

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к лабораторным работам по дисциплине
«Численные методы и вычислительная
математика»

для студентов направления
09.03.04 «Программная инженерия»

Лабораторная работа 1

Знакомство со средой разработки.

Вычисление погрешностей.

Цель работы: Освоение инструментария для реализации вычислительных алгоритмов. **Содержание:** Настройка среды (Python с NumPy/SciPy или C++). Исследование влияния погрешностей на результат вычислений на примере вычитания близких чисел и вычисления сумм рядов. Оценка абсолютной и относительной погрешности.

Теоретическая часть

В вычислительной математике любое число представляется в компьютере с конечной разрядностью (формат с плавающей точкой). Это приводит к погрешности округления – относительная погрешность представления ограничена машинным эпсилон (ϵ_m). При выполнении арифметических операций погрешности накапливаются.

Особенно опасным является вычитание близких чисел (катастрофическая потеря точности). Пусть a и b – близкие числа, их разность $a-b$ мала, но абсолютная погрешность каждого может быть порядка $|a|\epsilon_m$:

Относительная погрешность разности тогда становится огромной:

$$\frac{|a|\epsilon_m}{|a-b|} \gg \epsilon_m. \quad (1.1)$$

Это явление наблюдается, например, при вычислении корней квадратного уравнения по классической формуле.

При суммировании рядов порядок сложения влияет на результат из-за накопления погрешностей. Для знакопеременных рядов возможна потеря значащих цифр. Метод Кэхэна (компенсационное суммирование) позволяет уменьшить накопленную погрешность, вводя дополнительную переменную для компенсации.

В работе необходимо реализовать вычисления в выбранной среде (Python с

NumPy/SciPy или C++), исследовать влияние указанных эффектов и оценить абсолютную и относительную погрешности по формулам:

$$\Delta = |x - x^*|, \quad \delta = \frac{|x - x^*|}{|x^*|}, \quad (1.2)$$

где x – приближённое значение, x^* – точное (или эталонное).

Индивидуальные задания к лабораторной работе

Знакомство со средой разработки. Вычисление погрешностей.

Вариант	Задание
1	Вычислить $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ при $x = 10^6$ в формате с плавающей точкой. Оценить абсолютную и относительную погрешность по сравнению с аналитическим преобразованием $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$.
2	Суммировать ряд $S = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}$ для $N = 10^6$ в прямом и обратном порядке. Сравнить с точным значением $\pi^2/6$, оценить погрешности.
3	Вычислить $\sin(x)$ с помощью разложения в ряд Тейлора, используя 20 членов. Оценить погрешность для $x = 0.5, 1.0, 2.0$.
4	Реализовать вычисление e^x через ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ для $x = -10, -20$. Проанализировать потерю точности из-за знакопеременных слагаемых.
5	Найти корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ по стандартной формуле и по устойчивой формуле $x_1 = \frac{-b - \text{sign}(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{c}{ax_1}$. Сравнить для $a = 1, b = 10^8, c = 1$.
6	Вычислить определитель матрицы 3×3 с близкими элементами двумя способами: прямым вычислением и с использованием LU-разложения. Оценить погрешность.
7	Сравнить результаты вычисления $\cosh(x)$ через экспоненты и через ряд для $x = 20$. Оценить относительную погрешность.
8	Протабулировать функцию $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ для x вблизи 0. Оценить погрешность, используя разложение в ряд.
9	Вычислить сумму $\sum_{n=1}^{10^7} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (логарифмический ряд) в порядке возрастания и убывания n . Сравнить с $\ln 2$.

10	Реализовать вычисление среднего арифметического массива чисел с плавающей точкой стандартным способом и методом Кэхэна (компенсационное суммирование). Сравнить погрешности.
----	--

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

- 1) Титульный лист с названием работы, ФИО, группой.
- 2) Цель работы.
- 3) Краткое описание используемых методов.
- 4) Листинг программы с комментариями.
- 5) Результаты вычислений в виде таблиц и графиков (при необходимости).
- 6) Анализ полученных погрешностей, сравнение с теоретическими оценками.
- 7) Выводы.

Контрольные вопросы

1. Что такое абсолютная и относительная погрешность?
2. В чём причина потери точности при вычитании близких чисел?
3. Почему порядок суммирования влияет на результат?
4. Какие виды погрешностей существуют в численных методах?
5. Как оценить погрешность суммы ряда?
6. Что такое машинный эпсилон и как он связан с погрешностью округления?
7. Какой способ вычисления квадратного корня из дискриминанта даёт меньшую погрешность?
8. Почему при вычислении экспоненты от отрицательного большого аргумента возникает погрешность?
9. В чём суть метода Кэхэна (компенсационного суммирования)?
10. Как выбрать порядок суммирования для знакопеременного ряда?

Лабораторная работа 2

Отделение и уточнение корней нелинейных уравнений

Цель работы: Освоение методов локализации корней.

Теоретическая часть

Решение нелинейного уравнения $f(x)=0$ начинается с этапа отделения корней – нахождения непересекающихся интервалов, каждый из которых содержит ровно один корень. Для непрерывной функции достаточным условием существования корня на отрезке $[a,b]$ является $f(a)f(b)<0$ (теорема Больцано–Коши). Однако это условие не является необходимым: корень может быть чётной кратности (знак не меняется).

Табулирование – простейший способ отделения: выбирается шаг h и последовательно вычисляются значения функции в точках $x_i = a + ih$. Если на соседних узлах знаки разные, на интервале (x_i, x_{i+1}) есть корень. Шаг должен быть достаточно мал, чтобы не пропустить пару корней, но не слишком мал, чтобы не увеличить объём вычислений.

Графическое отделение – построение графика функции и визуальное определение интервалов, где график пересекает ось Ox . Этот метод полезен для сложных функций и для выбора начальных приближений.

Уточнение корней выполняется в дальнейших работах (методы половинного деления, Ньютона и др.). На данном этапе важно правильно локализовать корни, так как от этого зависит успех последующего уточнения.

Индивидуальные задания к лабораторной работе

Вариант для выполнения заданий, приведенных в лабораторной работе, определяется порядковым номером студента в подгруппе.

Отделение и уточнение корней нелинейных уравнений.

Вариант	Функция $f(x)$	Интервал
1	$x^3 - 3x + 1$	$[-2, 2]$
2	$e^{-x} - \sin x$	$[0, 2]$

3	$\cos x - x$	[0,2]
4	$x^2 - 2$	[1,2]
5	$\ln x + x$	[0.1,2]
6	$2x - \tan x$	[0,1.5]
7	$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$	[0,3]
8	$\sqrt{x} - \cos x$	[0,2]
9	$\arctan x - 0.5$	[-2,2]
10	$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$	[-3,4]

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

1. Титульный лист с названием работы, ФИО, группой.
2. Цель работы.
3. Краткое описание используемых методов.
4. Листинг программы с комментариями.
5. Результаты вычислений в виде таблиц и графиков (при необходимости).
6. Анализ полученных погрешностей, сравнение с теоретическими оценками.
7. Выводы.
8. Список литературы.

Контрольные вопросы

1. Какие способы отделения корней вы знаете?
2. Как по таблице значений определить наличие корня на отрезке?
3. Что такое интервал локализации?
4. Какие трудности возникают при табулировании функций с быстрым изменением?
5. Может ли функция менять знак, но не иметь корня на отрезке?
6. Как влияет шаг табулирования на надёжность отделения корней?
7. Что делать, если на концах отрезка функция одного знака, но корень есть?

8. Как графически отделить корни?
9. В чём отличие локализации корней от уточнения?
10. Как оценить погрешность при отделении корней?

Лабораторная работа 3

Решение нелинейных уравнений: метод половинного деления

Цель работы: Программная реализация метода бисекции.

Теоретическая часть

Метод половинного деления (бисекции) – простейший итерационный метод, гарантирующий сходимость для непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a_0, b_0]$, где $f(a_0)f(b_0) < 0$. На каждом шаге интервал делится пополам: $c_k = (a_k + b_k)/2$. Если $f(c_k) = 0$, корень найден. Иначе выбирается та половина $[a_k, c_k]$ или $[c_k, b_k]$, на концах которой функция имеет разные знаки.

Сходимость: длина интервала уменьшается вдвое на каждой итерации:

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}. \quad (3.1)$$

Для достижения точности ε (т.е. $|x^* - c_k| \leq \varepsilon$) требуется:

$$k \geq \log_2 \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}. \quad (3.2)$$

Скорость сходимости линейная (первый порядок). Метод устойчив к погрешностям округления, но медленный.

Критерий остановки может быть по длине интервала, по изменению приближения или по значению функции. В работе следует использовать комбинированный критерий:

$$|b_k - a_k| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |f(c_k)| < \delta. \quad (3.3)$$

Сравнение с аналитическим решением позволяет оценить фактическую погрешность.

Индивидуальные задания к лабораторной работе

Решение нелинейных уравнений: метод половинного деления

Вариант	Функция $f(x)$	Интервал
1	$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	[0,4]
2	$e^x - 2x - 1$	[0,2]
3	$\sin x - 0.5x$	[0,2]
4	$x^2 - \cos x$	[0,2]
5	$x^3 - 2x + 2$	[-2,0]
6	$3x - e^x$	[0,2]
7	$x^3 + 4x^2 - 10$	[1,2]
8	$\ln(x + 1) - 0.5$	[0,2]
9	$x^5 - 3x^3 + 2x - 1$	[-2,2]
10	$e^{-x} - x$	[0,1]

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

- 1) Цель работы.
- 2) Теоретические сведения о методах отделения корней.
- 3) Таблица значений функции.
- 4) График функции с отмеченными интервалами.
- 5) Описание алгоритма уточнения корня (для одного из методов).
- 6) Результаты уточнения: корни, погрешность.
- 7) Выводы.

Контрольные вопросы

1. Какие способы отделения корней вы знаете?
2. Как по таблице значений определить наличие корня на отрезке?
3. Что такое интервал локализации?
4. Какие трудности возникают при табулировании функций с быстрым изменением?

