

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Северо-Кавказский федеральный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
по выполнению лабораторных работ по дисциплине  
«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

Направление подготовки  
Направленность (профиль)

21.03.01 Нефтегазовое дело  
Бурение нефтяных и газовых скважин

Квалификация выпускника  
Форма обучения

бакалавр  
очная, очно-заочная

Ставрополь 2026

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ВВЕДЕНИЕ .....                                                                                              | 3  |
| Лабораторная работа №1. «Испытание на растяжение малоуглеродистой стали» .....                              | 4  |
| Лабораторная работа №2 «Испытание материалов на сжатие» .....                                               | 9  |
| Лабораторная работа №3 «Определение упругих постоянных малоуглеродистой стали при растяжении» .....         | 13 |
| Лабораторная работа №4 «Определение модуля сдвига» .....                                                    | 17 |
| Лабораторная работа №5 «Исследование распределения напряжений в поперечном сечении при чистом изгибе» ..... | 21 |
| Лабораторная работа №6 «Определение напряжений при косом изгибе» .....                                      | 25 |
| Лабораторная работа №7 «Определение напряжений при внецентренном сжатии» .....                              | 28 |
| Лабораторная работа №8 «Определение критической силы сжатого стержня» .....                                 | 32 |
| Рекомендуемая литература .....                                                                              | 36 |

## ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов – инженерная наука о методах расчета наиболее распространенных элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость при одновременном удовлетворении требований надежности и экономичности.

Экспериментальное подтверждение основных положений дисциплины «Сопротивление материалов» имеет важное методическое значение в формировании инженерного мышления студента.

В процессе изучения студентами направления 21.03.01 дисциплины «Сопротивление материалов» реализуются компетенция ОПК-1.

Данные методические указания предназначены для подготовки студентов к лабораторным занятиям по дисциплине «Сопротивление материалов».

В каждой лабораторной работе приведена цель и содержания работы, изложены основные теоретические положения, приведена методика и порядок выполнения работы, содержание отчета и контрольные вопросы.

Методические указания предназначены для студентов всех профилей направления 21.03.01 – Нефтегазовое дело.

## Лабораторная работа №1. ИСПЫТАНИЕ НА РАСТЯЖЕНИЕ МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ.

1. *Цель и содержание работы:* изучение поведения малоуглеродистой стали в процессе испытания на растяжение до разрушения, получение диаграммы растяжения и определение механических характеристик материала образца.

### 2. Теоретическое обоснование

Для решения практических задач необходимо знать механические характеристики материалов.

Существует много методов испытаний материалов, но основным является испытание на растяжение. Опыты проводятся на специальных машинах, рабочее усилие в которых создаётся либо при помощи рычажного устройства (рычажные машины), или с помощью гидравлического давления, передаваемого на поршень (гидравлические машины).

При испытаниях на растяжение применяются так называемые нормальные образцы круглого или прямоугольного сечения. Образец (рисунок 1.1), кроме цилиндрической рабочей части, имеет плавные переходы к цилиндрическим утолщенным головкам, предназначенным для закрепления образцов в машине.

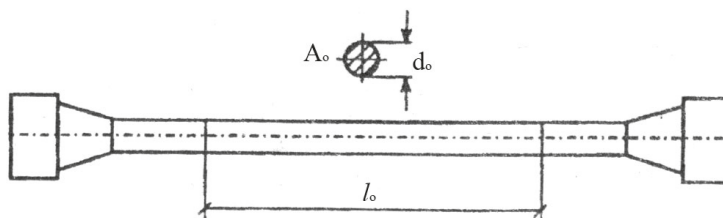


Рисунок 1.1 – Эскиз образца до испытаний

Большинство современных испытательных машин снабжены диаграммным аппаратом, который автоматически в процессе испытания вычерчивает график изменения удлинения образца  $\Delta l$  а, в зависимости от статического увеличения растягивающей силы  $P$ , т.е. диаграмму растяжения  $P = f(\Delta l)$ .

Для исключения влияния поперечных размеров и длины рабочей части образца удобно перестроить машинную диаграмму растяжения, разделив силы  $P$  на первоначальную площадь сечения образца  $A_0$ , а абсолютное удлинение на расчётную длину  $l_0$  т.е.

$$\sigma = \frac{P}{A_0}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (1.1)$$

В результате получим условную диаграмму растяжения  $\sigma = f(\varepsilon)$  (рисунок 1.2).

В начале диаграмма имеет прямолинейный участок  $OA$ , называемый *зоной упругости*. На участке  $OA$  соблюдается прямая пропорциональная зависимость между напряжением и относительным удлинением, то есть выполняется закон Гука.

Наибольшее напряжение, до которого материал следует закону Гука (на диаграмме точка  $A$ ), называется *пределом пропорциональности* и вычисляется по формуле

$$\sigma_{\text{пц}} = \frac{P_{\text{пц}}}{A_0}, \quad (1.2)$$

где  $P_{\text{пц}}$  – нагрузка, отвечающая пределу пропорциональности.  
Для малоуглеродистой стали  $\sigma_{\text{пц}} \approx 2 \cdot 10^8 \text{ Па} = 200 \text{ МПа}$ .

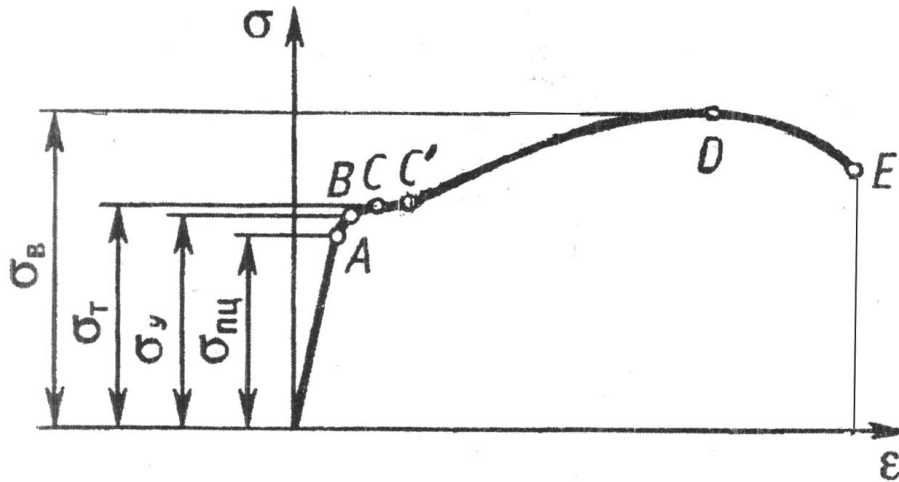


Рисунок 1.2 – Условная диаграмма растяжения малоуглеродистой стали

Выше точки A диаграмма начинает несколько искривляться, и закон Гука нарушается. Однако можно отметить такое небольшое напряжение (точка B на рисунке 1.2), до которого в материале, имеют места только упругие деформации, полностью исчезающие после снятия загрузки.

Это напряжение называется *пределом упругости*

$$\sigma_y = \frac{P_y}{A_0}. \quad (1.3)$$

За точкой B деформации растут быстрее нагрузки, искривление увеличивается, и в некоторой точке C поведение материала резко меняется: деформации возрастают без заметного увеличения нагрузки (или даже при постоянной нагрузке) до точки C' – материал, как говорят «течет» (явление текучести металлов).

Горизонтальный (или почти горизонтальный) участок CC' на диаграмме растяжения называется *площадкой текучести*, а напряжение, при котором происходит течение материала (увеличение деформаций при приблизительно постоянной нагрузке), называется *пределом текучести*

$$\sigma_T = \frac{P_T}{A_0}. \quad (1.4)$$

где  $P_T$  – нагрузка соответствующая площадке текучести (для стали Ст.3 предел текучести примерно равен  $2,4 \cdot 10^8 \text{ Па} = 240 \text{ МПа}$ ).

При дальнейшем деформировании образца за точкой напряжения и растягивающее усилие вновь увеличиваются, то есть происходит упрочнение стали, причём этот процесс идёт до момента достижения силой  $P$  своего наибольшего значения.

На диаграмме этапу упрочнения отвечает наклонная кривая C'D,

называемая зоной упрочнения.

Напряжения, соответствующие наибольшему значению растягивающей силы, называются *временным сопротивлением* или *пределом прочности*

$$\sigma_B = \frac{P_{MAX}}{A_0}. \quad (1.5)$$

На диаграмме  $\sigma_B$  соответствует точке  $D$  (для стали Ст.3  $\sigma_B \approx 400$  МПа).

Ввиду того, что временное сопротивление очень просто определяется из опыта (достаточно разорвать образец с известной площадью  $F_0$  сечения на машине и отметить при этом), эта характеристика является основной для суждения о прочности металла.

До достижения предела прочности продольные и поперечные деформации равномерно распределяются по расчетной длине образца.

В момент достижения предела прочности поведение образца еще раз резко меняется: деформация образца локализуется в одном, наиболее слабом месте (или в месте наличия дефектов-надрезов, царапин и т.д.), вследствие чего наблюдается местное поперечное сужение образца, где и начинается так называемая шейка (рисунок 1.3), остальные же сечения остаются практически неизменными.

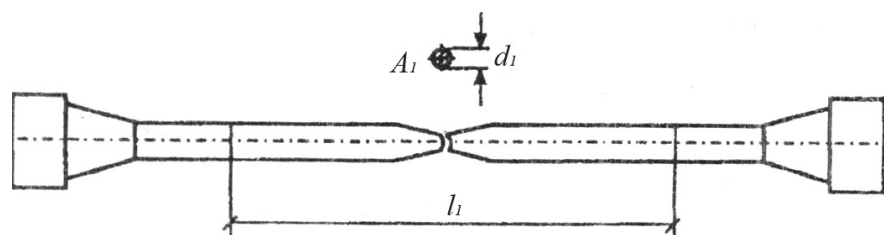


Рисунок 1.3 – Эскиз образца после испытаний

Вследствие резкого уменьшения поперечного сечения образца для дальнейшего его растяжения нужна все меньшая и меньшая сила и, наконец, в точке  $E$  (рисунок 1.2) происходит разрыв (разрушение) образца. Ниспадающая ветвь  $DE$  диаграммы растяжения называется *зоной местной текучести*.

Полную деформацию образца при разрыве (рисунок 1.2) можно разделить на упругую, мгновенно исчезающую после разрыва, и пластическую, которая обычно обозначается через  $\delta$ , и называется *относительным остаточным удлинением* при разрыве

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100\%. \quad (1.6)$$

где  $l_1$  – длина расчетной части образца после разрыва, измеренная после соединения частей разорванного образца.

Величина  $\delta$  характеризует пластичность материала (для стали Ст.3  $\delta = 21...23\%$ , а для наиболее распространенных сортов стали  $\delta = 8...28\%$ ).

Для оценки пластичности материала определяется и другая характеристика – *относительное остаточное сужение* поперечного сечения в шейке после разрыва

$$\psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100\% \quad (1.7)$$

где  $A_1$  – площадь поперечного сечения шейки в месте разрыва (в наиболее тонком месте шейки).

Величина  $\psi$  более точно характеризует пластические свойства, т.е. пластическая деформация по длине образца распределяется неравномерно, и величина  $\delta$  является некоторым средним удлинением. Чем больше  $\delta$  и  $\psi$ , тем пластичнее материал, поэтому  $\delta$  и  $\psi$  называются *механическими характеристиками пластичности материала*.

### 3. Задание.

1. Используя данные таблицы, построить рабочую диаграмму растяжения стали  $P = f(\Delta l)$ .

2. По результатам построения определить предел пропорциональности  $\sigma_{пц}$ , предел текучести  $\sigma_T$ , предел упругости  $\sigma_y$  и предел прочности  $\sigma_B$ , если диаметр образца до испытания  $d_0 = 10$  мм, а после испытания  $d_1 = 5,8$  мм;

3. Рассчитать относительное остаточное удлинение  $\delta$  при разрыве, если длина образца до испытания  $l_0 = 100$  мм, а после испытания  $l_1 = 131$  мм;

4. Рассчитать относительное остаточное сужение  $\psi$  поперечного сечения в шейке после разрыва:

5. Сделать выводы.

Таблица

|                 |      |      |      |       |       |       |       |
|-----------------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| $\Delta l$ , мм | 0    | 0,3  | 0,47 | 0,625 | 0,94  | 2,5   | 3,75  |
| $P$ , кН        | 0    | 4    | 8    | 12    | 16,7  | 18,8  | 19,4  |
| $\Delta l$ , мм | 5,25 | 9,75 | 15,0 | 20,0  | 28,75 | 36,25 | 41,25 |
| $P$ , кН        | 22,7 | 28   | 32   | 34    | 32    | 28    | 24    |

### Контрольные вопросы.

1. Какой образец применяется для испытаний?
2. В каких координатах вычеркивается диаграмма растяжения диаграммным аппаратом испытательной машины?
3. Как строится условная диаграмма растяжения?
4. Какие изменения, происходящие с образцом в процессе растяжения, не учитываются условной диаграммой растяжения?
5. Что называется пределом пропорциональности, пределом упругости, пределом текучести, пределом прочности (или временным сопротивлением разрыву) и как они определяются?
6. Как определить предел пропорциональности по машинной диаграмме растяжения?
7. Как определить нагрузку, соответствующую пределу текучести, по силоизмерителю машины в процессе растяжения малоуглеродистой стали?
8. Какие зоны можно выделить на диаграмме растяжения?
9. Как определить, в какой точке заканчивается зона упругости при

испытании на растяжение?

10. По каким участкам образца происходит его растяжение в зоне упрочнения и в зоне местной текучести?

11. Какие деформации называются упругими, а какие пластическими (остаточными)?

12. Какие механические характеристики служат для оценки пластичности металлов и как эти характеристики определить?



## Лабораторная работа №2. ИСПЫТАНИЕ МАТЕРИАЛОВ НА СЖАТИЕ.

1. *Цель и содержание работы:* ознакомление с методикой испытаний и определения механических характеристик, сравнительное изучение особенностей разрушения пластичных и хрупких, изотропных и анизотропных материалов при испытаниях на сжатие.

### 2. Теоретическое обоснование

Для изучения механических характеристик материалов существенное значение имеют испытания не только на растяжение, но и на сжатие, причем для хрупких материалов испытания на сжатие является основным.

Многие пластичные материалы совсем не разрушаются при сжатии, или разрушаются только при очень большой остаточной деформации. При испытании пластичных материалов (например, стального образца) диаграмма сжатия вначале аналогична диаграмме растяжения; предел пропорциональности и предел текучести почти совпадают, и площадка текучести не получается столь же ярко выраженной, как при растяжении.

При дальнейшем нагружении сжимающая сила всё время возрастает, т.к. возникают значительные пластические деформации, в результате чего увеличивается площадь поперечного сечения образца. При этом образец за счет трения на торцах принимает бочкообразную форму (рисунок 2.1); силы трения мешают частям образца, примыкающим к торцам, расширяться в поперечном направлении, средняя же часть образца, удаленная от концов, имеет такую же возможность.

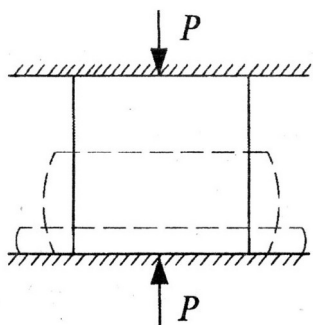


Рисунок 2.1 – Схема деформации стального образца

Вследствие этого напряженное состояние в образце становится неоднородным и значительно отличается от линейного. Довести до разрушения образец из малоуглеродистой стали практически не удастся, цилиндр превращается в тонкий диск без видимых признаков разрушения.

Диаграмма сжатия не имеет конечной точки, поэтому предел прочности при сжатии такого рода материалов найден быть не может и понятие предела прочности лишено физического смысла. Для таких материалов условно принимают предел прочности при сжатии, равный пределу прочности при растяжении.

Хрупкие материалы (чугун, камень, бетон и т.п.) разрушаются при сжатии, однако характерным является то, что разрушение происходит при напряжениях, значительно больших, чем при растяжении.

При испытании чугунного образца диаграмма сжатая сохраняет качественные особенности диаграммы растяжения, однако сопротивление сжатию значительно выше (в 4 ... 5 раз) сопротивления растяжению. Нагружение образца продолжается до тех пор, пока не начнёт спадать нагрузка и не наступит

разрушение образца.

При разрушении цилиндрического образца возникают трещины под углом около  $45^\circ$  к оси образца (рисунок 2.2).



Рисунок 2.2 – Схема образования трещин чугунного образца

При испытании образцов из чугуна и других хрупких материалов необходимо применять ограждения опорных плит из прозрачных пластмасс для предохранения от осколков при разрушении.

Цементный кубик при раздавливании принимает вид усеченных пирамид, составленных меньшими основаниями. Трещины образуются под углом, примерно равным  $45^\circ$  (рисунок 2.3а).

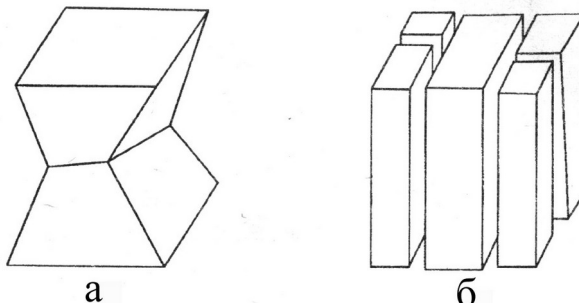


Рисунок 2.3 – Схема разрушения цементного кубика: а – без смазки торцов; б – со смазкой торцов

Если исключить влияние сил трения между торцами кубика и плитами машины (например, смазать торцы парафином или подложить резиновые прокладки), то кубик разрушается по плоскостям, параллельным линии действия силы, на которых напряжения равны нулю (рисунок 2.3б). Предел прочности при этом оказывается меньше, чем для кубика, испытанного без смазки.

Все материалы можно условно разделить на два типа: изотропные (имеющие одинаковые механические свойства в разных направлениях) и анизотропные (имеющие различные свойства в разных направлениях). Все рассмотренные ранее материалы относятся к изотропным материалам.

Древесина является анизотропным материалом и поэтому результаты, полученные при сжатии вдоль и поперек волокон, резко различны (рисунок 2.4а). Характерным для диаграммы сжатия древесины поперек волокон является значение нагрузки, после которой её рост существенно замедляется, а деформация продолжает возрастать. Испытание образца обычно прекращается, когда его высота уменьшается на  $1/3$ .

При дальнейшем нагружении древесина не разрушается, а лишь прессуется (рисунок 2.4б). За предел прочности в таком случае принимается ордината переломной точки.

Разрушение деревянного кубика при сжатии его вдоль волокон происходит за счет сдвига одной части по другой (рисунок 2.4в). Предел прочности на сжатие

вдоль волокон значительно выше (в 8 ... 10 раз), чем поперек волокон.

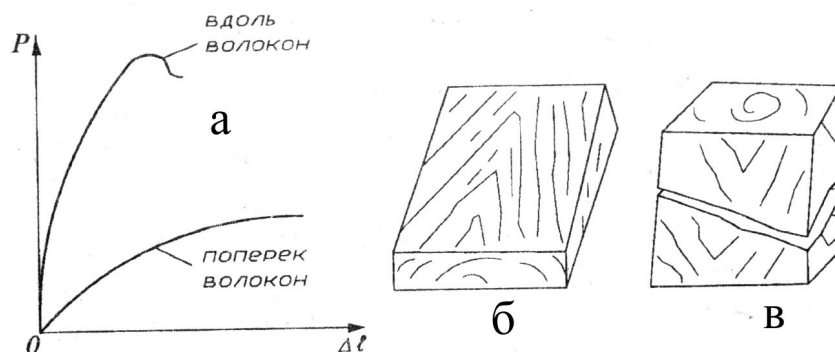


Рисунок 2.4 – Вид диаграммы сжатия древесины (а); образец древесины после нагружения поперек волокон (б) и вдоль волокон (в)

Для проведения испытаний на сжатие применяется гидравлический пресс П-125 или одна из разрывных машин Р-10, Р-20, Р-50. Разрывные машины снабжены диаграммным аппаратом, автоматически записывающим в процессе испытаний диаграмму сжатия.

Для испытания металлов на сжатие используются образцы в виде коротких цилиндров-крешеров, у которых высота равна одному – двум диаметрам.

Для других материалов применяются образцы в виде кубиков (стороны кубика для чугуна 20 ... 30 мм, для дерева 50 мм, цемента и камней 70 мм, бетона 200 ... 300 мм).

3. *Аппаратура и материалы:* гидравлический пресс П-125, стальной и чугунный цилиндры-крешеры, бетонный кубик, два деревянных кубика, штангенциркуль, тетрадь, ручка, линейка, карандаш, микрокалькулятор для выполнения инженерных расчетов.

