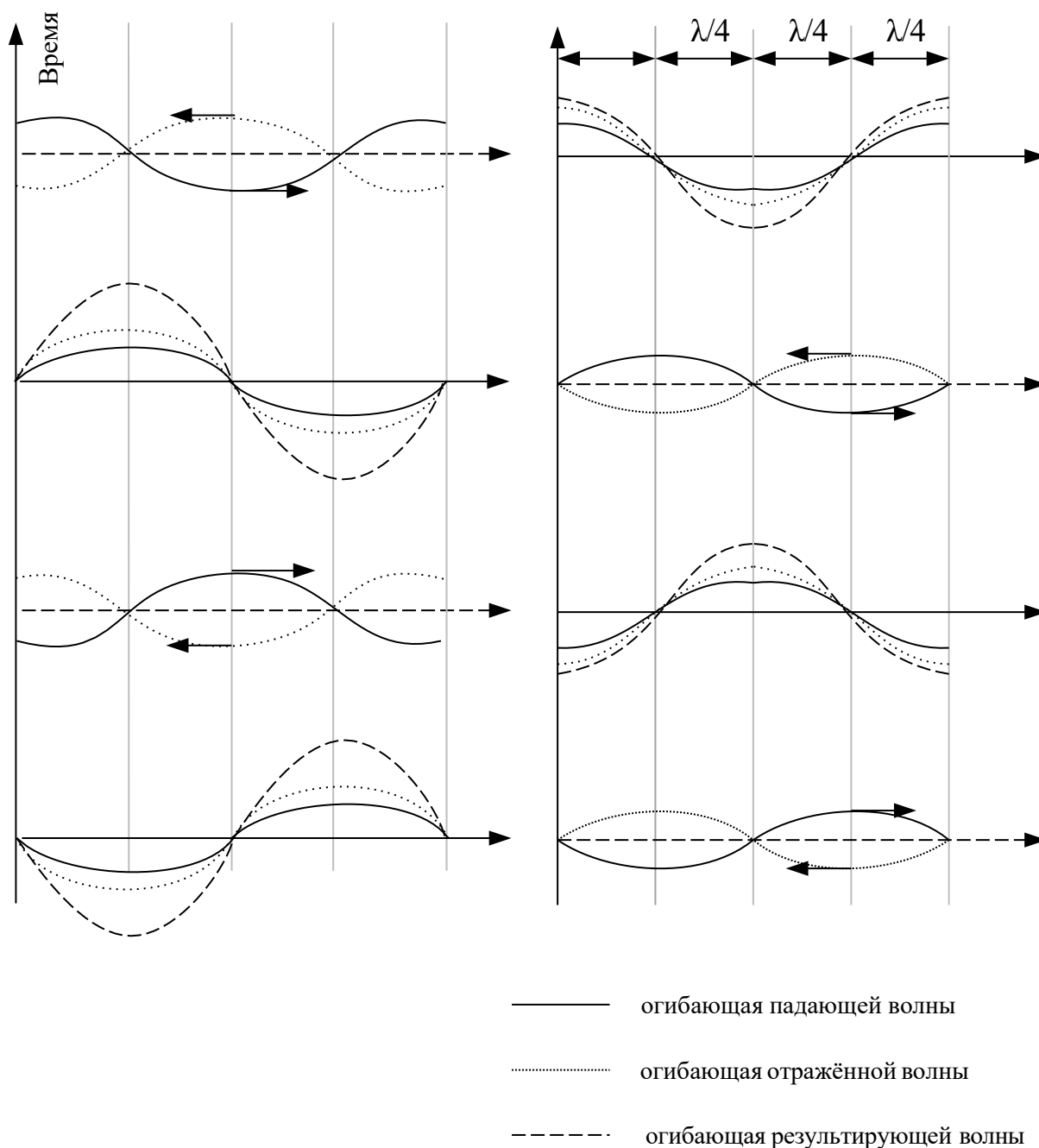


Рис. 3.1 Образование стоячей волны в линии передачи без потерь при идеальном отражении от её конца

4. ЛИНИИ ПРИ ЧИСТО АКТИВНОМ ЛИБО РЕАКТИВНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ НАГРУЗКИ.

В предыдущем разделе было показано, что в режиме стоячей волны напряжение в пучности вдвое превышает напряжение падающей волны. Кроме того, в результате интерференции падающей и отраженной волн вдоль линии являются сечения, в которых при отсутствии потерь в линии напряжение равно нулю. Реальные линии обязательно вносят затухание, т.е. амплитуда как падающей, так и отраженной волны монотонно уменьшается по

мере их перемещения вдоль линии. В результате напряжение (ток) в пучностях не достигает удвоенного значения, а в узлах становится невозможной полная компенсация. Нули «заплывают», как показано на рис. 4.1.

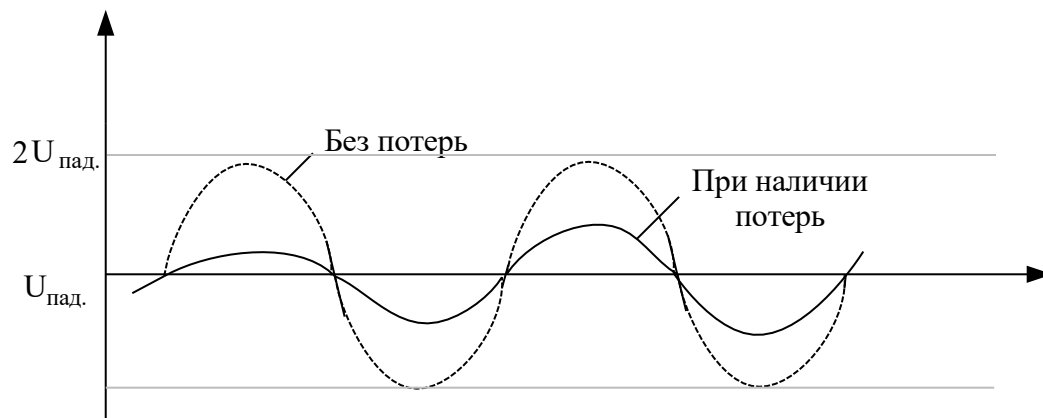


Рис. 4.1 Распределение действующего значения напряжения в линии при наличии потерь

Для характеристики режима работы линии вводят понятие о коэффициенте стоячей волны по напряжению ($K_{\text{ств}}$) или просто коэффициент стоячей волны ($K_{\text{ст}}$), что равно отношению напряжений в максимуме и минимуме. В линии без потерь это отношение равно бесконечности в режиме стоячих волн. В реальных линиях с потерями величина $K_{\text{ств}}$ всегда конечна. Всё сказанное о $K_{\text{ств}}$ можно без изменений перенести на распределение стоячих волн тока.

В практических ситуациях обычно лишь часть энергии падающей волны отражается от нагрузки. Уровень отражений зависит от характера и величины сопротивления нагрузки. Поглощение (полное или частичное) энергии падающей волны возможно, если только активная часть сопротивления нагрузки отлична от нуля. На рис. 4.2 представлено аналогичное, изображенному на рис. 4.1, распределение напряжения, но с учетом неполного отражения. Как видно из рис. 4.2

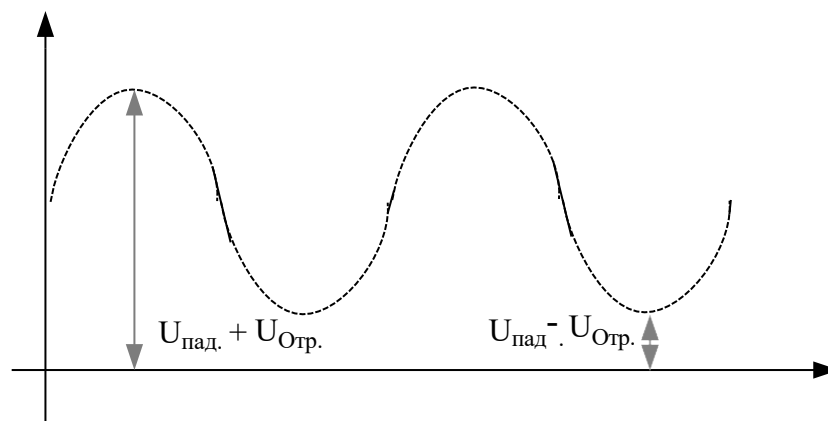


Рис. 4.2 Стоячие волны в линии при неполном отражении в конце линии

$$K_{\text{сгв}} = \frac{CC_{\text{пад}}/+ /CC_{\text{отр}}/}{CC_{\text{пад}}/- /CC_{\text{отр}}/} \quad (4.1)$$

В эту формулу можно подставлять как амплитудные, так и действующие значения.

Нагрузкой может быть сосредоточенное сопротивление $Z_{\text{н}}$, либо отрезок линии с волновым сопротивлением $Z_{\text{н}}$, отличным от $Z_{\text{в}}$. В обоих случаях отражение части энергии падающей волны происходит в том сечении, где расположена нагрузка. На рис. 4.3 это сечение AA'. Доля энергии падающей волны, которая не претерпела отражений, распространяется дальше за это сечение.

Запишем уравнение Кирхгофа в сечении AA' для тока:

$$\frac{CC_{\text{пад}}}{Z_{\text{в}}} - \frac{CC_{\text{отр}}}{Z_{\text{в}}} = \frac{CC_{\text{прош}}}{Z_{\text{н}}} \quad (4.2)$$

и напряжения:

$$CC_{\text{пад}} - CC_{\text{отр}} = CC_{\text{прош}} \quad (4.3)$$

Подставляя значение $CC_{\text{прош}}$ из (4.3) в (4.2), определяем коэффициент отражения

$$\Gamma = \frac{U_{\text{отр}}}{U_{\text{пад}}} = \frac{Z_{\text{н}} - Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}}} \quad (4.4)$$

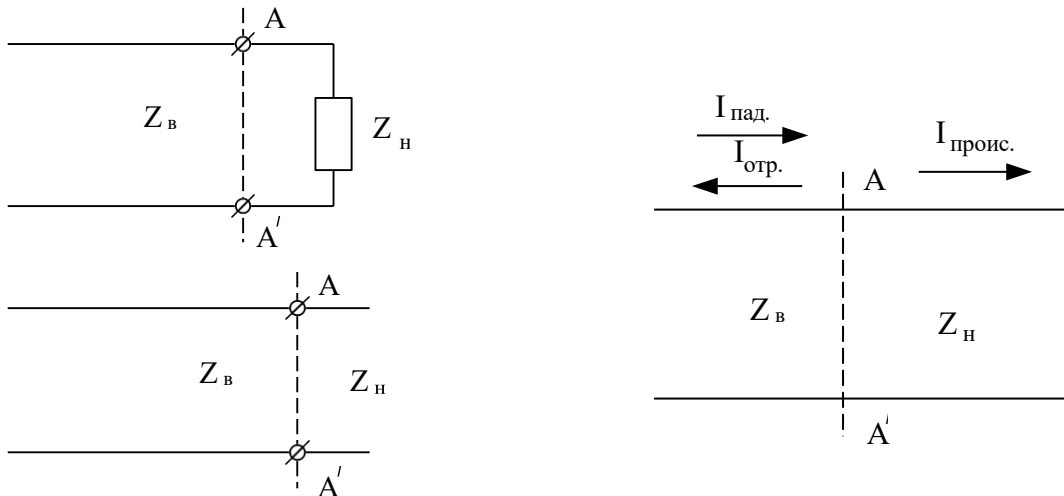


Рис. 4.3 Неоднородность в месте подключения к линии сосредоточенного сопротивления (а), элемента с распределёнными параметрами (б) и токи в месте подключения

Так как сопротивления ZZ_H и ZZ_B , в лучшем случае, комплексны, то комплексна и величина Γ , т.е.

$$\Gamma = |\Gamma| \exp(j\theta)$$

$$\text{где } |\Gamma| = \frac{|Z_H - Z_B|}{Z_H + Z_B} \quad \text{и} \quad \theta = \arctg \frac{\text{мнимая часть } \Gamma}{\text{действительная часть } \Gamma}$$

Если в конце линии включено сопротивление нагрузки, равное волновому: $ZZ_H = ZZ_B$, то, обращаясь к формуле (4.4), находим, что коэффициент отражения $\Gamma = 0$, т.е. отраженная волна не возникает. Такую нагрузку называют согласованной нагрузкой или нагрузкой без отражения.

Из написанных выше соотношений (1.10) получим

$$CC = CC_{\text{пр}} = CC_2 e^{e^{yxt}}; \quad CC = 0 \quad (4.5)$$

$$II = II_{\text{пр}} = \frac{CC_{\text{п}}}{ZZ_B} - \frac{CC_2}{ZZ_B} e^{e^{yxt}} = II e^{e^{yxt}} \quad (4.6)$$

$$II_{\text{об}} = 0$$

Отсюда следует

$$\frac{CC_{(x)}}{II_{(x)}} = \frac{CC_2}{II_2} = \frac{CC_1}{II_1} = \frac{ZZ_B}{1}$$

Т.е. для любой линии отношение комплексов CC и II равно волновому сопротивлению ZZ_B . Поэтому режим работы генератора, питающего такую линию, не изменится, если в любом сечении линии её разрезать и вместо отрезанной части линии включить волновое сопротивление. Режим работы оставшегося участка линии также не изменится.

Из (3.2) следует, что для согласованной линии ($ZZ_H = ZZ_B$) входное сопротивление $ZZ_{\text{вх}} = ZZ_B$.

5. ЧЕРЫРЁХПОЛЮСНИК, ЭКВИВАЛЕНТНЫЙ ОТРЕЗКУ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ.

Сравнивая основные уравнения длинной линии (3.2) с уравнениями типа А четырёхполюсника:

$$\begin{aligned} CC_1 &= A_{11} CC_2 + A_{12} II_2 \\ II_1 &= A_{21} CC_2 + A_{22} II_2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

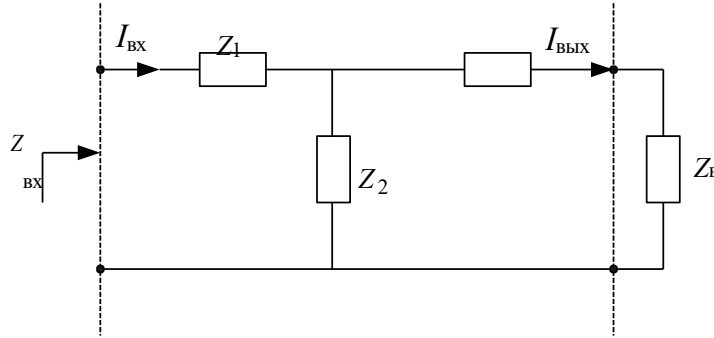
можно заключить, что длинная линия является пассивным симметричным четырёхполюсником, коэффициенты которого

$$\begin{aligned} \underline{AA}_{11} &= \underline{AA}_{22} = \omega \omega h(\gamma \gamma ll) \\ \underline{AA}_{12} &= \underline{ZZ}_B \underline{AA}h(\gamma \gamma ll) \\ \underline{AA}_{21} &= \underline{AA}h(\gamma \gamma ll) / \underline{ZZ}_B \end{aligned} \quad (5.2)$$

Но, как известно, симметричный четырёхполюсник может быть представлен симметричной схемой замещения, например Т- или П-образной.

Как в случае цепи на сосредоточенных элементах, эти П- и Т-образные эквивалентные цепи точно характеризуют линию на определённой частоте (лишь на той, где рассчитаны величины элементов, входящих в эквивалентную цепь).

Определим сначала сопротивления $\underline{ZZ}_1$ и $\underline{ZZ}_2$ симметричной Т-образной схемы (рис. 5.1), которой можно заменить длинную линию при заданной частоте.



$$\begin{aligned} \underline{ZZ}_1 &= \underline{ZZ}_B \operatorname{tth}\left(\frac{\gamma \gamma ll}{2}\right) \\ \underline{ZZ}_2 &= \underline{ZZ}_B / \underline{AA}h(\gamma \gamma ll) \end{aligned}$$

Рис. 5.1 Эквивалентная Т-образная схема отрезка линии передачи длиной l с волновым сопротивлением $\underline{ZZ}_B$ и коэффициентом распространения.

Эквивалентная схема отрезка линии передачи в виде Т-образной цепи изображена на рис. 5.1. Предполагается, что отрезок линии, представленной на рис. 5.1, имеет длину ll и коэффициент распространения $\gamma \gamma$.

Для Т-образной схемы в теории четырёхполюсника получено

$$\underline{A}_{11} = 1 + \underline{ZZ}_1 / 2\underline{ZZ}_2; \quad \underline{A}_{21} = 1 / \underline{ZZ}_2 \quad (5.3)$$

Приравнявая значения $\underline{A}_{11}$ и $\underline{A}_{21}$ для длинной линии (5.2) и для Т-схемы (5.3), получим

$$\begin{aligned} \underline{ZZ}_1 &= \frac{2(\operatorname{ch}(\gamma l) - 1)}{\operatorname{sh}(\gamma l)} \underline{ZZ}_B = \underline{ZZ}_B \operatorname{tth}\left(\frac{\gamma l}{2}\right) \\ \underline{ZZ}_2 &= \frac{\underline{ZZ}_B}{\underline{AA}h(\gamma \gamma ll)} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Теперь найдём сопротивление ZZ_1 и ZZ_2 симметричной П-образной схемы (рис. 5.2), приравнявая коэффициенты A_{11} и A_{12} линии и схемы. Для П-схемы получено в теории четырёхполюсников

$$A_{11} = 1 + \frac{ZZ_1}{2ZZ_2}; \quad A_{12} = \frac{ZZ_1}{2ZZ_2} \quad (5.5)$$

Приравняв значения A_{11} и A_{12} для линии (5.2) и для П-схемы (5.5), получим

$$\begin{aligned} ZZ_1 &= ZZ_B AAh(\gamma\gamma ll) \\ ZZ_2 &= \frac{ZZ_B AAh(\gamma\gamma ll)}{2(\omega\omega h(\gamma\gamma ll))} = \frac{ZZ_B}{2} \frac{\gamma\gamma ll}{tth(\frac{\gamma l}{2})} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Как в П-, так и в Т-образной цепи при малой длине l (малой по сравнению с длиной волны $\lambda\lambda$) можно заменить $AAh(\gamma\gamma ll)$ на $(\gamma\gamma ll)$, а $tth(\frac{\gamma l}{2})$ на $(\frac{\gamma l}{2})$. Тогда эквивалентные схемы, изображённые на рис. 5.1 и 5.2 сводятся к цепям на сосредоточенных элементах, осуждено в разделе 1.