5. Может ли функция менять знак, но не иметь корня на отрезке?
6. Как влияет шаг табулирования на надёжность отделения корней?
7. Что делать, если на концах отрезка функция одного знака, но корень есть?
8. Как графически отделить корни?
9. В чём отличие локализации корней от уточнения?
10. Как оценить погрешность при отделении корней?

Лабораторная работа 4

Решение нелинейных уравнений: метод Ньютона и метод секущих

Цель работы: Реализация методов с более высокой скоростью сходимости.

Теоретическая часть

Метод Ньютона (касательных) основан на линеаризации функции в окрестности текущего приближения:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \quad (4.1)$$

При условии, что $f'(x) \neq 0$ и начальное приближение достаточно близко к корню, метод сходится квадратично (порядок 2):

$$|x_{k+1} - x^*| \approx C|x_k - x^*|^2. \quad (4.2)$$

Требует вычисления производной. Если аналитическая производная недоступна, её можно заменить численной:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h}, \quad (4.3)$$

но это снижает точность и может повлиять на сходимость.

Метод секущих заменяет производную разностным отношением по двум предыдущим приближениям:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}. \quad (4.4)$$

Он не требует вычисления производной и имеет сверхлинейную сходимость порядка $\varphi \approx 1.618$ (золотое сечение). Начальные два приближения

можно взять из интервала локализации.

Сравнение методов проводится по числу итераций, необходимых для достижения заданной точности, а также по количеству вычислений функции (более объективный критерий эффективности).

Индивидуальные задания к лабораторной работе

Задание 1. Решение нелинейных уравнений: метод Ньютона и метод секущих

Варианты	Функция $f(x)$	Интервал (начальное приближение)
1	$x^3 - 2x - 5$	[2,3]
2	$\sin x - x/2$	[1,2]
3	$e^x - 3x$	[0,1]
4	$\ln x - 1/x$	[1,3]
5	$x^4 - x - 10$	[1,2]
6	$\cos x - x^2$	[0,1]
7	$x - \tan x$	[4,5]
8	$x^3 - 10x^2 + 5$	[0,1]
9	$e^{-x} - x^2$	[0,1]
10	$x^2 - 2x - 3$	[-2,0]

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

- 1) Описание методов.
- 2) Алгоритмы.
- 3) Листинг программы.
- 4) Таблица сравнения: число итераций, достигнутая погрешность.
- 5) Графики сходимости (погрешность от итерации) для каждого метода.
- 6) Анализ результатов, выводы о предпочтительности методов.

Контрольные вопросы

1. В чём отличие метода Ньютона от метода секущих?

2. Какой порядок сходимости у метода Ньютона? у метода секущих?
3. Какие требования предъявляются к начальному приближению?
4. Как выбрать производную в методе секущих?
5. Как численная производная влияет на точность?
6. Почему метод Ньютона может расходиться?
7. Как определить критерий остановки?
8. Что такое кратность корня и как она влияет на сходимость?
9. Можно ли применить метод Ньютона к комплексным корням?
10. Сравните эффективность методов (число вычислений функции).

Лабораторная работа 5

Решение СЛАУ методом Гаусса

Цель работы: Реализация прямого метода решения систем линейных уравнений.

Теоретическая часть

Метод Гаусса – классический прямой метод решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $Ax=b$. Состоит из двух этапов:

Прямой ход: приведение расширенной матрицы $[A|b]$ к верхнетреугольному виду U с помощью элементарных преобразований строк. При этом используются операции:

Выбор главного элемента (по столбцу или по всей матрице) для уменьшения погрешности округления.

Исключение переменных: для $i=1..n-1$ для $j=i+1..n$ вычисляем множитель $l_{ji} = a_{ji}^{(i)} / a_{ii}^{(i)}$ и вычитаем из j -й строки i -ю, умноженную на l_{ji} .

Обратный ход: последовательное вычисление неизвестных из верхнетреугольной системы:

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{u_{nn}}, \quad x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j}{u_{ii}}. \quad (5.1)$$

Вычисление определителя: после прямого хода определитель равен произведению диагональных элементов преобразованной матрицы с учётом знака, зависящего от числа перестановок строк:

$$\det A = (-1)^p \prod_{i=1}^n u_{ii}, \quad (5.2)$$

где p – количество перестановок.

Погрешность оценивается через невязку $r = b - Ax_{\text{числ}}$. Для хорошо обусловленных систем невязка мала. Число обусловленности $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ показывает чувствительность решения к погрешностям исходных данных.

Индивидуальные задания к лабораторной работе

Задание 1. Решение СЛАУ методом Гаусса.

Варианты	Матрица A (4×4)	Вектор b
1	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$(1,2,3,4)^T$
2	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$	$(7,5,8,9)^T$
3	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$(3,2,4,5)^T$
4	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$(1,2,3,4)^T$
5	$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$	$(32,23,33,31)^T$

6	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$(5,8,6,10)^T$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(10,8,6,4)^T$
8	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$(8,8,8,8)^T$
9	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$(1,0,0,1)^T$
10	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$(6,8,8,6)^T$

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

- 1) Описание методов.
- 2) Алгоритмы.
- 3) Листинг программы.
- 4) Таблица сравнения: число итераций, достигнутая погрешность.
- 5) Графики сходимости (погрешность от итерации) для каждого метода.
- 6) Анализ результатов, выводы о предпочтительности методов.

Контрольные вопросы

1. В чём отличие метода Ньютона от метода секущих?
2. Какой порядок сходимости у метода Ньютона? у метода секущих?
3. Какие требования предъявляются к начальному приближению?
4. Как выбрать производную в методе секущих?
5. Как численная производная влияет на точность?
6. Почему метод Ньютона может расходиться?

7. Как определить критерий остановки?
8. Что такое кратность корня и как она влияет на сходимость?
9. Можно ли применить метод Ньютона к комплексным корням?
10. Сравните эффективность методов (число вычислений функции).

Лабораторная работа 6

Решение СЛАУ методом прогонки

Цель работы: Реализация специализированного метода для трехдиагональных систем.

Теоретическая часть

Метод прогонки (алгоритм Томаса) – специализированный метод для решения трёхдиагональных систем вида:

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $a_1=0, c_n=0$. Матрица имеет ленточную структуру, что позволяет сократить объём вычислений до $O(n)$ вместо $O(n^3)$ метода Гаусса.

Прямой ход: вычисляются прогоночные коэффициенты α_i, β_i :

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{b_1}, \quad \beta_1 = \frac{d_1}{b_1},$$

$$\alpha_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{d_i - a_i \beta_{i-1}}{b_i - a_i \alpha_{i-1}}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Обратный ход:

$$x_n = \beta_n, \quad x_i = \beta_i - \alpha_i x_{i+1}, \quad i = n-1, \dots, 1.$$

Устойчивость метода обеспечивается при условии диагонального преобладания: $|b_i| > |a_i| + |c_i|$ для всех i . Если это условие выполнено, то знаменатели $b_i - a_i \alpha_{i-1}$ не обращаются в ноль.

Сравнение с методом Гаусса демонстрирует значительный выигрыш в памяти и быстродействии для трёхдиагональных систем.

Индивидуальные задания к лабораторной работе

Задание 1. Решение СЛАУ методом прогонки.

Вариант	Коэффициенты трёхдиагональной системы $a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$ ($i=1..n$, $n=10$)
1	$a_i = -1, b_i = 2, c_i = -1, d_i = 1$ (все i)
2	$a_i = -1, b_i = 3, c_i = -1, d_i = i$
3	$a_i = -2, b_i = 5, c_i = -2, d_i = \sin(i)$
4	$a_i = -1, b_i = 4, c_i = -1, d_i = 0$ (кроме $d_1 = 1, d_n = 1$)
5	$a_i = -1, b_i = 2 + i/10, c_i = -1, d_i = 1$
6	$a_i = -0.5, b_i = 1, c_i = -0.5, d_i = e^{-i}$
7	$a_i = -1, b_i = 2, c_i = -1, d_i = i^2$
8	$a_i = -1, b_i = 2, c_i = -0.5, d_i = 0$ (кроме $d_1 = 1, d_n = 1$)
9	$a_i = -1, b_i = 2 + \cos(i), c_i = -1, d_i = 0.1i$
10	$a_i = -2, b_i = 5, c_i = -2, d_i = 1$ (для всех)

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

- 1) Описание метода прогонки.
- 2) Алгоритм.
- 3) Листинг программы.
- 4) Результаты: решение, невязка.
- 5) Сравнение с методом Гаусса (по точности и времени).
- 6) Выводы.

Контрольные вопросы и тестовые задания

1. Для каких систем применяется метод прогонки?

2. Каковы условия устойчивости прогонки?
3. Почему метод прогонки эффективнее метода Гаусса для трёхдиагональных систем?
4. Как выглядят прогоночные коэффициенты?
5. Что такое прямой и обратный ход в прогонке?
6. Как можно модифицировать прогонку для систем с ленточными матрицами?
7. Какой порядок сложности у метода прогонки?
8. Как влияет диагональное преобладание на устойчивость?
9. Можно ли применять прогонку, если $b_i=0$ для какого-то i ?
10. Как проверить корректность решения?

Лабораторная работа 7

Решение СЛАУ итерационными методами

Цель работы: Реализация итерационных методов и анализ их сходимости.

Теоретическая часть

Итерационные методы используются для решения больших разреженных систем, где прямые методы становятся неэффективными из-за заполнения матрицы. Основная идея – построить последовательность приближений $x^{(k)}$, сходящуюся к точному решению.

Метод Якоби (метод одновременных замен):

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Все новые значения вычисляются на основе предыдущей итерации.

Метод Зейделя (метод последовательных замен) использует уже обновлённые компоненты:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

Обычно сходится быстрее метода Якоби.

Сходимость итерационных методов гарантирована, если матрица AA имеет диагональное преобладание или является симметричной положительно определённой. Скорость сходимости зависит от спектрального радиуса итерационной матрицы.