#### 4. Содержание отчета и его форма.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- название и цель работы, краткий конспект основных теоретических положений;
- размеры образцов и расчеты в соответствии с приводимой таблицей;
- выводы по результатам испытаний и расчетов.

| Величина                                     | Материалы |        |           |               |                 |
|----------------------------------------------|-----------|--------|-----------|---------------|-----------------|
|                                              | сталь     | чугун  | цемент    | дерево        |                 |
|                                              |           |        |           | вдоль волокон | поперек волокон |
| Размеры поперечного сечения, мм              | ø 9,1     | ø 19,8 | 69,4×70,9 | 33,4×47,1     | 40,8×41,2       |
| Площадь поперечного сечения, мм <sup>2</sup> |           |        |           |               |                 |
| $P_{max}$ , кН                               | 218,75    | 211,25 | 5,0       | 66,25         | 6,25            |
| $\sigma_{BP}$ , МПа                          |           |        |           |               |                 |

### *Контрольные вопросы.*

1. Какова цель работы?
2. Какие образцы используются при испытаниях на сжатие?
3. Чем обусловлено определенное соотношение высоты и поперечных размеров с образцов при сжатии?
4. Какой вид имеет диаграмма сжатия малоуглеродистой стали?
5. Какие механические характеристики можно определить по испытаниям пластичной стали при сжатии?
6. Можно ли довести до разрушения образец из пластичной стали при сжатии?
7. Какой вид имеет диаграмма сжатия для чугунного образца? Её отличие от диаграммы растяжения.
8. Какие механические характеристики и как можно определить при испытаниях чугунного образца на сжатие?
9. Каков характер разрушения чугунного образца при сжатии? Чем объясняется приобретение образцом бочкообразной формы?
10. Какие механические характеристики можно определить по испытаниям цементного кубика на сжатие?
11. Каков характер разрушения при сжатии цементного кубика при наличии и отсутствии сил трения?
12. Какой вид имеет диаграмма для деревянных образцов, испытанных на сжатие вдоль и поперек волокон? В чем их различия?
13. Можно ли довести до разрушения деревянный образец при сжатии поперек волокон?
14. Каков характер разрушения деревянного образца при испытании на сжатие вдоль волокон?
15. Каков порядок испытаний на сжатие и обработка их результатов?

## МАЛОУГЛЕРОДИСТОЙ СТАЛИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ.

1. *Цель и содержание работы:* экспериментальное определение модуля продольной упругости  $E$ , коэффициента поперечной деформации  $\mu$  и косвенное определение модуля сдвига  $G$  при растяжении стального образца.

### 2. Теоретическое обоснование.

Упругие постоянные  $E$ ,  $\mu$ ,  $G$  используются для решения практических задач и характеризуют свойства материала сопротивляться различным видам деформаций, вызываемых воздействием внешних нагрузок.

Модуль упругости первого рода (модуль Юнга) характеризует сопротивляемость материала упругой деформации при растяжении и сжатии: чем больше модуль упругости материала, тем меньшее удлинение или укорочение получит стержень при прочих равных условиях (длине, площади, нагрузке).

В законе Гука, устанавливающем зависимость между нормальным напряжением  $\sigma$  и относительной линейной деформацией  $\varepsilon$ , модуль Юнга  $E$  выступает в роли коэффициента пропорциональности

$$\sigma = E \varepsilon. \quad (3.1)$$

Коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона)  $\mu$  характеризует способность материала сопротивляться поперечному деформированию, т.е. изменению поперечных размеров при действии продольных сил.

Его можно вычислить, зная соответствующие значения относительной поперечной деформации  $\varepsilon'$  и относительной продольной деформации  $\varepsilon$

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (3.2)$$

Для сталей, отличающихся содержанием углерода, легирующих добавок, а также видом механической, термической или иной обработки, указанные упругие постоянные  $E$  и  $\mu$  изменяются в пределах:  $E = (1,9 \dots 2,1) \cdot 10^{11}$  Па;  $\mu = 0,25 \dots 0,30$ .

Модуль упругости второго рода (модуль сдвига)  $G$  характеризует сопротивляемость материала сдвиговым (угловым) деформациям. Он выступает в роли коэффициента пропорциональности в законе Гука при сдвиге, устанавливающем зависимость между касательным напряжением  $\tau$  и углом сдвига  $\gamma$

$$\tau = G \gamma. \quad (3.3)$$

Можно теоретически вычислить (определить косвенным путем) и постоянную  $G$  по формуле

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (3.4)$$

Среднее значение модуля сдвига для стали, приводимое в справочниках, оценивается величиной  $G = 0,8 \cdot 10^{11}$  Па.

Относительные деформации в реальных конструкциях составляют, как правило, несколько тысячных долей единицы, т.е.  $\varepsilon = 0,0014 \dots 0,003$ . Следовательно, абсолютные деформации  $\Delta l$  также очень малы по сравнению с длиной  $l$ , а именно  $\Delta l \approx (0,001 - 0,003) l$ .

Поэтому, чтобы их зафиксировать, необходимо использовать приборы,

имеющие значительный коэффициент увеличения (в тысячу и более раз).

Приборы, чувствительные к изменению длины отрезка определенного направления, называются тензометрами (от слова «тензо» – деформация). Длина отрезка, на котором производится замер деформации, называется базой тензометра и обозначается  $l$ .

Метод электрического тензометрирования основан на принципе изменения омического сопротивления проводника при его деформировании. Известно, что электрическое сопротивление проводника равно

$$R = \rho \frac{l}{A}, \quad (3.5)$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление проводника;  $l$  – длина проводника;  $A$  – площадь поперечного сечения проводника.

В результате растяжения проводника его длина  $l$  увеличивается на  $\Delta l$ , а площадь сечения  $A$  уменьшится на  $\Delta A$ . Следовательно, сопротивление  $R$  увеличится на некоторую величину  $\Delta R$ . При сжатии проводника его сопротивление соответственно уменьшится.

Относительное изменение сопротивления определяется формулой, последнее слагаемое в которой учитывает изменение удельного сопротивления при деформации

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta l}{l} \left( 1 + 2\mu + \frac{\Delta \rho}{\rho} \right), \quad (3.6)$$

Общий вид проволоочного тензодатчика, который наклеивается на исследуемый объект, показан на рисунке 3.1.

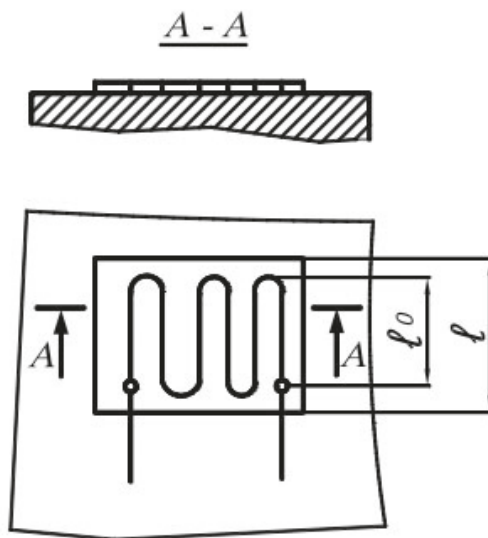


Рисунок 3.1 – Общий вид проволоочного тензодатчика

Он представляет собой проволочную решетку, состоящую из нескольких петель, уложенных между слоями диэлектрика.

Для определения модуля Юнга  $E$  и коэффициента Пуассона  $\mu$  используют стальной образец прямоугольного сечения шириной  $b$  и высотой  $h$ , который подвергается осевому растяжению на испытательной машине.

Эскиз образца с наклеенными активными датчиками показан на рисунке 3.2.

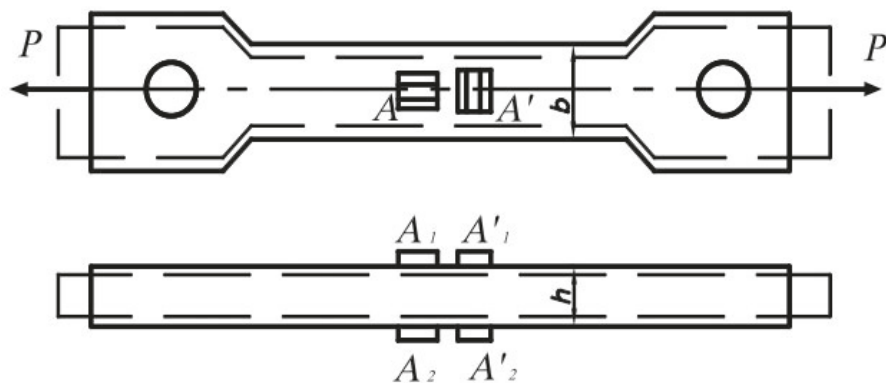


Рисунок 3.2 – Образец с тензодатчиками

3. *Аппаратура и материалы:* испытательная машина УМ-5, образец с установленными на его поверхности тензодатчиками, тензостанция, штангенциркуль, линейка, карандаш, тетрадь, калькулятор для выполнения инженерных расчетов.

#### 4. Методика и порядок выполнения работы.

1. Замерить ширину  $b$  и высоту  $h$  поперечного сечения рабочей части образца ( $b = 20$  мм,  $h = 8$  мм).

2. Вычислить площадь поперечного сечения  $A = bh$ . Установить образец в нижнем и верхнем захватах испытательной машины и включить тензостанцию. Тензоусилителю дать прогреться 10 ... 15 мин.

3. Загрузить образец условно нулевой нагрузкой  $P_0$ .

4. Сбалансировать мост Уитстона, вращая ручку реохорда (миллиамперметр при этом покажет нулевой ток). Взять первоначальный отсчет  $C_0$  по шкале реохорда и записать его в журнал испытаний. Переключить тензостанцию на поперечный датчик и, сбалансировав мост, взять отсчет  $C_0'$ .

5. Дать приращение нагрузки  $\Delta P$ .

6. Сбалансировав мост, взять соответствующие отсчеты  $C_P$  и  $C_P'$ . Записать их в таблицу.

7. Разгрузить образец.

8. Повторить предыдущие пункты 3 ... 7 еще два раза. Приращение нагрузки  $\Delta P$  во всех трех опытах должно быть одним и тем же, а условно нулевая нагрузка  $P_0$  может меняться.

9. Найти разницы отсчетов  $\Delta C$  и  $\Delta C'$  в каждом из экспериментов и вычислить их среднее значение  $\Delta C_{cp}$  и  $\Delta C'_{cp}$  по трем опытам.

10. Результаты испытаний занести в таблицу (форма приводится ниже).

11. Вычислить значения относительных продольной и поперечной деформаций по формулам:

$$\varepsilon = 1,75 \cdot 10^{-6} \Delta C_{cp}; \quad \varepsilon' = 1,75 \cdot 10^{-6} \Delta C'_{cp};$$

12. Вычислить нормальные напряжения в поперечном сечении образца по формуле

$$\sigma = \frac{\Delta P}{A}.$$

Таблица

| Нагрузка<br>$P$ , Н | Приращение<br>нагрузки<br>$\Delta P$ , Н | Показания датчиков |        | Разница отсчетов |             |
|---------------------|------------------------------------------|--------------------|--------|------------------|-------------|
|                     |                                          | $C_p$              | $C_p'$ | $\Delta C$       | $\Delta C'$ |
| 5000                | 10000                                    | 112                | 28     |                  |             |
| 15000               |                                          | 302                | 71     |                  |             |
| 15000               | 10000                                    | 302                | 71     |                  |             |
| 25000               |                                          | 484                | 120    |                  |             |
| 25000               | 10000                                    | 484                | 120    |                  |             |
| 35000               |                                          | 664                | 172    |                  |             |
|                     |                                          | Средние значения   |        |                  |             |

13. Определить модуль Юнга из формулы 3.1.
14. Определить коэффициент Пуассона по формуле 3.2.
15. Определить значение модуля сдвига по формуле 3.4.
16. Сравнить полученные значения модуля Юнга, коэффициента Пуассона и модуля сдвига со справочными, сделать вывод.

#### *Контрольные вопросы.*

1. Объясните физический смысл модуля упругости первого рода (модуля Юнга).
2. Объясните физический смысл коэффициента Пуассона.
3. Объясните физический смысл модуля упругости второго рода (модуля сдвига).
4. Как записывается закон Гука, при растяжении (сжатии)?
5. Как записывается закон Гука, при сдвиге?
6. Какая теоретическая зависимость существует между упругими постоянными изотропного материала?
7. Объяснить принцип действия тензодатчика.
8. С какой целью тензодатчики на образце наклеиваются парами по одному на противоположных гранях?

#### *Лабораторная работа №4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ СДВИГА.*

1. *Цель и содержание работы:* экспериментальное определение модуля



упругости второго рода (модуля сдвига) при кручении стального образца.

## 2. Теоретическое обоснование.

При расчёте на прочность и жёсткость конструкций, испытывающих деформации сдвига, необходимо знать величину модуля сдвига  $G$ . Эта физическая постоянная материала может быть определена экспериментально при кручении бруса круглого поперечного сечения.

При испытании материалов на кручение зависимость между крутящим моментом  $M_{кр}$  и углом закручивания  $\varphi$  характеризуется диаграммой кручения (рисунок 4.1), на которой, как при растяжении, можно выделить линейный участок, где выполняется закон Гука

$$\tau = G \gamma. \quad (4.1)$$

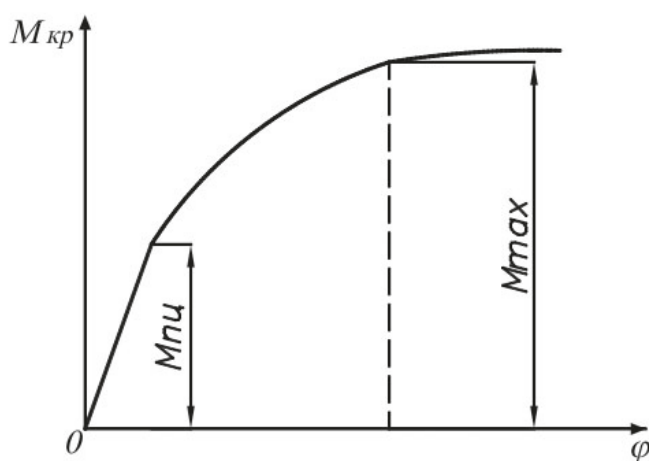


Рисунок 4.1

Модуль сдвига  $G$  в выражении (4.1) представляет собой коэффициент пропорциональности между касательными напряжениями  $\tau$  и относительным углом сдвига  $\gamma$ . С физической точки зрения  $G$  характеризует сопротивляемость материала упругим деформациям сдвига.

Если на цилиндрическую поверхность стержня нанести равномерную сетку из образующих и окружностей (рисунок 4.2 а), то после приложения крутящего момента можно заметить, что каждое поперечное сечение поворачивается относительно другого вокруг продольной оси стержня на некоторый угол  $\varphi$ , называемый углом закручивания.

Образующие поворачиваются на один и тот же угол  $\gamma$ . При этом линейные размеры не изменяются, а первоначально прямые углы между линиями сетки изменяются (квадраты превращаются в ромбы, как показано на рисунке 4.2 б).

Следовательно, в стержне возникают деформации сдвига. Величина  $\varphi$  определяется через крутящий момент  $M_{кр}$ , длину участка  $l$  и полярный момент инерции  $I_p$  по формуле

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G I_p}. \quad (4.2)$$

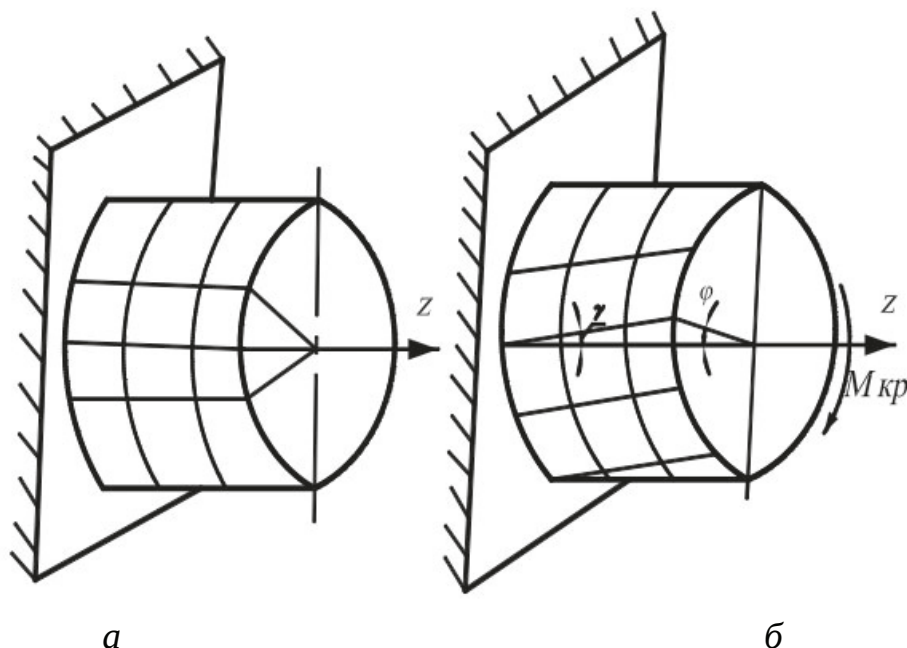


Рисунок 4.1 – Стержень до (а) и после (б) деформирования кручением

Для бруса, имеющего несколько участков, взаимный угол закручивания концевых сечений определяется как алгебраическая сумма углов закручивания на каждом участке

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{кр i} l_i}{G_i I_{pi}}. \quad (4.3)$$

Если все участки выполнены из одного и того же материала, а крутящий момент на всех участках одинаков, то выражение (4.3) примет вид

$$\varphi = \frac{M_{кр}}{G} \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{I_{pi}}. \quad (4.4)$$

3. *Аппаратура и материалы:* крутильная машина КМ-50-І, предназначенная для статических испытаний на кручение образцов круглого и прямоугольного поперечного сечения, образец, штангенциркуль, линейка, карандаш, тетрадь, калькулятор для выполнения инженерных расчетов.

#### 4. Методика и порядок выполнения работы

1. Перед началом опыта у испытываемого образца (рисунок 4.3) измеряются диаметры ( $d_1$  и  $d_2$ ), и длины каждого участка ( $l_1$  и  $l_2$ ). После этого образец помещается в захваты машины.

2. Образец предварительно нагружается внешним моментом  $M_o$ , величина которого контролируется по шкале силоизмерительного механизма крутильной машины (шкала А).

3. По лимбу машины измеряется угол закручивания  $\varphi_o$  в градусах, соответствующий внешнему моменту  $M_o$ . Значение  $M_o$  и  $\varphi_o$  записываются в журнал наблюдений.

4. Образец нагружается рабочей нагрузкой  $M_p$  (не более 70 Н·м) и измеряется соответствующий угол закручивания  $\varphi$ . Значения  $M_p$  и  $\varphi$  заносятся в журнал наблюдений.

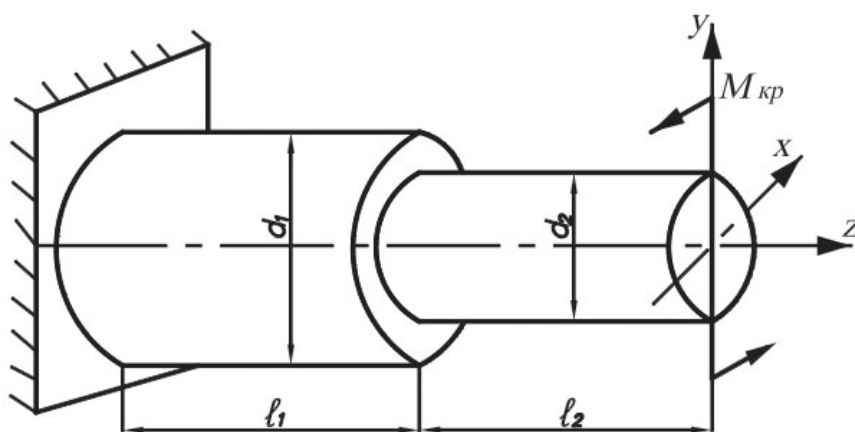


Рисунок 4.3 – Вид образца для испытаний на кручение

5. Опыт повторяется три раза, величины  $M_o$  и  $M_p$  для каждого опыта задаются преподавателем. Перед началом каждого опыта нагрузка полностью снимается.

6. Полученные данные заносятся в таблицу, определяются средние значения  $M_{cp}$ ,  $\varphi_{cp}$  и находится опытное значение модуля сдвига  $G_{он}$ .

7. Найденная опытная величина  $G_{он}$  сравнивается со значением модуля сдвига, полученного в лабораторной работе №3 или с литературными данными.