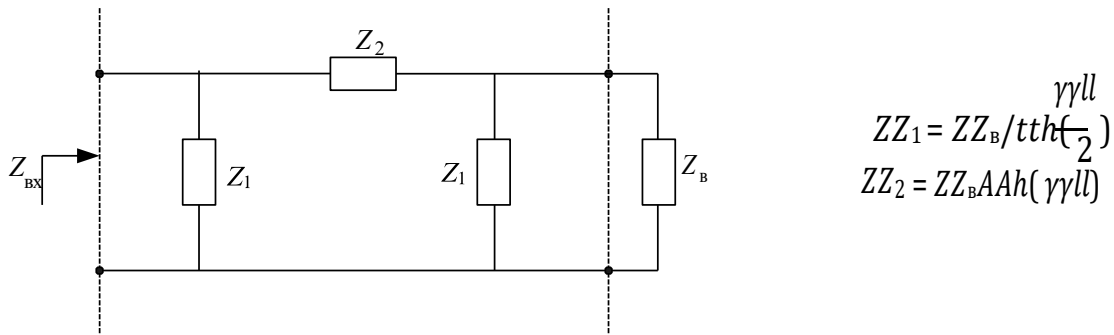


Рис. 5.2 Эквивалентная Т-образная схема отрезка линии передачи длиной l с волновым сопротивлением ZZ_B и коэффициентом распространения.

ВОПРОСЫ

1. Что такое электрическая цепь с распределёнными параметрами?
2. Какую линию называют однородной? Условия существования однородной линии.
3. Какие параметры длинной линии относят к первичным?
4. Что такое волновое сопротивление длинной линии? Его физический смысл.
5. Что называется коэффициентом распространения длинной линии? Коэффициент затухания, ослабления, коэффициент фазы.
6. Записать уравнения однофазной двухпроводной линии (телеграфное уравнение) для мгновенных значений тока и напряжения. Объяснить физический смысл величин, входящих в него.
7. Записать уравнения однородной двухпроводной линии в комплексной форме. Объяснить физический смысл входящих в него величин.

8. Почему уравнения длинной линии для мгновенных значений записаны в частных производных? Как перейти от частных производных токов и напряжений (уравнения для мгновенных значений) к полным производным (уравнения для комплексной формы) и когда этот переход справедлив?
9. Построить эпюры кривых распределения мгновенных значений напряжений и токов: а – для линии без потерь; б – для линии с потерями.
10. Построить эпюры кривых распределения мгновенных значений напряжений и токов в линии передачи, нагруженной на идеально отражающую нагрузку.
11. Стоячие волны в линии при неполном отражении на конце линии. В каких режимах работы линии образуются стоячие волны?
12. Что такое прямая и обратная волны в линии? Существуют ли эти волны в реальности?
13. В каких режимах работы длинной линии обратные волны отсутствуют?
14. Как определить ток и напряжение в любой точке линии по их значениям в начале линии?
15. Как определить ток и напряжение в любой точке линии по их значениям в конце линии?
16. Записать уравнение длинной линии при $f = 0$. Объяснить физический смысл входящих в него величин.
17. Что называется входным сопротивлением линии? Трансформация сопротивления.
18. Чему равно входное сопротивление линии при холостом ходе и коротком замыкании? Его физический смысл.
19. Определить коэффициент отражения волны в режимах: короткого замыкания, холостого хода, нагруженной линии.
20. Как осуществить согласование нагрузки?
21. Написать формулу для мощности, передаваемой линией. В каких случаях она максимальна (минимальна)?
22. Как определить КПД линии? От каких параметров линии он зависит?
23. Какую линию называют линией без искажений? Условия её существования.
24. В каких режимах образуется стоячая волна в линиях?
25. Построить эпюру тока и напряжения в длинной линии в режиме стоячей волны.
26. Как заменить длинную линию четырёхполюсником? Как найти его параметры?
27. Как определить волновое сопротивление экспериментальным путем? Какие величины для этого необходимо измерить?
28. Объясните физический смысл фазовой скорости и длины волны.

29. Чему равна фазовая скорость и длина волны в воздушной линии при $f = 50$ Гц? Как они изменятся, если линию поместить в диэлектрик $\varepsilon = 3$?
30. Как определить временную задержку сигнала в длинной линии?

ЗАДАНИЕ

1. Изучить теоретический материал.
2. Письменно ответить на вопрос и решить задачу в соответствии с выбранным вариантом.
3. Вариант выбирается в соответствии с порядковым номером списка студента.

ЗАДАЧА (пример)

Известны первичные параметры воздушной линии связи:

$$aa_0 = 2,84 \text{ Ом/км}; LL_0 = 1,94 \text{ мГн/км}; GG_0 = 0,70 \text{ мкСм/км}; C_0 = 6,25 \text{ нф/км}$$

1. Определить, при каком сопротивлении приёмника в линии отсутствует отражённая волна на средней расчётной частоте 800 Гц.
2. При этом приёмнике найти напряжение, активную мощность источника и КПД линии длиной 59 км, если напряжение приёмника равно 20 В.

РЕШЕНИЕ

1. Отражённая волна отсутствует при сопротивлении нагрузки, равному волновому (характеристическому) сопротивлению линии, т.е. при $ZZ_{\text{н}} = ZZ_0$.

Для линии с потерями

$$\underline{ZZ}_{\text{н}} = \frac{\underline{ZZ}_0}{\underline{YY}_0} = \frac{aa_0 + jjjjLL_0}{GG_0 + jjjjCC_0}$$

$$\text{где } jj = 2\pi f = 2\pi \cdot 800 = 5,03 \cdot 10^3 \text{ рад/с}$$

$$\omega L = 5,03 \cdot 10^3 \cdot 1,94 \cdot 10^{-3} = 9,75 \text{ Ом/км}$$

$$jjC = 5,03 \cdot 10^3 \cdot 6,25 \cdot 10^{-9} = 31,4 \cdot 10^{-6} \text{ См/км}$$

$$\underline{ZZ}_0 = aa_0 + jjjjLL_0 = 2,84 + j9,75 = 10,15 e^{j73,45^\circ} \text{ Ом/км}$$

$$Y_{\underline{0}} = G_{\underline{0}} + j\omega C_{\underline{0}} = 0,7 \cdot 10^{-6} + j31,4 \cdot 10^{-6} \text{ СМ/км}$$

$$\text{Волновое сопротивление } Z_{\underline{B}} = 568 e^{j7,5^\circ} \text{ Ом}$$

2. Для действующих значений напряжений при согласованной нагрузке $Z_{\underline{H}} = Z_{\underline{B}}$, можно записать согласно (1.10)

$$C_1 = C_2 e^{y_l}, \text{ где } C_2 = 20 \text{ В}$$

Коэффициент ослабления α – действительная часть коэффициента распространения γ .

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z_{\underline{0}} Y_{\underline{0}}} = 17,9 \cdot 10^{-3} e^{j81,15^\circ} = 2,72 \cdot 10^{-3} + j17,5 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{Т.е. } \alpha = 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ Нп/км}$$

$$\alpha l = 2,72 \cdot 10^{-3} \cdot 59 = 0,16 \text{ Нп}$$

$$C_1 = 20 e^{0,16} = 20 \cdot 1,17 = 23,4 \text{ В}$$

Активная мощность источника, учитывая, что $Z_{\underline{H}} = Z_{\underline{B}}$

$$P_1 = C_1 I_1 \cos \theta = \frac{I_1^2}{Z_{\underline{B}}} \cos \theta = \frac{I_1^2}{Z_{\underline{B}}} e^{2\alpha l} \cos \theta, \quad \text{где } Z_{\underline{B}} = Z_{\underline{B}} e^{j0} = 568 e^{j25^\circ}$$

Подставляем численные значения

$$P_1 = \frac{20^2}{568} \cdot 1,38 \cos(-7,5^\circ) = 0,96 \text{ Вт}$$

Проводимые вычисления достаточно громоздки из-за комплексности величин, которыми приходится оперировать. Разнообразные расчеты, подобные описанным в этих примерах, можно выполнить на ЭВМ.

ЗАДАНИЕ К РГР

Номер варианта	А		Б	
	№ задачи	№ вопроса	№ задачи	№ вопроса
1	1а	4	7Г	6
2	2а	5	1д	7
3	3а	6	2д	8
4	4а	7	3д	9
5	5а	8	4д	10
6	6а	9	5д	11
7	7а	10	6д	12
8	1б	11	7д	13
9	2б	12	1е	14
10	3б	13	2е	15
11	4б	14	3е	16
12	5б	15	4е	17
13	6б	16	5е	18
14	7б	17	6е	19
15	1в	18	7е	20
16	2в	19	1ж	21
17	3в	20	2ж	22
18	4в	21	3ж	23
19	5в	22	4ж	24
20	6в	23	5ж	25
21	7в	24	6ж	26
22	1г	25	7ж	27
23	2г	26	1а	28
24	3г	27	2б	29
25	4г	28	3в	30
26	5г	29	4б	4
27	6г	30	5а	5

ЗАДАЧА № 1

Воздушная линия связи длиной l имеет следующие параметры: RR_0, GG_0, LL_0, CC_0 (см. таблицу). Увеличения дальности передачи сигналов по линии с заданными RR_0 и GG_0 можно добиться, если отношение индуктивности к ёмкости будет удовлетворять требованию $LL_0/CC_0 = RR_0/GG_0$, т.е. из условия $\alpha\alpha - \min$. Это условие совпадает с условием отсутствия искажений, т.к. в этом случае $ZZ_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$, $\alpha\alpha = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}$, $CC_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ не зависят от частоты.

ЗАДАНИЕ.

1. Найти индуктивность каждой из катушек, которые необходимо включить через каждые 0,5 км, чтобы линия стала неискажающей.
2. Выяснить, как изменится индуктивность, если учесть потери в катушках, На расчетной частоте f Гц добротность катушки $Q = 200$.
3. Определить фазовую скорость волны в неискажающей линии.
4. Найти, какую наибольшую длину могла бы иметь неискажающая линия при допустимом затухании 11,3 дБ.
5. Рассчитать мгновенные значения напряжения $uu_1(tt)$ и тока $LL_1(tt)$ в начале линии, активную P полную S мощности в начале и конце линии, а также КПД линии, если на приёмном конце линии нагрузка активная ZZ_n и действующее значение напряжения CC_2 (см. таблицу)
6. Построить график распределения действующего значения напряжения вдоль линии в функции координаты X для линии без искажения и для линии без потерь, т.е. считать $RR_0 = 0$, $GG_0 = 0$.

Таблица данных

Вариант	f , Гц	l , км	Параметры линии				ZZ_n , Ом	UU_{22} , В
			RR_{00} , Ом/км	GG_{00} , мкСм/км	LL_{00} , мГн/км	CC_{00} , нф/км		
А	800	600	2,84	0,70	1,94	6,25	500	70
Б	600	800	3,50	0,80	2,04	5,25	500	120
В	900	500	2,34	0,60	1,84	3,75	500	100
Г	800	600	3,00	0,75	2,50	6,15	600	70
Д	600	800	2,50	0,80	1,50	7,00	600	120
Е	900	600	3,00	0,60	1,94	6,25	600	100
Ж	800	500	2,84	0,80	1,54	5,25	500	120

ЗАДАЧА № 2

Для трёхфазной сталеалюминевой воздушной линии электропередачи сечением 400 мм^2 и длиной l км известны первичные параметры RR_0, GG_0, X_0, bb_0 (см. табл.).

ЗАДАНИЕ.

1. Найти фазное напряжение, ток и активную мощность в начале линии (на станции), если на приёмном конце линейное напряжение 330 кВ , активная мощность всех приёмников 330 МВт и коэффициент мощности нагрузки равен $\cos \varphi$ (см. табл.).
2. Определить фазовую скорость волны, длину волны и КПД для линии.
3. В конце линии произошёл сброс нагрузки. Определить линейное
4. напряжение в конце линии и ток в начале, считая, что фазное напряжение на станции осталось неизменным и равном 220 кВ .
5. Определить полную мощность в конце линии в случае $Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}}$. Для этого же режима найти линейное напряжение и ток в начале линии. Линейное напряжение в конце линии равно 330 кВ .
6. Построить график распределения действующего значения фазного напряжения вдоль линии в функции координаты X для случая согласованной нагрузки.

Таблица данных

Вариант	$f, \text{Гц}$	$l, \text{км}$	$RR_0, \text{Ом/км}$	$GG_0, \text{См/км}$	$X_0, \text{Ом/км}$	$bb_0, \text{мкСм/км}$	$\cos \varphi$
А	50	900	0,08	$3,75 \cdot 10^{-8}$	0,42	2,7	1
Б	60	1200	0,07	$5,06 \cdot 10^{-8}$	0,42	0,5	0,98
В	50	100	0,10	$4,50 \cdot 10^{-8}$	0,58	2,5	1
Г	60	900	0,08	$5,06 \cdot 10^{-8}$	0,42	1,5	0,98
Д	50	1200	0,07	$3,75 \cdot 10^{-8}$	0,58	2,7	0,95
Е	60	1000	0,10	$2,0 \cdot 10^{-7}$	0,58	2,7	0,98
Ж	50	900	0,20	$3,75 \cdot 10^{-8}$	0,42	2,7	1

ЗАДАЧА № 3

По данным параметрам линии RR_0 , GG_0 , LL_0 , CC_0 , частоте f , длине линии l км, а также комплексным значениям CC_2B , $ZZ_H = 2770 \cdot e^{j13.12}$ Ом требуется:

ЗАДАНИЕ.

1. Рассчитать напряжение CC_1^* и ток II_1^* в начале линии, а также КПД линии.
2. Полагая, что линия П1 стала линией без потерь ($RR_0 = 0$, $GG_0 = 0$), то нагрузка на конце линии стала активной и равной модулю комплексной нагрузки в условии задачи, определить напряжение CC_1^* и ток II_1^* в начале линии, а также длину электромагнитной волны λ .
3. Построить график распределения действующего значения напряжения вдоль линии в функции координаты X : для реальной линии и линии без потерь.
4. Найти индуктивность каждой из катушек, которые необходимо включить через каждые 0,5 км, чтобы линия стала неискажённой.
5. Найти, какую наибольшую длину могла бы иметь неискажающая линия при допустимом затухании 11,3 дБ.

Таблица данных

Вариант	f , Гц	l , км	RR_{00} , Ом/км	GG_{00} , мкСм/км	LL_{00} , мГн/км	CC_{00} , нФ/км	UU_{22} , В
А	500	16,75	157,2	1,75	10	5,75	55
Б	800	13,5	65,5	1,50	20	5,00	80
В	6000	15	204,3	3,80	5	6,50	75
Г	4000	25	20,2	0,5	2,5	3,23	55
Д	2000	25	200	2,73	1,0	6,80	80
Е	5000	15	150	1,0	10	6,75	75
Ж	1000	40	15,3	0,8	15	6,75	80

ЗАДАЧА № 4

Трёхфазная линия передачи электроэнергии длиной l км в начальном периоде её эксплуатации работала при напряжении $CC_A = 400$ кВ и частоте f Гц. Согласно одному из вариантов проекта, первичные параметры линии имеют следующие значения: RR_0, LL_0, CC_0 ; потери P_0 в изоляции и на корону составляет 2000 Вт/км на одну фазу.

Известны: на приёмном конце линейное напряжение $CC_{2л} = \sqrt{3} \cdot 220$ кВ, активная мощность всех приёмников P_2 и коэффициент мощности нагрузки $\cos \varphi$ (см. табл.).

ЗАДАНИЕ.

1. Определить вторичные параметры, длину волны и фазовую скорость.
2. Определить ток в конце линии; напряжение и ток на ГЭС (начало линии).
3. Определить сдвиг фаз между напряжениями в начале и в конце линии; КПД линии, если в конце линии $P_2, CC_{2л}, \cos \varphi$ известны.
4. Определить фазное и линейное напряжения в конце линии и ток в начале линии (на ГЭС) при сбросе всей нагрузки в конце линии $ZZ_n = \infty$ и сохранении фазного напряжения на ГЭС, равного 220 кВ. Рассчитать, на сколько изменились напряжения и ток в начале линии при холостом ходе.
5. Построить график распределения действующего фазного напряжения вдоль линии в функции координаты X для линии в режиме холостого хода и при нагрузке.

Таблица данных

Вариант	f , Гц	l , км	RR_0 , Ом/км	LL_0 , мГн/км	CC_0 , нф/км	P_{22} , МВт	$\cos \varphi$
А	50	900	0,07	1,34	8,6	300	1
Б	50	1200	0,08	1,50	10,6	360	0,98
В	60	1000	0,05	0,80	12,3	300	0,98
Г	50	900	0,12	1,50	6,7	360	1
Д	50	1200	0,10	1,34	8,6	300	1
Е	60	1000	0,08	1,645	10,8	360	0,98
Ж	60	1500	0,05	1,45	12,3	300	0,98

ЗАДАЧА № 5

На входе линии с параметрами RR_0, GG_0, LL_0, CC_0 и длине линии $l = \lambda \lambda$ действует напряжение $u_1(t) = 500 \sin 400 t$ в. Линия нагружена на резистор $Z_H = Z_B$.

ЗАДАНИЕ

1. Рассчитать мгновенные значения напряжения и тока в конце $u_2(t)$, $LL_2(t)$, а также на входе $LL_1(t)$ линии. Построить графики распределения по линии мгновенных значений напряжения для моментов $t_1 = 0, t_2 = \frac{n}{4w}, t_3 = \frac{n}{2w}, t_4 = \frac{n}{w}$.
2. Как изменится режим в нагрузке, если длина линии уменьшится вдвое? Изменятся ли и как при этом мощность, отдаваемая источником, и КПД?
3. В условиях задачи изменилось сопротивление нагрузки: $Z_H = 2 Z_B$. Рассчитать мгновенные значения напряжения и тока в конце линии, а также в точках, отстоящих от нагрузки на расстояниях $y = \frac{l}{4}, \frac{l}{2}$. Рассчитать КПД передачи энергии от источника к нагрузке, сравнить его КПД в согласованном режиме.
4. Найти индуктивность каждой из катушек, которые необходимо включить через каждые 0,5 км, чтобы линия стала неискажающей.
5. Определить фазовую скорость волны в неискажающей линии.
6. Найти, какую наибольшую длину могла бы иметь неискажающая линия при допустимом затухании 10,3 дБ.