Критерий остановки: $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$ или $\|r^{(k)}\| = \|b - Ax^{(k)}\| < \varepsilon$.

В работе исследуется зависимость числа итераций от требуемой точности и от числа обусловленности матрицы.

Индивидуальные задания лабораторной работе

Задание 1. Решение СЛАУ итерационными методами

Варианты заданий

Вариант	Матрица A	Вектор b	Примечание
1	$a_{ii} = 4, a_{ij} = 1 (i \neq j) (4 \times 4)$	$(1,1,1,1)^T$	Диагональное преобладание
2	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	$(8,8,8,8)^T$	
3	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	$(1,2,3,4)^T$	Трёхдиагональная
4	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	$(2,2,2,2)^T$	
5	$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$	$(14,15,15,14)^T$	
6	$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$(9,9,9,9)^T$	
7	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	$(4,3,3,4)^T$	
8	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	$(5,6,6,5)^T$	
9	$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	$(10,10,10,10)^T$	
10	$\begin{pmatrix} 3 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 3 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 3 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 3 \end{pmatrix}$	$(3.5,4,4,3.5)^T$	

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

- 1) Описание методов.
- 2) Алгоритмы.
- 3) Листинг программы.
- 4) Таблица: число итераций для разных ε .

- 5) Графики зависимости числа итераций от ε .
- 6) Сравнение методов.
- 7) Выводы о сходимости.

Контрольные вопросы и тестовые задания

1. В чём отличие метода Якоби от метода Зейделя?
2. Какие условия гарантируют сходимость итерационных методов?
3. Как влияет число обусловленности на скорость сходимости?
4. Что такое итерационная матрица?
5. Как выбрать начальное приближение?
6. Как оценить погрешность на k й итерации?
7. В чём преимущество итерационных методов перед прямыми?
8. Как ускорить сходимость (метод верхней релаксации)?
9. Почему метод Зейделя сходится быстрее Якоби?
10. Как проверить, что итерационный процесс сошёлся?

Лабораторная работа 8

Интерполяция полиномом Лагранжа

Цель работы: Реализация глобальной интерполяции.

Теоретическая часть

Интерполяция – построение функции $\varphi(x)$, проходящей через заданные точки (x_i, y_i) , $i=0, \dots, n$. Полином Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \ell_i(x), \quad \ell_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (8.1)$$

Здесь $\ell_i(x)$ – фундаментальные полиномы степени n , удовлетворяющие $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$.

Свойства:

- $L_n(x)$ единственен для заданного набора узлов.
- Вычисление в точке требует $O(n^2)$ операций, если не использовать специальные схемы.
- При равномерном распределении узлов на интервале и увеличении n может возникнуть **явление Рунге**: сильные осцилляции на краях интервала для функций типа $1/(1+25x^2)$. Это связано с тем, что полином высокой степени неустойчив к равномерной сетке.

Оценка погрешности для функции $f(x)$, имеющей $(n+1)$ -ю непрерывную производную:

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad \xi \in (a, b).$$

Для борьбы с явлением Рунге используют узлы Чебышёва или кусочно-полиномиальную интерполяцию (сплайны).

Индивидуальные задания к лабораторной работе

Задание 1. Интерполяция полиномом Лагранжа.

Варианты	Функция $f(x)$	Интервал
1	$\frac{1}{1+25x^2}$	$[-1,1]$
2	e^{-x}	$[0,5]$
3	$\sin x$	$[0,2\pi]$
4	$\ln(1+x)$	$[0,2]$
5	$\sqrt{x}$	$[0,4]$
6	$\tanh x$	$[-2,2]$
7	$\frac{1}{1+x^2}$	$[-5,5]$
8	$\cos(2\pi x)$	$[0,1]$
9	$x^3 - 2x^2 + 3x - 4$	$[-2,2]$

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

- 1) Цель работы.
- 2) Теоретические сведения о методах отделения корней.
- 3) Таблица значений функции.
- 4) График функции с отмеченными интервалами.
- 5) Описание алгоритма уточнения корня (для одного из методов).
- 6) Результаты уточнения: корни, погрешность.
- 7) Выводы.

Контрольные вопросы

1. Какие способы отделения корней вы знаете?
2. Как по таблице начений определить наличие корня на отрезке?
3. Что такое интервал локализации?
4. Какие трудности возникают при табулировании функций с быстрым изменением?
5. Может ли функция менять знак, но не иметь корня на отрезке?
6. Как влияет шаг табулирования на надёжность отделения корней?
7. Что делать, если на концах отрезка функция одного знака, но корень есть?
8. Как графически отделить корни?
9. В чём отличие локализации корней от уточнения?
10. Как оценить погрешность при отделении корней?

Лабораторная работа 9

Интерполяция кубическими сплайнами

Цель работы: Реализация кусочно-полиномиальной интерполяции.

Теоретическая часть

Кубический сплайн — кусочно-полиномиальная функция $S(x)$, состоящая из кубических полиномов на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, \dots, n-1$.

Условия гладкости:

- $S(x_i)=y_i$ (интерполяция);
- $S(x)$ непрерывна на $[a, b]$;
- $S'(x)$ непрерывна;
- $S''(x)$ непрерывна (естественный сплайн — вторые производные на концах равны 0).

Для определения коэффициентов сплайна строится система линейных

уравнений относительно вторых производных $M_i=S''(x_i)$:

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \frac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i + \frac{h_i}{6}M_{i+1} = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

где $h_i=x_{i+1}-x_i$. Краевые условия дают $M_0=0$, $M_n=0$ для естественного сплайна.

Полученная система трёхдиагональна и решается методом прогонки за $O(n)$.

После нахождения M_i полином на каждом отрезке записывается в виде:

$$S_i(x) = \frac{M_i}{6h_i}(x_{i+1}-x)^3 + \frac{M_{i+1}}{6h_i}(x-x_i)^3 + \left(y_i - \frac{M_i h_i^2}{6}\right) \frac{x_{i+1}-x}{h_i} + \left(y_{i+1} - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6}\right) \frac{x-x_i}{h_i}.$$

Преимущества: отсутствие осцилляций, хорошее поведение даже при большом числе узлов, гладкость.

Индивидуальные задания к лабораторной работе

Задание 1. Интерполяция кубическими сплайнами.

Варианты	Функция $f(x)$	Интервал
1	$\frac{1}{1+25x^2}$	$[-1,1]$
2	e^{-x^2}	$[-2,2]$
3	$\sin x$	$[0,2\pi]$
4	$\cosh x$	$[-3,3]$
5	$\ln(x+1)$	$[0,3]$
6	$x^3 - 2x$	$[-2,2]$
7	$\tan x$	$[0,1.4]$
8	$e^{-x} \sin(10x)$	$[0,3]$
9	$\frac{1}{x+2}$	$[-1,2]$

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

- 1) Теория кубических сплайнов.
- 2) Алгоритм построения (решение трёхдиагональной системы).
- 3) Листинг программы.
- 4) Графики: исходная функция, сплайн, полином Лагранжа.
- 5) Сравнение погрешностей.
- 6) Выводы.

Контрольные вопросы

1. Что такое сплайн? Почему кубический?
2. Какие условия непрерывности накладываются на сплайн?
3. Как определить коэффициенты кубического сплайна?
4. Какие бывают краевые условия?
5. В чём преимущество сплайнов перед полиномом Лагранжа?
6. Как вычислить значение сплайна в произвольной точке?
7. Почему сплайн не даёт осцилляций?
8. Какова погрешность сплайн-интерполяции?
9. Можно ли использовать сплайны для экстраполяции?
10. Что такое B-сплайны?

Лабораторная работа 10

Аппроксимация методом наименьших квадратов

Цель работы: Реализация метода аппроксимации экспериментальных данных.

Теоретическая часть

Метод наименьших квадратов (МНК) применяется, когда экспериментальные данные содержат погрешности, и точное прохождение через все точки не требуется. Ищется функция $\varphi(x)$ определённого вида, минимизирующая сумму квадратов отклонений:

$$S = \sum_{i=1}^m (y_i - \varphi(x_i))^2.$$

Линейная аппроксимация $\varphi(x) = a_0 + a_1 x$ приводит к системе нормальных уравнений:

$$\begin{cases} a_0 m + a_1 \sum x_i = \sum y_i, \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i. \end{cases}$$

Квадратичная аппроксимация $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ даёт систему трёх уравнений:

$$\begin{pmatrix} m & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{pmatrix}.$$

Качество аппроксимации оценивается среднеквадратичным отклонением (СКО):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y_i - \varphi(x_i))^2}.$$

МНК позволяет также прогнозировать значения за пределами диапазона измерения (экстраполяция), но с осторожностью, так как погрешность может быстро расти.

Индивидуальные задания к лабораторной работе

Задание 1. Даны точки (x_i, y_i) , полученные путём добавления случайного шума к функции. Построить линейную и квадратичную аппроксимации. Вычислить среднеквадратичное отклонение. Сделать прогноз для x вне интервала. Варианты (в каждом – свой набор точек).

1. Точки по функции $y = 2x + 3$ с шумом на $x \in [0, 5]$
2. $y = -x + 5$ с шумом на $[-2, 3]$
3. $y = 0.5x^2 - x + 2$ с шумом на $[-1, 4]$
4. $y = 3e^{-0.2x}$ с шумом на $[0, 10]$
5. $y = 2 \sin(x) + 1$ с шумом на $[0, \pi]$
6. $y = \ln(x + 1)$ с шумом на $[0, 5]$
7. $y = \sqrt{x}$ с шумом на $[0, 4]$
8. $y = x^3 - 2x^2 + x$ с шумом на $[-1, 2]$
9. $y = \cos(2x)$ с шумом на $[0, 2]$
10. $y = \tanh(x)$ с шумом на $[-2, 2]$

Для каждого варианта задать 10–20 точек с добавлением случайной величины $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, где $\sigma = 0.1 \cdot \max |y|$.