#### Содержание отчета и его форма

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- название и цель работы, краткий конспект основных теоретических положений, включая эскиз образца (рисунок 4.3);

- результаты испытаний в соответствии с приводимой таблицей;

| № опыта          | $M_{кр}, \text{Н}\cdot\text{м}$ | $\varphi, ^\circ$ | $\Delta M_{кр}, \text{Н}\cdot\text{м}$ | $\Delta \varphi, ^\circ$ |
|------------------|---------------------------------|-------------------|----------------------------------------|--------------------------|
| 1                | 10                              | 0,76              |                                        |                          |
|                  | 20                              | 1,52              |                                        |                          |
| 2                | 20                              | 1,54              |                                        |                          |
|                  | 30                              | 2,28              |                                        |                          |
| 3                | 30                              | 2,31              |                                        |                          |
|                  | 40                              | 3,05              |                                        |                          |
| Средние значения |                                 |                   |                                        |                          |

- результаты измерений и расчетов по форме:

$$l_1 = 100 \text{ мм} \quad d_1 = 20 \text{ мм} \quad I_{p1} = 0,1 \cdot d_1^4 =$$

$$l_2 = 100 \text{ мм} \quad d_2 = 10 \text{ мм} \quad I_{p2} = 0,1 \cdot d_2^4 =$$

$$G_{он} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\Delta M_{cp}}{\Delta \varphi_{cp}} \left( \frac{l_1}{I_{p1}} + \frac{l_2}{I_{p2}} \right) =$$

- выводы по результатам расчетов.

*Контрольные вопросы.*

1. Какой вид имеет диаграмма кручения малоуглеродистой стали?
2. Как записывается закон Гука при кручении?
3. Каков физический, алгебраический и геометрический смысл модуля сдвига.
4. Сформулируйте понятие угла закручивания  $\varphi$  и угла сдвига  $\gamma$ .
5. Как записывается формула для определения угла закручивания?
6. От чего зависит модуль сдвига?
7. Сформулируйте определение полярного момента инерции сечения.

*Лабораторная работа №5. ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ БАЛКИ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ.*

*1. Цель и содержание работы:* экспериментальная проверка формулы для определения нормальных напряжений при чистом изгибе балки.

*2. Теоретическое обоснование.*

Частный случай изгиба, при котором в поперечных сечениях балки возникает только изгибающий момент, называется чистым изгибом.

Чистый изгиб может возникать при различных внешних нагрузках. Рассмотрим одну из наиболее распространенных схем нагружения балки, при которой реализуется чистый изгиб (рисунок 5.1). Как видно из эпюр поперечных сил и изгибающих моментов, в поперечных сечениях балки на среднем участке возникает только изгибающий момент, следовательно, этот участок находится в состоянии чистого изгиба.

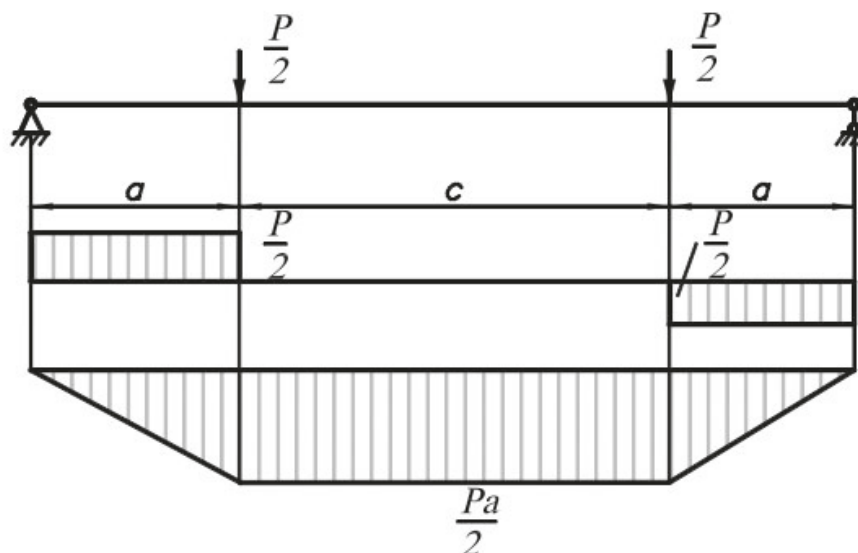


Рисунок 5.1 – Схема балки и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов

В случае, когда плоскость изгибающего момента (силовая плоскость) совпадает с главной плоскостью инерции балки, прямолинейная ось балки искривляется в той же плоскости. Такой изгиб называется прямым или плоским.

При изгибе продольные волокна изменяют свою длину, причём волокна на выпуклой стороне балки удлиняются, а на вогнутой укорачиваются. Между растянутыми и сжатыми волокнами располагается нейтральный слой, длина которого при деформации не изменяется.

Линия пересечения нейтрального слоя с поперечным сечением балки называется нейтральной осью.

Для определения деформаций волокон при чистом изгибе используется гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли), согласно которой сечения плоские и перпендикулярные к оси балки до деформации остаются плоскими и перпендикулярными к изогнутой оси бруса после деформации.

Согласно этой гипотезе, деформации продольных волокон прямо пропорциональны их расстоянию от нейтрального слоя и в поперечных сечениях балки возникают только нормальные напряжения.

В соответствии с законом Гука нормальные напряжения в поперечном сечении балки также изменяются по линейному закону и равны

$$\sigma = \frac{M}{I_x} y, \quad (5.1)$$

где  $M$  – изгибающий момент в рассматриваемом сечении балки;  $I_x$  – осевой момент инерции поперечного сечения балки относительно нейтральной оси

(нейтральная ось совпадает с главной центральной осью инерции сечения);  $y$  – расстояние от точки сечения, в которой определяются напряжения, до нейтральной оси.

Эпюра нормальных напряжений для двутаврового сечения представлена на рисунке 5.2. Знаки, проставленные на эпюре, соответствуют положительному изгибающему моменту.

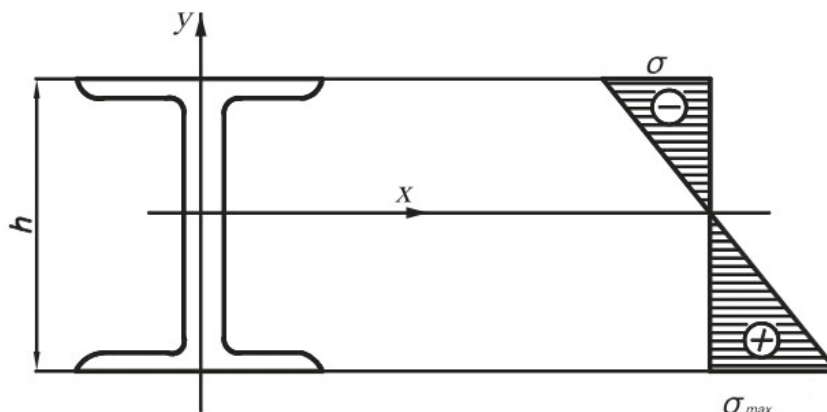


Рисунок 5.2 – Эпюра нормальных напряжений в поперечном сечении балки

Наибольшие нормальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси

$$\sigma = \frac{M}{I_x} y_{max} = \frac{M}{W_x}, \quad (5.2)$$

где  $W_x$  – осевой момент сопротивления сечения.

Момент сопротивления является геометрической характеристикой поперечного сечения балки, определяющей её прочность при изгибе.

3. *Аппаратура и материалы*: установка для испытаний, линейка, карандаш, тетрадь, калькулятор для выполнения инженерных расчетов.

Установка для испытаний (рисунок 5.3) представляет собой стальную двутавровую балку 1 (двутавр №10,  $h = 10$  см,  $b = 5,5$  см,  $I_x = 198$  см<sup>4</sup>,  $W_x = 39,7$  см<sup>3</sup>), опирающуюся на две шарнирные опоры 2.

Для испытаний на балке устанавливают тензометры Гутенбергера. Вращая штурвал 4 по часовой стрелке через систему рычагов и винтовую пару 3, нагружают балку. При этом средний участок балки находится в состоянии чистого изгиба; измерение нагрузки производится динамометром 5.

Относительная деформация может быть определена по формуле

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{l_o K}, \quad (5.3)$$

где  $\Delta$  – показания тензометра Гутенбергера;  $K = 1000$  – коэффициент увеличения;  $l_o = 20$  мм.

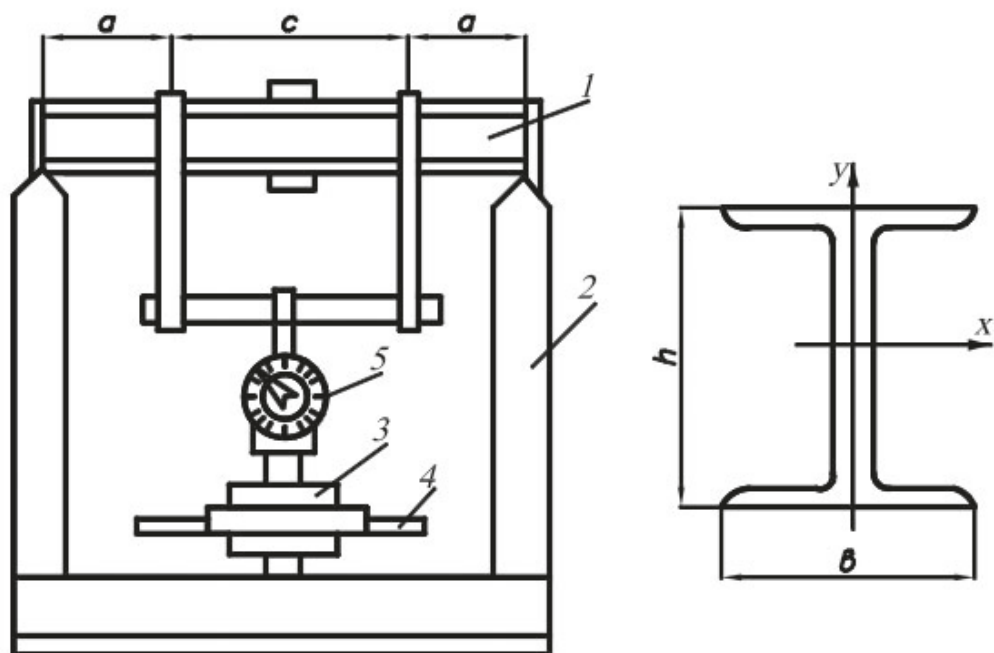


Рисунок 5.3 – Установка для испытаний балки на изгиб

Соответствующие нормальные напряжения по закону Гука

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{E \Delta}{l_0 K}. \quad (5.4)$$

#### 4. Методика и порядок выполнения работы

1. Перед началом испытаний установить два тензометра Гутенбергера на среднюю часть балки. Тензометр, установленный на верхних волокнах, назовем *A*, а тензометр установленный на нижних волокнах – *B*.

2. Загрузить балку условно «нулевой» нагрузкой и произвести измерения по тензометрам *A* и *B*. Полученные результаты занести в таблицу.

3. Дать приращение нагрузки  $\Delta P$  и произвести повторный замер деформации *A* и *B* с соответствующей записью в таблицу.

4. Повторить опыт ещё два раза.

5. Определить опытное значение напряжений в точках *A* и *B* по формуле (5.4), предварительно определив средние значения приращений  $\Delta A_{cp}$  и  $\Delta B_{cp}$  по всем трем опытам.

6. Расстояние  $a = 30$  см (см. рисунок 5.3). Найти величину изгибающего момента по формуле

$$M = \frac{\Delta P_{cp} a}{2}. \quad (5.5)$$

7. Теоретические напряжения определить по формуле (5.2).

#### Содержание отчета и его форма

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- название и цель работы, краткий конспект основных теоретических положений, включая рисунки 5.1 и 5.2.

- результаты испытаний в соответствии с приводимой таблицей;

|          |                       |            |            |
|----------|-----------------------|------------|------------|
| Нагрузка | Показания тензометров | Приращение | Приращение |
|----------|-----------------------|------------|------------|

| $P$ , кН         | $A$  | $B$ | нагрузки<br>$\Delta P$ , кН | $\Delta A$ | $\Delta B$ |
|------------------|------|-----|-----------------------------|------------|------------|
| 2000             | 20   | 21  |                             |            |            |
| 5000             | 19   | 22  |                             |            |            |
| 2000             | 20   | 21  |                             |            |            |
| 7500             | 15   | 23  |                             |            |            |
| 2000             | 20.5 | 21  |                             |            |            |
| 10000            | 17   | 24  |                             |            |            |
| Средние значения |      |     |                             |            |            |

- расчеты теоретического и опытного напряжений;
- вывод с оценкой расхождений между теоретическими и экспериментальными значениями напряжений.

*Контрольные вопросы.*

1. Какой вид нагружения называется изгибом?
2. Какой вид нагружения называется чистым и поперечным изгибом?
3. Что понимают под нейтральным слоем и нейтральной осью?
4. Запишите формулу нормальных напряжений в произвольной точке при чистом изгибе.
5. Как вычисляются наибольшие нормальные напряжения при чистом изгибе?
6. Сформулируйте физический смысл момента сопротивления сечения.
7. Поясните, почему при выбранной схеме нагружения балки реализуется именно чистый изгиб?

*Лабораторная работа №6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КОСОМ ИЗГИБЕ.*

1. *Цель и содержание работы:* практическое изучение методик расчета брусьев при косом изгибе.

*2. Теоретическое обоснование.*

Изгиб называют косым, если плоскость действия изгибающего момента,



возникающего в поперечном сечении бруса, не совпадает ни с одной из его главных плоскостей.

Определение напряжений и перемещений (расчеты на прочность и жесткость) выполняют на основе замены косоугольного изгиба сочетанием двух прямых изгибов, для чего каждую из приложенных к брусу нагрузок заменяют ее составляющими, действующими в главных плоскостях.

При плоском косоугольном изгибе моменты  $M_x$  и  $M_y$  достигают своих наибольших значений в одном и том же поперечном сечении, которое и является опасным при постоянном сечении бруса. При пространственном косоугольном изгибе сечения, в которых  $M_x$  и  $M_y$  достигают своих наибольших значений, не совпадают, расчет приходится выполнять для двух или более предположительно опасных сечений.

Нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения, в котором возникают изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ , определяется по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x, \quad (6.1)$$

где  $I_x$  и  $I_y$  – главные центральные моменты инерции поперечного сечения бруса;  $x$  и  $y$  – координаты точки, для которой определяются напряжения, в системе главных центральных осей инерции сечения.

В формулу (6.1) рекомендуется подставлять абсолютные значения моментов и координат, а знак приписывать всему слагаемому в целом, устанавливая этот знак по истинному характеру деформации (напряжения растяжения считают положительными, сжатия – отрицательными).

Для расчета на прочность бруса с поперечным сечением произвольной формы следует определить положение нулевой (нейтральной) линии в опасном сечении, приравняв к нулю правую часть уравнения (6.1).

Нулевая линия – прямая, проходящая через центр тяжести сечения, не перпендикулярная, в отличие от прямого изгиба, к силовой линии.

Максимальные растягивающие и сжимающие напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нулевой линии. В общем случае должны быть составлены два условия прочности:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max \text{ раст}} &= \frac{M_x}{I_x} y_A + \frac{M_y}{I_y} x_A \leq [\sigma_{\text{раст}}]; \\ \sigma_{\max \text{ сжат}} &= \frac{M_x}{I_x} y_B + \frac{M_y}{I_y} x_B \leq [\sigma_{\text{сжат}}], \end{aligned} \quad (6.2)$$

где  $A$  и  $B$  – точки с максимальными растягивающими и сжимающими напряжениями.

Для брусков из материалов, имеющих одинаковое значение допускаемых напряжений на растяжение и сжатие, используется лишь то из условий (6.2), которое соответствует большему по абсолютной величине напряжению.

При  $[\sigma_{\text{раст}}] < [\sigma_{\text{сжат}}]$  (хрупкие материалы) первое из условий (6.2) достаточно, если  $\sigma_{\max \text{ раст}} \geq \sigma_{\max \text{ сжат}}$ .

Для сечений с двумя осями симметрии, имеющих точки, одновременно наиболее удаленные от обеих главных центральных осей инерции (например,

прямоугольник, двутавр), именно эти точки (или одна из них) являются опасными, и условие прочности может быть записано в виде

$$\sigma_{\max \text{ расч}} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma_{\text{расч}}], \quad (6.3)$$

где  $W_x$  и  $W_y$  – моменты сопротивления относительно соответствующих осей.

Для выполнения на основе формулы (6.3) проектного расчета следует задаться отношением  $W_x/W_y$  (в частности, для прокатных двутавров отношение  $W_x/W_y$  изменяется примерно в пределах 5 ... 14 и возрастает с увеличением номера профиля), а затем произвести проверку выбранного сечения и, при необходимости, внести коррективы. В случае неприменимости формулы (6.3) приходится задаваться размерами сечения, а затем выполнять проверочный расчет по формулам (6.2).

3. *Аппаратура и материалы:* линейка, карандаш, ручка, калькулятор для выполнения инженерных расчетов.

4. *Методика и порядок выполнения работы.*

1. Для стальной консольной балки из неравнобокого уголка №12,5×8 при толщине стенки 10 мм, (рисунок 6.1), требуется:

- определить наибольшие напряжения в опасном сечении балки;
- проверить выполнение условия прочности при  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ;
- построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении балки.

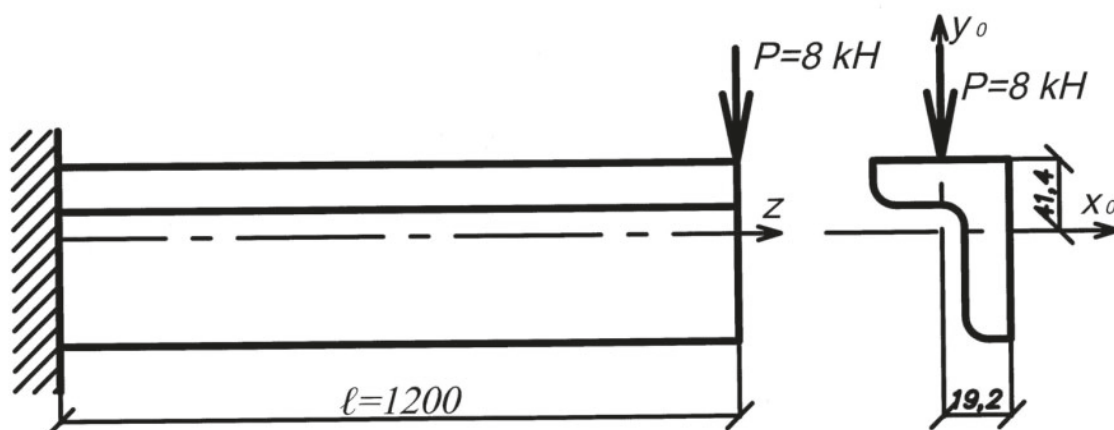


Рисунок 6.1 – Схема нагружения неравнобокого уголка

### Содержание отчета и его форма

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- название и цель работы, краткий конспект основных теоретических положений;
- расчетная схема (рисунок 6.1) и необходимые расчеты.
- выводы по результатам расчета.

### Контрольные вопросы

1. Какой вид нагружения называется косым изгибом?
2. Из каких видов нагружения, в соответствии с принципом независимости действия сил, складывается косой изгиб?
3. По какому закону изменяются напряжения в поперечном сечении бруса

при косом изгибе?

4. По какой формуле определяются нормальные напряжения при косом изгибе?

5. Какой закон имеет геометрическое место точек с напряжениями, равными нулю?

6. Что такое нейтральная линия и как определяется ее положение при косом изгибе?

7. Как определить зону растяжения и зону сжатия в поперечном сечении при косом изгибе?

8. Как определяют опасные точки в поперечном сечении при косом изгибе?

9. Записать условия прочности при косом изгибе бруса из материала, неодинаково работающего на растяжение и на сжатие.

10. Как при косом изгибе располагается вектор главного перемещения и нейтральная линия по отношению друг к другу?

## *Лабораторная работа №7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ВНЕЦЕНТРЕННОМ СЖАТИИ.*

1. *Цель и содержание работы:* экспериментальная проверка закона распределения напряжений при внецентренном сжатии стержня большой жесткости путем сопоставления расчетных напряжений в различных точках поперечного сечения с напряжениями, полученными опытным путем.

### *2. Теоретическое обоснование.*

Если растягивающие или сжимающие силы направлены вдоль оси стержня, то возникает центральное (или осевое) растяжение или сжатие. Если же линия действия внешних сил смещена от оси стержня на некоторое расстояние  $e$  – эксцентриситет, но остается ей параллельной, то такое растяжение или сжатие называется внецентренным.

Действие внецентренно приложенной сжимающей силы, на основании

принципа суперпозиции, можно рассматривать как результат равномерного сжатия, получающегося при центральном нагружении, и чистого изгиба, обусловленного внецентренным приложением нагрузки.

Изгибающий момент при этом одинаков во всех сечениях стержня и равен произведению сжимающей силы  $P$  на величину этого эксцентриситета  $e$ .