Таблица данных

Вариант	RR_0 , Ом/км	GG_0 , мкСм/км	LL_0 , мГн/км	CC_0 , нФ/км
А	2	0,50	2,5	5,2
Б	10	1,25	5,6	8,4
В	8	0,86	3,2	7,3
Г	6	0,90	11,2	10,6
Д	12	13,6	2,5	4,8
Е	10	0,86	7,2	8,4
Ж	5	0,70	3,2	7,3

ЗАДАЧА № 6

На входе линии с параметрами $LL_0 = \text{мГн/км}$, $CC_0 = \text{нф/км}$, RR_0 , GG_0 , l действует напряжение $u_1(tt) = 500 \sin(2\pi 4167)t$ в.

ЗАДАНИЕ

1. В конце линии $ZZ_H = ZZ_B$. Определить ZZ_B , $\nu_{\text{ф}}$, λ и записать выражения для мгновенных значений напряжения и тока в нагрузке $u_2(tt)$, $LL_2(tt)$.
2. В конце линии $ZZ_H = \infty$. Записать выражения для мгновенных значений напряжения и тока в нагрузке $u_2(tt)$, $LL_2(tt)$.
3. В конце линии $ZZ_H = 0$. Записать выражения для мгновенных значений напряжения и тока в нагрузке $u_2(tt)$, $LL_2(tt)$.
4. Построить график распределения действующего значения напряжения вдоль линии и функции координаты X для реальной линии, при $ZZ_H = \infty$ и $ZZ_H = 0$.
5. Частота изменилась на 3%, новое значение частоты $f = 4167 \cdot 1,03 = 4292$ Гц. Во сколько раз изменится при этом амплитуда напряжения в конце линии, если $ZZ_H = \infty$?
6. При условии, что линия работает в согласованном режиме, определить активные мощности, потребляемую нагрузкой P_H и $P_{\text{потерь}}$, а также КПД передачи энергии от источника к нагрузке η .
7. Как изменится значение P_H , $P_{\text{потерь}}$ после включения на каждом километре длины линии дополнительных катушек для обеспечения неискажающей передачи (в согласованном режиме)?

Таблица данных

Вариант	RR_0 , Ом/км	GG_0 , мкСм/км	LL_0 , мГн/км	CC_0 , нф/км	l , км
А	23	0,7	0,6	36	130
Б	3,4	0,9	1,6	10	100
В	0,5	0,8	2,0	8	80
Г	15	4,2	12	20	50
Д	20	4,6	5,0	5	200
Е	14	4,5	0,8	17	18
Ж	15	3,2	1,8	30	150

ЗАДАЧА № 7

На входе кабельной линии с параметрами $RR_0, GG_0, LL_0, CC_0, l$ действует напряжение $u_1(t) = 500 \sin 5000t$ в.

ЗАДАНИЕ

1. Определить фазовую скорость волны, длину волны.
2. При условии, что линия работает в согласованном режиме, записать выражения для мгновенных значений напряжения и тока в нагрузке $u_2(t), I_2(t)$. Определить активные мощности, потребляемую нагрузкой P_n и теряемую в линии $P_{\text{потерь}}$, а также КПД передачи энергии от источника к нагрузке η .
3. Найти, как изменятся значения $P_n, P_{\text{потерь}}$ после включения на каждом километре длины линии дополнительных катушек для обеспечения неискажающей передачи (в согласованном режиме).
4. Частота изменилась на $m\%$. Во сколько раз изменится при этом амплитуда напряжения в конце линии, если $Z_{\text{н}} = \infty$.
5. Записать выражения для мгновенных значений напряжения и тока в нагрузке $Z_{\text{н}} = \infty$.
6. Построить график распределения действующего значения напряжения вдоль линии в функции X для реальной линии, при $Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}}, Z_{\text{н}} = \infty$.

Таблица данных

Вариант	l , км	RR_0 , Ом/км	GG_0 , мкСм/км	LL_0 , мГн/км	CC_0 , нФ/км	m , %
А	130	12	0,7	0,6	36	3
Б	100	3,4	0,9	1,6	10	4
В	80	0,5	0,5	2,0	8	3
Г	50	15	4,2	12	20	4
Д	180	20	12,3	5,0	5	3
Е	150	8,0	4,5	0,8	17	4
Ж	120	5,0	3,2	1,8	30	3

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по организации лабораторной работы обучающихся
по дисциплине «Теоретические основы электротехники» для студентов
направления подготовки /специальности
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
Направленность (профиль) Цифровые технологии в электроэнергетике

Ставрополь 2026

Лабораторная работа №1

Исследование периодических негармонических сигналов

При подготовке к выполнению лабораторной работы необходимо:

1. Прочитать соответствующие разделы по /1/ §7.1 - 7.11 или по /2/, /3/.
2. Изучить описание данной работы.
3. Ответить на вопросы для самопроверки.

Цель работы

Экспериментально получить и исследовать периодические сигналы негармонической формы с различными амплитудами и начальными фазами гармонических составляющих. Исследовать спектры негармонических сигналов.

Содержание работы

1. Получение периодических сигналов негармонических гармонических сигналов различных частот, амплитуд и начальных фаз.
2. Исследование амплитудных спектров периодических гармонических и негармонических сигналов.

Порядок выполнения работы

- 1. Получение периодических сигналов негармонической формы путём сложения гармонических сигналов различных частот, амплитуд и начальных фаз.**

1.1. Экспериментально получить и исследовать гармонические напряжения с различными частотами. Для этого использовать блок "умножитель частоты" (УЧ). На стенде проделать следующие операции.

- На блоке питания включить тумблеры "сеть", "генератор", "коммутатор", "осциллограф", "умножитель частоты".

- На блоке Г-1 тумблер "генератор" установить в положение "внутр.", переключатель диапазонов – в первое положение (0,2-2) кГц, на блоке Г-2 переключатель "Пф" - в третье положение ($\sim$).

- На блоке умножителя частоты все тумблеры установить в положение "выкл.", а все регуляторы повернуть до отказа против часовой стрелки.

- На блоке ЭК тумблер "каналы" установить в среднее положение (1+2), тумблеры "1 канал" и "вход х" в положение "внутр.", тумблеры "ослабление" – 1:10.

- Внешним проводником соединить гнездо "вход 2 канала" с гнездом "выход 1 гармоники" на блоке УЧ.

- Установить изображение первого канала (напряжение от блока Г-2) выше середины экрана, а второго канала (напряжение с гнезда "выход 1 гармоники" на блоке УЧ) - ниже середины.

- Зарисовать получившиеся кривые с экрана осциллографа, убедившись, что они совпадают по частоте и форме.

- Изменяя положение регулятора "Um" первой гармоники, получить синусоиды с различными амплитудами.

- Установить тумблер 1 гармоники в положение "включено". Установить регулятор "Um" сумматора в среднее положение. Отключить проводник от гнезда "выход 1 гармоники" и подключить к гнезду "выход" сумматора. На втором канале осциллографа при этом окажется напряжение синусоидальной формы, сдвинутое по фазе на 180° относительно напряжения на первом канале. Сдвиг фазы на 180° обуславливается тем, что входные напряжения подаются на инверсный (отрицательный) вход операционного усилителя.

- Тумблер 1 гармоники установить в положение "выключено".

- Перенести проводник с гнезда "выход" сумматора на гнездо "выход 2 гармоники", при этом на втором канале осциллографа должна оказаться синусоида с частотой в два раза больше, чем у синусоиды на первом канале и, следовательно, у синусоиды первой гармоники. Проверить изменение амплитуды регулятором второй

гармоники и начальной фазы регулятором " ". Убедиться, что начальный фазный угол второй гармоники изменяется не менее чем на 90° . Проверить прохождение напряжения второй гармоники через сумматор. По окончании эксперимента регуляторы "Um" и " " второй гармоники повернуть до отказа против часовой стрелки, а тумблер перевести в положение "выключено".

- Аналогичные эксперименты проделать с напряжением 3 гармоники, изменяя положение регуляторов "Um" и " ". Зарисовать кривые с экрана осциллографа.

1.2. Получить на ЭК кривую напряжения, содержащую 1 и 2 гармоники. Для этого выполнить следующие операции.

- Проводник от второго канала осциллографа перенести на выходное гнездо сумматора, все тумблеры на блоке УЧ установить в положение "выключено".

- Включить тумблер 1 гармоники. Регуляторами "Um" и "Усиление плавно" на ЭК установить на втором канале изображение синусоиды с частотой f_1 , размахом в 4 клетки и произвольной начальной фазой .

- Включить тумблер 2 гармоники. Медленно поворачивать регуляторы "Um" и " " 2 гармоники, установить на экране изображение напряжения, содержащего гармоники частотой $f_1, 2f_1$. Эта кривая будет несимметрична относительно горизонтальной оси. Зарисовать её изображение. Изменяя амплитуду и начальную фазу 2 гармоники регуляторами "Um" и " " получить ещё две кривые различной формы и также зарисовать их.

1.3. Получить на ЭК кривую, содержащую 1 и 3 гармоники,

- Выключить тумблер 2 гармоники.

- Включить тумблер 3 гармоники.

На экране окажется кривая, содержащая гармоники частотой f_1 и $3f_1$. Поскольку 1 и 3 гармоники нечётные, то результирующая кривая будет симметричной, относительно горизонтальной оси.

- Изменяя амплитуду и начальную фазу 3 гармоники, зарисовать 3 различных изображения.

1.4. Получить на ЭК кривую, содержащую 1, 2, и 3 гармоники.

- Не выключая тумблеры 1 и 3 гармоник, включить тумблер 2 гармоники.

Убедиться, что по мере увеличения амплитуды 2 гармоники, результирующая кривая становится всё более несимметричной относительно горизонтальной оси, что должно быть при наличии чётных гармоник. Зарисовать изображения при различных положениях регуляторов " ΣU_m " и " " 2 гармоники.

2. Исследование амплитудных спектров периодических гармонических и негармонических сигналов

2.1. Получить амплитудный спектр сигналов гармонической формы

- Выходное гнездо сумматора внешним проводником соединить с входным (верхним) гнездом блока анализатора спектра (АС), тумблер "вход" на АС установить в положение "внеш". На блоке питания включить тумблер "анализатор спектра". При этом входы обоих каналов осциллографа отключаются от входных гнезд и станут подключенными к выходу анализатора спектра, причём на первый канал осциллографа будет подан временной сигнал, а на второй канал -спектральный. Регулятор "развёртка" на блоке ЭК также автоматически отключается. Это делается для того, чтобы на экране укладывалось одинаковое количество спектральных линий, соответствующих частотам $f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1, \dots$

- Получить временную и спектральную характеристики синусоидального сигнала с частотой f_1 . На блоке "умножитель частоты" включить тумблер 1 гармоники, регулятор " ΣU_m " повернуть против часовой стрелки. На экране окажутся две горизонтальные линии. Развести их на расстояние 5-6 клеток. Медленно поворачивать регулятор " ΣU_m " на блоке УЧ по часовой стрелке, при этом на экране окажется временной сигнал - синусоида и его спектр, состоящей из одной спектральной линии. Регулятор " ΣU_m " установить в такое положение, при котором размах спектральной линии занимает 4 клетки. Регулятором "расхождение" на ЭК установить временное изображение в верхней части экрана, а спектральное - в нижней. Зарисовать изображения.

- Включить тумблер первой гармоники и включить тумблер второй. Регулятором "Um" второй гармоники изменять напряжение от нулевого до максимального, при этом в верхней части экрана будет временная кривая с частотой $2f_1$, а в нижней части - спектральная линия на частоте второй гармоники. Зарисовать изображение.

- Выключить тумблер второй гармоники, включить тумблер третьей гармоники. Поворачивая регулятор "Um", получить спектральную линию в 4 клетки. Зарисовать изображение.

2.2. Получить временной и спектральный сигналы кривых, содержащих несколько гармоник 1 и 2 гармоники; 1, 2 и 3 гармоники. Зарисовать изображения.

2.3. Получить временные и спектральные характеристики сигналов прямоугольной формы со скважностью, равной 2. Для этого переключатель "Пф" на блоке Г-2 перевести в позицию " $\square\square\square$ ". Включить тумблер УЧ на блоке питания. Тумблер "вход" на блоке анализатора спектра перевести в положение "внутри". На входном вольтметре "V1" установить напряжение 0,3 В по верхней шкале. Регулятор "подстройка 2" установить в крайнее левое положение. В этом положении в спектре сигнала отсутствуют четные гармоники. Отсутствие в спектре второй и последующих чётных гармоник указывает на то, что скважность сигнала прямоугольной формы $S=T/\Delta t$ равна двум (рис. 1). Мгновенное значение такого напряжения описывается рядом;

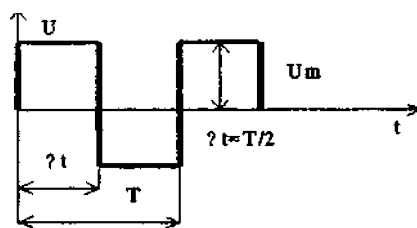


Рис 1

$$U = \frac{2U_m}{\pi} \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) \dots \right) \quad (1)$$

У сигналов прямоугольной формы первый нуль "N", то есть номер гармоники, при которой амплитуда первый раз принимает нулевое значение, численно ра-

вен скважности сигнала ($N = T/\Delta t$).

2.4. Получить сигналы прямоугольной формы с различными скважностями, поворачивая регулятор "подстройка 2" по часовой стрелке, при этом период T прямоугольных сигналов будет оставаться неизменным, а длительность импульса Δt уменьшается. При длительности импульса $\Delta t = T/3$ скважность будет равна трем, при $\Delta t = T/4$ скважность будет равна четырём, при $\Delta t = T/5$ скважность будет равна пяти. Зарисовать изображения сигнала и его спектра с экрана осциллографа.

2.5. Получить спектры одно- (рис. 2а) и двухполупериодных (рис. 2б) сигналов, мгновенные значения напряжения которых описываются следующими рядами:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_m \left(1 + \frac{\pi}{2} \sin(\omega t) - \frac{2}{15} \cos(2\omega t) - \frac{2}{15} \cos(4\omega t) \dots \right), \\ U_2 &= \frac{2\pi U_m}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3} \cos(2\omega t) - \frac{2}{15} \cos(4\omega t) \dots \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Переключатель "Пф" перевести в положение "  " установить входное напряжение 0,2 В. Регулятор "подстройка 2" повернуть в крайнее левое положение. Получить кривую однополупериодной формы. Зарисовать изображение. Медленно поворачивая регулятор "подстройка 2" получить и зарисовать кривую двухполупериодной формы. При превращении кривой в двухполупериодную спектральная линия первой гармоники должна исчезнуть, а второй гармоники – удвоиться.

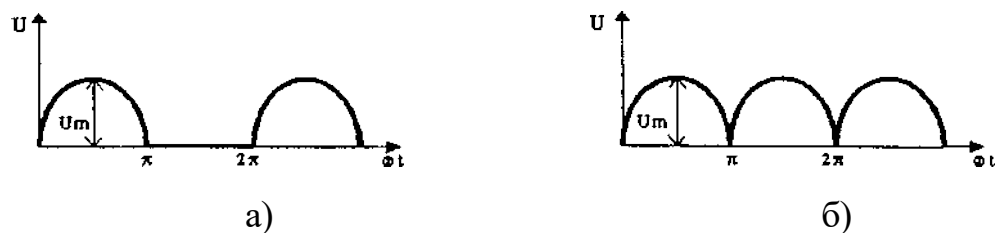


Рис. 2

Обработка результатов измерений

1. Графически разложить на гармонические составляющие одну из кривых, полученных в п. 1.4.

2. Рассчитать и построить амплитудные спектры периодических напряжений прямоугольной формы при скважностях $S=2, 3, 4$. Размах спектральной линии 1 гармоники при скважности $S=2$ принять за единицу. Сравнить с результатами, полученными в п. 2.4.

3. Рассчитать и построить амплитудные спектры периодических напряжений одно- и двухполупериодной формы. За единицу принять размах спектральной линии 1 гармоники напряжения однополупериодной формы. Сравнить с результатами, полученными в п. 2.5.

4. Найти мгновенное и действующее значения напряжения U_2 в схеме на рис. 3. На входные клеммы электрической цепи приложено периодическое напряжение прямоугольной формы с амплитудой $U_m=1\text{ В}$ при скважностях $S=2, 3, 4$. Параметры элементов цепи $R=20\text{ Ом}$, $X_{CI}=90\text{ Ом}$, $X_{LI}=10\text{ Ом}$, частота повторения $f=2\text{ кГц}$.

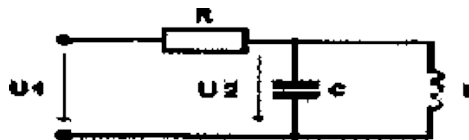


рис.3

Вопросы для самопроверки

1. В каких случаях следует ожидать возникновения несинусоидальных токов и напряжений в электрических цепях?

2. Какие виды симметрии несинусоидальных кривых вы знаете, и как они сказываются на гармоническом составе?

3. Изложите основные положения, на которых основывается методика расчёта линейных цепей при периодических несинусоидальных воздействиях.

4. Входное напряжение $U_{BX}(t)$ (рис. 4) содержит первую, третью и пятую

гармоники. Как вы выберете величины C_3 и C_5 , чтобы в нагрузку R_H проходила только первая гармоника, полагая L_3 и L_5 известными? Единственное ли решение имеет задача?