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

- 1) Теория МНК.
- 2) Формулы для линейной и квадратичной моделей.
- 3) Листинг программы.
- 4) Таблица точек, коэффициенты моделей, СКО.
- 5) Графики: исходные точки, линейная и квадратичная аппроксимации.
- 6) Прогноз и его обоснование.
- 7) Выводы

Контрольные вопросы и тестовые задания

1. В чём суть метода наименьших квадратов?
2. Как выводится система нормальных уравнений?
3. Как оценить качество аппроксимации?
4. Что такое среднеквадратичное отклонение?
5. Чем отличается аппроксимация от интерполяции?
6. Как выбрать степень аппроксимирующего полинома?
7. Что делать, если матрица системы нормальных уравнений плохо обусловлена?
8. Как провести прогнозирование и оценить его надёжность?
9. Как учитывать веса точек?
10. Можно ли применять МНК для нелинейных моделей?

Лабораторная работа 11**Численное дифференцирование**

Цель работы: Реализация и анализ погрешности формул численного дифференцирования.

Теоретическая часть

Численное дифференцирование основано на аппроксимации производной конечными разностями. Основные формулы:

1. **Правая разность** (первый порядок):

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

2. **Левая разность** (первый порядок):

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

3. **Центральная разность** (второй порядок):

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

4. Вторая производная (второй порядок):

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

Погрешность состоит из двух частей:

- **Погрешность аппроксимации** (усечения) убывает с уменьшением h : для центральной разности $\sim h^2$.
- **Погрешность округления** растёт как $\sim \varepsilon_m/h$, где ε_m – машинный эпсилон.

При очень малых h погрешность округления доминирует, поэтому существует **оптимальный шаг** h_{opt} , минимизирующий полную погрешность. Для центральной разности:

$$h_{\text{opt}} \approx \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon_m |f(x)|}{|f'''(x)|}}.$$

В работе необходимо исследовать зависимость погрешности от h и найти оптимальный шаг.

Задания к лабораторной работе

Задание 1. Для заданной функции вычислить первую и вторую производную в точке x_0 с помощью формул разного порядка точности.

Исследовать зависимость погрешности от шага h , найти оптимальный шаг.

Функции:

1. $f(x) = e^x, x_0 = 0$
2. $f(x) = \sin x, x_0 = 1$
3. $f(x) = \ln x, x_0 = 2$
4. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x, x_0 = 1$
5. $f(x) = \cos x, x_0 = 0.5$
6. $f(x) = \tan x, x_0 = 0.5$
7. $f(x) = e^{-x^2}, x_0 = 1$
8. $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4$
9. $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 2$
10. $f(x) = \arctan x, x_0 = 1$

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

- 1) Теория численного дифференцирования.
- 2) Формулы для производных.
- 3) Листинг программы.
- 4) Таблица: погрешность в зависимости от h (логарифмический масштаб).
- 5) График зависимости логарифма погрешности от логарифма h .
- 6) Определение оптимального шага.
- 7) Выводы.

Контрольные вопросы

1. Почему при уменьшении шага погрешность сначала уменьшается, а затем растёт?
2. Как оценить погрешность численного дифференцирования?
3. Какие формулы численного дифференцирования вы знаете?
4. Какой порядок точности у центральной разности?
5. Как выбрать оптимальный шаг?
6. Что такое погрешность аппроксимации и погрешность округления?
7. Можно ли вычислить производную с помощью интерполяции?
8. Как влияет наличие шума в данных на дифференцирование?
9. Почему центральная разность точнее односторонней?
10. Как получить формулы для производных высших порядков?

Лабораторная работа 12

Численное интегрирование:

методы прямоугольников и трапеций

Цель работы: Реализация простейших квадратурных формул.

Теоретическая часть

Численное интегрирование (квадратурные формулы) заменяет интеграл суммой значений функции в узлах. Для равномерной сетки $x_i = a + ih$, $h = (b - a)/n$.

Метод левых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i), \quad \text{погрешность } O(h).$$

Метод правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad \text{погрешность } O(h).$$

Метод средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right), \quad \text{погрешность } O(h^2).$$

Метод трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right), \quad \text{погрешность } O(h^2).$$

Апостериорная оценка погрешности (правило Рунге):

$$I_{\text{точн}} \approx I_h + \frac{I_h - I_{2h}}{2^p - 1},$$

где p – порядок точности метода ($p=1$ для левых/правых, $p=2$ для средних и трапеций).

В работе сравниваются методы по точности при одинаковом h и исследуется зависимость погрешности от шага.

Задания к лабораторной работе

Задание 1. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ методами левых, правых, средних прямоугольников и трапеций. Исследовать зависимость погрешности от шага h . Сравнить с точным значением.

Функции и интервалы:

1. $\int_0^1 e^x dx$

2. $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$

3. $\int_0^2 x^2 dx$

4. $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$

5. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

6. $\int_0^\pi \cos x dx$

7. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

8. $\int_0^1 \ln(1+x) dx$

9. $\int_0^\pi \sin^2 x dx$

10. $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2} dx$

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

- 1) Описание методов.
- 2) Листинг программы.
- 3) Таблица: значение интеграла, погрешность для разных h .
- 4) Графики зависимости погрешности от h в логарифмическом масштабе.
- 5) Сравнение методов.
- 6) Выводы.

Контрольные вопросы

1. Какой порядок точности у метода левых прямоугольников?
2. Почему метод средних прямоугольников точнее левых?
3. Как оценить погрешность метода трапеций?
4. Как связаны методы трапеций и прямоугольников?
5. Как влияет гладкость функции на точность?
6. В чём отличие составных квадратурных формул от простых?
7. Как выбрать шаг интегрирования для заданной точности?
8. Что такое апостериорная оценка погрешности (правило Рунге)?
9. Как метод трапеций связан с интегральной суммой?
10. Почему для периодических функций метод средних прямоугольников даёт высокую точность?

Лабораторная работа 13

Численное интегрирование: метод Симпсона

Цель работы: Реализация метода более высокого порядка точности.

Теоретическая часть

Метод Симпсона (парабол) основан на аппроксимации подынтегральной функции квадратичным полиномом на каждом отрезке $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ (чётное число отрезков). Составная формула:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left(f_0 + f_n + 4 \sum_{i \text{ нечёт}} f_i + 2 \sum_{i \text{ чёт}} f_i \right),$$

где $h=(b-a)/n$, n – чётное.

Порядок точности: для функций с непрерывной четвёртой производной погрешность $O(h^4)$. Метод Симпсона точен для полиномов степени не выше 3.

Вывод формулы получается интегрированием интерполяционного полинома Лагранжа второй степени на двойном отрезке.

Правило Рунге для оценки погрешности:

$$I_{\text{точн}} \approx I_h + \frac{I_h - I_{2h}}{2^4 - 1}.$$

В работе сравнивается точность метода Симпсона с методами прямоугольников и трапеций при одинаковом числе разбиений. Часто для достижения заданной точности метод Симпсона требует значительно меньшего числа разбиений.

Задания к лабораторной работе

Задание 1. Для тех же интегралов, что в ЛР12, вычислить интеграл методом Симпсона. Сравнить с методами прямоугольников и трапеций при одинаковом числе разбиений. Оценить фактический порядок точности.

Дополнительно: проверить на интеграле $\int_0^1 x^3 dx$ (точность).

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

- 1) Описание метода.

- 2) Листинг программы.
- 3) Таблица сравнения интегралов при разных n для всех методов.
- 4) Графики погрешностей.
- 5) Вычисление порядка точности (по соотношению погрешностей при разном h).
- 6) Выводы.

Контрольные вопросы и тестовые задания

1. Как выводится формула Симпсона?
2. Каков порядок точности метода Симпсона?
3. Почему метод Симпсона даёт точный результат для полиномов третьей степени?
4. Как влияет чётность числа отрезков?
5. Как оценить погрешность метода Симпсона?
6. В чём преимущество метода Симпсона перед методом трапеций?
7. Как реализовать адаптивное интегрирование на основе метода Симпсона?
8. Что такое правило Рунге для оценки погрешности?
9. Можно ли применять метод Симпсона к функциям с разрывами?
10. Как метод Симпсона связан с методом Ньютона-Котеса?

Лабораторная работа 14

Одномерная оптимизация: метод золотого сечения

Цель работы: Реализация метода поиска экстремума унимодальной функции.

Теоретическая часть

Метод золотого сечения применяется для поиска минимума унимодальной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Унимодальность означает, что функция имеет единственный минимум на интервале.

Идея: на каждой итерации выбираются две внутренние точки x_1 и x_2 , делящие интервал в отношении золотого сечения $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$. Точки определяются:

$$x_1 = b - \frac{b-a}{\varphi}, \quad x_2 = a + \frac{b-a}{\varphi}.$$

Вычисляются $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Если $f(x_1) < f(x_2)$, то минимум лежит в $[a, x_2]$, иначе – в $[x_1, b]$. Длина интервала сокращается в φ раз на каждой итерации.

Сходимость: после k итераций длина интервала неопределённости:

$$L_k = \frac{L_0}{\varphi^{k-1}}.$$

Число вычислений функции равно $k+1$ (если считать начальные два). Метод имеет линейную сходимость, но гарантирован.

Сравнение с методом дихотомии (деления пополам): дихотомия требует двух вычислений на итерацию и сокращает интервал в 2 раза за две итерации? Фактически, для одинакового числа вычислений функции золотое сечение обеспечивает большее сокращение интервала.

Задания к лабораторной работе

Задание 1. Найти минимум унимодальной функции на заданном интервале методом золотого сечения с точностью 10^{-6} . Сравнить число

Функции:

1. $f(x) = x^2 - 4x + 5$ на $[0, 5]$
2. $f(x) = (x - 2)^4 + x^2$ на $[0, 3]$
3. $f(x) = e^{-x} + x^2$ на $[-1, 2]$
4. $f(x) = \sin x + \cos(2x)$ на $[0, \pi]$
5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ на $[-1, 3]$
6. $f(x) = \ln(x) + x$ на $[0.5, 3]$
7. $f(x) = (x - 1)^2 e^{-x}$ на $[0, 4]$
8. $f(x) = \sqrt{|x|} + \sin x$ на $[-2, 2]$ (унимодальность проверить)
9. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 2$ на $[-1, 3]$
10. $f(x) = \frac{1}{1+(x-2)^2}$ на $[0, 4]$

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

- 1) Описание метода.
- 2) Алгоритм.
- 3) Листинг программы.
- 4) Результаты: точка минимума, значение функции, число итераций.
- 5) Сравнение с методом дихотомии (по числу вычислений функции).
- 6) Выводы.