По формуле для определения напряжений при внецентренном растяжении и сжатии можно легко определить величины нормальных напряжений в различных точках сечения стержня и построить эпюру их распределения по сечению.

Близость к действительности полученного таким путем результата можно проверить измерением продольных деформаций соответствующих волокон стержня и определением затем напряжений, соответствующих этим деформациям, по закону Гука.

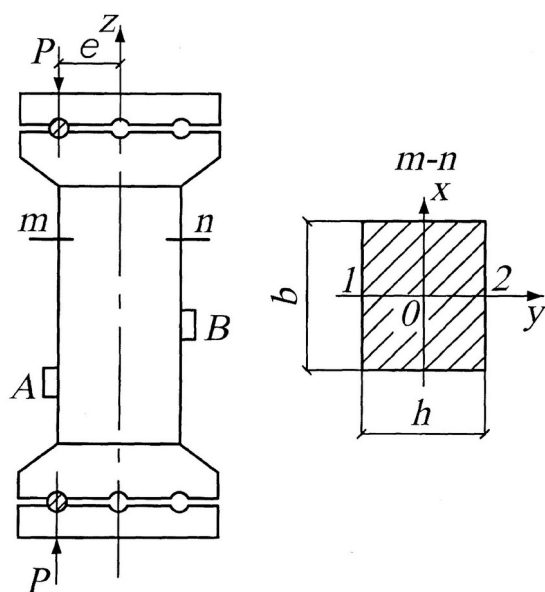


Рисунок 7.1 – Образец с тензометрами

Применяемый при испытании образец представляет собой стальной стержень прямоугольного поперечного сечения (рисунок 7.1).

Внецентренность приложения силы  $P$  достигается путем передачи ее через ролики, расположенные с заданным эксцентриситетом по отношению к оси стержня.

При этом можно считать, что точка приложения сжимающей силы находится на главной оси поперечного сечения  $x$  и изгиб будет прямым относительно оси  $y$ .

Более предпочтительной является передача на образец сжимающей силы через закаленные шарики, входящие в специальные углубления в торцах стержня, так как шарики точнее фиксируют точку приложения силы.

Тогда деформации достаточно измерять в одной плоскости  $ZOX$  – волокон 1 и 2, расположенных в плоскости изгиба, в которых деформации и напряжения достигают наибольших значений.

Для измерения деформаций применяются рычажные тензометры типа Гугенбергера (А и В на рисунке 7.1). Для этой цели могут быть использованы проволочные тензодатчики сопротивления.

Нагружение образца с установленными на нем приборами можно производить на любой испытательной машине с вертикальной осью, обеспечивающей статическое приложение нагрузки, в том числе и на машине УМ-5.

3. *Аппаратура и материалы:* образец, испытательная машина УМ-5, тензометры Гугенбергера, ручка, линейка, карандаш, тетрадь, калькулятор для выполнения инженерных расчетов.

4. *Методика и порядок выполнения работы.*

1. Перед началом опыта необходимо записать базу  $l$  и коэффициенты увеличения тензометров  $k$ , эксцентриситет  $e$ , значения модуля упругости  $E$  материала и размеры поперечного сечения  $b$  и  $h$  образца, подсчитать площадь сечения  $A_{сеч}$  и момент сопротивления сечения  $W_y$  при изгибе ( $l = 20$  мм,  $k = 10^{-3}$  см,  $e = 15$  мм,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $b = 41$  мм,  $h = 30$  мм,  $A_{сеч} = bh$ ,  $W_y = \frac{bh^2}{6}$ ).

2. После установки образца в машину произвести предварительные нагружения до величины 1 – 2 кН (100 – 200 кгс), что необходимо для надежного крепления образца между захватами машины и ликвидации возможных зазоров. Показания всех тензометров при этой нагрузке считать начальными (начало отсчета) и записать их в журнал наблюдений.

3. Увеличить нагрузку на 5 – 6 кН (500 – 600 кгс) до конечного значения, которое не должно превышать усилия, при котором напряжения в образце будут равны пределу пропорциональности.

Записать в журнал испытаний величины сжимающей силы и показания тензометров.

*Примечание: Приращения показаний тензометров при равных ступенях нагрузки должны быть примерно одинаковыми. В случае большого разброса результатов (отклонение свыше 20%) опыт повторить.*

4. Для исключения возможной ошибки дважды повторить эксперимент.

5. Вычислить приращение нагрузки  $\Delta P$  и разность показаний  $\Delta A$  и  $\Delta B$  по каждому из тензометров.

6. Определить окончательное значение приращения нагрузки и разности показаний тензометров как среднее арифметическое по данным трех испытаний.

7. Дальнейшая обработка результатов испытаний заключается в определении опытных напряжений по деформациям, измеренным каждым тензометром, по формуле

$$\sigma_{он} = \frac{\Delta_{ср} \cdot E}{k \cdot l}, \quad (7.1)$$

где  $\Delta_{ср}$  – средняя разность показаний каждого тензометра ( $\Delta A_{ср}$  и  $\Delta B_{ср}$ );  $E$  – Модуль Юнга для материала образца;  $k$  – коэффициент увеличения тензометра;  $l$  – база тензометра.

8. По расчетным данным построить эпюру распределения напряжений по высоте сечения (рисунок 7.2), индексы  $A$  и  $B$  относятся соответственно к данным, полученным по тензометрам  $A$  и  $B$ .

Растягивающие напряжения откладываются выше нулевой линии, сжимающие – ниже.

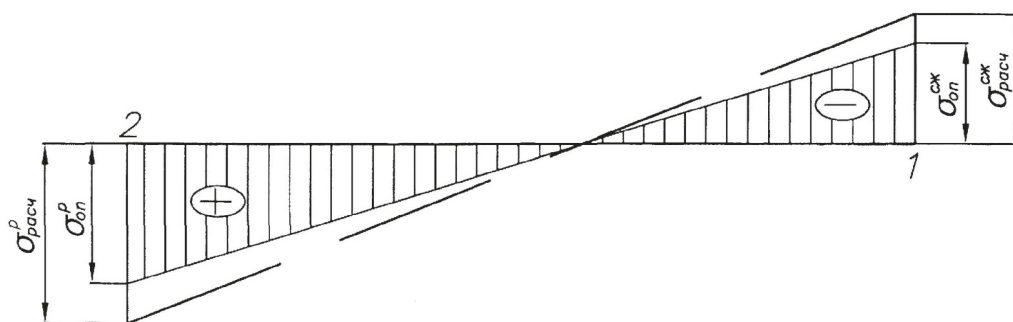


Рисунок 7.2

9. По формуле (7.2) подсчитать теоретические (расчетные) значения напряжений в точках, в которых деформации измерялись тензометрами.

$$\sigma_{расч} = - \frac{\Delta P}{A_{сеч}} \pm \frac{\Delta P \cdot e}{W_y}, \quad (7.2)$$

где  $\Delta P$  – приращение нагрузки;  $A_{сеч}$  – площадь поперечного сечения образца;  $e$  – эксцентриситет приложения силы;  $W_y$  – осевой момент сопротивления сечения образца относительно главной оси инерции сечения  $y$ .

10. Полученные в пункте 5 значения напряжений отложить в масштабе на построенной эпюре  $\sigma_{он}$ ; одно из возможных положений эпюры  $\sigma_{расч}$  показано на рисунке 7.2 пунктирной линией.

11. Подсчитать величины расхождений между опытными и расчетными напряжениями в процентах по формуле (7.3) и сделать вывод об их соотношении.

$$\delta = \frac{\sigma_{расч} - \sigma_{он}}{\sigma_{расч}} \cdot 100\%. \quad (7.3)$$

#### Форма журнала испытаний

| Нагрузка,<br>Н   | Показания тензометров |    | Приращение<br>нагрузки<br>$\Delta A$ , Н | Приращение показаний<br>тензометров |            |
|------------------|-----------------------|----|------------------------------------------|-------------------------------------|------------|
|                  | A                     | B  |                                          | $\Delta A$                          | $\Delta B$ |
| 2000             | 20                    | 21 |                                          |                                     |            |
| 5000             | 19                    | 22 |                                          |                                     |            |
| 2000             | 20                    | 21 |                                          |                                     |            |
| 7500             | 22                    | 23 |                                          |                                     |            |
| 2000             | 20,5                  | 21 |                                          |                                     |            |
| 10000            | 17                    | 24 |                                          |                                     |            |
| Среднее значение |                       |    |                                          |                                     |            |

#### Контрольные вопросы.

1. Какой случай нагружения называется внецентренным растяжением или сжатием?
2. Что называется эксцентриситетом?
3. Чему равен изгибающий момент при внецентренном сжатии?
4. Как определяют напряжения в произвольной точке поперечного сечения

при внецентренном растяжении или сжатии?

5. Почему внецентренное приложение нагрузки особенно опасно для хрупких материалов?

### *Лабораторная работа № 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ.*

*1. Цель и содержание работы:* экспериментальное и теоретическое определение критической силы сжатого стержня.

#### *2. Теоретическое обоснование*

Если подвергнуть сжатию тонкий длинный стержень, то он, предварительно изогнувшись, может сломаться. Перед изломом сжимающие силы, при которых произойдет разрушение стержня, будут значительно меньше тех, которые вызвали бы напряжение, равное пределу пропорциональности материала стержня при сжатии. Разрушение стержня произойдет потому, что при его сжатии нарушается прямолинейная форма равновесия стержня.

Таким образом, при некоторых условиях прямолинейная форма равновесия

может оказаться неустойчивой, и стержень начнет искривляться (выпучиваться). Это явление называется продольным изгибом или потерей устойчивости. Следовательно, наряду с вопросами прочности и жесткости существует необходимость в решении вопросов устойчивости элементов конструкций или всего сооружения.

При расчетах на устойчивость важно знать наименьшее значение внешней нагрузки, при которой возможен переход деформации стержня от простого сжатия к сжатию с изгибом, называемой критической силой. Пока внешняя сжимающая сила меньше критической, возможна лишь одна форма равновесия – устойчивая.

Считая критическую силу разрушающей нагрузкой, нарушающей нормальную работу сжатого стержня, можно составить условие для проверки стержня на устойчивость

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} \leq \varphi [\sigma_{сжат}], \quad (8.1)$$

где  $\sigma_{кр}$  – критическое значение нормальных напряжений, т.е. напряжений, при которых происходит потеря устойчивости;  $F_{кр}$  – критическое значение сжимающей силы, т.е. силы, при которой происходит потеря устойчивости;  $\varphi$  – коэффициент уменьшения допускаемого напряжения;  $[\sigma_{сжат}]$  – допускаемые напряжения на сжатие для материала стержня.

Коэффициент  $\varphi$  зависит от гибкости стержня  $\lambda$ . Зависимость между  $\varphi$  и  $\lambda$  дается в таблицах, которые приведены в учебниках и задачниках по сопротивлению материалов, а также в справочной литературе.

Формула для определения критической силы, при которой стержень теряет устойчивость, впервые была получена академиком Российской академии наук Леонардом Эйлером, называется критической силой Эйлера и имеет вид

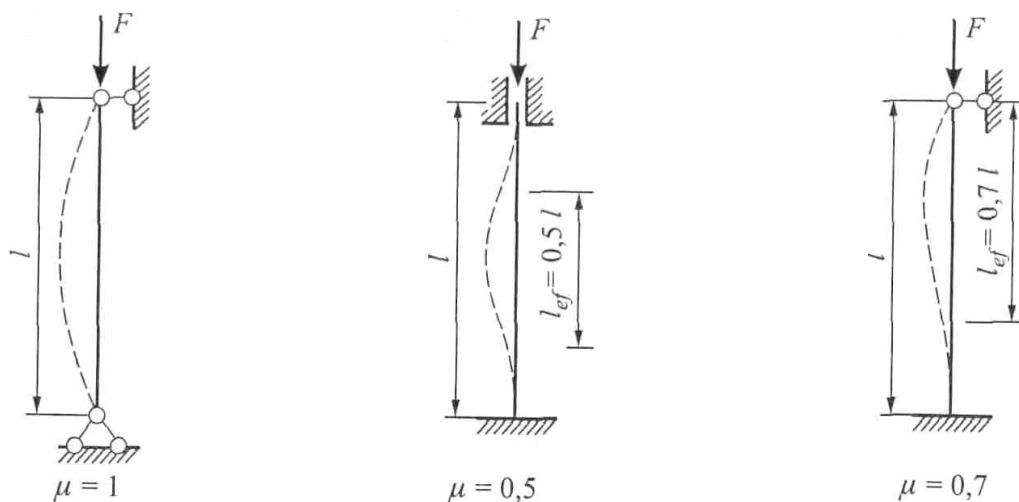
$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_{np}^2}, \quad (8.2)$$

где  $I_{min}$  – минимальный момент инерции сечения;  $l_{np}$  – приведенная длина стержня, которая равна  $l_{np} = \mu l$ , ( $\mu$  – коэффициент приведения длины стержня;  $l$  – фактическая длина стержня).

Величина коэффициента приведения длины  $\mu$  зависит от способа закрепления.

|                               |                                                 |                                                       |
|-------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| Оба конца закреплены шарнирно | Оба конца жестко защемлены, но могут сближаться | Один конец стержня жестко защемлен, другой – шарнирно |
|-------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|





Формула Эйлера справедлива только в том случае, если расчетная гибкость стержня больше предельного значения, определяемого по формуле

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пл}}}}, \quad (8.3)$$

где  $E$  – модуль Юнга и  $\sigma_{\text{пл}}$  – предел пропорциональности материала, из которого изготовлен стержень.

Расчетная гибкость стержня, в свою очередь, определяется по формуле

$$\lambda_{\text{расч}} = \frac{\mu l}{i_{\min}}, \quad (8.4)$$

где  $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$  – минимальный радиус инерции поперечного сечения стержня.

3. *Аппаратура и материалы:* установка для испытаний, ручка, штангенциркуль, линейка, карандаш, калькулятор для выполнения инженерных расчетов.

Установка для испытаний (рисунок 8.1) представляет собой станину 1 с жестко закрепленными стойками 2 и 3.

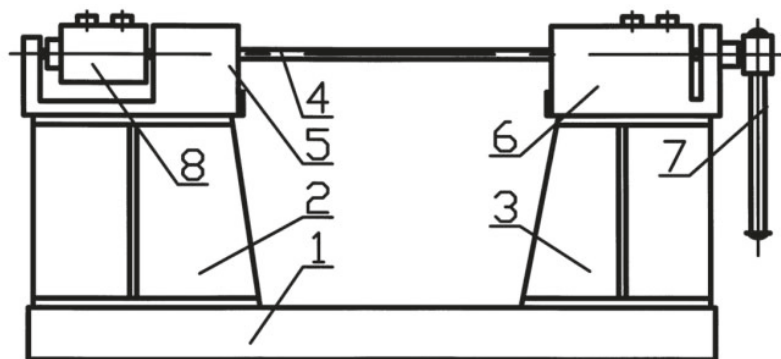


Рисунок 8.1 – Установка для испытания стержня на устойчивость

Испытуемый образец 4, изготовленный из стали 50, устанавливается в зажимах 5 и 6, которые позволяют имитировать следующие случаи опорных закреплений: оба конца стержня закреплены шарнирно, оба конца стержня закреплены жестко, один конец стержня закреплен шарнирно, другой – жестко. Винтом 7, расположенным на правой опоре, создается продольная сила, величина

которой определяется динамометром 8, расположенным на левой опоре.

#### 4. Методика и порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с устройством лабораторной установки.
2. Измерить размеры поперечного сечения и длину образца ( $h = 5$  мм,  $b = 20$  мм,  $l = 1,1$  м).
3. Установить образец в зажимы 5 и 6 при условии имитации шарнирного закрепления концов стержня.
4. Винтом 7 плавно произвести нагружение образца, контролируя продольную силу по шкале динамометра 8.

Нагрузка вначале будет плавно расти, затем, при достижении критической силы стержень начнет изгибаться, а рост нагрузки практически прекратится.

Полученное значение критической силы записать в таблицу.

5. Повторить пункты 3 и 4 для случаев имитации двух оставшихся закреплений концов образца.

6. Записать значения критической силы в таблицу.

7. Вычислить предельное значение гибкости стержня по формуле (8.3) и сравнить его со значением гибкости стержня, определенной по формуле (8.4) ( $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па,  $\sigma = 240$  МПа,  $I_{min} = \frac{bh^3}{12}$ ,  $A = bh$ ).

8. Если расчетная гибкость стержня больше предельного значения гибкости, определить критическое значение критической силы для всех способов закрепления концов стержня по формуле Эйлера (8.2) и записать результаты расчетов в таблицу.

9. Сравнить теоретическое и экспериментальные значения критической силы, подсчитать погрешность и записать полученные результаты в таблицу. Погрешность определяется по формуле

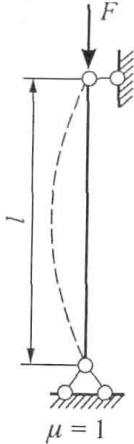
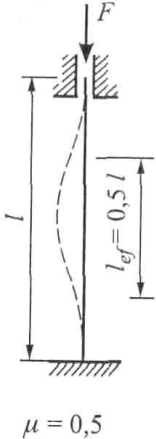
$$\delta = \frac{F_{кр}^{теор} - F_{кр}^{эксп}}{F_{кр}^{эксп}} \cdot 100\%. \quad (8.5)$$

#### Содержание отчета и его форма

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

- название и цель работы, краткий конспект основных теоретических положений, включая схему экспериментальной установки (рисунок 8.1);
- результаты испытаний в соответствии с приводимой таблицей;
- расчеты по определению теоретического значения критической силы для всех способов закрепления концов стержня;
- оценку расхождения между теоретическими и экспериментальными значениями критической силы по формуле (8.5) для всех способов закрепления концов стержня;
- вывод с указанием, какой способ закрепления концов стержня при прочих равных условиях позволяет получить максимальное значение критической силы; оценку, во сколько раз максимальное значение критической силы превышает остальные значения.

| Схема закрепления стержня | Расчетная гибкость стержня | Значение критической силы, Н | Погрешность, % |
|---------------------------|----------------------------|------------------------------|----------------|
|---------------------------|----------------------------|------------------------------|----------------|

|                                                                                                                   |  | Экспериментальное<br>, $F_{кр}^{экс}$ | Теоретическое,<br>$F_{кр}^{теор}$ |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------|-----------------------------------|--|
|  <p><math>\mu = 1</math></p>     |  | 375                                   |                                   |  |
|  <p><math>\mu = 0,5</math></p>  |  | 1500                                  |                                   |  |
|  <p><math>\mu = 0,7</math></p> |  | 730                                   |                                   |  |

#### Контрольные вопросы

1. В чем заключается явление потери устойчивости сжатого стержня?
2. Что называется критической силой?
3. Что называется гибкостью стержня?
4. Запишите формулу Эйлера для определения критической силы сжатого стержня.
5. Как влияет жесткость поперечного сечения  $EI_{min}$  и длина стержня  $l$  на величину критической силы?
6. Какой момент инерции входит в формулу Эйлера?

7. Что представляет собой коэффициент приведения длины стержня  $\mu$  и чему он равен при различных условиях закрепления концов сжатых стержней?
8. Как устанавливается предел применимости формулы Эйлера?
9. Что называется предельной гибкостью?

### **РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА.**

1. Кривошапко, С.Н. Сопротивление материалов: лекции, семинары, расчетно-графические работы: учебник для бакалавров / С.Н. Кривошапко. – М.: Юрайт, 2013. – 413 с.
2. Старовойтов, Э.И. Сопротивление материалов: учебник для вузов / Э.И. Старовойтов. – М.: Физматлит, 2008. – 382 с.
3. Михайлов, А.М. Сопротивление материалов: учебник / А.М. Михайлов. – М.: Академия, 2009. – 448 с.
4. Сопротивление материалов: учебник / Г.Д. Межецкий, Г.Г. Загребин, Н.Н. Решетник, А.А. Слепов. – М.: Дашков и К`, 2008. – 416 с.
5. Копнов, В.А. Сопротивление материалов: руководство для решения задач и выполнения лабораторных и расчетно-графических работ: учеб.пособие / В.А. Копнов, С.Н. Кривошапко. – 2-е изд., стереотип. – М.: Высшая школа, 2005. – 232 с.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Северо-Кавказский федеральный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для практических занятий по дисциплине

«Сопротивление материалов»

|                          |                                    |
|--------------------------|------------------------------------|
| Направление подготовки   | 21.03.01 Нефтегазовое дело         |
| Направленность (профиль) | Бурение нефтяных и газовых скважин |
| Квалификация выпускника  | бакалавр                           |
| Форма обучения           | очная, очно-заочная                |

Ставрополь

Практическое подтверждение основных положений дисциплины «Сопротивление материалов» имеет важное методическое значение в формировании инженерного мышления студента.

Данные методические указания предназначены для выполнения студентами практических занятий по дисциплине «Сопротивление материалов» в условиях дистанционного обучения.