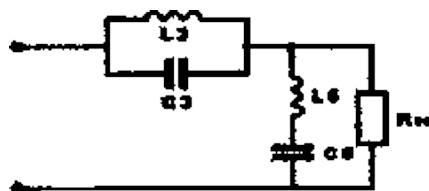


Рис.4

5. Охарактеризуйте физический смысл действующего значения несинусоидального тока.

6. Определить действующее значение тока $i = 5(1 - 0,8\sin(100t) + \sin(1000t))$ А. Рассчитать активную мощность при протекании данного тока по резистору $R=100$ Ом.

7. К цепи, состоящей из последовательно соединённых $r=100$ Ом, $L=64$ мГн и $C=18$ мкФ подведено напряжение $u = (10\sin(\omega_1 t) + 5\sin(3\omega_1 t) + 2\sin(9\omega_1 t))$ В, частота основной гармоники $f_1=50$ Гц. Чему равны активная, реактивная и полная мощности?

8. Найти коэффициенты формы, амплитуды и искажения кривой напряжения $U = U_{1m} \sin(\omega_1 t) - U_{3m} \sin(3\omega_1 t)$; $U_{1m}=100$ В, $U_{3m}=30$ В.

9. Цепь, состоящая из последовательно соединённых активного сопротивления $R=8$ Ом и индуктивности $L=15$ мГн, подключена к напряжению с действующим значением 220 В, в разложении которого отсутствуют чётные гармоники. Действующие значения гармоник связаны соотношением $U_3=0,4U_1$, $U_5=0,2U_1$, $U_7=0,05U_1$. Найти действующее значение тока и коэффициент мощности цепи, если $f_1=50$ Гц.

На рис.5 изображены периодические кривые (период повторения Т), которые представляют собой примеры несинусоидальных периодических токов.

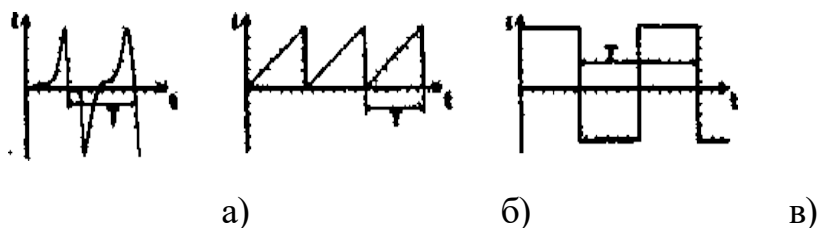


Рис. 5

Явления, происходящие в линейных цепях при периодических несинусоидальных ЭДС, напряжениях и токах, проще всего поддаются исследованию, если кривые ЭДС, напряжений и токов разложить в тригонометрические ряды Эйлера-Фурье.

Как известно, всякая периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, т.е. имеющая на всяком конечном интервале конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, может быть разложена в тригонометрический ряд:

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1m} \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \phi_2) + \dots = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega t + \phi_k) \quad (3)$$

Первый член ряда A_0 называется постоянной составляющей или нулевой гармоникой, второй член - основной гармоникой, а все остальные члены вида $A_{km} \sin(k\omega t + \phi_k)$ при $k > 1$ носят название высших гармоник; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ - основная угловая частота; T - период несинусоидальной периодической функции.

Тригонометрический ряд после раскрытия синуса суммы для каждой из гармонических составляющих записывается и в иной форме:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (B_{km} \sin(k\omega t) + C_{km} \cos(k\omega t)). \quad (4)$$

Зная коэффициенты ряда (4), легко перейти к форме (3):

$$A_{km} = ((B_{km})^2 + (C_{km})^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \phi_k = \arctg\left(\frac{C_{km}}{B_{km}}\right).$$

Совокупность гармонических составляющих несинусоидальной периодической функции называется ее дискретным частотным спектром.

Спектр можно характеризовать некоторой зависимостью A_{km} (спектр ам-

плитуд) и φ_k (спектр фаз) от частоты $k\omega$.

Разложение функции последовательности прямоугольных импульсов продолжительностью с периодом повторения T , причем $T \geq \tau$ и может принимать любое значение в интервале $0 < \tau < T$, в тригонометрический ряд:

$$f(t) = A_{\max} \left(\alpha + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin(k\omega t) \cos(k\omega \tau) \right) \right), \quad \text{где } \alpha = \frac{\tau}{T} = \frac{\omega \tau}{\pi} \quad (5)$$

при $T = 2\tau$: $f(\omega t) = \frac{A_{\max}}{2} + \frac{2A_{\max}}{\pi} \left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega t) + \dots \right)$, где $\omega = \pi/\tau$. Дис-

кретный спектр амплитуд этих импульсов представлен на рис. 6. Четные гармоники отсутствуют.

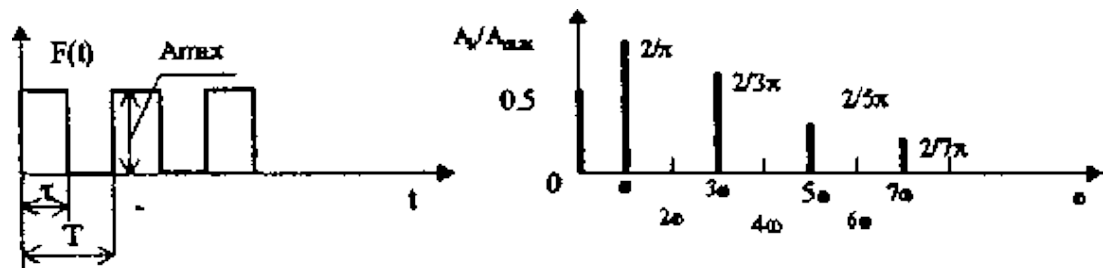


Рис. 6

Получать периодические напряжения негармоничной формы можно двумя основными способами: сложением нескольких напряжений с кратными частотами или использованием откликов от гармонического воздействия на нелинейную цепь. Первый способ разбирается в данной работе. Сложение напряжений с различными частотами может быть выполнено с помощью специального электронного устройства, называемого сумматором. Суммирование напряжения выполняется чаще всего с помощью операционного усилителя. При этом мгновенное напряжение на выходе сумматора пропорционально сумме мгновенных напряжений, подведённых к входным зажимам сумматора.

Для выполнения экспериментов по сложению гармонических сигналов с различными частотами в стенде имеется специальный блок умножителя частоты (УЧ). Блок умножителя частоты разделён на четыре отсека (рис. 7). К верхнему отсеку, называемому "первая гармоника", подводится напряжение синусоидальной формы с периодом $T=500 \text{ мкс}$, т.е. частотой $f_1=2 \text{ кГц}$. Начальная фаза напряжения первой гармоники не регулируется и остаётся постоянной.

Мгновенное значение напряжения на выходном гнезде отсека определяется из выражения $u_1 = U_{m1} \sin(\omega_1 t + \psi_1)$, где U_{m1} - максимальное значение напряжения первой гармоники, а $\omega_1 = 2\pi f = 12,56 \cdot 10^3$ 1/с.

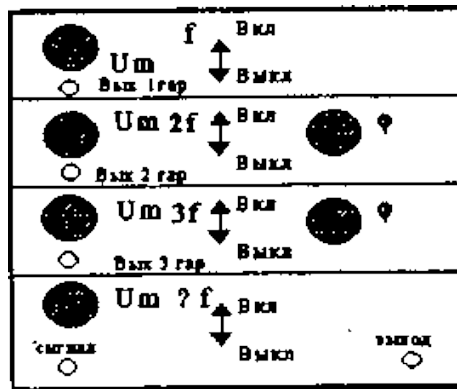


Рис 7

Ниже отсека "первая гармоника" находится отсек "вторая гармоника", с частотой напряжения в два раза большей, чем частота f_1 . Размах этого напряжения можно изменять с помощью регулятора " U_m ", а начальную фазу - с помощью регулятора " ψ ". Как и в отсеке первой гармоники, напряжение на гнезде "Вых. 2 гармоники" не зависит от положения тумблера, так же подключающего напряжения с частотой $2f_1$ к соответствующему входу сумматора. Мгновенное напряжение на выходном гнезде определяется из выражения $u_2 = U_{m2} \sin(2\omega_1 t + \psi_2)$.

Отсек третьей гармоники аналогичен отсеку второй гармоники. На его выходе получается напряжение $u_3 = U_{m3} \sin(3\omega_1 t + \psi_3)$. Нижний отсек имеет обозначение " Σf ", что означает "суммированное напряжение". В этом отсеке находятся: регулятор " U_m ", тумблер "вкл. - выкл.", гнезда "сигнал" и "выход" (рис. 7). К гнезду "сигнал" подведено напряжение, снимаемое с выхода блока Г-3, т.е. форма напряжения на гнезде "сигнал" определяется положением переключателя "Пф" на блоке Г-2, а размах напряжения - положением регулятора $U_{вых}$ на блоке Г-3, и никак не зависит от положения регуляторов во всех трех отсеках блока умножения частоты. Гнездо "выход" подключено к выходу сумматора, размах суммарного напряжения может изменяться от нулевого до максимального значения с помощью регулятора " U_m ", находящегося в этом отсеке. С помощью тумблера напряжение с гнезда "сигнал" подключается к соответствующему входу сумматора. Таким образом,

если тумблер в нижнем отсеке находится в положении "выключено", то на вход сумматора могут быть поданы напряжения с частотами $f_1, 2f_1, 3f_1$ в зависимости от положений тумблеров в соответствующих отсеках, а если в положении "включено", то к этим напряжениям прибавляется напряжение той формы, которая определяется положением переключателя "Пф", и которая также состоит из целого ряда гармонических составляющих. Следовательно, складывая напряжения в различных комбинациях, можно получить сигналы чрезвычайно разнообразных форм.

При оценке несинусоидальных периодических кривых пользуются следующими коэффициентами: коэффициентом формы кривой K_ϕ , коэффициентом амплитуды K_a и коэффициентом искажения K_u .

Коэффициент формы определяется как отношение действующего значения к среднему по модулю значению: $K_\phi = A / A_{cp}$. Для синусоиды $K_\phi = \pi / \sqrt{2}$. Коэффициент амплитуды равен отношению максимального значения к действующему значению: $K_a = A_{\max} / A$. Для синусоиды $K_a = \sqrt{2} = 1,41$. Коэффициент искажения определяется как отношение действующего значения основной гармоники к действующему значению всей кривой $K_u = A_1 / A$. Для синусоиды $K_u = 1$.

Рекомендуемый библиографический список

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. М.: Высшая школа, 1984, 559 с.
2. Нйман Л. Р., Демирчан К. С. Теоретические основы электротехники. Л.: Энергоиздат., 1981, 520 с.
3. Зевеке Г. В., Ионкин Н. А. Основы теории цепей. М: Энергоатомиздат, 1989, 528 с.
4. Добротворский И. Н. Лабораторный практикум по основам теории цепей. М.: Высшая школа, 1986, 205 с.

Лабораторная работа №2

РАСЧЕТ ТРЕХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ МЕТОДОМ ЗЕРКАЛЬНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

При подготовке к выполнению лабораторной работы необходимо:

1. Прочитать по литературе /1/ §19.25-19.36, 19.47.
2. Изучить описание данной работы.
3. Ответить на вопросы для самопроверки.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Исследование электростатического поля системы заряженных тел, расположенных вблизи проводящей плоскости, методом зеркальных изображений.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. Определение потенциала каждого из проводов трехпроводной линии относительно земли.
2. Определение частичных емкостей системы проводников линии.
3. Определение энергии электростатического поля линии.

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

- 1. Определение потенциала каждого из проводов трехпроводной линии относительно земли.**

В качестве системы заряженных тел рассмотрим многопроводную линию из трех весьма длинных проводников с зарядом τ_i на единицу длины (индекс заряда соответствует номеру провода), протянутых параллельно проводящей поверхности (поверхность земли) (рис. 1). Высота подвеса проводов: h_i расстояния между подвесами проводов D_{ij} , радиус каждого провода r и разность потенциалов

между проводами U_{ij} известны (таб. 1). Сумма зарядов τ_i всех трех проводников равна 0. Среда, окружающая провода, - воздух ($\varepsilon_r = 1$). Полагаем, что высота подвеса каждого провода над землей много больше радиусов проводов. При этом электрические оси практически совпадают с геометрическими.

1.1. Используя метод зеркальных изображений, дополняем систему данных проводников фиктивными, расположенными симметрично относительно земли, заряды которых по модулю равны истинным, а их знаки - противоположны (рис. 1).

1.2. Для определения потенциальных коэффициентов, найдем расстояние d_{ij} между проводами i и j расстояния d'_{ij} между проводом и зеркальным изображением:

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sqrt{(h_i - h_j)^2 + D_{ij}^2} \\ d'_{ij} &= \sqrt{(h_i + h_j)^2 + D_{ij}^2} \end{aligned} \quad (1)$$

Определяем потенциальные коэффициенты первой группы формул Максвелла

$$\begin{aligned} \alpha_{ii} &= \frac{1}{(2\varepsilon_0\pi)} \ln \frac{2h_i}{r_i} \\ \alpha_{ij} &= \frac{1}{(2\varepsilon_0\pi)} \ln \frac{d'_{ij}}{d_{ij}} \end{aligned} \quad (2)$$

Для определения зарядов на единицу длины проводов воспользуемся первой группой формул Максвелла,

$$\begin{aligned} \phi_i &= \alpha_{ii}\tau_1 + \alpha_{ij}\tau_2 + \alpha_{ik}\tau_3 \\ \phi_j &= \alpha_{ji}\tau_1 + \alpha_{jj}\tau_2 + \alpha_{jk}\tau_3 \\ \phi_k &= \alpha_{ki}\tau_1 + \alpha_{kj}\tau_2 + \alpha_{kk}\tau_3 \end{aligned} \quad (3)$$

дополняя ее уравнениями $U_{12} = \phi_1 - \phi_2$, $U_{23} = \phi_2 - \phi_3$, $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0$. Вычитая из первого уравнения второе системы (3) а потом из второго третье и исключая заряд третьего провода, получаем:

$$\begin{aligned} U_{ij} = \phi_i - \phi_j &= (\alpha_{ii} - \alpha_{ji} - \alpha_{ik} + \alpha_{jk})\tau_1 + (\alpha_{ij} - \alpha_{jj} - \alpha_{ik} + \alpha_{jk})\tau_2 \\ U_{ik} = \phi_i - \phi_k &= (\alpha_{ji} - \alpha_{ki} - \alpha_{jk} + \alpha_{kk})\tau_1 + (\alpha_{ij} - \alpha_{kj} - \alpha_{jk} + \alpha_{kk})\tau_2 \end{aligned} \quad (3a)$$

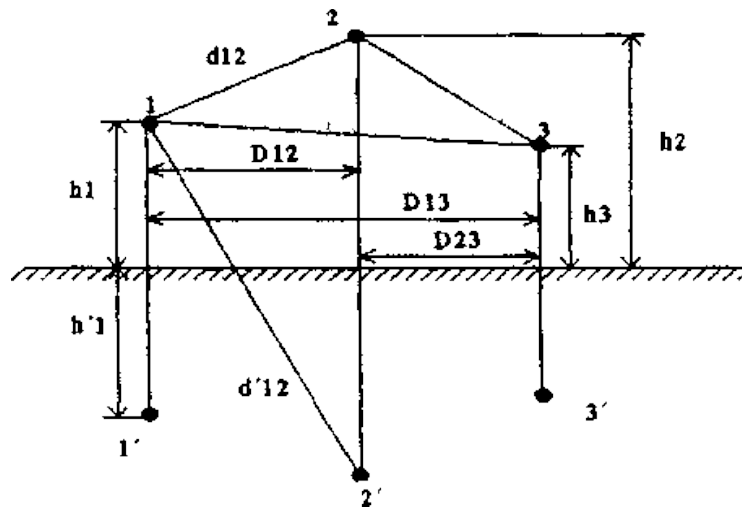


Рис.1

Из уравнений (3а) и (3) находим τ_1 , τ_2 , τ_3 , а также ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 .

2. Определение частичных емкостей системы проводников линии

Воспользуемся второй группой формул Максвелла.

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \beta_{11}\phi_1 + \beta_{12}\phi_2 + \beta_{13}\phi_3 \\ \tau_2 &= \beta_{21}\phi_1 + \beta_{22}\phi_2 + \beta_{23}\phi_3 \\ \tau_3 &= \beta_{31}\phi_1 + \beta_{32}\phi_2 + \beta_{33}\phi_3\end{aligned}\tag{4}$$

Рассчитаем емкостные коэффициенты по формуле: $\beta_{KP} = \Delta_{KP} / \Delta$. Здесь через Δ обозначен определитель системы (3). Алгебраическое дополнение Δ_{KP} , получается из определителя системы (3) Δ путем вычеркивания К- строки и П- столбца и умножения полученного минора на $(-1)^{K+P}$. Матрицу, емкостных коэффициентов можно найти операцией обращения матрицы потенциальных коэффициентов $|\beta_{ij}| = |\alpha_i|^{-1}$.

Рассчитать частичные емкости системы проводников: собственные частичные емкости $C_{KK} = \beta_{K1} + \beta_{K2} + \beta_{K3}$, взаимные частичные емкости $C_{KM} = -\beta_{KM}$.

3. Определение энергии электростатического поля линии

Энергию электростатического поля трехпроводной линии на единицу длины определяем согласно уравнению

$$W_0 = \frac{W}{l} = \frac{1}{2l} (q_1 \phi_1 + q_2 \phi_2 + \dots) = \frac{1}{2} (\phi_1 \tau_1 + \phi_2 \tau_2 + \dots) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k \phi_n \tau_n \quad (5)$$

Краткие теоретические сведения

Общие методы расчета электростатических полей основываются на прямом интегрировании уравнений Лапласа-Пуассона. Однако в ряде частных случаев поле поддается расчету и другими, более простыми способами.

Большое значение имеет излагаемый ниже метод зеркальных изображений, применимый к ряду практических задач, связанных, например, с расчетом поля параллельных круглых проводов, расположенных вблизи проводящей поверхности (поверхности земли, воды, экраны в электротехнических устройствах и т.п.).

Суть метода заключается в замене влияния всей проводящей поверхности, по которой сложным образом распределены наведенные заряды, влиянием зеркальных изображений зарядов, взятых с противоположными знаками. Правомерность такого метода подтверждается тем, что после замены для границы раздела сред выполняются граничные условия ($E_\tau = 0$ и $\phi = const$). Данный метод разработан английским физиком Кельвином и развит другим английским физиком Сирлом применительно к границам раздела любых сред.