Контрольные вопросы

1. Что такое унимодальная функция?
2. Как выбираются пробные точки в методе золотого сечения?
3. Почему используется золотое сечение?
4. Как уменьшается интервал неопределённости на каждой итерации?
5. Сравните метод золотого сечения с методом дихотомии.
6. Какой критерий остановки используется?
7. Как определить, что функция унимодальна на интервале?
8. Можно ли применять метод к немультимодальным функциям?
9. Какова скорость сходимости метода?
10. Как изменится алгоритм для поиска максимума?

Лабораторная работа 15

Многомерная оптимизация: метод покоординатного спуска

Цель работы: Реализация простейшего метода многомерной оптимизации.

Теоретическая часть

Метод покоординатного спуска – простейший метод многомерной безусловной оптимизации. Идея: поочерёдно минимизировать функцию по каждой координате, фиксируя остальные. Для минимизации по одному направлению используется одномерный метод (например, золотого сечения).

Алгоритм (циклический):

1. Задать начальную точку $x^{(0)}$.
2. Для $k=0,1,2,\dots$:
 - Для $i=1$ до n :
 - Минимизировать $f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$ по t (одномерный поиск).
 - Обновить x_i найденным значением.
3. Критерий остановки: $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$.

Сходимость: для выпуклых функций метод сходится, но может быть медленным вблизи минимума, особенно для овражных функций (когда линии уровня сильно вытянуты). В таких случаях эффективнее использовать градиентные методы.

Визуализация траектории поиска на линиях уровня помогает понять поведение метода.

Задания к лабораторной работе

Задание 1. Найти минимум функции двух переменных методом покоординатного спуска. Визуализировать траекторию поиска на линиях уровня.

Функции:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$
2. $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y + 1)^2$
3. $f(x, y) = x^2 + 10y^2$ (овражная)
4. $f(x, y) = (x - 1)^4 + (y + 2)^4$
5. $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2} + 2x^2$
6. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y$
7. $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + \sin(x + y)$
8. $f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$ (Розенброка)
9. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 0.3 \cos(3\pi x) - 0.4 \cos(4\pi y)$
10. $f(x, y) = (x + 2y - 7)^2 + (2x + y - 5)^2$

Начальное приближение выбрать произвольно, но вдали от минимума. Точность 10^{-6} .

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

- 1) Описание метода.
- 2) Алгоритм.
- 3) Листинг программы.
- 4) Результаты: координаты минимума, значение функции, число итераций.
- 5) График линий уровня с траекторией поиска.
- 6) Выводы о сходимости.

Контрольные вопросы

1. Какова идея метода покоординатного спуска?
2. В чём недостатки метода для овражных функций?
3. Как выполняется одномерная минимизация вдоль координатной оси?
4. Каков критерий остановки?
5. Как можно ускорить сходимость?
6. В чём отличие от метода градиентного спуска?
7. Как выбирается направление спуска?
8. Что такое овражная функция?
9. Как влияет масштабирование переменных?
10. Как визуализировать процесс поиска?

Лабораторная работа 16

Решение задачи Коши для ОДУ: метод Эйлера

Цель работы: Реализация простейшего метода решения ОДУ.

Теоретическая часть

Метод Эйлера – простейший численный метод решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Разобьём отрезок $[x_0, X]$ на n равных частей шагом $h=(X-x_0)/n$. Тогда приближённое решение в узлах:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Геометрический смысл: замена интегральной кривой ломаной, звенья которой касаются поля направлений.

Локальная погрешность на одном шаге $O(h^2)$, **глобальная** $O(h)$. Метод имеет первый порядок точности.

Устойчивость: для уравнения $y'=\lambda y$, $\lambda<0$, метод Эйлера устойчив при $|1+\lambda h|<1$, т.е. $h<2/|\lambda|$. Для жёстких задач ($|\lambda|$ велико) требуется очень малый шаг.

Сравнение с аналитическим решением позволяет оценить фактическую погрешность. Исследование зависимости погрешности от шага подтверждает теоретический порядок.

Задания к лабораторной работе

Задание 1. Решить задачу Коши методом Эйлера на интервале $[x_0, X]$. Сравнить численное решение с аналитическим. Исследовать влияние шага h на погрешность.

Уравнения:

1. $y' = y, y(0) = 1, [0, 2]$
2. $y' = -2y, y(0) = 1, [0, 3]$
3. $y' = x + y, y(0) = 1, [0, 1]$
4. $y' = x^2 - y, y(0) = 0, [0, 2]$
5. $y' = \sin x - y, y(0) = 0, [0, \pi]$
6. $y' = e^{-x} - y, y(0) = 1, [0, 2]$
7. $y' = -y^2, y(0) = 1, [0, 2]$ (аналитическое $y = 1/(x + 1)$)
8. $y' = 2xy, y(0) = 1, [0, 1.5]$
9. $y' = \frac{2x}{y}, y(1) = 2, [1, 3]$
10. $y' = \cos x - 2y, y(0) = 1, [0, \pi]$

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

- 1) Описание метода.
- 2) Листинг программы.
- 3) Таблица сравнения численного и точного решений при разных h .
- 4) Графики решений.
- 5) График зависимости глобальной погрешности от h (логарифмический масштаб).
- 6) Выводы.

Контрольные вопросы

1. Какова геометрическая интерпретация метода Эйлера?
2. Какой порядок точности у метода Эйлера?
3. Как оценить глобальную погрешность?
4. Что такое явный и неявный метод?
5. Как влияет шаг на устойчивость метода?
6. Почему метод Эйлера может быть неустойчивым?
7. Как сравнить численное решение с аналитическим?
8. Как модифицировать метод для повышения точности (усовершенствованный метод Эйлера)?
9. Что такое локальная и глобальная погрешность?
10. Как выбрать шаг для достижения заданной точности?

Лабораторная работа 17

Решение задачи Коши: метод Рунге-Кутты 4-го порядка

Цель работы: Реализация метода повышенной точности.

Теоретическая часть

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка – один из наиболее употребительных одношаговых методов, обеспечивающий высокую точность. Формулы для одного шага:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k), \\ k_2 &= f(x_k + h/2, y_k + hk_1/2), \\ k_3 &= f(x_k + h/2, y_k + hk_2/2), \\ k_4 &= f(x_k + h, y_k + hk_3), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned}$$

Порядок точности: локальная погрешность $O(h^5)$, глобальная $O(h^4)$. Метод точен для полиномов степени не выше 4.

Устойчивость: область абсолютной устойчивости больше, чем у метода Эйлера. Для уравнения $y'=\lambda y$ условие устойчивости $|1+\lambda h+(\lambda h)^2/2+(\lambda h)^3/6+(\lambda h)^4/24|<1$.

Сравнение с методом Эйлера: при одинаковом шаге метод Рунге-Кутты даёт значительно меньшую погрешность. Для достижения заданной точности можно использовать больший шаг, что уменьшает число шагов.

В работе также исследуется устойчивость на жёсткой задаче.

Задания к лабораторной работе

Задание 1. Для тех же задач, что в ЛР16, решить методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Сравнить точность с методом Эйлера при одинаковых шагах. Исследовать устойчивость на примере $y'=\lambda y$ с большим отрицательным λ .

Дополнительно: задача $y'=-100y, y(0)=1, [0,1]$.

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

- 1) Описание метода.
- 2) Листинг программы.
- 3) Таблица сравнения погрешностей при разных h для двух методов.

- 4) Графики решений.
- 5) Анализ устойчивости для жёсткой задачи.
- 6) Выводы.

Контрольные вопросы

1. Почему метод Рунге-Кутты 4-го порядка так популярен?
2. Как оценивается локальная погрешность?
3. В чём отличие от метода Эйлера?
4. Каковы вычислительные затраты на один шаг?
5. Что такое метод Рунге-Кутты с адаптивным шагом?
6. Как проверить устойчивость метода для жёстких задач?
7. Какой порядок точности у метода?
8. Можно ли использовать метод для систем ОДУ?
9. Как сравнить точность методов при одинаковом шаге?
10. Что такое правило Рунге для оценки погрешности?

Лабораторная работа 18

Комплексная работа: решение прикладной задачи

Цель работы: Применение изученных методов для решения задачи из предметной области.

Теоретическая часть

Комплексная работа объединяет навыки, полученные в предыдущих лабораторных работах. Студент получает (или выбирает) прикладную задачу из области физики, техники, экономики и т.д., требующую применения численных методов.

Этапы выполнения:

1. **Математическая постановка задачи:** формализация исходной проблемы в виде уравнений, граничных/начальных условий, критериев оптимизации.

2. **Выбор численного метода:** обоснование выбора исходя из свойств задачи (линейность/нелинейность, размерность, требования к точности, доступные ресурсы).
3. **Реализация алгоритма:** программирование метода на выбранном языке (Python, C++ и т.д.) с использованием библиотек (NumPy, SciPy) или без них.
4. **Анализ погрешностей:** оценка влияния шагов дискретизации, погрешностей округления, проверка сходимости.
5. **Визуализация результатов:** построение графиков, диаграмм, линий уровня для наглядного представления решения.
6. **Оформление отчёта:** структурированное изложение всех этапов, включая листинг, результаты, выводы.
7. **Защита работы:** ответы на вопросы, демонстрация понимания использованных методов и полученных результатов.

Примеры задач:

- Моделирование физического процесса (падение тела, теплопроводность, колебания);
- Обработка экспериментальных данных (аппроксимация, интерполяция);
- Оптимизация параметров (конструкция, режимы работы);
- Решение краевых задач для ОДУ или СЛАУ.