В каждой практической работе изложены основные теоретические положения, приведены примеры расчета (расчета и построения), контрольные задания и контрольные вопросы. Приведен список литературы, рекомендуемый к использованию.

Методические указания предназначены для студентов всех профилей направления 21.03.01 – Нефтегазовое дело.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                            |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Практическое занятие №1. «Построение эпюр продольных сил, нормальных напряжений и удлинений при растяжении (сжатии)» .....                 | 40 |
| Практическое занятие №2. «Построение эпюр крутящих моментов и углов поворота при кручении» .....                                           | 42 |
| Практические занятия №3 ... 5. «Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов при изгибе» .....                                     | 43 |
| Практическое занятие №6. «Построение эпюр продольных и поперечных сил, а также изгибающих моментов при изгибе с растяжением (сжатием)» ... | 49 |
| РАЗДЕЛ 2. ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТОВ .....                                                                                     | 51 |
| Практическое занятие №7. «Расчет статически неопределимой стержневой системы при растяжении (сжатии)» .....                                | 51 |
| РАЗДЕЛ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ .....                                                                              | 54 |
| Практические занятия №8 ... 9 «Определение моментов сопротивления сложных сечений» .....                                                   | 54 |
| РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА .....                                                                                                             | 58 |

**Практическое занятие №1. «Построение эпюр продольных сил, нормальных напряжений и удлинений при растяжении (сжатии)».**

**Задача.** Построить эпюры продольной силы, напряжений и перемещений круглого стержня ступенчатой формы. Из условия прочности определить необходимую площадь поперечных сечений участков. Исходные данные:  $P_1 = 2ql$ ,  $P_2 = 3ql$ ,  $q = 15 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ .

**Решение.**

Выделим на стержне 4 характерных участка. Границами участков в данном случае будут точки приложения сил и сечения, где изменяется их площадь.

Используем метод сечений, двигаясь слева-направо (от свободного конца к заделке, поскольку реакцию опоры заделки мы не определяем).

Поочередно рассекая каждый участок и отбрасывая правую часть стержня, определим на этих участках продольные силы и нормальные напряжения.

$$\text{Участок I. } N = -P_2 = -3ql. \quad \sigma = \frac{N}{0,5A} = -6 \frac{ql}{A}.$$

$$\text{Участок II. } N = -P_2 + P_1 = -3ql + 2ql = -ql. \quad \sigma = \frac{N}{A} = -\frac{ql}{A}.$$

$$\text{Участок III. } N = -P_2 + P_1 = -3ql + 2ql = -ql. \quad \sigma = \frac{N}{2A} = -0,5 \frac{ql}{A}.$$

$$\text{Участок IV. } N = -P_2 + P_1 - P_2 = -3ql + 2ql + 3ql = 2ql. \quad \sigma = \frac{N}{2A} = \frac{ql}{A}.$$

Опасным будет сечение площадью  $0,5A$  на участке I, на котором максимальное значение нормальных напряжений.

Из условия прочности на сжатие (знак силы на этом участке – минус) определим величину  $A$ , характеризующую площадь сечений вала

$$A \geq \frac{N_{\max}}{[\sigma]} = \frac{3 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 1}{0,5 \cdot 120 \cdot 10^6} = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Определим перемещения на участках. Определять перемещения начнем с IV-го участка, поскольку в заделке перемещение равно 0, а перемещение каждого последующего участка складывается из перемещения предыдущего участка и перемещения рассматриваемого.

Участок IV.

$$\Delta l = \frac{Nl}{2AE} = \frac{2ql \cdot l}{2AE} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 0,75 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 0,10 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Участок III.

$$\Delta l = 0,10 \cdot 10^{-3} - \frac{ql \cdot l}{2AE} = 0,10 \cdot 10^{-3} - \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 0,75 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 0,05 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Участок II.

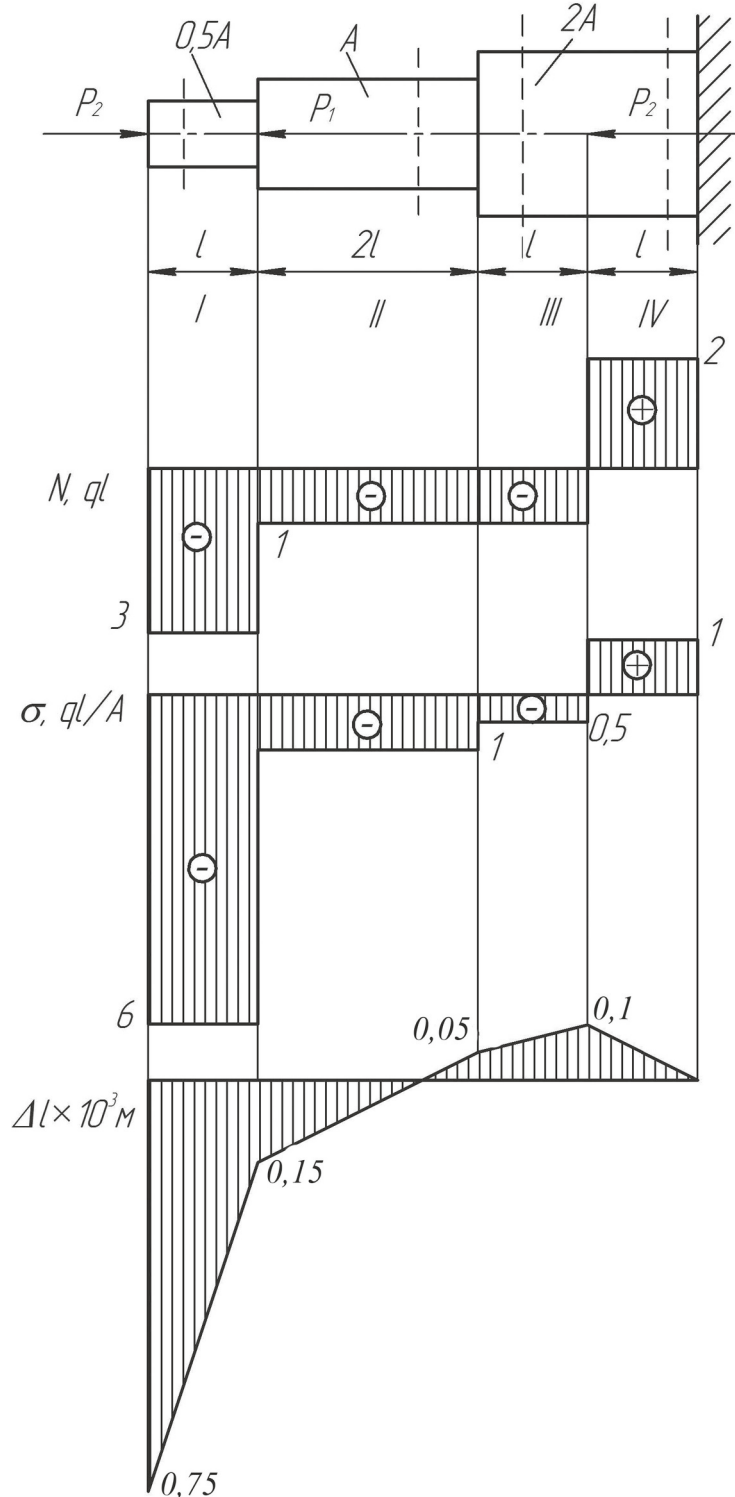


$$\Delta l = 0,05 \cdot 10^{-3} - \frac{ql \cdot 2l}{AE} = 0,05 \cdot 10^{-3} - \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}{0,75 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = -0,15 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Участок I.

$$\Delta l = -0,15 \cdot 10^{-3} - \frac{3ql \cdot l}{0,5AE} = -0,15 \cdot 10^{-3} - \frac{3 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 1}{0,5 \cdot 0,75 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{11}} = -0,75 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Отложим полученные значения сил, напряжений и удлинений на эпюрах, учитывая, что перемещения изменяются на участках линейно.



**Практическое занятие №2. «Построение эпюр крутящих моментов и**

### **углов поворота при кручении».**

**Задача.** Для круглого вала постоянной жесткости, построить эпюры крутящих моментов и углов закручивания. Из условия прочности определить диаметр вала. Проверить вал на жесткость. Исходные данные:  $M_1=ql^2$ ,  $M_2=5ql^2$ ,  $M_3=ql^2$ ,  $q = 15 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  $[\tau] = 60 \text{ МПа}$ ,  $G = 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $[\varphi] = 3^\circ$ . Длина каждого участка равна  $l$ .

#### **Решение.**

Разобьем вал на характерные участки. Границами участков в этом случае будут сечения, где приложены крутящие моменты. Используя метод сечений, и двигаясь справа-налево (от свободного конца к заделке), определим крутящий момент на каждом из этих участков.

Участок I.  $M_z = -M_1 = -ql^2$ .

Участок II.  $M_z = -M_1 - M_2 = -ql^2 - 5ql^2 = -6ql^2$ .

Участок III.  $M_z = -M_1 - M_2 + M_3 = -ql^2 - 5ql^2 + ql^2 = -5ql^2$ .

Отложим эти значения на эпюре крутящих моментов. Опасным является любое сечение на участке II.

Из условия прочности на кручение определим необходимый диаметр вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{z \max}}{0,2[\tau_k]}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{0,2 \cdot 60 \cdot 10^6}} = 0,196 \text{ м}.$$

Принимаем  $d = 0,2 \text{ м}$ . Тогда полярный момент инерции сечения будет равен

$$I_p \approx 0,1d^4 = 0,1 \cdot 0,2^4 = 160 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Углы поворота сечений будем определять, начиная с III-го участка, поскольку в заделке угол поворота равен 0. Поворот каждого участка будет складываться из поворота предыдущего участка и поворота рассматриваемого.

Участок III.

$$\varphi = \frac{M_z l}{G I_p} = \frac{-5 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 1^2 \cdot 1}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 160 \cdot 10^{-6}} = -0,0059 \text{ рад}.$$

Участок II.

$$\varphi = -0,0059 + \frac{-6ql^2 \cdot l}{G I_p} = -0,0059 + \frac{-6 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 1^2 \cdot 1}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 160 \cdot 10^{-6}} = -0,0129 \text{ рад}.$$

Участок I.

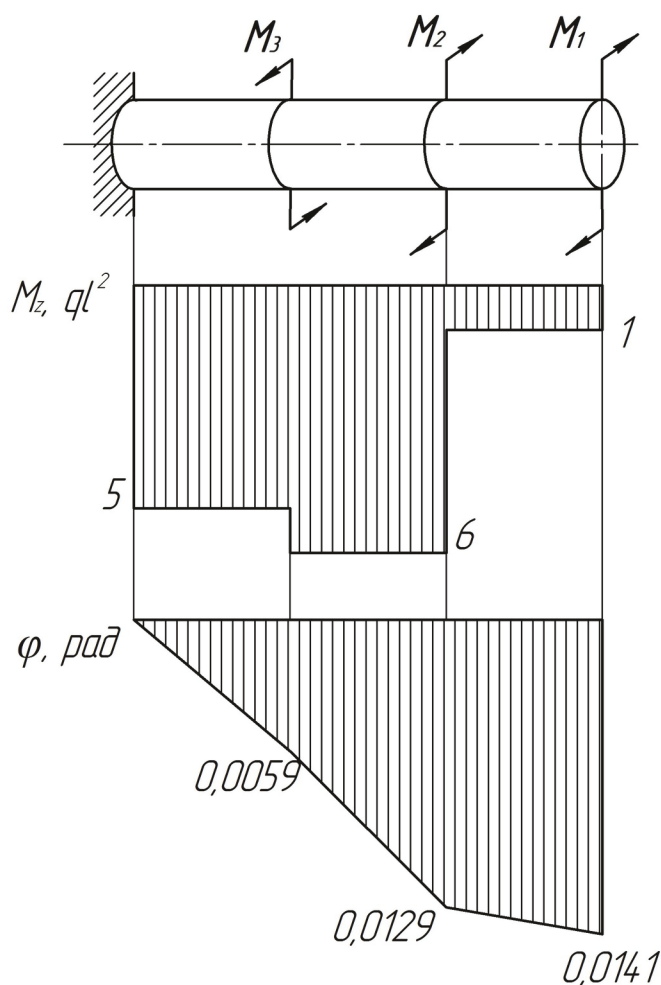
$$\varphi = -0,0129 + \frac{-ql^2 \cdot l}{G I_p} = -0,0129 + \frac{-15 \cdot 10^3 \cdot 1^2 \cdot 1}{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 160 \cdot 10^{-6}} = -0,0141 \text{ рад}.$$

Отложим полученные значения на эпюре углов поворота.

По максимальному значению угла поворота проверим вал на жесткость

$$\varphi_{\max} = -0,0141 \text{ рад} = 50'46'' < [\varphi] = 3^\circ$$

Условие жесткости выполняется.



**Практические занятия №3 ... 5. «Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов при изгибе».**

**Задача 1.** Для консольной балки постоянной жесткости построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, указать опасное сечение. Из условия прочности из таблицы сортамента выбрать двутавровое поперечное сечение.

Исходные данные:  $P_2 = 3ql$ ,  $q_2 = 2q$ ,  $a = l$ ,  $b = 2l$ ,  $q = 15 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$ .

**Решение.**

Балка является консольной, поэтому реакции опоры (жесткой заделки) можно не определять, а двигаться, в этом случае, будем от свободного конца к заделке, т.е. справа-налево.

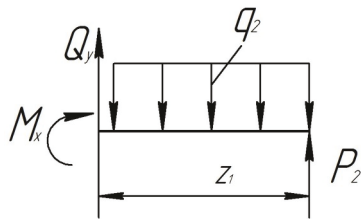
Разобьем балку на два характерных участка и определим поперечную силу и изгибающий момент на каждом из них.

Для этого составим уравнения равновесия для вертикальных сил и изгибающих моментов.

**Участок I.**

Мысленно рассечен первый участок сечения. В полученном сечении силу  $Q_y$  и изгибающий момент  $M_x$  направим в соответствие с правилом (поперечная сила  $Q_y$  направляется так, чтобы она вращала оставленную часть стержня по часовой стрелке, а изгибающий момент  $M_x$  прикладывается к сечению так,

чтобы верхние волокна балки испытывали сжатие, а нижние – растяжение). Получим следующую схему.



Условие равновесия для вертикальных сил

$$Q_y - q_2 z_1 + P_2 = 0$$

Отсюда

$$Q_y = q_2 z_1 - P_2.$$

Поскольку на этом участке величина  $Q_y$  изменяется по длине участка, определим её значение на границах участка.

При  $z_1 = 0$   $Q_y = -P_2 = -3ql$ .

При  $z_1 = b$   $Q_y = q_2 b - P_2 = 2q \cdot 2l - 3ql = ql$ .

Для моментов относительно точки сечения -  $M_x - q_2 \frac{z_1^2}{2} + P_2 z_1 = 0$

Отсюда  $M_x = -q_2 \frac{z_1^2}{2} + P_2 z_1$ .

При  $z_1 = 0$   $M_x = 0$ .

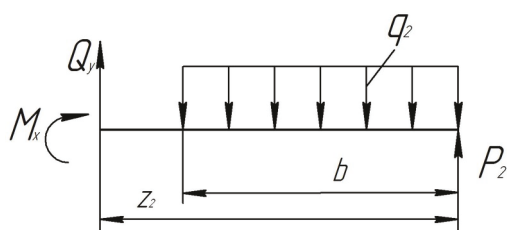
При  $z_1 = b$   $M_x = -q_2 \frac{b^2}{2} + P_2 b = -2q \frac{4l^2}{2} + 3ql \cdot 2l = 2ql^2$ .

Поскольку поперечная сила изменила знак, то в сечении, где она равна нулю изгибающий момент будет иметь точку экстремума (максимум).

Координату точки экстремума момента найдем из условия  $q_2 z_{10} - P_2 = 0$

Отсюда  $z_{10} = \frac{P_2}{q_2} = \frac{3ql}{2q} = 1,5l$  и  $M_{x \max} = -2q \frac{2,25l^2}{2} + 3ql \cdot 1,5l = 2,25ql^2$ .

Участок II.



$$Q_y - q_2 b + P_2 = 0$$

$$Q_y = q_2 b - P_2 = 2q \cdot 2l - 3ql = ql$$

$$- M_x - q_2 b \left( z_2 - \frac{b}{2} \right) + P_2 z_2 = 0$$

$$M_x = -q_2 b \left( z_2 - \frac{b}{2} \right) + P_2 z_2.$$

$z_2 = b$   $M_x = -q_2 \frac{b^2}{2} + P_2 b = -2q \frac{4l^2}{2} + 3ql \cdot 2l = 2ql^2$

$z_2 = a + b$   $M_x = -q_2 b \left( a + \frac{b}{2} \right) + P_2 (a + b) = -2q \cdot 2l \cdot 2l + 3ql \cdot 3l = ql^2$ .

Отложим полученные значения на эпюрах.

Эпюры построим «на растянутом волокне», откладывая отрицательные значения изгибающего момента сверху, а положительные – снизу.

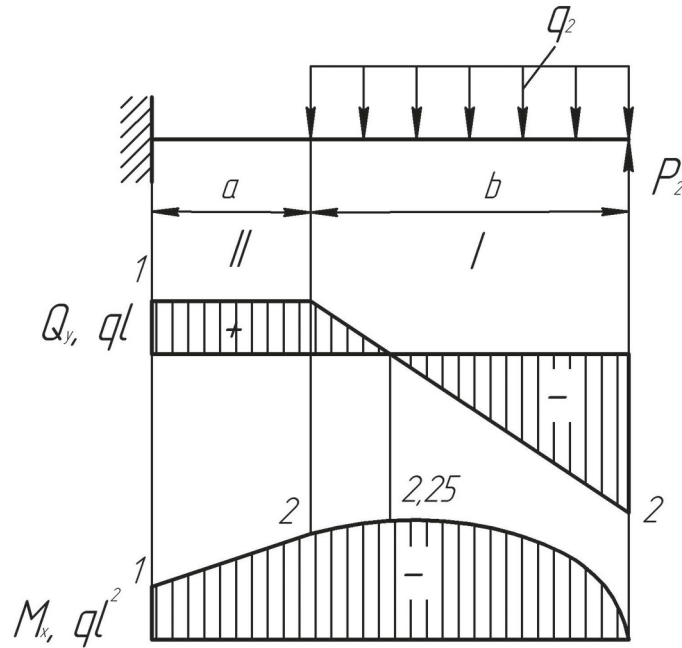
Опасное сечение будет в точке А на участке I, в которой максимальное значение изгибающего момента

$$M_{x \max} = 2,25ql^2.$$

Из условия прочности на изгиб определим момент сопротивления сечения

$$W_x \geq \frac{M_{x \max}}{[\sigma]} = \frac{2,25ql^2}{[\sigma]} = \frac{2,25 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{120 \cdot 10^6} = 0,28125 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 281,25 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента выбираем двутавр №24, у которого  $W_x = 289 \text{ см}^3$ .

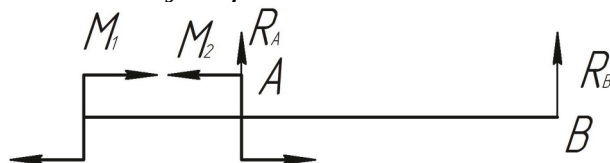


**Задача 2.** Для двухопорной балки постоянной жесткости определить реакции опор, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, указать опасное сечение. Из условия прочности выбрать двутавровое поперечное сечение.

Исходные данные:  $M_1 = ql^2$ ,  $M_2 = 5ql^2$ ,  $a = l$ ,  $b = 2l$ ,  $q = 15 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$ .

**Решение.**

Балка имеет две опоры, поэтому для определения внутренних усилий в сечении между опорами необходимо найти хотя бы одну из реакций опор. Изобразим схему балки с действующими на неё силами.



Определим, например, реакцию опоры B.

Для этого составим уравнение равновесия

$$\sum M_A = 0 \quad - M_1 + M_2 + R_B b = 0$$

$$\text{Отсюда } R_B = \frac{M_1 - M_2}{b} = \frac{ql^2 - 5ql^2}{2l} = -2ql.$$

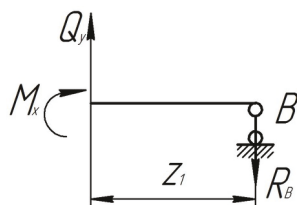
Поскольку значение  $R_B$  отрицательное, изменим направление этой силы реакции опоры на противоположное.

Разобьем балку на два характерных участка. Составим уравнения равновесия сил и моментов для каждого участка.

Участок I. Будем двигаться справа-налево.

Для вертикальных сил условие равновесия имеет вид  $Q_y + R_B = 0$ .

Отсюда  $Q_y = -R_B = 2ql$ .