1. Потенциальные коэффициенты

Принцип суперпозиции гласит, что потенциал в любой точке пространства, создаваемый системой заряженных тел может быть представлен суммой потенциалов, создаваемых каждым заряженным телом в отдельности: для точки А можно записать:

$$\phi_a = \phi_{a1} + \phi_{a2} + \dots + \phi_{ak} \quad (6)$$

Очевидно, что потенциал в этой точке ϕ_k пропорционален заряду k - тела и зависит от расположения точки А. Поэтому

$$\phi_a = \alpha_{a1}q_1 + \alpha_{a2}q_2 + \dots + \alpha_{a\kappa}q_\kappa \quad (7)$$

Если расположить точку А на поверхности 1-го, 2-го,..., к- тела, то потенциалы этих тел могут быть определены системой вида

$$\left. \begin{array}{l} \phi_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + ... + \alpha_{1\kappa}q_\kappa \\ \\ \phi_\kappa = \alpha_{\kappa 1}q_1 + \alpha_{\kappa 2}q_2 + ... + \alpha_{\kappa\kappa}q_\kappa \end{array} \right\} \quad (8)$$

α_{kk} и α_{ki} - называют потенциальными коэффициентами, они всегда больше нуля и имеют размерность м/Ф, данные величины зависят лишь от расположения, размеров тел и диэлектрических свойств окружающего пространства.

Каждый коэффициент α_{ki} равен потенциалу на k - теле, когда на i - теле сосредоточен единичный заряд, а заряды остальных тел равны нулю.

2. Емкостные коэффициенты

Систему (8) можно записать иначе, если известны потенциалы тел, а по условию необходимо определить их заряды:

[illegible]

В этой системе β_{ki} - емкостные коэффициенты, некоторые постоянные

для данной системы. Решив систему (8), легко найти связь между α_{ki} и β_{ki} :

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \phi_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta} + \phi_2 \frac{\Delta_{12}}{\Delta} + \dots + \phi_k \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} \\ &\dots\dots\dots \\ q_k &= \phi_1 \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + \phi_2 \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + \dots + \phi_k \frac{\Delta_{kk}}{\Delta} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

В (10) через Δ обозначаем определитель матрицы, составленной из потенциальных коэффициентов

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kk} \end{vmatrix} \quad (11)$$

а через Δ_{ki} - алгебраическое дополнение Δ . Как следует из (10)

$$\beta_{ki} = \Delta_{ki} / \Delta \quad (12)$$

β_{ki} имеют размерность Ф/м, причем $\beta_{ki} < 0$, $\beta_{ii} > 0$.

3. Частичные емкости

Частичные емкости связывают попарно все тепла системы и позволяют записать (10) в иной форме, а именно

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \phi_1 C_{11} + (\phi_1 - \phi_2) C_{12} + (\phi_1 - \phi_3) C_{13} + \dots \\ q_2 &= \phi_2 C_{22} + (\phi_2 - \phi_1) C_{21} + (\phi_2 - \phi_3) C_{23} + \dots \\ &\dots\dots\dots \\ q_k &= \phi_k C_{kk} + (\phi_k - \phi_2) C_{k1} + (\phi_k - \phi_1) C_{k3} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Приравняв коэффициенты при одноименных значениях потенциалов в системе уравнений (9) и (13) легко найти, что $\beta_{11} = C_{11} + C_{12} + C_{13} + \dots$, $\beta_{12} = -C_{12}$, $\beta_{13} = -C_{13}$ и т.д.

В общем виде это можно представить

$$\left. \begin{aligned} \beta_{ii} &= C_{i1} + C_{i2} + C_{i3} + \dots + C_{ik} \\ \beta_{ik} &= -C_{ik} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Решив систему (14) относительно C_{ik} , получим

$$\begin{aligned} C_{11} &= \beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{13} + \dots + \beta_{1k} \\ C_{22} &= \beta_{21} + \beta_{22} + \beta_{23} + \dots + \beta_{2k} \end{aligned} \quad (15)$$

или

$$C_{ii} = \beta_{i1} + \beta_{i2} + \beta_{i3} + \dots + \beta_{ik}$$

Очевидно, что $C_{ki} > 0$, их размерность Ф/м,

C_{ii} - собственные частичные емкости;

C_{ki} - взаимные частичные емкости.

В рассматриваемой системе выполняется принцип взаимности, выражением которого являются равенства:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \quad \beta_{ik} = \beta_{ki} \quad C_{ik} = C_{ki} \quad (17)$$

Из системы уравнений (8) следует словесная формулировка принципа взаимности: потенциал k - тела при наличии заряда только на i - теле равен потенциалу на i - теле при таком же заряде только на k - теле.

Системы (3), (4), (9) называют 1-, 2-, 3- группами уравнений Максвелла.

Коэффициенты β_{ik} можно определить экспериментально и аналитически через α_{ik} . Пусть все проводники кроме одного соединены с землей $\phi_2 = \phi_3 = \dots = \phi_k = 0$. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \beta_{11} \phi_1 \\ q_2 &= \beta_{21} \phi_1 \\ &\dots\dots\dots \\ q_k &= \beta_{k1} \phi_1 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Если $q_1 > 0$ и $\phi_1 > 0$ то все остальные проводники приобретут отрицательные заряды $q_2 < 0$, $\phi_2 = 0$, $q_3 < 0$, и т.д.

Из (13) следует что $\beta_{11} = q_1 / \phi_1 > 0$, а $\beta_{21} = q_2 / \phi_1 < 0$, ... $\beta_{k1} = q_k / \phi_1 < 0$. Из этих формул вытекает методика определения опытным путем коэффициентов β_{11} и β_{21} . См. рис. 2а. Тело 1 заряжают до потенциала ϕ_1 , замкнув ключ К. Затем убирают батарею E , включают гальванометры G_1 и G_2 (рис. 2б) и замыкают ключ К. В системе перераспределится заряд, G_1 - измерит q_1 , а G_2 - q_2 и т.д. Далее находим $\beta_{11} = q_1 / \phi_1$ и $\beta_{21} = q_2 / \phi_1$. Коэффициенты кроме опытного определения могут быть

рассчитаны. Так в системе заряженных параллельных проводников, расположенных вблизи проводящей поверхности, коэффициенты α_{ik} вычисляются наиболее просто.

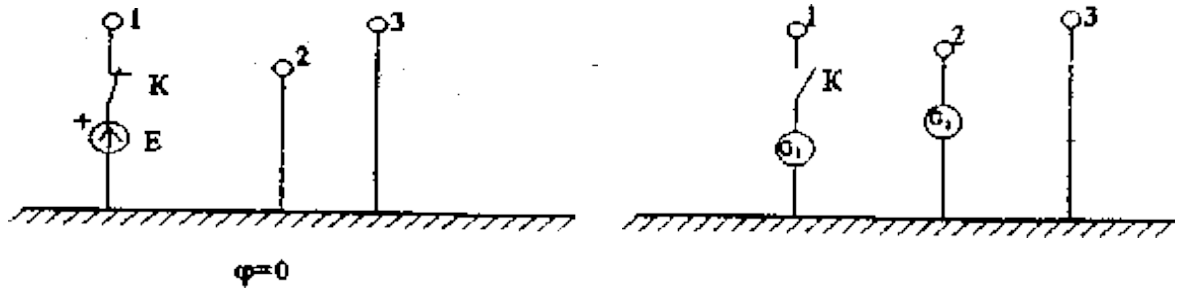


Рис. 2

Пусть система состоит из 3-х длинных проводников радиуса r_k и высотами подвеса h_k каждый из проводов несет заряд τ_k , на единицу длины. Следуя методу зеркальных изображений, дополним чертежи расчетными зарядами $\tau_1' = -\tau_1$, $\tau_2' = -\tau_2$ и $\tau_3' = -\tau_3$ (рис. 1), заменяющими влияние всей проводящей поверхности со сложным распределением на ней индуцированных зарядов.

Потенциал поверхности первого провода, обусловленный зарядом τ_1 этого провода, когда остальные заряды равны нулю определится как сумма потенциалов самого заряда τ_1 и его зеркального изображения. Так в этом случае $\phi_1 = \alpha_{11} \tau_1$, поэтому

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{2h_1}{r_1} \quad (18)$$

Для первого провода (при отсутствии зарядов на всех проводах кроме второго) по аналогии получаем

$$\phi_{12} = \frac{\tau_2}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{a_{12}}{b_{12}} \quad (19)$$

Обобщая (18) и (19) на систему из k -проводников, можно записать:

$$\alpha_{kk} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{2h_k}{r_k} \quad \alpha_{ki} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{b_{ki}}{a_{ki}} \quad (20)$$

где h_k - высота подвеса провода над проводящей плоскостью, r_k - радиусы проводов, a_{ki} - расстояние между k - и i -проводами, b_{ki} - расстояние между k -проводом и зеркальным изображением i -провода. Пользуясь (16) и (19) находят

коэффициенты β и C .

В заключение укажем, что применение группы уравнений не исчерпывается электростатикой. Так частичные емкости учитывают при расчете быстропротекающих процессов, например, в электронных и электровакуумных приборах, при учете емкостного отбора мощности в высоковольтной линии электропередачи, энергии электростатического взаимодействия зарядов проводов.

Варианты расчетных заданий

Таблица 1

№ вар	r, см	h ₁ , см	h ₂ , см	h ₃ , см	D ₁₂ , см	D ₂₃ , см	U ₁₂ , кВ	U ₂₃ , кВ	Номера вопросов	
1	0,6	600	520	600	200	160	30	20	1	13
2	0,4	300	400	580	10	200	20	30	2	14
3	0,8	500	500	520	150	200	10	25	3	15
4	1,0	550	330	600	200	100	20	40	4	16
5	0,5	600	570	500	180	220	40	30	5	17
6	0,7	400	600	550	150	160	30	20	6	18
7	0,4	550	300	400	175	175	20	25	7	19
8	0,3	450	350	500	160	220	22	40	8	20
9	0,6	700	400	500	170	100	28	18	9	21
10	0,5	500	600	550	170	180	28	35	10	22
11	1,0	600	400	580	180	160	25	20	11	23
12	0,7	300	350	600	200	150	40	35	12	24
13	0,4	650	650	400	160	180	25	35	25	28
14	0,8	550	550	450	350	200	15	20	26	29
15	0,3	300	700	500	250	230	40	25	27	30

Вопросы для самопроверки

1. Какой физический смысл придается, E и φ . Привести математические выражения, связывающие эти величины.
2. Какие поля называют потенциальными? Привести примеры, записать дифференциальные уравнения потенциальных полей.
3. Силовые линии и эквипотенциали электростатического поля. Объяснить характер силовых линий электростатического поля.
4. Охарактеризуйте свободные и связанные электрические заряды, укажите их отличия.
5. Запишите в дифференциальном и интегральном виде 3 формы теоремы Гаусса.
6. Дайте физическое толкование градиенту и дивергенции векторного поля. Приведите примеры использования этих операторов в электростатике.
7. Объяснить и записать выражения, определяющие энергию поля электрически заряженных тел
8. Электрическое поле в диэлектриках электрические свойства диэлектриков.
9. Изобразите графически, приведите выражения, описывающие поля точечного, линейного зарядов, диполя.
10. Доказать теорему единственности решения задач электростатики.
11. Дайте обоснование методу зеркальных изображений в случае границы проводник-диэлектрик. Граничные условия.
12. Двойной электрический слой и его свойства.
13. Метод зеркальных изображений в случае границы диэлектрик-диэлектрик. Граничные условия.
14. Записать и объяснить уравнения Лапласа и Пуассона.
15. Привести и объяснить математически соотношения, связывающие между собой абсолютную и относительную диэлектрические проницаемости и электрическую восприимчивость.

16. Сформулировать и объяснить граничные условия.
17. Применение метода зеркальных изображений к расчету полей точечного заряда вблизи незаряженной проводящей незаземленной сферы.
18. Применение метода зеркальных изображений к расчету поля точечного заряда вблизи незаряженного заземленного шара.
19. Записать и пояснить использование дифференциальных уравнений электростатического поля.
20. Напряженность и электрическое смещение, поток вектора смещения. Объяснить правомерность введения вектора смещения.
21. Физический смысл объемных, поверхностных и линейных зарядов.
22. Качественно построить поле двухпроводной линии. Погонная электрическая емкость двухпроводной линии.
23. Качественно построить поле коаксиального кабеля. Электрическая емкость единицы длины кабеля.
24. Изобразить поле в плоском конденсаторе с двухслойной изоляцией.
25. Изобразить поле в коаксиальном кабеле с двухслойной изоляцией.
26. Метод зеркальных изображений при расчете поля заряженной оси параллельной незаряженному проводящему незаземленному цилиндру.
27. Метод зеркальных изображений при расчете поля заряженной оси параллельной заземленному незаряженному проводящему цилиндру.
28. Поляризация вещества, поляризованность.
29. Поток вектора, дивергенция векторного поля, использование этих понятий в электростатике.
30. Поля бесконечной заряженной плоскости, проводящих цилиндра, сферы. Экранирование в электростатике.

Лабораторная работа №3

Расчет поля постоянного тока в проводящей среде на примере расчета заземлителя с помощью метода зеркальных изображений.

Цель работы

Применить метод зеркальных изображений при расчете поля постоянного тока в проводящей среде на примере расчета заземлителя.

Постановка задачи

Заземлителем служит металлическая труба, вертикально погруженная в землю. Длина трубы $\ell = 5$ м, диаметр $2r_0$ м, глубина погружения верхнего торца трубы ниже уровня земли $h = \ell/12$ или $h = 0$. Удельная проводимость материала трубы $\gamma_{TP} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$. Считать проводимость материала трубы $\gamma_{TP} \gg \gamma$, вследствие чего можно пренебречь падением напряжения вдоль заземлителя. К трубе подводится ток $I = 200$ А. Определить распределение линейной плотности стекающих в землю токов $J(z)$ по длине трубы. Найти сопротивление растекания заземлителя. Определить распределение потенциала по поверхности земли.

Содержание работы

1. На основе метода зеркальных изображений составить и решить систему интегральных уравнений относительно плотности тока, стекающего с заземлителя.
2. Определить сопротивление растекания заземлителя.
3. Рассчитать разность потенциалов между заданными точками на поверхности земли.

Краткие теоретические сведения

Основной величиной, характеризующей движение зарядов в электрическом поле проводящей среды, является плотность тока $\vec{\delta}$. Это векторная величина, направленная вдоль вектора напряженности поля. Она численно равна

отношению тока Δi , протекающего через элемент поверхности Δs , перпендикулярный к направлению напряженности поля в данной точке к величине этой поверхности:

$$\vec{\delta} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta s} \cdot \vec{n}_0$$

Поток вектора $\vec{\delta}$ через поверхность s называют током и определяют выражением

$$I = \int_s \vec{\delta} d\vec{s}$$

В отличие от плотности тока, ток является скаляром алгебраического характера.

При протекании постоянных токов как внутри проводящих тел, так и вне их существует постоянные (неизменные во времени) магнитные поля, в которых не возникает явление электромагнитной индукции. Поэтому электрическое поле, созданное постоянным током, не оказывает влияния на электрическое поле, возникающее при протекании этого тока. Поэтому электрическое и магнитное поля постоянного тока можно рассматривать отдельно.

В обычных проводниках плотность тока $\vec{\delta}$ прямо пропорциональна напряженности E электрического поля:

$$\delta = \gamma \cdot E, \quad (2)$$

где γ - удельная электропроводность среды.

Это соотношение называют дифференциальной формой закона Ома.

Действительно,

$$I = \frac{U}{R} \quad \text{или} \quad I = \int_s \vec{\delta} d\vec{s} = \frac{\int_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell}}{R} = \frac{1}{R} \cdot \int_{\ell} \vec{E} d\vec{\ell}$$

перейдя к бесконечно малым, получаем

$$\vec{\delta} \cdot \Delta s = \frac{1}{R} \cdot \vec{E} \cdot \Delta \ell, \text{ где } R = \frac{\Delta \ell}{\gamma \cdot \Delta s}, \text{ т.е. } \vec{\delta} \cdot \Delta s = \gamma \cdot \frac{\Delta s}{\Delta \ell} \cdot \vec{E} \cdot \Delta \ell$$

Сокращая на Δs и $\Delta \ell$ получим соотношение (2).

Соотношение (2) справедливо лишь в областях, где нет источников ЭДС. Для областей, занятых источниками ЭДС, выполняется обобщенный закон Ома

$$\delta = \gamma(E + E_c), \quad (2a)$$

где $\vec{E}_{CT}$ – сторонняя ЭДС.

Если от обеих частей уравнения (2a) взять интеграл по замкнутому контуру, включающему в себя источник ЭДС, то будет получено соотношение второго закона Кирхгофа. Поэтому уравнение (2a) называют также вторым законом Кирхгофа в дифференциальной форме.

Следует отметить, что протекание тока через замкнутую поверхность s , приводит к изменению заряда внутри объема, ограниченного s , что математически описывается выражением вида

$$\int_s \vec{\delta} \cdot \vec{n} ds = \frac{\partial q}{\partial t} \quad (3)$$

или для бесконечно малых

$$\text{div} \vec{\delta} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3a)$$

где ρ – объемная плотность заряда.

При постоянном токе очевидной является неизменность заряда внутри области, где течет ток, поэтому

$$\oint_s \vec{\delta} \cdot \vec{n} ds = 0 \quad \text{или} \quad \text{div} \vec{\delta} = 0 \quad (4)$$

Это соотношение называют первым законом Кирхгофа в дифференциальной форме.