Работа позволяет оценить способность студента самостоятельно применять численные методы для решения реальных задач.

Задания к лабораторной работе

Задание 1. Варианты прикладных задач:

1. **Моделирование падения тела с сопротивлением воздуха.** Решить ОДУ $m\ddot{x} = mg - kx^2$ методом Рунге-Кутты, определить скорость и время падения. Сравнить с аналитическим решением для случая без сопротивления.

2. **Аппроксимация экспериментальных данных.** Даны измерения зависимости давления от температуры (таблица). Построить линейную и квадратичную аппроксимации, оценить погрешность, сделать прогноз.
3. **Оптимизация конструкции.** Найти минимальную площадь поверхности цилиндрического бака заданного объёма. Использовать метод золотого сечения или многомерную оптимизацию.
4. **Траектория снаряда.** Решить систему ОДУ для движения снаряда с учётом сопротивления воздуха. Построить траекторию, найти дальность полёта.
5. **Интерполяция данных с датчика.** По заданным дискретным показаниям построить сплайн и полином Лагранжа, сравнить качество.
6. **Численное интегрирование при расчёте работы.** Вычислить работу газа в процессе расширения, заданного таблично или аналитически, методами Симпсона и трапеций, оценить погрешность.
7. **Решение краевой задачи.** Для уравнения теплопроводности $u''(x)=f(x)$ с краевыми условиями методом прогонки найти распределение температуры.
8. **Анализ устойчивости конструкции.** Найти собственные частоты системы, решая характеристическое уравнение нелинейным методом (Ньютона).
9. **Прогнозирование временного ряда.** По заданным точкам построить полиномиальную аппроксимацию МНК и спрогнозировать значения.
10. **Оптимизация химического реактора.** Найти параметры, минимизирующие стоимость продукта, используя многомерную оптимизацию (покоординатный спуск).

Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен состоять из:

- 1) Титульный лист.
- 2) Постановка задачи (математическая модель).
- 3) Обоснование выбора методов.
- 4) Описание алгоритмов и их реализация.
- 5) Листинг программы с комментариями.
- 6) Результаты: таблицы, графики, анализ погрешностей.
- 7) Выводы и рекомендации.

Контрольные вопросы

1. Какова постановка решённой прикладной задачи?
2. Какие численные методы были использованы и почему?
3. Как оценивалась погрешность полученных результатов?
4. Какие трудности возникли при реализации?
5. Как проверялась корректность программы?
6. Какие альтернативные методы можно было применить?
7. Как интерпретируются полученные результаты с физической/экономической точки зрения?
8. Каковы практические рекомендации на основе решения?
9. Что можно улучшить в модели?
10. Какие выводы можно сделать о применимости методов?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Балабко, Л. В. Численные методы / Л. В. Балабко; А. В. Томилова. – Архангельск: САФУ, 2014. – 468 с.
2. Калиткин, Н. Н. Численные методы : учеб. пособие / Н.Н. Калиткин ; под ред. А. А. Самарского. – 2-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2014. – 586 с.
3. Орешкова, М. Н. Численные методы: теория и алгоритмы / М. Н. Орешкова. - Архангельск : САФУ, 2015. - 468 с.
4. Пименов, В. Г. Численные методы / В. Г. Пименов; А. Б. Ложников. – Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2014. - 107 с.

Дополнительная литература

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы: учеб. пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков; МГУ им. М.В. Ломоносова. – 6-е изд. – М.: Бином. Лаб. знаний, 2008. – 636 с.
2. Вабищевич, П. Н. Численные методы: вычислительный практикум / П. Н. Вабищевич. – М.: URSS: ЛИБРОКОМ, 2010. – 319 с.
3. Гавришина, О. Н. Численные методы/ О. Н. Гавришина; Ю.Н. Захаров; Л.Н. Фомина. - Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2011. – 238 с.
4. Демидович, Б. П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения: учеб. пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. – 5-е изд. стер. – Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2010. – 400 с.
5. Лапчик, М. П. Численные методы: учеб. пособие / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер; под ред. М. П. Лапчика. – 5-е изд., стер. – М.: Академия, 2009. – 384 с.
6. Численные методы в информационных системах / Ю. Ю. Громов/ О. Г. Иванова / М. А. Ивановский / Ю. Ф. Мартемьянов / М. Ю. Серегин: учеб-

ное пособие [Электронный ресурс]: Тамбовский государственный технический университет, ЭБС АСВ. – Тамбов, 2012. – 135 с.

Internet-ресурсы

1. Образовательный математический сайт [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.exponenta.ru>
2. Единое окно доступа к образовательным ресурсам [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.window.edu.ru>
3. Вычислительная математика, численные методы EqWorld. Библиотека. Книги по математике [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathemamatics/numeric.html>
4. Бояршинов Б. С. Видеокурс «Численные методы» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.intuit.ru/deportment/mathematics/nummeth/>
5. Лобанов А. И. Видеокурс «Основы вычислительной математики» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.intuit.ru/deportment/calculate/computmath/>
6. Петров И. Б., Лобанов А. И. Видеокурс «Введение в вычислительную математику» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.intuit.ru/deportment/calculate/calcmathbase/>
7. Кирьянов Д. В. Видеокурс «Высшая математика на Python» [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.intuit.ru/deportment/mathematics/basePython/>

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Северо-Кавказский федеральный университет»**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ
по дисциплине**

«Инженерные приложения численных методов»

Направление подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии»

Квалификация выпускника — бакалавр
(ЭЛЕКТРОННЫЙ РЕСУРС)

Ставрополь, 2020

ВВЕДЕНИЕ

Целями дисциплины «Численные методы и вычислительная математика» является формирование у студентов теоретических знаний и практических навыков применения численных методов для решения инженерных и научных задач, развитие способностей к алгоритмическому мышлению и программной реализации вычислительных алгоритмов на современных языках программирования.

Задачами дисциплины «Численные методы и вычислительная математика» являются:

- 1) изучение теоретических основ построения и исследования численных методов решения задач линейной алгебры, анализа и оптимизации,
- 2) формирование представления о классических и современных численных методах, областях их применения и критериях выбора,
- 3) выработка навыков практической программной реализации вычислительных алгоритмов на языке высокого уровня (C++/Python),
- 4) освоение методов анализа погрешностей, оценки точности и сходимости вычислительных алгоритмов
- 5) развитие способности интерпретировать результаты численных расчетов и применять их для решения прикладных задач программной инженерии

Для успешного освоения дисциплины «Численные методы и вычислительная математика» необходимы знания, полученные в ходе освоения дисциплин: «Информатика»; «Математика»; «Физика»; «Электротехника и электроника», «Инструментальные средства в инженерных расчетах».

Знания, полученные в результате освоения дисциплины «Численные методы и вычислительная математика» могут быть использованы при изучении курса «Основы цифровой обработки сигналов», «Введение в технологии высокопроизводительных вычислений», а также при выполнении выпускной квалификационной работы.

В результате изучения дисциплины «Численные методы и вычислительная математика» у обучающегося должен быть сформирован следующий набор общепрофессиональных и профессиональной компетенций: ПК -2.

В результате изучения дисциплины «Численные методы и вычислительная математика» студент должен

Знать:

- основы математики, физики, вычислительной техники и программирования,
- современные программные средства и информационные технологии, в том числе отечественного производства, при решении задач профессиональной деятельности,
- технологии разработки моделей объектов профессиональной деятельности с использованием инструментальных средств компьютерного моделирования.

Уметь:

- решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний,
- выбирать современные программные средства и информационные технологии, в том числе отечественного производства, при решении задач профессиональной деятельности,
- разрабатывать модели объектов профессиональной деятельности с использованием инструментальных средств компьютерного моделирования.

Владеть:

- навыками решения стандартных профессиональных задач с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний,
- применения современных программных средств и информационных

технологий, в том числе отечественного производства, при решении задач профессиональной деятельности,

- разработки моделей объектов профессиональной деятельности с использованием инструментальных средств компьютерного моделирования

Содержание дисциплины

Раздел 1. Введение в вычислительную математику

Тема 1. Математическое моделирование и вычислительный эксперимент

Тема 2. Классификация численных методов

Тема 3. Понятие погрешности: источники, абсолютная и относительная погрешность

Тема 4. Корректность и устойчивость вычислительных алгоритмов

Раздел 2. Элементы теории погрешностей

Тема 5. Погрешность арифметических операций

Тема 6. Погрешность функции

Тема 7. Потеря точности при вычитании близких чисел

Тема 8. Удвоенная точность

Тема 9. Обусловленность вычислительных задач

Раздел 3. Численное решение нелинейных уравнений (часть 1)

Тема 10. Постановка задачи

Тема 11. Этапы отделения и уточнения корней

Тема 12. Метод половинного деления (бисекции):

геометрическая интерпретация, алгоритм, скорость сходимости

Раздел 4. Численное решение нелинейных уравнений (часть 2)

Тема 13. Метод Ньютона (касательных).

Тема 14. Метод секущих.

Тема 15. Метод простой итерации.

Тема 16. Условия сходимости.

Тема 17. Сравнительный анализ методов.

Раздел 5. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Тема 18. Основы теории линейной алгебры.

Тема 19. Метод Гаусса: прямой и обратный ход.

Тема 20. Выбор главного элемента.

Тема 21. Вычисление определителя методом Гаусса.

Тема 22. LU-разложение.

Раздел 6. Специальные прямые методы

Тема 23. Метод прогонки для систем с трехдиагональной матрицей.

Тема 24. Метод квадратного корня (Холецкого) для симметричных матриц.

Тема 25. Оценка вычислительной сложности.

Раздел 7. Итерационные методы решения СЛАУ

Тема 26. Принципы построения итерационных методов.

Тема 27. Метод простой итерации (Якоби).

Тема 28. Метод Зейделя.

Тема 29. Условия сходимости.

Тема 30. Критерии окончания итерационного процесса.

Раздел 8. Решение систем нелинейных уравнений

Тема 31. Метод простой итерации для систем.

Тема 32. Метод Ньютона для систем нелинейных уравнений.