Для изгибающих моментов

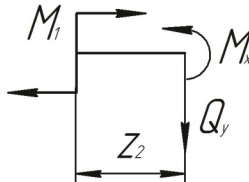
$$-M_x + R_B z_1 = 0$$

Отсюда  $M_x = R_B z_1$ .

При  $z_1 = 0$   $M_x = 0$

При  $z_1 = b$   $M_x = R_B b = -2ql \cdot 2l = -4ql^2$ .

Участок II. Будем двигаться слева-направо.



Для вертикальных сил  $Q_y = 0$

Для моментов  $-M_1 + M_x = 0$

Отсюда  $M_x = M_1 = ql^2$ .

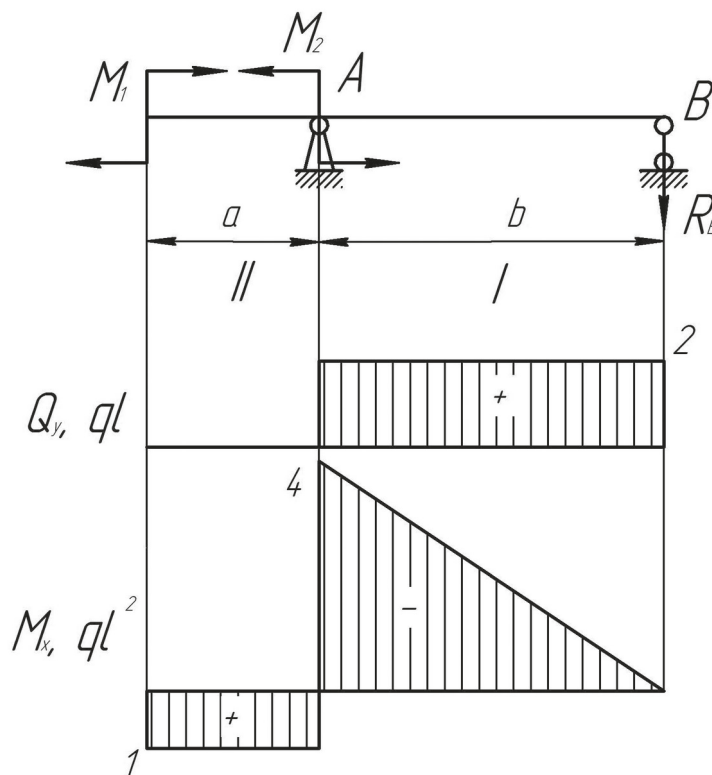
Отложим полученные значения на эпюрах. Эпюру изгибающих моментов построим «на растянутом волокне».

Опасным будет сечение в точке А, где максимален изгибающий момент.

Из условия прочности на изгиб определим необходимый момент сопротивления сечения

$$W_x \geq \frac{M_{x\max}}{[\sigma]} = \frac{4ql^2}{[\sigma]} = \frac{4 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{120 \cdot 10^6} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 500 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента выбираем двутавр №30а, у которого  $W_x = 518 \text{ см}^3$ .



**Задача 3.** Для двухопорной балки постоянной жесткости, показанной на схеме, определить реакции опор, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, указать опасное сечение. Из условия прочности на изгиб выбрать двутавровое поперечное сечение.

Исходные данные:  $P_1 = 2ql$ ,  $M_2 = 5ql^2$ ,  $q_1 = q$ ,  $a = l$ ,  $b = 2l$ ,  $q = 15 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$ .

Решение.

Определим реакцию опоры В. Для этого составим уравнение равновесия

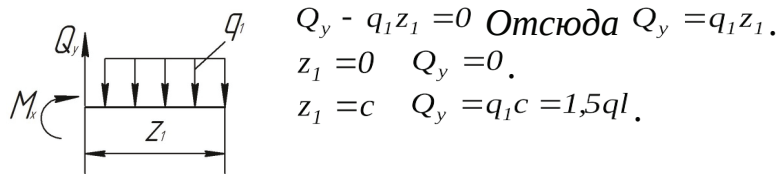
$$\sum M_A = 0. \quad - M_2 - P_1 a + R_B(a + b) - q_1 c(a + b + \frac{c}{2}) = 0$$

Отсюда

$$R_B = \frac{M_2 + P_1 a + q_1 c(a + b + 0,5c)}{(a + b)} = \frac{5ql^2 + 2ql^2 + 5,625ql^2}{3l} = 4,2ql.$$

Разобьем балку на три участка и, двигаясь справа-налево, определим поперечные силы и изгибающие моменты на этих участках.

Участок I.



$$Q_y - q_1 z_1 = 0 \quad \text{Отсюда } Q_y = q_1 z_1.$$

$$z_1 = 0 \quad Q_y = 0.$$

$$z_1 = c \quad Q_y = q_1 c = 1,5ql.$$

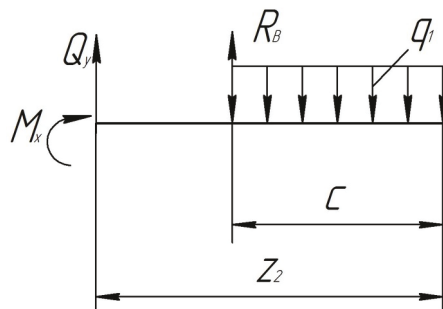
$$- M_x - q_1 \frac{z_1^2}{2} = 0$$

$$\text{Отсюда } M_x = - q_1 \frac{z_1^2}{2}.$$

$$z_1 = 0 \quad M_x = 0.$$

$$z_1 = c \quad M_x = - q_1 \frac{c^2}{2} = - 1,125ql^2.$$

Участок II.



$$Q_y + R_B - q_1 c = 0$$

$$\text{Отсюда } Q_y = - R_B + q_1 c = - 4,2ql + 1,5ql = - 2,7ql.$$

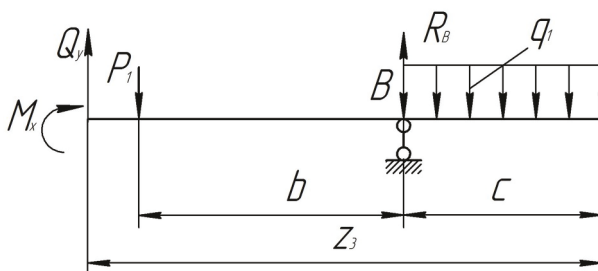
$$- M_x + R_B(z_2 - c) - q_1 c(z_2 - \frac{c}{2}) = 0$$

$$\text{Отсюда } M_x = R_B(z_2 - c) - q_1 c(z_2 - \frac{c}{2}).$$

$$z_2 = c \quad M_x = - q_1 \frac{c^2}{2} = - 1,125ql^2.$$

$$z_2 = b + c \quad M_x = R_B b - q_1 c(b + \frac{c}{2}) = 8,2ql^2 - 4,125ql^2 = 4,275ql^2.$$

Участок III.



Уравнение равновесия сил

$$Q_y - P_1 + R_B - q_1 c = 0$$

Отсюда

$$Q_y = P_1 - R_B + q_1 c = 2ql - 4,2ql + 1,5ql = - 0,7ql$$

$$- M_x - P_1(z_3 - b - c) + R_B(z_3 - c) - q_1 c(z_3 - \frac{c}{2}) = 0$$

Отсюда

$$M_x = -P_1(z_3 - b - c) + R_B(z_3 - c) - q_1c(z_3 - \frac{c}{2}).$$

$$z_2 = b + c$$

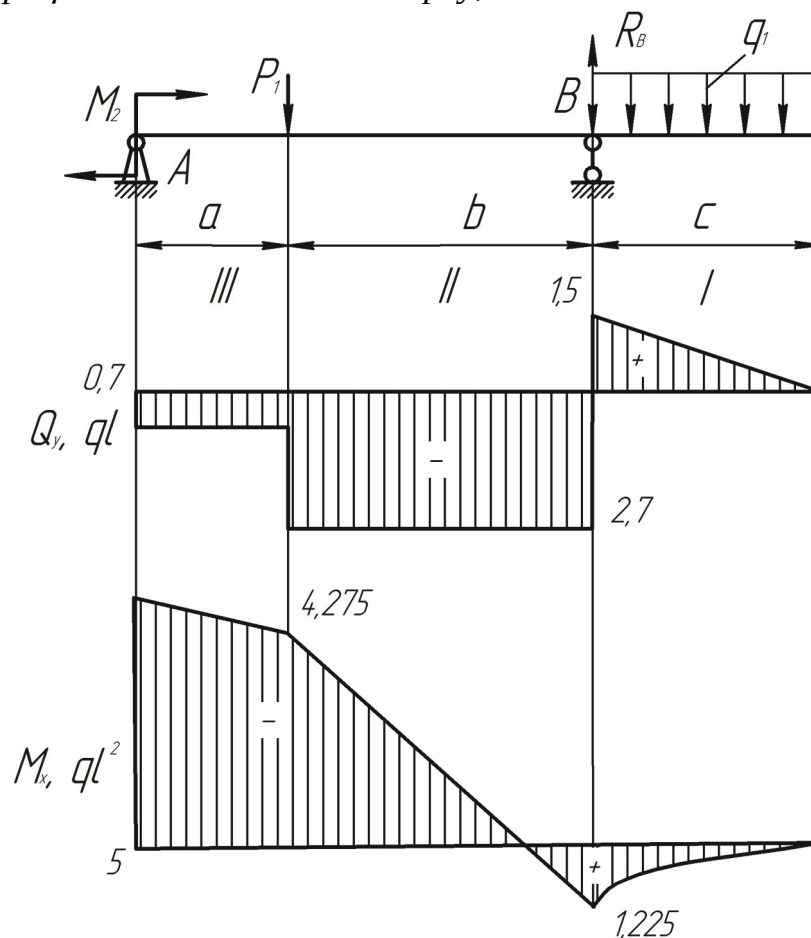
$$M_x = R_B b - q_1 c(b + \frac{c}{2}) = 8,2ql^2 - 4,125ql^2 = 4,275ql^2.$$

$$z_2 = a + b + c$$

$$M_x = -P_1 a + R_B(a + b) - q_1 c(a + b + \frac{c}{2}) = 2ql^2 + 4,2ql \cdot 3l - q \cdot 1,5l \cdot 3,75l = 5ql^2.$$

Отложим полученные значения на эпюрах.

Эпюру изгибающих моментов построим на «растянутом волокне», откладывая отрицательные значения сверху, положительные – снизу.



Опасным является сечение в точке А (значение изгибающего момента максимально  $M_{x\max} = 5ql^2$ ).

Из условия прочности на изгиб определим момент сопротивления сечения

$$W_x \geq \frac{M_{x\max}}{[\sigma]} = \frac{5ql^2}{[\sigma]} = \frac{5 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{120 \cdot 10^6} = 0,625 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 625 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента выбираем двутавр №36, у которого  $W_x = 743 \text{ см}^3$ .

**Практическое занятие №6. «Построение эпюр продольных и**



**поперечных сил, а также изгибающих моментов при изгибе с растяжением (сжатием)».**

**Задача.** Для плоской статически определимой рамы построить эпюры продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов, указать опасное сечение.

Проверить условие прочности, если поперечное сечение представляет собой швеллер №27а ( $A = 40,2 \text{ см}^2$ ,  $W_x = 317 \text{ см}^3$ ).

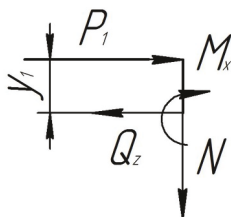
Исходные данные:  $P_1 = 2ql$ ,  $M_1 = ql^2$ ,  $q_2 = 2q$ ,  $a = l$ ,  $b = 2l$ ,  $d = 0,5l$ ,  $q = 15 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$ .

**Решение.**

Разобьем балку на характерные участки. В данном случае балка имеет 4 участка. Пользуясь методом сечений, определим продольные и поперечные силы, а также изгибающие моменты на этих участках. Для этого составим уравнения равновесия продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов.

Внутреннюю продольную силу в рассматриваемом сечении направим так, чтобы она была растягивающей. Поперечную силу и изгибающий момент – в соответствии с рассмотренным ранее правилом.

Участок I.



Уравнение равновесия продольных сил  $N = 0$ ;  
Уравнение равновесия поперечных сил  $-Q_z + P_1 = 0$   
Отсюда  $Q_z = P_1 = 2ql$ .

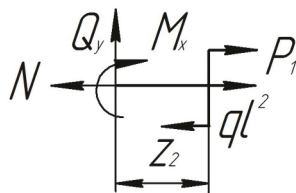
Уравнение равновесия изгибающих моментов

$$-P_1 y_1 - M_x = 0$$

Отсюда  $M_x = -P_1 y_1$ .

При  $y_1 = 0$   $M_x = 0$  При  $y_1 = d$   $M_x = -P_1 d = -2ql \cdot 0,5l = -ql$ .

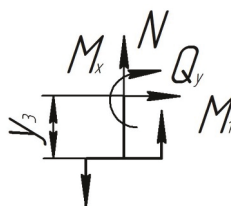
Участок II.



$-N + P_1 = 0$   
Отсюда  $N = P_1 = 2ql$ .  
 $Q_y = 0$ .

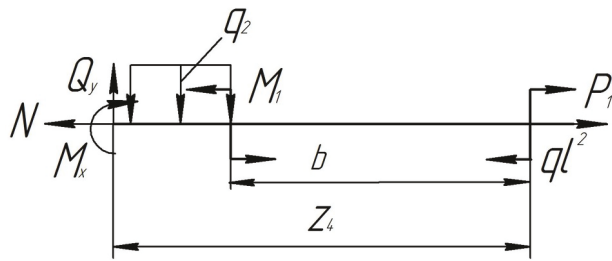
$$-M_x - ql^2 = 0 \quad \text{Отсюда} \quad M_x = -ql^2.$$

Участок III.



$N = 0$ .  
 $Q_y = 0$ .  
 $-M_x + M_1 = 0$   
Отсюда  $M_x = M_1 = 2ql^2$ .

Участок IV.



$$- N + P_1 = 0$$

$$\text{Отсюда } N = P_1 = 2ql.$$

$$Q_y - q_2(z_4 - b) = 0$$

$$\text{Отсюда } Q_y = q_2(z_4 - b).$$

$$z_4 = b \quad Q_y = 0. \quad z_4 = a + b \quad Q_y = q_2 a = 2ql.$$

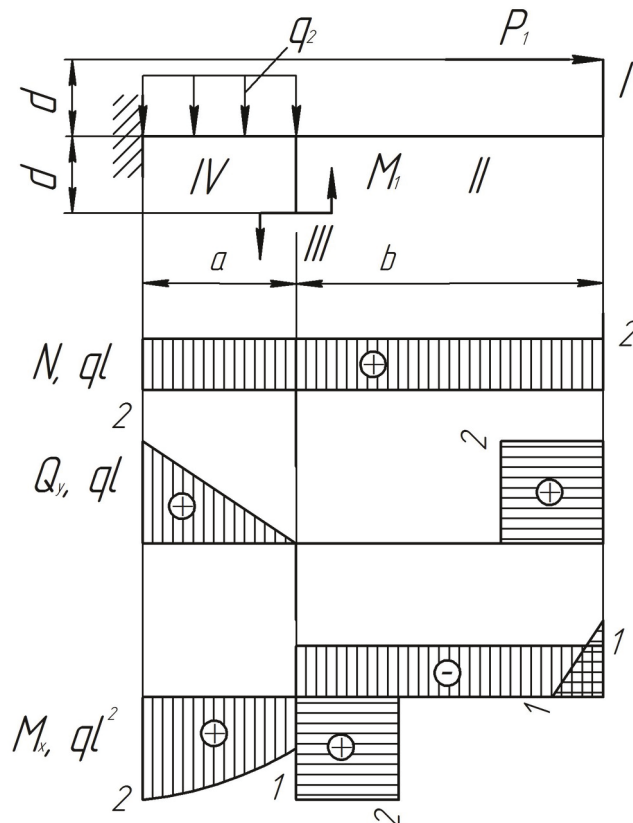
$$- M_x - q_2 \frac{(z_4 - b)^2}{2} + M_1 - ql^2 = 0$$

$$\text{Отсюда } M_x = -q_2 \frac{(z_4 - b)^2}{2} + M_1 - ql^2.$$

$$z_4 = b \quad M_x = M_1 - ql^2 = 2ql^2 - ql^2 = ql^2.$$

$$z_4 = a + b \quad M_x = -q_2 \frac{a^2}{2} + M_1 - ql^2 = ql^2 + 2ql^2 - ql^2 = 2ql^2.$$

Отложим полученные значения на эпюрах. Эпюру изгибающих моментов построим «на растянутом волокне».



Опасным является сечение в жесткой заделке, где максимальны значения сил и моментов. Условие прочности по нормальным напряжениям будет иметь вид

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma].$$

Для опасного сечения

$$\sigma = \frac{2ql}{A} + \frac{2ql^2}{W_x} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 10^3}{10,9 \cdot 10^{-4}} + \frac{2 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 1^2}{317 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 7,5 \cdot 10^6 + 94,6 \cdot 10^6 = 102,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 102,1 \text{ МПа} \leq [\sigma] = 120 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

## РАЗДЕЛ 2. ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТОВ.

### *Практическое занятие №7. «Расчет статически неопределимой стержневой системы при растяжении (сжатии)».*

Задача. Жесткий брус, деформацией которого можно пренебречь, опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням при помощи шарниров.

Требуется найти:

- 1) усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу  $P$ ;
- 2) допускаемую нагрузку  $[P]$ , приняв допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ;
- 3) предельную грузоподъемность системы  $P_{\text{пред}}^T$  и допускаемую нагрузку  $[P^T]$ , если предел текучести  $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$  и коэффициент запаса прочности  $n_T = 1,5$ .

Сравнив величины  $[P]$  и  $[P_T]$ , сделать вывод о том, какой из методов расчетов (допускаемых напряжений или разрушающих нагрузок) дает более экономичное решение и объяснить почему. Исходные данные: площадь поперечных сечений стержней  $A = 10 \text{ см}^2$ ;  $a = 2 \text{ м}$ ,  $b = 2 \text{ м}$ ,  $c = 1 \text{ м}$ ,  $d = 0,5 \text{ м}$ .

Решение.

Отбросим опорные шарниры стержней и учтем их влияние на конструкцию продольными силами  $N_1$  и  $N_2$ . Обозначим буквами характерные точки.

Найдем косинус угла  $\alpha$

$$\cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0,5^2}} = 0,89.$$

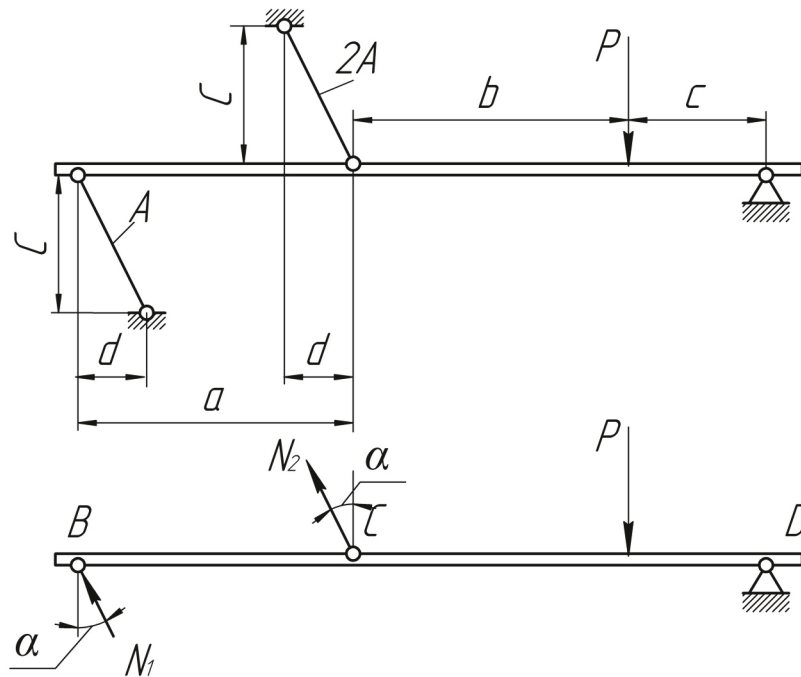
Составим уравнение равновесия в виде суммы моментов всех сил относительно точки  $D$

$$\Sigma M_D = 0.$$

$$Pc - N_1 \cos \alpha (a + b + c) - N_2 \cos \alpha (b + c) = 0$$

или

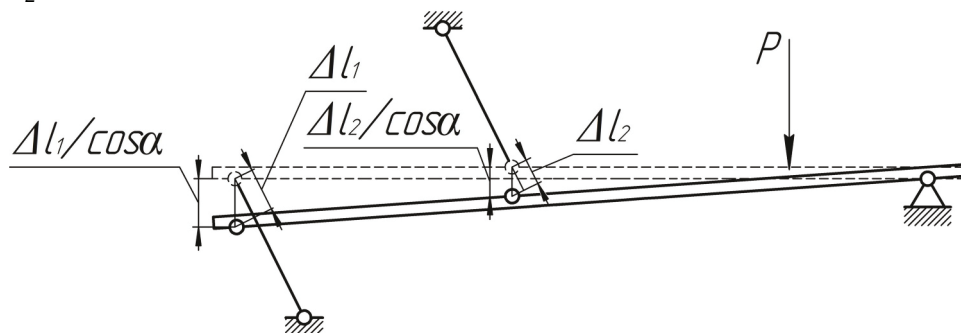
$$4,45 N_1 + 2,67 N_2 = P$$



В этом уравнении две неизвестные величины, поэтому вторым уравнением, позволяющим составить систему уравнений, будет уравнение совместности перемещений.