Поле постоянного тока, как и электростатическое, является потенциальным, поэтому напряженность электрического поля в проводящей среде:

$$E = -\text{grad} \phi \quad (5)$$

В неизменном во времени поле

$$\text{div} \vec{\delta} = \text{div} \gamma E = 0 \quad (6)$$

Если среда однородна и изотропна, то есть удельная проводимость среды не изменяется от точки к точке и ее, как постоянную величину, можно вынести за знак дивергенции $\gamma \operatorname{div} E = 0$ или

$$\operatorname{div} E = 0 \quad (7)$$

Учитывая (5) приходим к уравнению Лапласа

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad} \phi) = 0$$

или

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (8)$$

При переходе из среды с проводимостью γ_1 в среду с проводимостью γ_2 должны выполняться граничные условия: непрерывна тангенциальная составляющая вектора E , и непрерывна нормальная составляющая плотности тока δ .

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (9)$$

$$\delta_{n1} = \delta_{n2} \quad (10)$$

По своей природе поле электростатическое и поле постоянного тока в проводящей среде различны. Электростатическое поле создается электрическими зарядами, неизменными во времени и неподвижными в пространстве, тогда как электрическое поле в проводящей среде есть поле, в котором электрические заряды имеют упорядоченное движение под действием внешнего источника. Тем не менее, между двумя полями может быть проведена формальная аналогия.

Действительно, электростатическое поле (в областях, не занятых зарядами) и поле постоянного тока удовлетворяют уравнению Лапласа $\nabla^2 \phi = 0$. При описании этих полей используют вектор напряженности поля E . Вектору электрического смещения $\vec{D} = \varepsilon_a \cdot E$ можно сопоставить вектор плотности тока $\delta = \gamma \cdot E$. С потоком вектора D (обозначим его буквой ψ) $\psi = \int D dS$ можно сопоставить поток вектора плотности электрического тока $I = \int \delta dS$.

Но если два поля удовлетворяют одному и тому же уравнению $\nabla^2 \phi = 0$ и в них тождественно выполняются граничные условия для сходных величин, то

при одинаковой форме граничных поверхностей на основании теоремы единственности решения можно сказать, что совокупность силовых и эквипотенциальных линий в этих двух полях будет одинаковой. В этом случае, методы расчета электростатических полей оказываются приемлемы и к расчету полей постоянного тока. Эта формальная аналогия широко используется на практике. Например, если какое-либо электростатическое поле уже изучено, то все сведения о поле могут быть перенесены и на геометрически подобное поле в проводящей среде. Справедливо и обратное заключение.

Порядок выполнения работы

1. На основе метода зеркальных изображений составить и решить систему интегральных уравнений относительно плотности тока, стекающего с заземлителя.

1.1. Выбрать из таблицы 1 данные согласно номеру варианта.

1.2. В соответствии с методом зеркальных изображений дополнить соответствующий рисунок (рис. 1а, б) зеркальным изображением трубы, указав в нем направление тока, получить расчетную схему, показанную на рис. 2. Так как $r_0/\ell \ll l$, ток в трубе можно считать сосредоточенным на оси с неизвестной линейной плотностью $J(z_1) = dI/dz_1$, где z_1 - координата точки истока N.

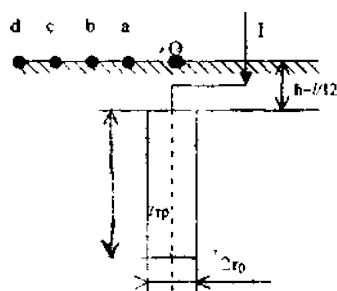


Рис. 1а

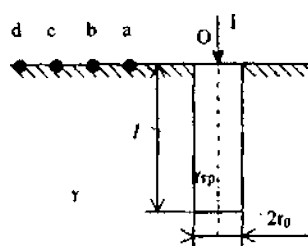


Рис. 1б

1.3. Выделим на оси трубы на расстоянии от начала координат элемент dz_1 . Элементарный ток этого элемента $J(z_1)dz_1$. Потенциал элементарного тока в произвольной точке N:

$$d\phi = \frac{J(z_1)dz_1}{4\pi\gamma R} \quad (11)$$

где $R = \sqrt{r^2 + (z_1 - z_H)^2}$, r - расстояние от оси провода до точки Н вдоль горизонтальной оси (см. рис. 2).

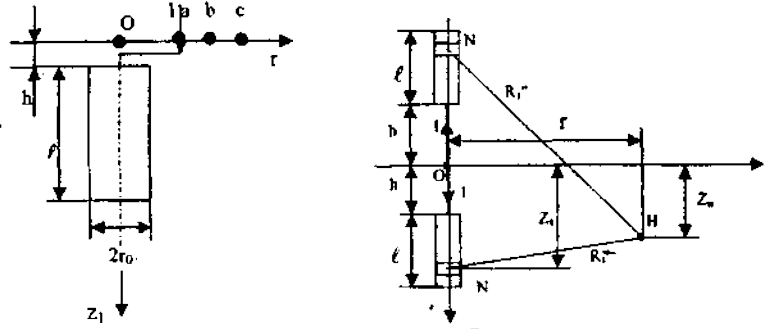


Рис. 2

1.4. Используя принцип суперпозиции, потенциал произвольной точки Н с координатами (r, z_H) , обусловленный токами в трубе (заземлителе) и в его изображении с учетом симметрии относительно поверхности земли, можно записать

$$\phi_H = 4\pi\gamma \int_h^{h+\ell} \left(\frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_1''} \right) J(z_1) dz_1 \quad (12)$$

где $R_1' = \sqrt{r^2 + (z_1 - z_H)^2}$, $R_1'' = \sqrt{r^2 + (z_1 + z_H)^2}$; R_1' и R_1'' - соответственно расстояния от точки Н до точки истока N на поверхности заземлителя и на поверхности его зеркального изображения.

1.5. Поместить точку на поверхности трубы ($r = r_0$) и учесть, что поверхность трубы эквипотенциальна ($\gamma_{TP} \gg \gamma$), потенциал трубы равен ϕ_3 . В результате получается интегральное уравнение Фредгольма 1 рода относительно неизвестной плотности тока $J(z_1)$.

$$\int_h^{h+\ell} \left(\frac{1}{\sqrt{r_0^2 + (z_1 + z_H)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + (z_1 - z_H)^2}} \right) J(z_1) dz_1 = 4\pi\gamma\phi \quad (13)$$

1.6. Для приближенного решения уравнения (13) применим метод приведения к системе линейных алгебраических уравнений. Разобьем заземлитель и его изображение на n одинаковых участков длиной ℓ/n . Будем считать плот-

ность тока J_i , где $i = 1, 2, \dots, n$ постоянной внутри каждого участка. Определим последовательно потенциалы ϕ_j каждого участка, для этого поместим точку наблюдения N на середину каждого участка, т.е. в точки с координатами (r_0, z_{ij}) .

В этом случае интеграл (13) заменится суммой (14) интегралов по n участкам, где в знаменателе сделана замена $z_{ij} = h + (2j - 1) \frac{\ell}{2n}$ и известно обозначение

$$T = 4\pi\gamma\phi_3.$$

$$\sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma^i} \int_{(i-1)\frac{\ell}{n} + h}^{i\frac{\ell}{n} + h} \left\{ \frac{dz_1}{\sqrt{r_0^2 + (h + (2j - 1)\frac{\ell}{2n} - z_1)^2}} + \frac{dz_1}{\sqrt{r_0^2 + (h + (2j - 1)\frac{\ell}{2n} + z_1)^2}} \right\} = 1 \quad (14)$$

Таких уравнений можно записать n ($1 \leq j \leq n$).

Систему уравнений (14) можно переписать в матричной форме

$$\|\alpha_{ij}\| \cdot \left\| \frac{J_i}{T} \right\| = \|1\| \quad (15)$$

где $\|\alpha_{ij}\|$ $\|\alpha_{ij}'\|$ $\left\| \frac{J_i}{T} \right\|$

$\|\alpha_i'\|$ – квадратная матрица, коэффициенты которой определяются интегралом, стоящим первым в (14);

$\|\alpha_{i,j}'\|'$ – квадратная матрица, коэффициенты которой определяются интегралом, стоящим вторым в (14);

$\left\| \frac{J_i}{T} \right\|$ – матрица столбец относительных средних линейных плотностей стекающих токов;

$\|1\|$ – единичная матрица.

Каждый член обеих матриц $\|\alpha_i'\|$ и $\|\alpha_{i,j}'\|'$ определяется при всех значениях i и j , т.е. $i = 1, 2, 3, \dots, n$; $j = 1, 2, 3, \dots, n$ выражениями, полученными после интегрирования.

$$\alpha'_i = \ln \frac{(2j-2i+1) + \sqrt{(2j-2i+1)^2 + \left(\frac{2r_0}{\ell} n\right)^2}}{(2j-2i-1) + \sqrt{(2j-2i-1)^2 + \left(\frac{2r_0}{\ell} n\right)^2}}$$

$$\alpha''_i = \ln \frac{(2j+2i-1) + \frac{4h}{\ell} n + \sqrt{(2j+2i-1 + \frac{4h}{\ell} n)^2 + \left(\frac{2r_0}{\ell} n\right)^2}}{(2j+2i-3 + \frac{4h}{\ell} n) + \sqrt{(2j+2i-3 + \frac{4h}{\ell} n)^2 + \left(\frac{2r_0}{\ell} n\right)^2}} \quad (16)$$

В случае расчета без использования ЭВМ можно ограничиться разбиением на 3 участка ($n=3$). Тогда система (14) принимает вид:

$$\begin{cases} \alpha_{11} \left(\frac{J_1}{T} \right) + \alpha_{12} \left(\frac{J_2}{T} \right) + \alpha_{13} \left(\frac{J_3}{T} \right) = 1 \\ \alpha_{21} \left(\frac{J_1}{T} \right) + \alpha_{22} \left(\frac{J_2}{T} \right) + \alpha_{23} \left(\frac{J_3}{T} \right) = 1 \\ \alpha_{31} \left(\frac{J_1}{T} \right) + \alpha_{32} \left(\frac{J_2}{T} \right) + \alpha_{33} \left(\frac{J_3}{T} \right) = 1 \end{cases}$$

1.7. Рассчитать коэффициенты уравнений, решить систему и найти приведенную плотность тока $\sigma_i = J_i/T$.

2. Определить сопротивление растекания заземлителя.

Ток растекания заземлителя

$$I = \sum_{i=1}^n J \frac{\ell}{n}$$

Сопротивление растекания заземлителя определяется как

$$R_3 = \phi_3 / I,$$

следовательно

$$R_3 = \left(4\pi\gamma \frac{\ell}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{J_i}{T} \right) \right)^{-1}$$

3. Рассчитать разность потенциалов между заданными точками на поверхности земли. Помещая точку наблюдения Н на поверхность земли ($z_H = 0, r$), запишем распределение потенциала по поверхности земли (в силу симметрии рисунка 2):

$$\phi(r) = \frac{2}{4\pi\gamma} \sum_{i=1}^n \int_h^{h+\ell} \left(\frac{i}{\sqrt{r^2 + z_H^2}} \right) dz$$

После интегрирования

$$\phi(r) = \frac{2}{4\pi\gamma} \sum_{i=1}^n \frac{J_i}{T} \cdot \ln \frac{\left(\left(i + \frac{n}{\ell} h \right) + \sqrt{\left(i + \frac{n}{\ell} h \right)^2 + \left(\frac{n}{\ell} r \right)^2} \right)}{\left(\left(i - 1 + \frac{n}{\ell} h \right) + \sqrt{\left(i - 1 + \frac{n}{\ell} h \right)^2 + \left(\frac{n}{\ell} r \right)^2} \right)} \quad (18)$$

Разность потенциалов между точками

$$U_{ab} = \phi(r_a) - \phi(r_b)$$

Таблица 1

Исходные данные для расчета заземлителя

Номер варианта	Номер рисунка	2го, см	ℓ , см	I, А	Опреде- лить
1	1	10	250	50	$U_{ab}, U_{ca}, \varphi_d$
2	2	10	250	50	$U_{bc}, U_{cd}, \varphi_a$
3	1	10	500	100	$U_{od}, U_{oa}, \varphi_c$
4	1	12	500	60	$U_{oc}, U_{bd}, \varphi_a$
5	2	12	300	60	$U_{oa}, U_{ob}, \varphi_b$
6	2	12	300	80	$U_{ad}, U_{dc}, \varphi_b$
7	1	14	400	100	$U_{ac}, U_{bd}, \varphi_o$
8	2	14	400	100	$U_{bd}, U_{oa}, \varphi_c$
9	1	20	500	100	$U_{ab}, U_{dc}, \varphi_c$
10	2	20	500	100	$U_{cd}, U_{oa}, \varphi_c$
11	1	22	450	110	$U_{oc}, U_{ob}, \varphi_b$
12	2	22	450	110	$U_{od}, U_{bo}, \varphi_d$
13	1	24	600	120	$U_{bd}, U_{ba}, \varphi_o$
14	2	24	600	140	$U_{oa}, U_{ca}, \varphi_b$
15	1	26	700	120	$U_{oc}, U_{bd}, \varphi_a$

Вопросы для самопроверки:

1. Обоснуйте возможность моделирования электростатического поля полем постоянного тока в проводящей среде.
2. Сформулируйте граничные условия для векторов E и $\vec{\delta}$.
3. Сформулируйте и запишите уравнения непрерывности электрического

тока.

4. Сформулировать и записать закон Ома в дифференциальной форме.
5. Провести аналогию между полями постоянного тока и электростатическим.
6. Записать и объяснить обобщенный закон Ома в дифференциальной форме.
7. Записать и пояснить уравнение Лапласа для поля потенциалов в проводящей среде.
8. Какова связь между полями потенциала и напряженности в проводящей среде?
9. Дать определение электрического напряжения, потенциала, разности потенциалов.
10. Дать определение плотности электрического тока и электрического тока как физического явления.

Рекомендуемая литература:

1. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Изд. 6-е перераб. И доп. Учебник для студентов энергетических и электротехнических вузов. М.: Высшая школа, 1973, 752 с.
2. Нейман Л. Р., Калантаров П. Л. Теоретические основы электротехники. М.: Энергоатомиздат, 1959., 238 с.
3. Зевеке Г. В., Ионкин Н. А. Основы теории цепей. М.: Энергоатомиздат, 1989, 528 с.
4. Нейман Л. Р., Демирчан К. С. Теоретические основы электротехники. М.: Энергоатомиздат., 1981, 520 с.

Пример расчета заземлителя с использованием математической оболочки "MachCAD"

Исходные данные задачи:

$$\gamma := 5 \cdot 10^{-4} \left(\frac{1}{\text{ом} \cdot \text{м}} \right) \quad I := 200(\text{A}) \quad l := 5 (\text{м})$$

$$r_0 := 0.01(\text{м}) \quad h := \frac{1}{12} (\text{м})$$

число разбиений

$$n := 5 \quad i := 1..n \quad j := 1..n \quad \text{ORIGIN} := 1$$

вычисляем матрицу коэффициентов
согласно (16)

$$\alpha_{1,i,j} := \ln \left[\frac{2 \cdot j - 2 \cdot i + 1 + \sqrt{(2 \cdot j - 2 \cdot i + 1)^2 + \left(2 \cdot r_0 \cdot \frac{n}{l} \right)^2}}{2 \cdot j - 2 \cdot i - 1 + \sqrt{(2 \cdot j - 2 \cdot i - 1)^2 + \left(2 \cdot r_0 \cdot \frac{n}{l} \right)^2}} \right]$$

$$\alpha_{2,i,j} := \ln \left[\frac{2 \cdot j + 2 \cdot i - 1 + 4 \cdot h \cdot \frac{n}{l} + \sqrt{\left(2 \cdot j + 2 \cdot i - 1 + 4 \cdot h \cdot \frac{n}{l} \right)^2 + \left(2 \cdot r_0 \cdot \frac{n}{l} \right)^2}}{2 \cdot j + 2 \cdot i - 3 + 4 \cdot h \cdot \frac{n}{l} + \sqrt{\left(2 \cdot j + 2 \cdot i - 3 + 4 \cdot h \cdot \frac{n}{l} \right)^2 + \left(2 \cdot r_0 \cdot \frac{n}{l} \right)^2}} \right]$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1.099 & 0.511 & 0.336 & 0.251 \\ 9.211 & 1.099 & 0.511 & 0.336 \\ 0.511 & 1.099 & 9.211 & 1.099 \\ 0.336 & 0.511 & 1.099 & 9.211 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0.357 & 0.262 & 0.208 & 0.172 \\ 0.208 & 0.172 & 0.147 & 0.128 \\ 0.262 & 0.172 & 0.147 & 0.128 \\ 0.208 & 0.172 & 0.147 & 0.128 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{i,j} := \alpha_{1,i,j} + \alpha_{2,i,j} \quad \alpha = \begin{pmatrix} 9.77 & 1.455 & 0.773 & 0.544 & 0.423 \\ 1.455 & 9.473 & 1.306 & 0.683 & 0.483 \\ 0.773 & 1.306 & 9.382 & 1.245 & 0.639 \\ 0.544 & 0.683 & 1.245 & 9.338 & 1.212 \\ 0.423 & 0.483 & 0.639 & 1.212 & 9.312 \end{pmatrix}$$

задаем единичную матрицу

$$M_j := 1 \quad M = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

обратная матрица

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 0.105 & -0.015 & -5.88 \times 10^{-3} & -3.861 \times 10^{-3} & -3.108 \times 10^{-3} \\ -0.015 & 0.11 & -0.013 & -4.972 \times 10^{-3} & -3.485 \times 10^{-3} \\ 5.881 \times 10^{-3} & -0.013 & 0.111 & -0.013 & -4.986 \times 10^{-3} \\ -3.861 \times 10^{-3} & -4.972 \times 10^{-3} & -0.013 & 0.111 & -0.013 \\ -3.108 \times 10^{-3} & -3.485 \times 10^{-3} & -4.986 \times 10^{-3} & -0.013 & 0.11 \end{pmatrix}$$

Решаем уравнение (15) в
матричной форме, находим
приведенную плотность тока

$$\sigma := \alpha^{-1} \cdot M$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0.078 \\ 0.074 \\ 0.074 \\ 0.076 \\ 0.085 \end{pmatrix}$$

потенциал заземлителя определяем согласно (17)

$$\varphi := \frac{1}{n} \quad \varphi = 8.235 \times 10^4 \text{ (В)}$$

$$\left(4 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot n \right) \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_i$$