Тема 33. Вычисление матрицы Якоби.

Раздел 9. Интерполяция функций (часть 1)

Тема 34. Постановка задачи интерполяции.

Тема 35. Интерполяционный полином Лагранжа: построение, оценка погрешности, достоинства и недостатки.

Раздел 10. Интерполяция функций (часть 2)

Тема 36. Интерполяционный полином Ньютона с конечными и разделенными разностями.

Тема 37. Интерполяция сплайнами (кубические сплайны).

Раздел 11. Аппроксимация функций. Метод наименьших квадратов (МНК)

Тема 38. Отличие от интерполяции.

Тема 39. Линейный и нелинейный МНК.

Тема 40. Построение аппроксимирующих полиномов.

Тема 41. Оценка качества аппроксимации.

Тема 42. Постановка задачи аппроксимации.

Раздел 12. Численное дифференцирование

Тема 43. Формулы численного дифференцирования на основе интерполяционных полиномов.

Тема 44. Метод неопределенных коэффициентов.

Тема 45. Погрешность численного дифференцирования.

Раздел 13. Численное интегрирование (часть 1)

Тема 46. Формулы Ньютона-Котеса.

Тема 47. Метод прямоугольников.

Тема 48. Метод трапеций.

Тема 49. Оценка погрешности.

Раздел 14. Численное интегрирование (часть 2)

Тема 50. Метод Симпсона (парабол).

Тема 51. Составные квадратурные формулы.

Тема 52. Правило Рунге оценки погрешности.

Тема 53. Метод Гаусса.

Раздел 15. Численные методы оптимизации (часть 1)

Тема 54. Постановка задачи оптимизации.

Тема 55. Одномерная оптимизация.

Тема 56. Метод золотого сечения.

Тема 57. Метод дихотомии.

Тема 58. Сравнение эффективности.

Раздел 16. Численные методы оптимизации (часть 2)

Тема 59. Многомерная оптимизация.

Тема 60. Метод покоординатного спуска.

Тема 61. Градиентные методы: метод наискорейшего спуска, метод сопряженных градиентов.

Раздел 17. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Задача Коши

Тема 62. Классификация методов.

Тема 63. Метод Эйлера (явный и неявный).

Тема 64. Модифицированный метод Эйлера.

Тема 65. Погрешность и устойчивость.

Раздел 18. Многошаговые методы решения ОДУ

Тема 66. Методы Рунге-Кутты (2-го и 4-го порядков).

Тема 67. Многошаговые методы Адамса.

Тема 68. Понятие о жестких системах ОДУ.

Тема 69. Выбор метода в зависимости от требований задачи.

1. ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Самостоятельная работа студентов является важнейшим условием формирования научного способа познания. Она проводится накануне каждого практического занятия и изучение теоретического материала, приведенного в практической работе, а также выполнения индивидуального задания.

Подготовленный материал, практическое задание оформляются в конспекте.

Самостоятельные занятия (СЗ) являются одной из активных форм обучения.

Самостоятельные занятия по дисциплине "Численные методы и вычислительная математика" имеют целью:

- закрепить и углубить знания, полученные студентами на лекциях и в процессе лабораторных занятий;
- сформировать практические навыки при работе с инструментальными средствами для обработки экспериментальных данных.

Самостоятельные занятия проводятся в лабораториях, оборудованных современными средствами вычислительной техники и возможностью выхода в сеть Internet, в библиотеке.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Методические указания должны включать следующие разделы:

- цель работы;
- задание, которое должно быть выполнено студентом в результате проведения самостоятельной работы;
- варианты индивидуальных заданий;
- основные теоретические положения, необходимые для выполнения задания, они должны быть краткими и содержать ссылки на литературу, в которой эти положения изложены в объеме, достаточном для выполнения самостоятельной работы;
- этапы выполнения задания с указанием конкретных сроков выполнения каждого из этапов и всего задания в целом;
- требования к оформлению графической и текстовой части самостоятельной работы;
- пример выполнения одного из вариантов задания и оформления отчета;
- библиографический список использованных источников.

3. СОДЕРЖАНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.1 Самостоятельное изучение тем лекционного курса

Базовый уровень

Раздел 2. Теория погрешностей

Тема 2. Погрешность численного решения научных задач

1. Погрешность функции.
2. Постановка обратной задачи о погрешности функции.

Раздел 3. Численные методы линейной алгебры

Тема 3. Численные методы решения задач линейной алгебры

1. Вычисление определителя матрицы метода Гаусса с выбором главного элемента.
2. Обращение матриц.

Раздел 4. Численные методы математического анализа

Тема 6. Численные методы приближения функций.

1. Конечные и разделенные разности.
2. Разделенные разности.

Тема 8. Численное интегрирование

1. Применение метода Монте-Карло для вычисления определенных интегралов.

Повышенный уровень

Раздел 3. Численные методы линейной алгебры

Тема 3. Численные методы решения задач линейной алгебры

1. Вычисление собственных значений и собственных векторов.
2. Метод Данилевского для разворачивания характеристического определителя.

Раздел 4. Численные методы математического анализа

Тема 9. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Явные схемы Адамса.
2. Построение двухшаговых и трехшаговых схем.
3. Неявные схемы Адамса. Построение неявных схем.
4. Нахождение решения неявной разностной схемы.

В процессе самостоятельного изучения тем лекционного курса студент изучает предложенные им по рекомендуемому преподавателем списку литературы и предоставляет преподавателю краткий конспект, по которому в дальнейшем проводится индивидуальное собеседование.

3.2 Реферат

Реферат по дисциплине «Инженерные приложения численных методов» является одной из форм самостоятельной работы студентов, определенной в рабочей программе.

Цель реферата – изучение студентами комплексного подхода к проблемам создания и эксплуатации систем управления, закрепления материала теоретического курса.

Задачей реферата по дисциплине «Инженерные приложения численных методов» является формирование у студентов умений и навыков по работе с научно-технической литературой, ресурсами глобальной сети Internet, изучение и систематизация широкого круга вопросов, связанных с использованием приближенных методов для решения научной задачи.

Тема реферата выбирается студентом из предлагаемого преподавателем перечня.

По согласованию с руководителем тема реферата может быть предложена студентом самостоятельно. При совпадении тем рефератов на этапе выбора также необходимо провести консультацию с преподавателем, который является руководителем реферата. В процессе этой консультации может быть определена новая тема или же проведена ее корректировка.

При выполнении реферата по дисциплине «Инженерные приложения численных методов» студент должен раскрыть одну из тем, приведенных ниже.

Примерная тематика рефератов

Базовый уровень

1. Приближенные числа и действия над ними.
2. Погрешность машинных вычислений.
3. Погрешность элементарных функций.
4. Метод последовательных исключений как один из методов решения задач линейной алгебры.
5. Вычисление определителя квадратной матрицы методом Гаусса.
6. Решение систем линейных уравнений методом отражений.
7. Использование численных методов для вычисления собственных значений матрицы.
8. Отыскание собственных значений с помощью QR-алгоритмов.
9. Использование метода простой итерации для решения систем нелинейных уравнений.
10. Метод Ньютона для решения систем нелинейных уравнений.
11. Методы спуска как методы решения систем нелинейных уравнений.
12. Методы приближения функции с помощью интерполяционных многочленов.
13. Построение интерполяционного многочлена Чебышева.
14. Наилучшее равномерное приближение как один из методов приближения функции.
15. Обратное интерполирование с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа.
16. Обратное интерполирование с помощью интерполяционного многочлена Ньютона.
17. Методы обработки экспериментальных данных.

18. Использование квадратурных формул Гаусса для приближенного вычисления определенного интеграла.

19. Оценка погрешности квадратурных формул интегрирования функций.

20. Численное интегрирование быстро осциллирующих функций.

21. Постановка задачи оптимизации квадратур.

22. Приближенные методы решения многомерных задач.

23. Решение задачи Коши с помощью формулы Тейлора.

24. Метод прогонки как один из методов решения систем линейных уравнений.

25. Конечно-разностные методы решения дифференциальных уравнений.

26. Метод неопределенных коэффициентов как один из методов интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения.

27. Методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

28. Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

29. Алгоритмы решения краевых задач для систем дифференциальных уравнений первого порядка.

30. Приближенные методы решения нелинейных краевых задач.

Повышенный уровень

1. Методы решения систем линейных уравнений. Метод наискорейшего градиентного спуска.

2. Методы решения систем линейных уравнений. Метод сопряженных градиентов.

3. Итерационные методы решения систем линейных уравнений с использованием спектрально-эквивалентных операторов.

4. Тригонометрическая интерполяция.

5. Многомерная сплайн-интерполяция.

6. Использование метода Монте-Карло для приближенного вычисления значений кратных интегралов.

7. Интерполяция функций в треугольнике.

8. Использование конечно-разностных методов для поиска собственных значений матрицы.

9. Использование вариационных методов для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Требования к оформлению реферата

Реферат по дисциплине «Численные методы и вычислительная математика» оформляется в соответствии с требованиями стандарта ГОСТ 2.105-95.

Общий объем реферата не должен превышать 30 страниц, в том числе введение – не более 2 страниц.

Реферат оформляется на листах формата А4. При его оформлении пояснительной записки следует оставлять поля следующих размеров: левое – 30 мм, правое – 10 мм, верхнее – 25 мм, нижнее – 20 мм. Текст реферата должен быть набран шрифтом Times New Roman 14 пт, интервал полуторный.

Титульный лист является первым листом реферата.

Нумерация страниц должна быть сквозной, порядковый номер листа ставится в правом верхнем углу. Абзацы в тексте начинают отступом, равным 5 знакам.

Содержание основной части реферата следует делить на разделы, подразделы, пункты. Каждый из разделов пояснительной записки должен иметь свой порядковый номер в пределах всей пояснительной записки. Нумерация разделов осуществляется арабскими цифрами без точки, начиная с абзацного отступа. Нумерация подразделов осуществляется внутри соответствующего раздела. Номер подраздела состоит из номеров раздела и

подраздела, разделенных точкой. В конце номера подраздела точка не ставится.