Для этого рассмотрим деформирование конструкции. В результате удлинения стержней брус повернется вокруг шарнира D против часовой стрелки, оставаясь прямым, т.е. из положения BD он перейдет в положение B'D.

Перемещение шарнира B будет  $BB' = \Delta l_1 / \cos \alpha$ , а перемещение шарнира C будет  $CC' = \Delta l_2 / \cos \alpha$ .



Из подобия треугольников DBB' и DCC' получаем

$$\frac{\Delta l_1}{\cos \alpha \cdot a} = \frac{\Delta l_2}{\cos \alpha (b + c)};$$

$$\Delta l_2 = 1,5 \Delta l_1.$$

Поскольку

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E A}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E \cdot 2 A}$$

или

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \sqrt{c^2 + d^2}}{E A}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \sqrt{c^2 + d^2}}{2 E A},$$

где  $l_1 = l_2$  – длины стержней, получим

$$N_2 = 3 N_1.$$

Подставим полученное соотношение в уравнение равновесия

$$4,45 N_1 + 8 N_2 = P$$

или

$$N_1 = 0,08 P \text{ и } N_2 = 0,24 P.$$

Нормальные напряжения в стержнях следующие:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{0,08 P}{10 \cdot 10^{-4}} = 80 P; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{0,24 P}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 120 P.$$

Определим  $[P]$  – максимальное значение внешней силы  $P$ , при котором условие прочности выполняется в обоих стержнях. Для этого напряжение в более нагруженном втором стержне приравняем к допускаемому напряжению, тогда

$$[P] = \frac{[\sigma]}{120} = \frac{160 \cdot 10^6}{120} = 1,33 \cdot 10^6 \text{ Н} = 1330 \text{ кН}.$$

Значение предельной нагрузки, при которой во всех точках системы напряжения достигают предела текучести, определим из условия предельного равновесия

$$4,45 \sigma_1 \cdot A + 2,67 \sigma_2 \cdot 2A = P$$

где  $N_1 = \sigma_1 A$  и  $N_2 = \sigma_2 \cdot 2A$ .

Приравняв напряжения в стержнях к пределу текучести ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_T$ ), а силу к предельной ( $P = P_{np}$ ), получим

$$P_{np} = 9,79 \sigma_T A = 9,79 \cdot 240 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 2349,6 \cdot 10^3 \text{ Н} = 2349,6 \text{ кН}.$$

С учетом коэффициента запаса прочности допускаемая нагрузка будет равна  $[P^T] = \frac{P_{np}}{n} = \frac{2349,6}{1,5} = 1566 \text{ кН}.$

Разница в значениях максимальной внешней нагрузки

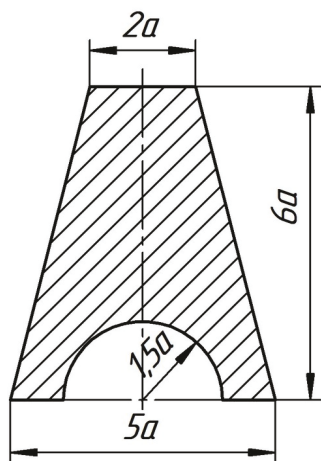
$$\Delta P_{max} = \frac{[P^T] - [P]}{[P]} 100\% = \frac{1566 - 1330}{1330} 100\% = 17,8\%.$$

Таким образом, при расчете по допускаемым нагрузкам несущая способность (грузоподъемность) оказалась на 17,8% выше, чем при расчете по допускаемым напряжениям, что указывает на возможность проектирования более экономичных конструкций, используя расчет по допускаемым нагрузкам.

### РАЗДЕЛ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ.

Практические занятия №8 ... 9 «Определение моментов сопротивления

сложных сечений».



**Задача 1.** Для симметричного поперечного сечения ( $a = 3 \text{ см}$ ) необходимо:

- определить координаты центра тяжести сечения, предварительно выбрав исходную систему координат;
- вычислить главные центральные моменты инерции;
- найти моменты сопротивления сечения в главных осях инерции.

Для расчета необходимо вычертить сечение в масштабе (М 1:1 либо М 1:2) и нанести на чертеж все размеры и оси, используемые в расчете, и расстояния между ними.

Решение.

Выберем исходную систему координат. Ось  $y$  направим по оси симметрии сечения, а ось  $x$  – по её нижней грани.

Для определения центра тяжести разобьем симметричное сечение на простые фигуры.

Для этого дополним сечение до прямоугольника и определим площади и координаты центров тяжести каждой простой фигуры:

а) прямоугольник

$$A_1 = 5a \cdot 6a = 30a^2 = 270 \text{ см}^2; \quad y_1 = 3a = 9 \text{ см}.$$

б) треугольник

$$A_2 = \frac{6a \cdot 1.5a}{2} = 4.5a^2 = 40.5 \text{ см}^2; \quad y_2 = \frac{2}{3}6a = 4a = 12 \text{ см};$$

в) полукруг

$$A_3 = \frac{\pi \cdot (1.5a)^2}{2} = 3.53a^2 = 31.8 \text{ см}^2; \quad y_3 = \frac{4 \cdot 1.5a}{3\pi} = 0.64a = 1.9 \text{ см};$$

Отметим на рисунке главные центральные оси простых фигур.

Тогда координаты центра тяжести всей фигуры будут равны:

$$x_c = 0;$$

$$y_c = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2 - A_3 y_3}{A_1 - A_2 - A_3} = \frac{9 \cdot 270 - 12 \cdot 40.5 - 1.9 \cdot 31.8}{270 - 40.5 - 31.8} = 9.53 \text{ см}.$$

Отметим на рисунке главные центральные оси всего сечения.

Моменты инерции простых фигур относительно их центральных осей будут равны:

а) прямоугольник

$$I_{x1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{5a \cdot (6a)^3}{12} = 90a^4 = 7290 \text{ см}^4;$$

$$I_{y1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{6a \cdot (5a)^3}{12} = 62.5a^4 = 5062.5 \text{ см}^4.$$

б) треугольник

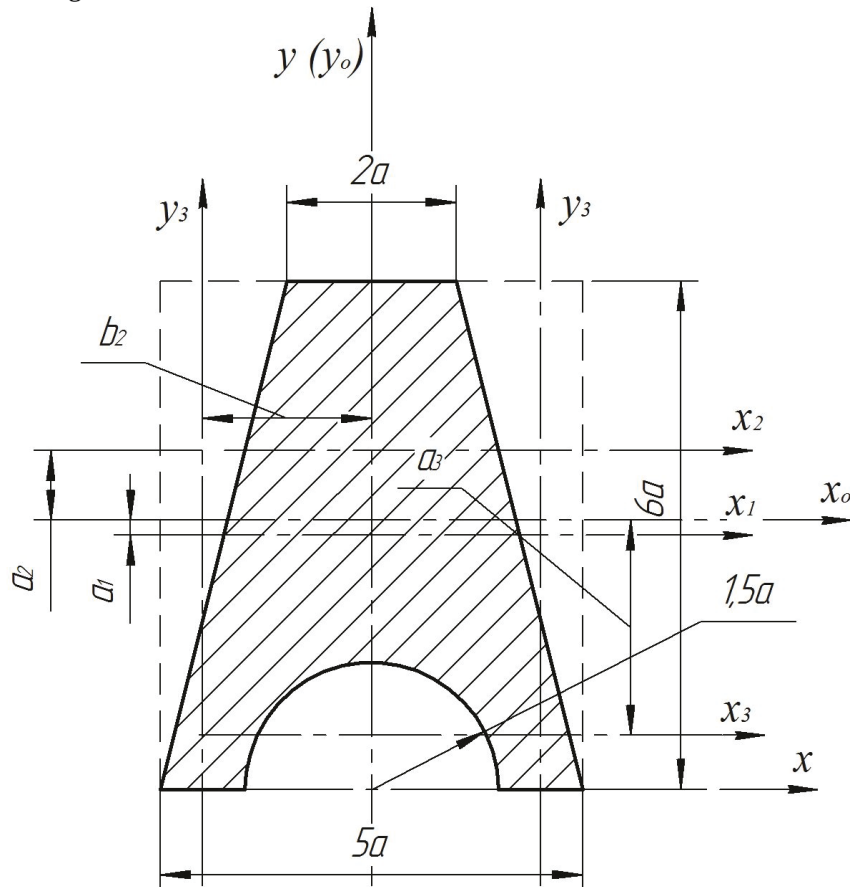
$$I_{x2} = \frac{bh^3}{36} = \frac{1,5a \cdot (6a)^3}{36} = 9a^4 = 729 \text{ см}^4;$$

$$I_{y2} = \frac{hb^3}{36} = \frac{6a \cdot (1,5a)^3}{32} = 0,5625a^4 = 45,5625 \text{ см}^4;$$

в) полукруг

$$I_{x3} = 0,11r^4 = 0,11(1,5a)^4 = 0,56a^4 = 45,1 \text{ см}^4;$$

$$I_{y3} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi(1,5a)^4}{8} = 2a^4 = 162 \text{ см}^4;$$



Расстояния между главными центральными осями простых фигур и сечения в целом будут равны:

а) для прямоугольника  $a_1 = 9,53 - 9 = 0,53 \text{ см};$

б) для треугольников  $a_2 = 12 - 9,53 = 2,47 \text{ см}; b_2 = 2a = 6 \text{ см};$

в) для полукруга  $a_3 = 9,53 - 1,9 = 7,63 \text{ см};$

Моменты инерции простых фигур относительно главных центральных осей всего сечения будут равны:

а) прямоугольника

$$I'_{x0} = I_{x1} + a_1^2 A_1 = 7290 + 0,53^2 \cdot 270 = 7365,843 \text{ см}^4;$$

б) треугольника

$$I''_{x0} = I_{x2} + a_2^2 A_2 = 729 + 2,47^2 \cdot 40,5 = 976,09 \text{ см}^4;$$

$$I''_{y0} = I_{y2} + b_2^2 A_2 = 45,5627 + 6^2 \cdot 40,5 = 1503,5627 \text{ см}^4;$$

в) полукруга

$$I'''_{x0} = I_{x3} + a_3^2 A_3 = 45,1 + 7,63^2 \cdot 31,8 = 1896,4 \text{ см}^4;$$

Тогда моменты инерции всего сечения относительно главных центральных осей будут равны:

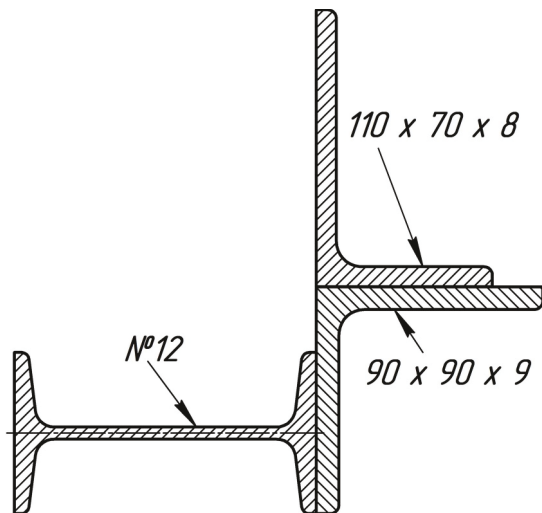


$$I_{x0} = I'_{x0} - 2I''_{x0} - I'''_{x0} = 7365,843 - 2 \cdot 976,02 - 1896,4 = 3517,4 \text{ см}^4;$$

$$I_{y0} = I_{y1} - 2I''_{y0} + I_{y3} = 5062,5 - 2 \cdot 1509,5627 - 162 = 1893,3746 \text{ см}^4.$$

Моменты сопротивления сечения в главных осях инерции будут равны:

$$W_{x0} = \frac{I_{x0}}{x_{\max}} = \frac{3517,4}{9,53} = 369,09 \text{ см}^3; \quad W_{y0} = \frac{I_{y0}}{x_{\max}} = \frac{1893,3746}{15} = 126,22 \text{ см}^3.$$



**Задача 2.** Для несимметричного сечения, составленного из прокатных профилей (двутавр №12, уголок равнобокий 90×90×9, уголок неравнобокий 110×70×8):

- определить координаты центра тяжести сечения, предварительно выбрав исходную систему координат;
- вычислить главные центральные моменты инерции;
- найти моменты сопротивления сечения в главных осях инерции

Для расчета необходимо вычертить сечение в масштабе (М 1:1 либо М 1:2) и нанести на чертеж все размеры и оси, используемые в расчете, и расстояния между ними.

Решение.

Выберем исходную систему координат. Ось  $y$  направим по линии стыка двутавра и равнобокого уголка, ось  $x$  – по линии стыка уголков.

Определим положение центра тяжести несимметричного сечения. Для этого выпишем из таблиц сортамента прокатной стали необходимые исходные данные для каждого прокатного профиля.

С учетом данных таблиц координаты центров тяжести, площади прокатных профилей и моменты инерции будут равны:

а) двутавр №12:

$$x_1 = -6 \text{ см}, \quad y_1 = -(9 - 3,2) = -5,8 \text{ см}; \quad A_1 = 14,7 \text{ см}^2;$$

$$I_{x1} = 27,9 \text{ см}^4; \quad I_{y1} = 350 \text{ см}^4;$$

б) уголок равнобокий 90×90×9:

$$x_2 = 2,55 \text{ см}, \quad y_2 = -2,55 \text{ см}; \quad A_2 = 15,6 \text{ см}^2;$$

$$I_{x2} = 118 \text{ см}^4; \quad I_{y2} = 118 \text{ см}^4;$$

в) уголок неравнобокий 110×70×8:

$$x_3 = 1,64 \text{ см}, \quad y_3 = 3,61 \text{ см}; \quad A_3 = 13,9 \text{ см}^2;$$

$$I_{x3} = 172 \text{ см}^4; \quad I_{y3} = 54,6 \text{ см}^4.$$

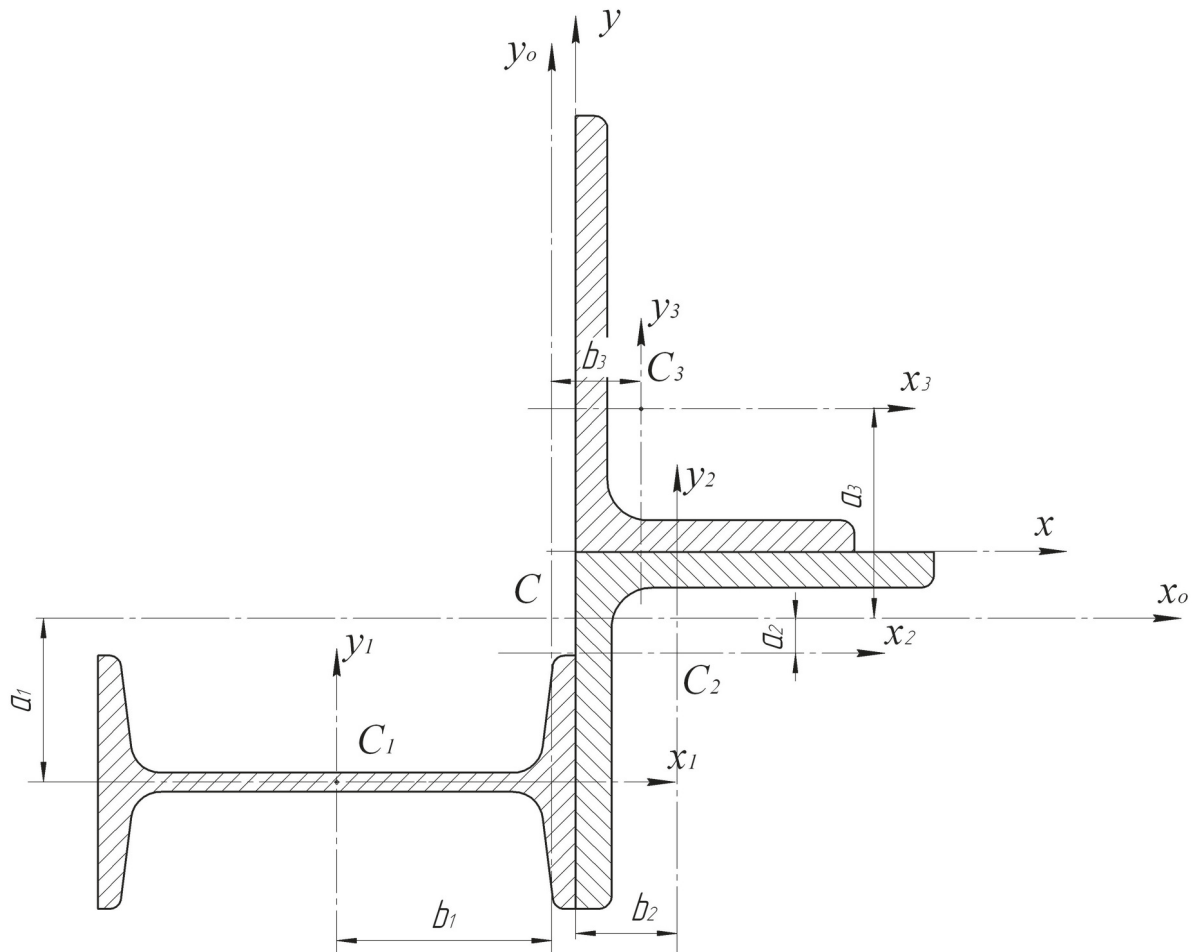
Тогда координаты центра тяжести сечения будут равны:

$$x_c = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{14,7 \cdot (-6) + 15,6 \cdot 2,55 + 13,9 \cdot 1,64}{14,7 + 15,6 + 13,9} = -0,6 \text{ см}.$$



$$y_c = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{14,7 \cdot (-5,8) + 15,6 \cdot (-2,55) + 13,9 \cdot 3,61}{14,7 + 15,6 + 13,9} = -1,7 \text{ см.}$$

Отметим эту точку на чертеже несимметричного сечения.



Расстояния между главными центральными осями прокатных профилей и сечения в целом будут равны:

$$a_1 = 5,8 - 1,7 = 4,1 \text{ см}; \quad b_1 = 6 - 0,6 = 5,4 \text{ см};$$

$$a_2 = 2,55 - 1,7 = 0,85 \text{ см}; \quad b_2 = 2,55 + 0,6 = 3,15 \text{ см};$$

$$a_3 = 3,61 + 1,7 = 5,31 \text{ см}; \quad b_3 = 1,64 + 0,6 = 2,24 \text{ см}.$$

Моменты инерции прокатных профилей относительно главных центральных осей всего сечения будут равны:

а) двутавра:

$$I'_{x0} = I_{x1} + a_1^2 A_1 = 27,9 + 4,1^2 \cdot 14,4 = 270 \text{ см}^4;$$

$$I'_{y0} = I_{y1} + b_1^2 A_1 = 350 + 5,4^2 \cdot 14,4 = 770 \text{ см}^4;$$

б) уголка равнобокого:

$$I''_{x0} = I_{x2} + a_2^2 A_2 = 118 + 0,85^2 \cdot 15,6 = 129,3 \text{ см}^4;$$

$$I''_{y0} = I_{y2} + b_2^2 A_2 = 118 + 3,15^2 \cdot 15,6 = 273 \text{ см}^4;$$

в) уголка неравнобокого:

$$I'''_{x0} = I_{x3} + a_3^2 A_3 = 172 + 5,31^2 \cdot 13,9 = 564 \text{ см}^4;$$

$$I'''_{y0} = I_{y3} + b_3^2 A_3 = 54,6 + 2,24^2 \cdot 13,9 = 124,3 \text{ см}^4.$$

Тогда моменты инерции всего сечения относительно главных центральных осей будут равны:

$$I_{x0} = I'_{x0} - I''_{x0} + I'''_{x0} = 270 + 129,3 + 564 = 963,3 \text{ см}^4;$$

$$I_{y0} = I'_{y0} - I''_{y0} + I'''_{y0} = 770 + 273 + 124,3 = 1167,3 \text{ см}^4.$$

Расстояния от главных центральных осей и наиболее удаленных точек сечения будут равны:

$$y_{\max} = 11 + 1,7 = 12,7 \text{ см}; \quad x_{\max} = 12 - 0,6 = 11,4 \text{ см}.$$

Тогда моменты сопротивления несимметричного сечения относительно главных центральных осей будут равны:

$$W_{x0} = \frac{I_{x0}}{y_{\max}} = \frac{963,3}{12,7} = 75,8 \text{ см}^3; \quad W_{y0} = \frac{I_{y0}}{x_{\max}} = \frac{1167,3}{11,4} = 100,3 \text{ см}^3.$$

### РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Агапов, В.П. Сопротивление материалов: Учебник / Агапов В.П. – М.: Московский государственный строительный университет, ЭБС АСВ, 2014. - 336 с.
2. Тимофеев, С.И. Сопротивление материалов: краткий курс / С.И. Тимофеев. - Изд. 2-е, перераб. и доп. - Ростов-на-Дону: Феникс, 2014. - 334 с.
3. Эрдеди, Н.А. Сопротивление материалов: учеб. пособие / Н.А. Эрдеди, А.А. Эрдеди. - М.: Кнорус, 2016. - 158 с.
4. Сопротивление материалов Электронный ресурс: практикум / В.В. Чупин / Д.Е. Черногубов / О.С. Ковалев / А.Н. Кислов / А.А. Поляков / Ф.Г. Лялина. - Екатеринбург: Уральский федеральный университет, 2015. - 128 с.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Северо-Кавказский федеральный университет»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
к самостоятельной работе по дисциплине  
«СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ»

|                          |                                                                                                                                                           |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Направление подготовки   | 21.03.01 Нефтегазовое дело                                                                                                                                |
| Направленность (профиль) | Эксплуатация и обслуживание<br>объектов добычи нефти, Эксплуатация<br>и обслуживание объектов добычи газа,<br>газоконденсата и подземных хранилищ<br>газа |
| Квалификация выпускника  | бакалавр                                                                                                                                                  |
| Форма обучения           | очная, очно-заочная                                                                                                                                       |

Ставрополь

Самостоятельная работа при изучении дисциплины «Соппротивление материалов» имеет важное значение в формировании инженерного мышления студента.