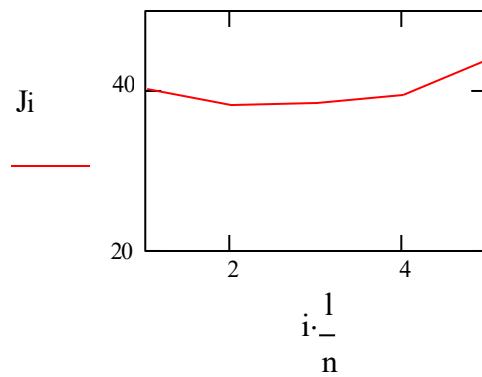
сопротивление растекания заземлителя R

$$R := \frac{\varphi}{I} \quad R = 411.735 \text{ Ом}$$

Определяем линейную плотность тока, стекающего с заземлителя

$$J_i := \sigma_i \cdot (4 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \varphi)$$

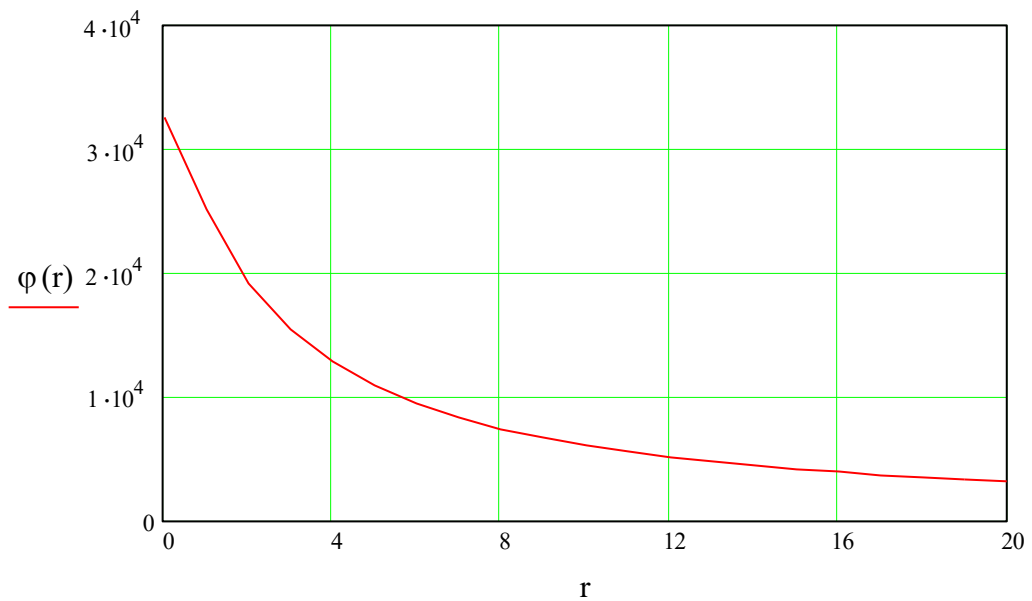
$$J = \begin{pmatrix} 40.151 \\ 38.082 \\ 38.303 \\ 39.466 \\ 43.998 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} A \\ \overline{M} \end{matrix}$$



расчет потенциала на поверхности земли
согласно выражению (18), r-расстояние
от оси заземлителя в метрах

$$r := 0..20$$

$$\varphi(r) := \left(\frac{2}{4 \cdot \pi \cdot \gamma} \right) \cdot \sum_{i=1}^n J_i \cdot \ln \left[\frac{i + h \cdot \frac{n}{l} + \sqrt{\left(i + h \cdot \frac{n}{l}\right)^2 + \left(r \cdot \frac{n}{l}\right)^2}}{i - 1 + h \cdot \frac{n}{l} + \sqrt{\left(i - 1 + h \cdot \frac{n}{l}\right)^2 + \left(r \cdot \frac{n}{l}\right)^2}} \right]$$



провести расчет с помощью численного интегрирования

$$a1_{i,j} := \int_{(i-1) \cdot \frac{1}{n}}^{i \cdot \frac{1}{n} + h} \left[\frac{1}{\sqrt{r_0^2 + \left[h + (2 \cdot j - 1) \cdot \frac{1}{2 \cdot n} - z1 \right]^2}} \right] dz1$$

$$a1 =$$

	1	2	3	4	5
1	9.211	1.099	0.511	0.336	0.251
2	1.099	9.211	1.099	0.511	0.336
3	0.511	1.099	9.211	1.099	0.511
4	0.336	0.511	1.099	9.211	1.099
5	0.251	0.336	0.511	1.099	9.211

$$a2_{i,j} := \int_{(i-1) \cdot \frac{1}{n}}^{i \cdot \frac{1}{n} + h} \left[\frac{1}{\sqrt{r_0^2 + \left[h + (2 \cdot j - 1) \cdot \frac{1}{2 \cdot n} + z1 \right]^2}} \right] dz1$$

$$a2 =$$

	1	2	3	4	5
1	0.56	0.357	0.262	0.208	0.172
2	0.357	0.262	0.208	0.172	0.147
3	0.262	0.208	0.172	0.147	0.128
4	0.208	0.172	0.147	0.128	0.113
5	0.172	0.147	0.128	0.113	0.102

$$\varphi(r) := \left(\frac{2}{4 \cdot \pi \cdot \gamma} \right) \cdot \left[\sum_{i=1}^n \left[\int_{(i-1) \cdot \frac{1}{n}}^{i \cdot \frac{1}{n} + h} \left[\frac{J_i}{\sqrt{(r^2 + z1^2)}} \right] dz1 \right] \right]$$

Составители: А. Ф. Шаталов, В. М. Кожевников, Ю. А.

Ларионов, И. Ю. Чуенкова, О. В.

Малсугенов

Редактор Е. М. Форсюк

Подписано в печать 14.08.2000 г.

Формат 60х84 1/16 Усл.печ.л. 0,8

Уч.изд.л. 0,9 Бумага газетная Тираж

100 Заказ № 312

Отпечатано в типографии Северо-Кавказского государственного
технический университет

355029, г. Ставрополь, пр. Кулакова 2

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по организации практической работы обучающихся
по дисциплине «Теоретические основы электротехники» для
студентов направления подготовки /специальности
13.03.02 Электроэнергетика и электротехника
Направленность (профиль) Цифровые технологии в
электроэнергетике

Ставрополь 2026

Практическое занятие №1

Основные уравнения магнитного поля

Цель работы: изучить основные уравнения магнитного поля

Если в рассматриваемой области плотность тока проводимости равна нулю ($\delta=0$), а сама область не охватывает постоянного тока, уравнения Максвелла, содержащие векторы магнитного поля, не зависят от векторов электрического поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}.$$

Приведенные уравнения описывают магнитостатическое поле.

В условиях, когда $\delta \neq 0$, векторы электрического и магнитного полей, хотя и связаны между собой соотношением $\delta = \gamma \mathbf{E}$, по-прежнему относительно независимы:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \delta; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}. \quad (1)$$

Уравнения (4.1) – уравнения стационарного магнитного поля. Наряду с дифференциальными уравнениями при анализе магнитного поля используются их интегральные аналоги:

$$\oint_S \mathbf{H} d\mathbf{l} = I = \oint_S \delta dS \quad \text{или} \quad \oint_S \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0; \quad \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (2)$$

Как следует из приведенных уравнений, магнитостатическое поле является потенциальным, а стационарное магнитное поле вихревым.

По аналогии с электростатикой для областей магнитного поля, где $\delta=0$ ($\operatorname{rot} \mathbf{H}=0$), можно ввести скалярную функцию – магнитостатический потенциал φ^M , связанный с вектором $\mathbf{H}$ соотношением:

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi^M. \quad (3)$$

В однородной среде магнитостатический потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi^M = 0. \quad (4)$$

Разность магнитостатических потенциалов между точками 1 и 2, равная $\varphi_1^M - \varphi_2^M = \int_1^2 \mathbf{H} d\mathbf{l}$, в области с током ($\delta \neq 0$) становится неоднозначной и зависит от контура, по которому производится интегрирование. При каждом обходе контура вокруг тока I значение интеграла увеличивается на величину тока I .

Для однозначного определения стационарного магнитного поля используется векторный (магнитный) потенциал $\mathbf{A}$, связанный с векторами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ соотношениями):

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad \text{или} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Уравнение для векторного потенциала стационарного магнитного поля вытекает из уравнения Даламбера (1.47), если положить $\partial/\partial t = 0$:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_a \delta. \quad (5, a)$$

В области, где нет тока, уравнение Пуассона для векторного потенциала (4.5, а) переходит в уравнение Лапласа:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0. \quad (5, б)$$

Если токи сосредоточены в ограниченной области V , фундаментальное решение уравнения (4.5, а) записывается в виде

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\delta dV}{R}, \quad (6)$$

где R – расстояние от элемента объема dV с током до точки, в которой определяется потенциал.

В случае линейного тока I (тока в проводнике, поперечное сечение которого много меньше расстояния R) формулу (4.6) следует заменить выражением

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_a I}{4\pi} \int_l \frac{d\mathbf{l}}{R}, \quad (7)$$

где l – контур с током.

Векторный потенциал упрощает вычисление магнитного потока:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (8)$$

Переходя от векторного потенциала к напряженности магнитного поля согласно (1.42) на основании (4.7), для однородной изотропной среды получаем

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \int_l \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{1}_R]}{R^2},$$

где $\mathbf{1}_R$ – единичный вектор (орт вектора, проведенного от элемента тока в рассматриваемую точку). Это – закон Био-Савара в интегральной форме. Его дифференциальная форма известна из курса физики:

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi R^2} [d\mathbf{l} \times \mathbf{1}_R]. \quad (9)$$

Граничные условия

Выбор однозначного решения уравнений Лапласа – Пуассона, допускающих множество решений, как и в случае электростатики, производится на основе граничных условий, сформулированных в разделе 1.5:

$$B_{1n} - B_{2n} = 0; \quad H_{1\tau} - H_{2\tau} = 0. \quad (10)$$

Условия (10) справедливы, если на границе раздела сред нет поверхностных токов. При этом векторный и скалярный магнитные потенциалы будут непрерывны:

$$A_{1n} = A_{2n}; \quad A_{1\tau} = A_{2\tau}; \quad \Phi_1^M = \Phi_2^M; \quad (11)$$

Полезным дополнением к (10) и (11) служит уравнение (9):

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}}.$$

Индексы n и τ в уравнениях означают соответственно нормальную или тангенциальную составляющие.

Энергия стационарного магнитного поля

Выражение для объемной плотности энергии магнитного поля, полученное в разделе 1.6, остается справедливым в случае стационарного поля. Интегрируя по объему, получаем

$$W_M = \frac{1}{2} \int_V \mu_a H^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \mathbf{B} dV. \quad (13)$$

Выражение (4.13) можно преобразовать [1], выразив энергию через токи, создающие магнитное поле:

$$W_M = \frac{1}{2} \int_{V_0} \mathbf{A} \delta dV = \frac{I}{2} \int_l \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{I\Phi}{2}. \quad (14)$$

где V_0 – объем, в котором имеются токи;

l – контур с током I .

Индуктивность

Индуктивность – это коэффициент пропорциональности между потоком Φ (потокосцеплением), пронизывающим уединенный контур, и током контура I :

$$L = \Phi / I \quad \text{или} \quad L = \Psi / I = w\Phi / I. \quad (15)$$

Выражая Φ в (4.14) через индуктивность, получаем еще одну формулу энергии

$$W_M = \frac{LI^2}{2}. \quad (16)$$

Единица измерения индуктивности – генри (Гн).

Если имеется несколько контуров, то каждый из них пронизывается помимо собственного потока Φ_{kk} , потоками соседних контуров Φ_{nk} , названных взаимными. Коэффициент пропорциональности между взаимным потоком и током, создавшим этот поток, – взаимная индуктивность контуров k и n :

$$M_{nk} = \Phi_{nk} / I_k. \quad (17)$$

При $k=n$ коэффициент пропорциональности между потоком и током называют собственной индуктивностью k - контура ($M_{kk} = L_k$). Индуктивность измеряется в генри, Гн. Она зависит от формы, взаимного расположения контуров и магнитной проницаемости среды и самих контуров.

Коэффициенты M_{nk} при $k \neq n$ определяются по (4.17), где взаимные потоки можно найти согласно (4.8) и (4.7) по формуле

$$\Phi_{nk} = \oint_{l_n} \mathbf{A}_k d\mathbf{l}_n = \frac{\mu_a}{4\pi} I_k \oint_{l_n} \oint_{l_k} \frac{d\mathbf{l}_n d\mathbf{l}_k}{R}. \quad (18)$$

Подставляя (4.18) в (4.17), получаем

$$M_{nk} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_{l_n} \oint_{l_k} \frac{d\mathbf{l}_n d\mathbf{l}_k}{R}, \quad (19)$$

где R – расстояние между элементами контуров.

При перестановке индексов взаимная индуктивность не изменяется.

Формула (4.19) для определения собственной индуктивности контура ($k=n$) не пригодна. Чтобы найти ее, собственный поток следует представить в виде двух составляющих: внешнего $\Phi_{\text{внш}}$, пронизывающего контур без учета проводника с током и внутреннего $\Phi_{\text{внт}}$, пронизывающего контур в пределах самого проводника. Иными словами, собственную индуктивность представляют в виде суммы внутренней и внешней индуктивностей. Их расчет будет рассмотрен на конкретных примерах.

Вводные задачи анализа магнитного поля

Примеры данного раздела иллюстрируют взаимосвязи векторов магнитного поля, определяют его характер и его свойства.

Пример 1. Составляющие вектора напряженности магнитного поля изменяются по закону: $H_x = 0$, $H_y = a(y^2 + z^2)$, $H_z = a(y + z)$, где a - постоянное число. Найти закон изменения плотности тока.

Решение. Согласно (1) $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$. В декартовых координатах

$$\text{rot } \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix},$$

поэтому

$$\delta = \mathbf{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right).$$

Подставляя в полученное равенство заданные составляющие напряженности и выполняя дифференцирование, найдем:

$$\delta = \mathbf{i}a(1 - 2z).$$

Пример 2. Определить, при каком условии линии вектора магнитной напряженности $\mathbf{H}$ непрерывны.

Решение. Согласно (1) $\text{div} \mathbf{B} = 0$, т.е. линии вектора магнитной индукции непрерывны вне зависимости от свойств среды. Для вектора напряженности поля будем иметь: $\text{div}(\mu_a \mathbf{H}) = 0$. Учитывая тождество

$$\text{div}(\mu_a \mathbf{H}) = [\mathbf{H} \times \text{grad} \mu_a] + \mu_a \text{div} \mathbf{H},$$

делаем вывод, что линии вектора магнитной напряженности непрерывны $\text{div} \mathbf{H} = 0$ только при $\mu_a = \text{const}$.

Ответ: При $\mu_a = \text{const}$.

Пример 3. Скалярный потенциал магнитного поля изменяется по закону: $\varphi^M = 2x^2 - 4y^2$ (φ^M - в амперах), где x и y координаты текущей точки в метрах.

Определить модуль напряженности поля в точке с координатами $x=2$ м, $y=0,5$ м, $z=0$.

Решение. На основании (3) $\mathbf{H} = -\text{grad} \varphi^M$. В декартовых координатах $\text{grad} \varphi^M$ записывается:

$$\text{grad} \varphi^M = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi^M}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi^M}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi^M}{\partial z}.$$

После дифференцирование заданного потенциала φ^M , находим

$$\mathbf{H} = -\mathbf{i}4x + \mathbf{j}8y.$$

Подставляя заданные координаты x и y , имеем

$$\mathbf{H} = -\mathbf{i}8 + \mathbf{j}4 \text{ А/м}.$$

Модуль напряженности поля определяется как $H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2}$.

Численно $H = \sqrt{8^2 + 4^2} = 8,94 \text{ А/м}.$

Пример 4. Вектор магнитной индукции изменяется по закону: $\mathbf{B} = \mathbf{i}C \sin y$, где $C = \text{const}$.

Определить характер поля вектора $\mathbf{B}$ и величину векторного потенциала $\mathbf{A}$.

Решение. Определить характер поля – это значит определить наличие или отсутствие его истоков и вихрей. Математически задача сводится к отысканию функций $\operatorname{div} \mathbf{B}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{B}$. Найдем их, записав предварительно данные функции в декартовых координатах:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}.$$

Подставляя $\mathbf{B} = \mathbf{i}B_x$, где $B_x = C \sin y$ в вышестоящие равенства, получаем $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$; $\operatorname{rot} \mathbf{B} = -\mathbf{k}C \cos y$, откуда следует, что поле данного вектора $\mathbf{B}$ вихревое.

$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ или в декартовой системе координат:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Поскольку $\mathbf{B}$ имеет только $\mathbf{i}$ – составляющую, зависящую от координаты y , то принимаем $B_x = C \sin y = \frac{\partial A_z}{\partial y}$.

На основании (5) вектор $\mathbf{A}$ совпадает по направлению с вектором δ . В данном примере вектор $\mathbf{A}$ имеет составляющую, совпадающую с направлением оси z , поэтому

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}A_z; A_x = A_y = 0; \delta = \mathbf{k}\delta_z.$$

Интегрируя B_x , находим A_z составляющую векторного потенциала

$$A_z = \int C \sin y dy.$$

В векторной форме с точностью до постоянной записываем результат:

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}C \cos y.$$

Ответ. Поле вихревое, $\mathbf{A} = \mathbf{k}C \cos y$.

Пример 4.5. Векторный потенциал магнитного поля $\mathbf{A}$ изменяется по закону: $A_x = 0$, $A_y = -y + 4z^2 y$, $A_z = y^2 + z^2$.

Определить закон изменения вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$.

Решение. Поскольку $A_x = 0$,

$$\mathbf{B} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix} + \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_y}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Дифференцируя составляющие вектора $\mathbf{A}$, получаем:

$$\mathbf{B} = \mathbf{i}(2y + 4 \cdot 2zy) = \mathbf{i}2y(1 + 4z)$$

Практическое занятие №2 «Определение граничных условий»

Цель работы: Изучить основные законы изменения векторов магнитного поля при переходе через граничные условия

Приведенные в данном практическом занятии примеры раскрывают основные законы изменения векторов магнитного поля при переходе поля через границу раздела сред. При этом полагается, что на границе раздела сред нет поверхностных токов.

Пример 1. Нормальная составляющая вектора индукции в воздухе (рис. 1) составляет величину $B_{1n} = 0,04$ Тл, а тангенциальная составляющая по другую сторону границы раздела соответственно $B_{2\tau} = 0,3$ Тл.

Найти величину вектора индукции в воздухе ($\mu_1 = 1$), если относительная магнитная проницаемость второй среды $\mu_2 = 10$.

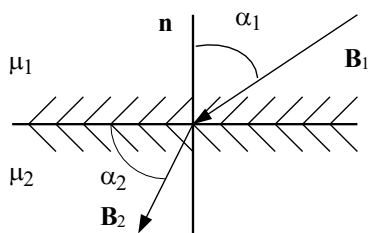


Рис. 1

Решение. Согласно, $H_{1\tau} = H_{2\tau}$
или, соответственно, $B_{1\tau} = \frac{\mu_1 B_{2\tau}}{\mu_2}$.

Численно это составляет величину $B_{1\tau} = 0,03$ Тл.

Модуль вектора индукции в воздухе определяется как $B_1 = \sqrt{B_{1\tau}^2 + B_{1n}^2}$, что после подстановки численных значений даст величину $B_1 = 0,05$ Тл.

Пример 2 Найти угол α_2 (рис 2), под которым линии магнитной напряженности поля $\mathbf{H}$ выходят из ферромагнитной среды с абсолютной магнитной проницаемостью

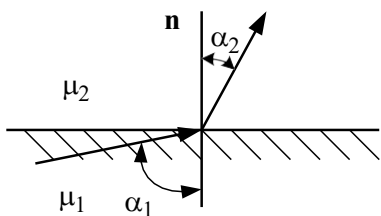


Рис. 2

$\mu_{1a} = 10^4 \mu_0$ в среду с магнитной проницаемостью $\mu_{2a} = \mu_0$, если в среде с μ_{1a} угол $\alpha_1 = 89^\circ$.

Решение. Воспользуемся соотношением : $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$.

Отсюда следует, что $\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{\mu_2}{\mu_1}$ и $\alpha_2 = \arctg(\operatorname{tg} \alpha_1 \frac{\mu_2}{\mu_1})$.

Подставляя числовые данные, получаем:

$$\alpha_2 = \arctg(\operatorname{tg} 89^\circ \cdot 10^{-4}) = 20'.$$

Ответ. $\alpha_2 = 20'$.

Пример 3. Плита, состоящая из двух разнородных частей с магнитными проницаемостями $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 10$, соединенных под углом 30° , помещена в однородное магнитное поле $B_0 = 0,1$ Тл перпендикулярно линиям поля (рис.3).

Определить напряженность магнитного поля на границе раздела сред со стороны среды μ_2 .

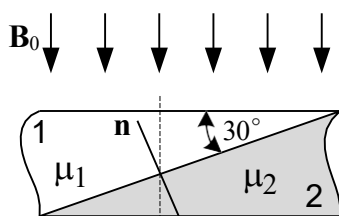


Рис. 3

Решение. На рис. 3 видно, что линии поля в среде с μ_1 ориентированы по отношению к границе раздела сред под углом 60° , а по отношению к нормали $\mathbf{n}$ – под углом 30° . На основании записываем:

$$H_{2\tau} = \frac{B_0}{\mu_{a1}} \sin 30^\circ \quad \text{и} \quad H_{2n} = \frac{B_0}{\mu_{a2}} \cos 30^\circ.$$

Подставляя числовые данные, получаем:

$$H_{2\tau} = 398 \text{ А/см}, \quad H_{2n} = 68,9 \text{ А/см}.$$

Модуль напряженности поля на границе раздела сред со стороны μ_2 определяется как $H_2 = \sqrt{H_{2n}^2 + H_{2\tau}^2}$.

Подставляя числовые данные, найдем $H_2 = 403,9 \text{ А/см}$.

Пример 4. Внутри стального шара с относительной магнитной проницаемостью $\mu_2 = 10$, внесенного во внешнее магнитное поле в воздухе с напряженностью H_1 (рис. 4), установилось однородное магнитное поле с напряженностью $H_2 = 100 \text{ А/м}$.

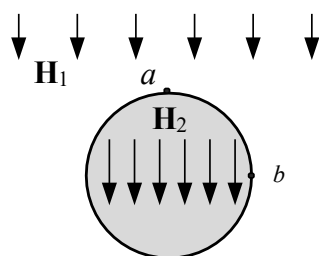


Рис. 4

ное поле с напряженностью $H_2 = 100 \text{ А/м}$.

Найти напряженность магнитного поля в воздухе в точках a и b .

Решение. Из соображений симметрии можно установить, что напряженность поля, как внутри стального шара, так и снаружи (в воздухе) в точке a имеет только нормальную к поверхности шара составляющую $H_{1a} = H_{1na}$.

Согласно $H_{1a} = \mu_2 H_2 / \mu_1$, откуда находим $H_{1A} = 1000 \text{ А/м}$.
В точке b , напротив, отсутствует нормальная к поверхности шара составляющая напряженности поля. Поэтому в этой точке будем иметь

$$H_{1b} = H_{2\tau b} = H_2.$$

Таким образом, $H_{1A} = 1000 \text{ А/м}$; $H_{1B} = 100 \text{ А/м}$.

Практическое занятие № 3 «Использование закона полного тока, симметрии и принципа наложения»

В силу симметрии поля в нижеприведенных примерах для решения достаточно применить закон полного тока в интегральной форме (4.2). В ряде примеров решение достигается суммированием частных решений на основе принципа суперпозиции.

Пример 1. По бесконечно длинному цилиндрическому проводнику, радиусом a , течет ток I , равномерно распределенный по сечению.

Определить напряженность магнитного поля внутри и вне провода.

Решение. Ось провода совместим с осью z цилиндрической системы координат. В силу симметрии системы поле не зависит от угловой координаты; напряженность поля имеет только одну составляющую $\mathbf{H} = \mathbf{1}_\alpha H(r)$ и можно использовать закон полного тока (2).

Выбирая в качестве контура интегрирования окружность радиуса $r \geq a$, лежащую в плоскости, перпендикулярной оси провода, находим напряженность поля для области вне провода

$$\oint_l \mathbf{H}_{\text{вн}} d\mathbf{l} = \oint_l H_{\text{вн}} dl \cos 0^\circ = H_{\text{вн}} \oint_l dl = 2\pi r H_{\text{вн}} = I.$$

Отсюда следует

$$H_{\text{вн}} = \frac{I}{2\pi r}.$$

Если контур интегрирования выбрать внутри провода ($r \leq a$), то ток, попавший в контур, будет равен $I(r/a)^2$. Интегрирование уравнения приводит к равенству:

$$H_{\text{вн}} = \frac{Ir}{2\pi a^2}.$$

На поверхности провода ($r=a$) обе формулы дают одинаковый результат – наибольшее значение напряженности магнитного поля.

Замечание. Поле протяженного цилиндрического провода с током I в области $r \geq a$ совпадает с полем уединенного бесконечно тонкого провода (нити) с током I .

Пример 2. По длинному трубчатому цилиндрическому проводу с известными внутренним a и внешним b радиусами (рис. 1) протекает ток I , равномерно распределенный по сечению провода.

Определить напряженность магнитного поля в указанных точках:

1- в центре трубы; 2- внутри самой трубы; 3- вне трубы.

Решение. Ось z цилиндрической системы координат совместим с осью трубы. В силу симметрии вектор $\mathbf{H}$, как в примере, имеет только одну составляющую $\mathbf{H} = \mathbf{1}_\alpha H(r)$, являющуюся функцией координаты r .

В каждой равноудаленной от оси точке $r = \text{const}$ напряженность поля постоянная и направлена перпендикулярно радиусу r .

Внутри трубы (в ее полости) тока нет, поэтому интегрирование (4.2) по длине окружности радиуса $0 \leq r \leq a$ даст однозначный результат: магнитного поля внутри полости нет.

В области $a \leq r \leq b$ после интегрирования уравнения получаем

$$\oint_l \mathbf{H} d\mathbf{l} = \oint_l H dl \cos 0^\circ = 2\pi r H = I',$$

где I' - ток, попавший в контур интегрирования, равный

$$I' = \frac{I\pi(r^2 - a^2)}{\pi(b^2 - a^2)}.$$

Таким образом, для точки 2, расположенной в толще трубы, получаем

$$H_2 = \frac{I(r^2 - a^2)}{2\pi r(b^2 - a^2)}.$$

При расчете напряженности поля в точке 3, расположенной вне трубы с током ($r \geq b$), контур интегрирования охватывает весь ток I , поэтому

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r}.$$

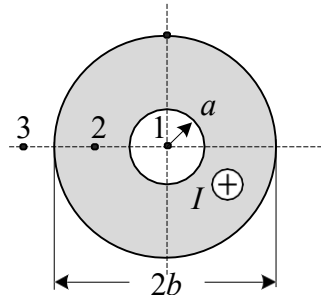


Рис. 1

Практическое занятие №4 Уравнения Лапласа и Пуассона. Закон Био-Савара. Зеркальные изображения и другие приемы

Пример 1. В медном ($\mu=1$) протяженном цилиндрическом проводнике радиуса $a=1\text{см}$ протекает ток $I=\pi$ А.

Определить векторный потенциал $\mathbf{A}$ на оси провода, полагая, что на его поверхности он равен нулю.

Решение. Так как провод уединенный и достаточно длинный, можно считать, что векторный потенциал $\mathbf{A}$, как и вектор плотности тока δ , направлен параллельно оси провода. Совместив ось провода с осью z цилиндрической системы координат, будем иметь только одну составляющую векторного потенциала $\mathbf{A}=\mathbf{k}A_z$, совпадающую с направлением оси z .

Вектор напряженности поля при таком выборе координат будет иметь тоже только одну угловую составляющую $\mathbf{H}=\mathbf{1}_\alpha H_\alpha$, как и A_z , зависящую от координаты r .

$\text{rot } \mathbf{A} = \mu_a \mathbf{H}$. В цилиндрических координатах ротор записывается

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{1}_r & r\mathbf{1}_\alpha & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\alpha & A_z \end{vmatrix}.$$

Раскрывая ротор и учитывая, что A_r и A_α равны нулю, получаем

$$\frac{dA_z}{dr} = -\mu_a H_\alpha \quad \text{или} \quad A_z = -\int \mu_a H_\alpha dr.$$

Напряженность поля внутри цилиндра, найденная в, равна $H_{\text{вн}} = H_\alpha = \frac{Ir}{2\pi a^2}$. Подставляя в подынтегральное выражение и интегрируя, находим

$$A_z = -\frac{\mu_a I^2}{4\pi a^2} + C,$$

где C - постоянная интегрирования.

Так как на поверхности проводника ($r=R$) $\mathbf{A}=0$, то $C = \frac{\mu_a I^2}{4\pi}$.

Векторный потенциал на оси цилиндра ($r=0$): $A_0 = \frac{\mu_a I}{4\pi}$.

Численно $A_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \pi}{4\pi} = \pi \cdot 10^{-7}$ Вб/м.

Замечания. 1. Аналогичным образом векторный потенциал находится для внешней области (вне сечения провода). В этом случае интегрирование приведет к выражению:

$$A_z = -\frac{\mu_a I}{2\pi} \ln r + C.$$

2. Векторный потенциал можно определить из уравнения Пуассона (4.5), которое в цилиндрической системе координат записывается

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} = -\mu_a \delta.$$

С учетом симметрии магнитного поля для единственной составляющей $\mathbf{A} = \mathbf{k} A_z$ будем иметь:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = -\mu_a \delta_z.$$

Интегрирование по r приведет к следующим соотношениям:

для области $0 \leq r \leq a$ $A_{\text{вн}} = -\mu_a \delta_z r^2 / 4 + C_1 \ln r + C_2;$

для области $r \leq R$ $A_{\text{вн}} = C_3 \ln r + C_4,$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий.

Из условия $A \neq \infty$ при $r = 0$ следует $C_1 = 0$; из условия $A = 0$ при $r = a$ находим $C_2 = \mu_a I / 4\pi$ и $C_4 = -C_3 \ln a$.

Из условия равенства касательных составляющих вектора магнитной напряженности следует

$$C_3 = -\frac{\mu_a I}{2\pi} \ln r.$$

После подстановки найденных постоянных получаем:

$$A_{\text{вн}} = -\frac{\mu_a I}{4\pi} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right); \quad A_{\text{вн}} = \frac{\mu_a I}{2\pi} \ln \frac{a}{r}.$$

Практическое занятие №5 Энергия и силы в магнитном поле. Индуктивность

Цель работы: Изучить разновидности источников энергии в магнитном поле

Индуктивность – это коэффициент пропорциональности между потоком Φ (потокосцеплением), пронизывающим уединенный контур, и током контура I :

$$L = \Phi / I \text{ или } L = \Psi / I = w\Phi / I. \quad (1)$$

Выражая Φ в через индуктивность, получаем еще одну формулу энергии

$$W_M = \frac{LI^2}{2}. \quad (2)$$

Единица измерения индуктивности - генри (Гн).

Если имеется несколько контуров, то каждый из них пронизывается помимо собственного потока Φ_{kk} , потоками соседних контуров Φ_{nk} , названных взаимными. Коэффициент пропорциональности между взаимным потоком и током, создавшим этот поток, - взаимная индуктивность контуров k и n :

$$M_{nk} = \Phi_{nk} / I_k. \quad (3)$$

При $k=n$ коэффициент пропорциональности между потоком и током называют собственной индуктивностью k - контура ($M_{kk} = L_k$). Индуктивность измеряется в генри, Гн. Она зависит от формы, взаимного расположения контуров и магнитной проницаемости среды и самих контуров.

Коэффициенты M_{nk} при $k \neq n$ определяются по (4.17), где взаимные потоки можно найти по формуле

$$\Phi_{nk} = \oint_{l_n} \mathbf{A}_k d\mathbf{l}_n = \frac{\mu_a}{4\pi} I_k \oint_{l_n} \oint_{l_k} \frac{d\mathbf{l}_n d\mathbf{l}_k}{R}. \quad (4)$$

Подставляя (4.18) в (4.17), получаем

$$M_{nk} = \frac{\mu_a}{4\pi} \oint_{l_n} \oint_{l_k} \frac{d\mathbf{l}_n d\mathbf{l}_k}{R}, \quad (5)$$

где R – расстояние между элементами контуров.

При перестановке индексов взаимная индуктивность не изменяется. Формула для определения собственной индуктивности контура ($k=n$) не пригодна. Чтобы найти ее, собственный поток следует представить в виде двух составляющих: внешнего $\Phi_{\text{внш}}$, пронизывающего контур без учета проводника с током и внутреннего $\Phi_{\text{внт}}$, пронизывающего контур в пределах самого проводника. Иными словами, собственную индуктивность представляют в виде суммы внутренней и внешней индуктивностей. Их расчет будет рассмотрен на конкретных примерах.

Пример 1 Определить внутреннюю индуктивность единицы длины

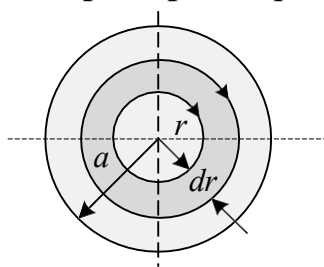


Рис. 1

протяженного стального цилиндра известного радиуса a (рис. 1). Абсолютная магнитная проницаемость цилиндра - μ_a .

Решение. Воспользуемся соотношением (4.15) и определим внутреннее потокоцепление, создаваемое любым током I при его равномерном распределении по сечению проводника. Для этого выделим в сечении проводника элементарную трубку потока шириной dr на

удалении r от его оси.

Поток $d\Phi$, проходящий сквозь сечение такой кольцевой трубки, будет равен

$$d\Phi = B dS = \frac{\mu_a I'}{2\pi r} dS,$$

где I' – ток, приходящийся на часть провода с сечением радиуса r . Его величина пропорциональна соответствующему сечению $I' = I \frac{r^2}{a^2}$.

Сечение трубки потока единичной длины $dS = dr \cdot 1$, следовательно,

$$d\Phi = \mu_a \frac{Ir}{2\pi a^2} dr.$$

Элементарный поток связан лишь с частью общего тока, поэтому элементарное потокоцепление

$$d\Psi = d\Phi \frac{I'}{I} \quad \text{или} \quad d\Psi = \frac{\mu_a I^3}{2\pi a^4} dr$$

Полное внутреннее потокоцепление:

$$\Psi = \int d\Psi = \frac{\mu_a I^3}{2\pi a^4} \int_0^a r dr.$$

После интегрирования получаем

$$\Psi = \frac{\mu_a I^3}{8\pi}, \quad \text{откуда находим} \quad L_{\text{вн}} = \frac{\mu_a}{8\pi}.$$

Таким образом, внутренняя индуктивность на единицу длины цилиндрического проводника при равномерном распределении тока по его сечению не зависит от радиуса проводника.

Пример 2 Определить энергию магнитного поля, сосредоточенную внутри единицы длины цилиндрического проводника радиусом a с током I , равномерно распределенным по его сечению. Магнитная проницаемость проводника μ_a .

Решение. энергия, сосредоточенная внутри проводника

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2} LI^2, \quad \text{где} \quad L = L_{\text{вн}} = \frac{\mu_a}{8\pi}.$$

Таким образом, энергия магнитного поля, сосредоточенная внутри единицы длины цилиндрического проводника $W_{\text{м}} = \frac{\mu_a I^2}{16\pi}$.

В цилиндрических координатах элементарный объем равен

$$dV = r dr d\alpha dl.$$

$$H = \frac{Ir}{2\pi a^2}.$$

Следовательно, энергия, содержащаяся в элементарном объеме dV

$$dW_{\text{м}} = \frac{\mu_a H^2}{2} dV = \frac{\mu_a I^2 r^3}{8\pi^2 a^4} dr d\alpha dl.$$

Интегрируя, получаем прежний результат

$$W_{\text{м}} = \frac{\mu_a I^2}{8\pi^2 a^4} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^l r \, dr d\alpha dl = \frac{\mu_a I^2}{16\pi}.$$