В процессе обучения студенты специальности 21.03.01 «Соппротивление материалов» реализуют компетенцию ОПК-1.

## ХАРАКТЕРИСТИКА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Настоящие методические указания предназначены для обеспечения самостоятельной работы студентов по дисциплине «Сопротивление материалов». Они дают общую характеристику самостоятельной работы по дисциплине. Даны методические рекомендации по видам самостоятельной работы, список рекомендуемой литературы.

Самостоятельная работа обучающихся по дисциплине «Сопротивление материалов» включает подготовку к лабораторным и практическим занятиям, а также выполнение контрольных заданий.

Контрольные задания выполняются в соответствии с индивидуальным заданием и включают в себя решение 5 заданий, связанных с построением диаграмм различной сложности.

Контрольное задание выполняется на белых листах бумаги формата А1 (с одной стороны) и содержит расчеты в соответствии с заданием по варианту выдающегося педагога/

Поля: верхнее и нижнее – 2 см; правый - 2,5 см; слева - 1,5 см.

Каждое задание выполняется с новым листом. Заголовок отделяется от текста пробелом.

В процессе обучения студенты специальности 21.03.01 «Сопротивление материалов» реализуют компетенцию ОПК-1.  
В процессе обучения студенты специальности 21.03.01 «Сопротивление материалов» реализуют компетенцию ОПК-1.

### **ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ**

Для ступенчатого стержня (схема 1) построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений. Из условия прочности определить площади поперечных сечений.

Для круглого вала постоянной жесткости (схема 2) построить эпюры крутящих моментов, напряжений и углов закручивания. Из условия прочности определить диаметр вала. Проверить вал на жесткость.

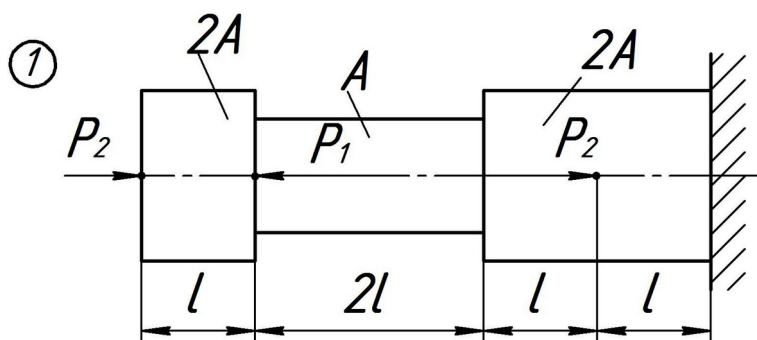
Для балок постоянной жесткости (схемы 3 ... 5) определить опорные

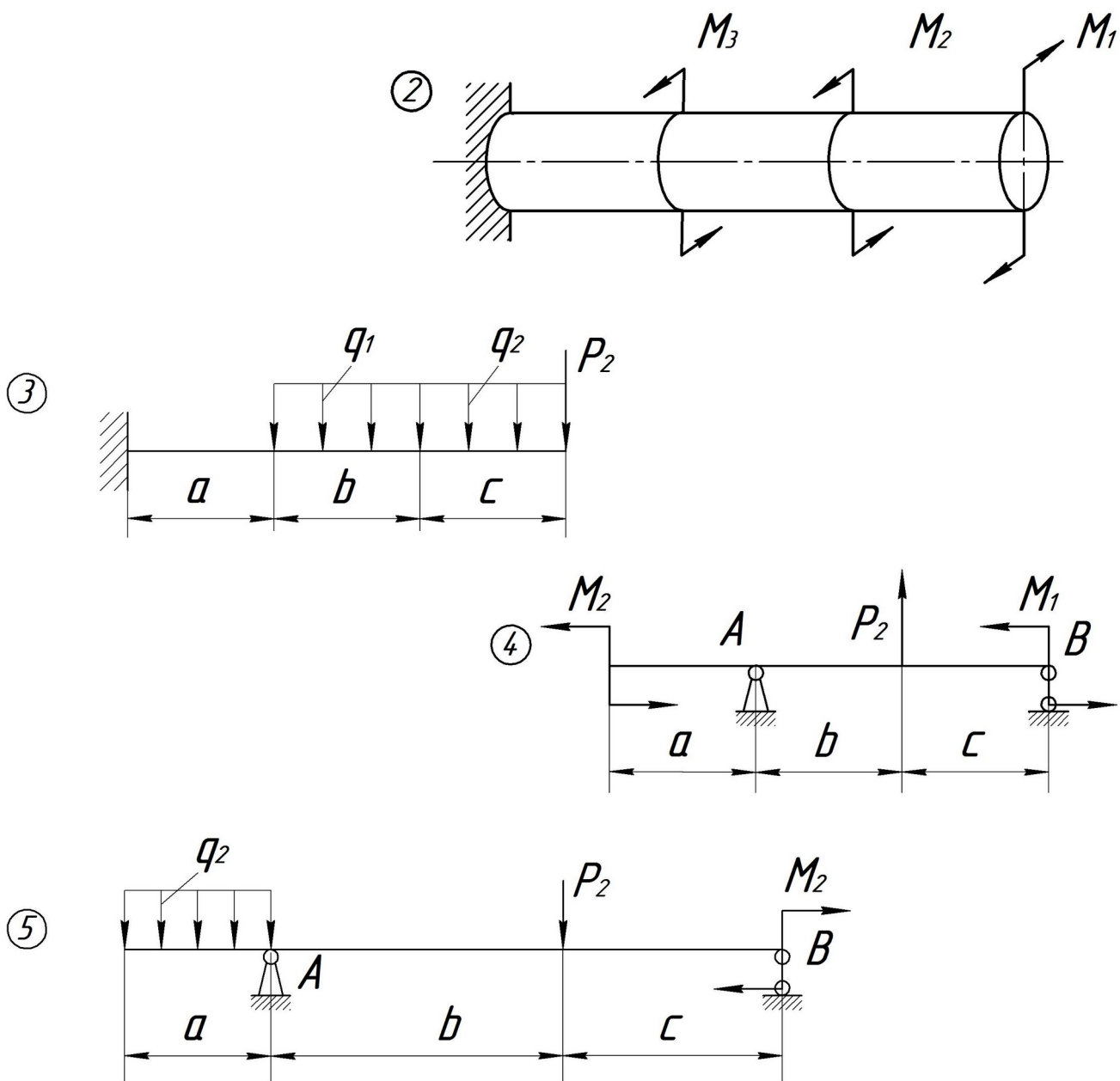
реакции (для консольной балки на схеме 3 опорные реакции определять не обязательно), построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, указать опасное сечение. Из условия прочности выбрать двутавровое поперечное сечение.

Для плоской статически определимой рамы (схема 6) построить эпюры продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов, указать опасное сечение (повышенный уровень).

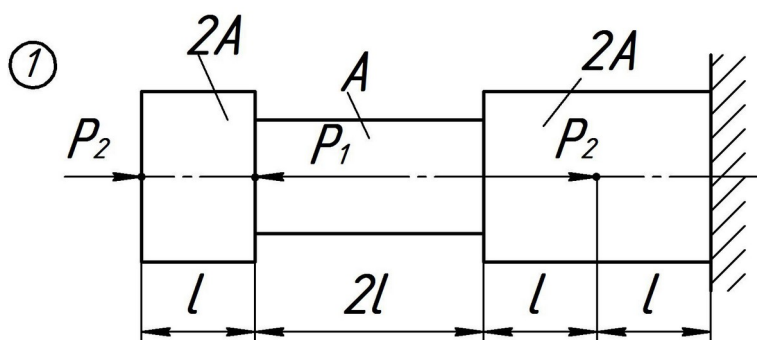
Исходные данные:  $P_1 = 2ql$ ,  $P_2 = 3ql$ ,  $M_1 = ql^2$ ,  $M_2 = 5ql^2$ ,  $M_3 = ql^2$ ,  
 $q_1 = q$ ,  $q_2 = 2q$ ,  $a = l$ ,  $b = 2l$ ,  $c = 1,5l$ ,  $d = 0,5l$ ,  $q = 15 \text{ кН/м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ ,  
 $[\sigma] = 120 \text{ МПа}$ ,  $[\tau] = 60 \text{ МПа}$ ,  $[\varphi] = 3^\circ$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ ,  $G = 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ .

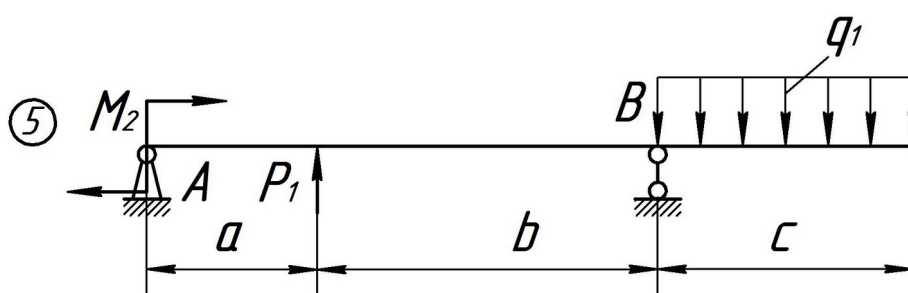
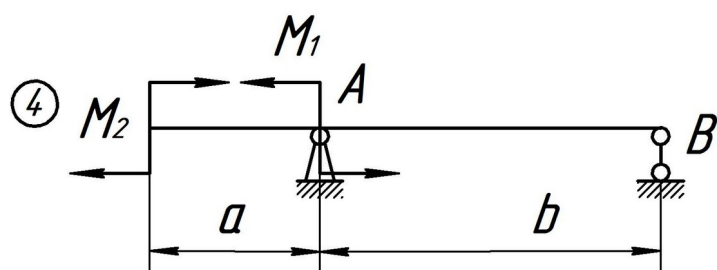
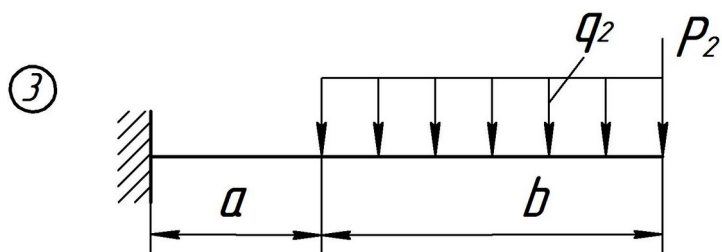
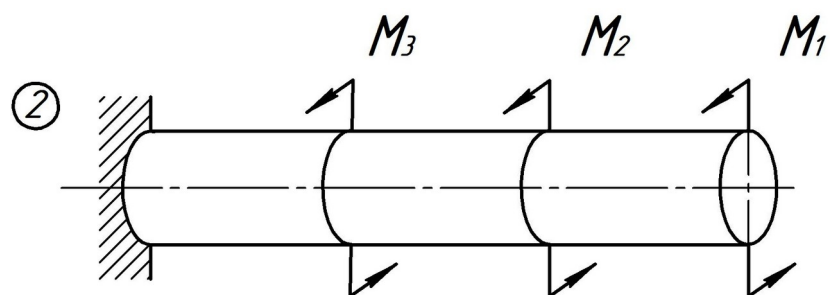
Вариант 1





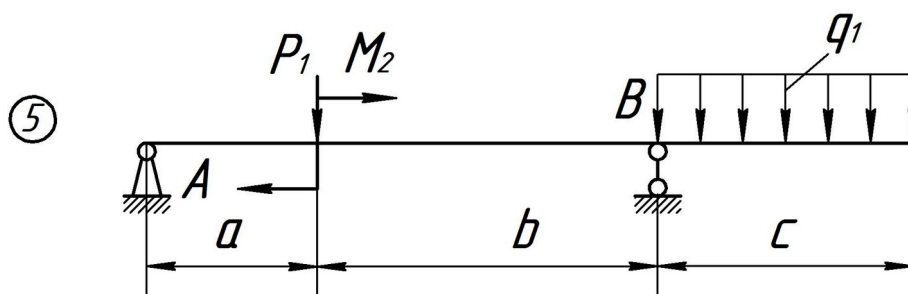
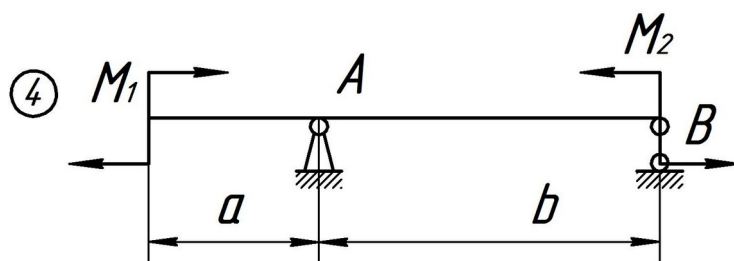
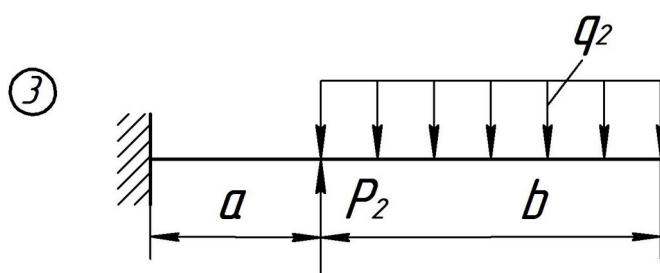
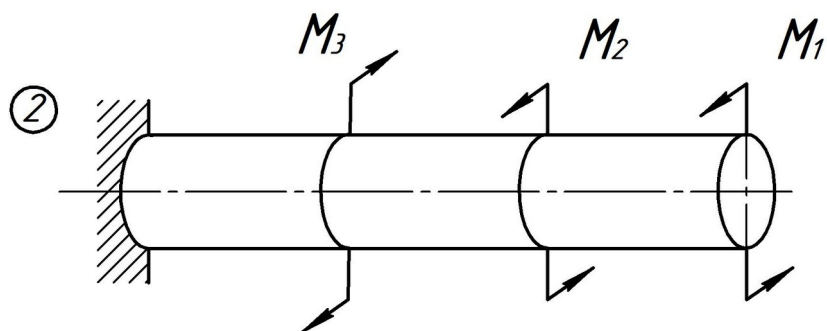
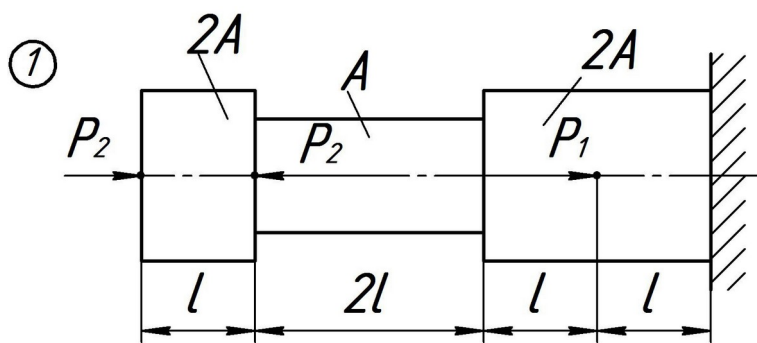
Вариант 2

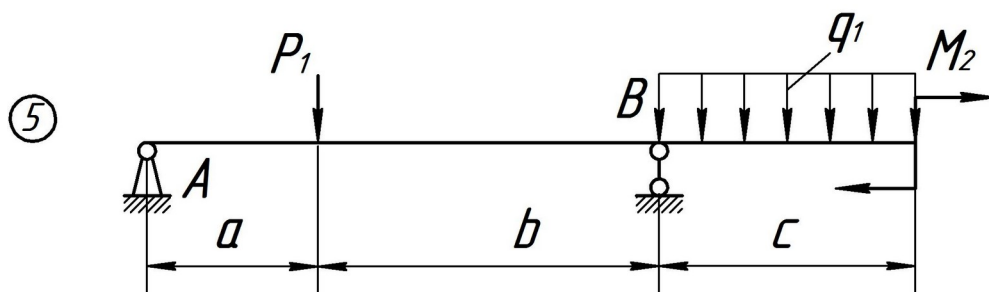
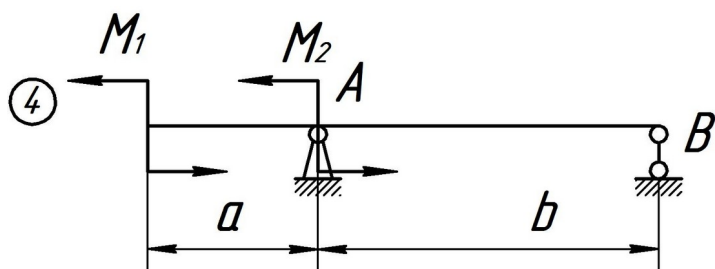
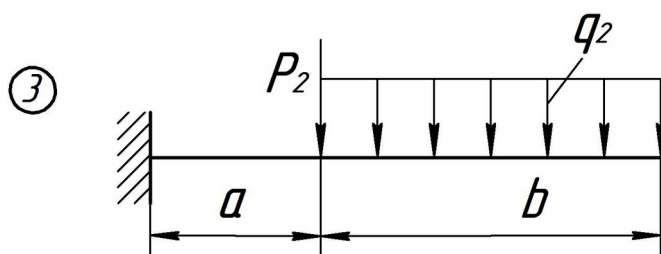
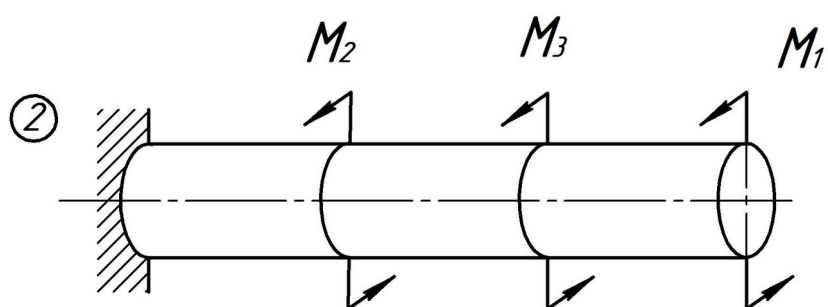
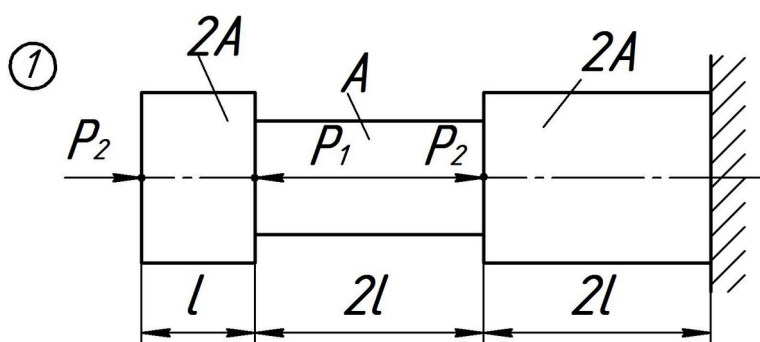




Вариант 3







Вариант 5