Текст каждого подраздела должен быть разбит по смысловому значению на абзацы. Если документ имеет подразделы, то нумерация пунктов должна быть в пределах подраздела и номер пункта должен состоять из номеров раздела, подраздела и пункта, разделенных точками.

Если раздел или подраздел состоит из одного пункта, он также нумеруется.

Пункты, при необходимости, могут быть разбиты на подпункты, которые должны иметь порядковую нумерацию в пределах каждого подпункта, например: 4.2.1.1, 4.2.1.2, 4.2.1.3, и т. д.

Разделы и подразделы должны иметь заголовки. Пункты, как правило, заголовков не имеют. Заголовки должны четко и кратко отражать содержание разделов, подразделов. Заголовки разделов следует писать прописными буквами без точки в конце, не подчеркивая. Заголовки подразделов и пунктов следует писать с прописной буквы без точки в конце, не подчеркивая. Переносы слов в заголовках не допускаются. Если заголовок состоит из двух предложений, их разделяют точкой

Расстояние между заголовком и текстом должно составлять два полуторных интервала, а расстояние между заголовками раздела и подраздела – три полуторных интервала.

Список литературы, используемой при подготовке реферата, должен быть оформлен в соответствии с требованиями ГОСТ 7.1-84 «Библиографическое описание документа. Общие требования и правила составления».

Рекомендации по организации работ над рефератом

При подготовке реферата по дисциплине «Численные методы и вычислительная математика» студент должен:

- 1) изучить список литературы, рекомендуемой преподавателем;

2) подобрать самостоятельно источники информации, в которых также раскрывается тема реферата, причем в качестве источников информации могут использоваться и ресурсы глобальной сети Internet;

3) составить развернутый план реферата (в течение первых двух недель после выдачи темы реферата);

4) согласовать разработанный план с руководителем реферата.

Примерный календарный план выполнения реферата

Работу над рефератом по дисциплине «Численные методы и вычислительная математика» следует выполнять в следующей последовательности (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Примерный календарный план выполнения реферата

№ этапа	Наименование этапа	№ недели
1	Выдача темы реферата	2 неделя семестра
2	Проверка реферата преподавателем	6 – 9 недели семестра
3	Исправление реферата (доработка)	10 – 15 недели семестра
4	Защита реферата	16 – 17 недели семестра

Порядок защиты и ответственность студента за выполнение реферата

Реферат сдается на проверку руководителю в срок не позднее 10 недели семестра. После проверки руководитель либо допускает студента к защите, либо возвращает реферат на доработку. Если в ходе проверки реферата преподавателем были сделаны замечания, то они должны быть устранены автором (студентом) не позднее 15 недели семестра.

Так как реферат по дисциплине «Численные методы и вычислительная математика» является формой промежуточного контроля самостоятельной работы студента, то его защита осуществляется не позднее 17 недели учебного семестра. В ходе защиты студент делает доклад продолжительностью не более 5 минут, а затем отвечает на вопросы преподавателя по теме реферата.

Оценка «отлично» выставляется, если студент свободно ориентируется в проблеме, описанной в реферате, и дает четкие, развернутые ответы на вопросы преподавателя.

Оценка «хорошо» может быть выставлена, если студент хорошо ориентируется в исследуемой проблеме и может дать обобщенные ответы на вопросы преподавателя по теме реферата.

Оценка «удовлетворительно» выставляется в том случае, если студент плохо ориентируется в теме реферата и не может ответить на сформулированные преподавателем вопросы.

Оценка «неудовлетворительно» может быть выставлена, если:

- 1) защищаемый реферат является точной копией ресурсов сети Internet по данной проблеме;
- 2) студент вообще не ориентируется в теоретическом материале, представленном в реферате;
- 3) два реферата абсолютно идентичны;
- 4) студент не внес изменения в текст реферата в соответствии с замечаниями, сделанными преподавателем в ходе проверки.

Если студентом получена оценка «неудовлетворительно», то он должен доработать реферат и пройти его повторную защиту не позднее 16 недели семестра.

4. ПЛАН-ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ СРС

№	Форма самостоятельной работы	Срок ее сдачи
1	Индивидуальное собеседование по результатам самостоятельного изучения тем лекций	по итогам изучения соответствующего раздела лекционного курса
2	Реферат	по итогам изучения курса

5. ОРГАНИЗАЦИЯ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

5.1. Формы контроля знаний студентов

Контроль и оценка знаний, умений и навыков студентов осуществляется на практических занятиях и при подготовке к сдаче зачета. В ходе контроля знаний преподаватель оценивает понимание студентом содержания дисциплины «Численные методы и вычислительная математика», его способность использовать приближенные методы для решения научных и практических задач.

Контроль знаний студентов может осуществляться в следующих формах:

- текущий контроль знаний;
- итоговый контроль знаний.

Текущий контроль знаний студентов имеет целью:

- дать оценку работы каждого студента по усвоению им учебного материала, выявить недостатки в его подготовке и оказать практическую помощь в их устранении;

Основными формами текущего контроля знаний студентов являются:

- устный контрольный опрос;
- письменный контрольный блиц-опрос;
- защита лабораторных работ;
- проверка конспектов лекций.

Устный контрольный опрос студентов проводится на лекциях и практических занятиях. По его результатам преподаватель оценивает качество подготовки студента к занятию.

Письменный контрольный блиц-опрос студентов проводится в течение пяти минут на лабораторных занятиях путем письменного ответа их на пять вопросов, заданных преподавателем. Результаты его проведения отмечаются в журнале. На лабораторных занятиях знания и практические навыки

студентов оцениваются по 5-балльной системе. Полученные оценки выставляются в журнале.

При этом для оценки сформированных у студентов компетенций используются следующие критерии:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает материал; свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний; использует в ответе дополнительный материал все предусмотренные программой задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному; анализирует полученные результаты; проявляет самостоятельность при выполнении заданий.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено полностью, необходимые практические компетенции в основном сформированы, все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения достаточно высокое. Студент твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, большинство предусмотренных программой заданий выполнено, но в них имеются ошибки, при ответе на поставленный вопрос студент допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, наблюдаются нарушения логической последовательности в изложении программного материала.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы, необходимые практические компетенции не сформированы, большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не

выполнено, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному.

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным **55**. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставаемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

При проверке конспектов лекций дается анализ качества их ведения. Отмечаются допущенные ошибки, в рецензии преподавателя оценивается качество конспектирования учебного материала, даются рекомендации по улучшению качества конспектирования лекционного материала.

5.2. Рекомендации по подготовке к экзамену

Подготовка к экзамену начинается с начала изучения дисциплины. Для допуска к экзамену необходимо посещать все лекции и лабораторные занятия, а также предоставить отчеты о выполнении лабораторных работ, индивидуальных домашних заданий и пройти защиту реферата.

6. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РАБОТЕ С ЛИТЕРАТУРОЙ И ИСТОЧНИКАМИ

6.1. Рекомендации студентам по организации работы с литературой и источниками

Изучение литературы и источников необходимо начинать с прочтения соответствующих глав учебных изданий, учебных пособий или литературы, рекомендованной в качестве основной или дополнительной по дисциплине «Численные методы и вычислительная математика», которые прямо или косвенно относятся к изучаемой теме.

Изучая литературу и источники, студенту рекомендуется вести краткий конспект. Однако не следует переписывать все содержание изучаемой темы, нужно выписывать лишь основные идеи и главные на ваш взгляд мысли. В отдельных случаях, когда встречаются важные определения, понятия, необходимый фактический материал и примеры, статистическая информация, имеющие отношение к изучаемой теме, студенту следует выписать их в виде цитат с полным указанием библиографических источников.

Конспектирование рекомендуемой литературы и источников необходимо вести с распределением собранных материалов по отдельным главам и параграфам согласно учебно-тематическому плану. Необходимо выписывать все выходные данные по используемой литературе и источникам.

Основой технологии интенсификации обучения на платформе цифровых образовательных технологий являются учебно-иллюстрационные материалы (опорный конспект) по дисциплине "Численные методы и вычислительная математика "

Работа с учебно-иллюстрационными материалами имеет следующие этапы.

1. Изучение теоретических основ учебного материала в аудитории: изложение преподавателем изучаемого материала студентам с объяснением по опорному конспекту;

2. Самостоятельная работа: индивидуальная работа студентов по опорному конспекту; фронтальное закрепление по блокам опорного конспекта.

3. Первое повторение - воспроизведение содержания заданной темы опорного конспекта по памяти.

4. Устное проговаривание материала опорного конспекта - необходимый этап внешнеречевой деятельности при усвоении учебного материала.

5. Второе повторение - взаимопрос и взаимопомощь студентов друг другу.

Применение учебно-иллюстрационных материалов позволяет обобщить сложный по содержанию материал, активизировать мыслительную деятельность студентов.

Необходимо помнить, что главное для студента в самостоятельной работе с рекомендуемой литературой и источниками – это формирование своего индивидуального стиля, который может стать основой в будущей профессиональной деятельности.

6.2 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Орешкова, М.Н. Численные методы: теория и алгоритмы : учебное пособие / М.Н. Орешкова ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова. - Архангельск : САФУ, 2015. - 120 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=436397>

2. Пожарская, Г.И. PYTHON 14: Основные сервисы и технологии / Г.И. Пожарская, Д.М. Назаров. - 2-е изд., испр. - Москва : Национальный

Открытый Университет «ИНТУИТ», 2016. - 139 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=429120>

3. Агафонов, Е.Д. Прикладное программирование: учебное пособие / Е.Д. Агафонов, Г.В. Ващенко ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Сибирский Федеральный университет. - Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2015. - 112 с. [Электронный ресурс]. - Режим доступа : <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=435640>.

4. Интерактивные системы Scilab, Matlab, Python : учебное пособие / И.Е. Плещинская, А.Н. Титов, Е.Р. Бадертдинова, С.И. Дуев ; Министерство образования и науки России, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет». - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. - 195 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=428781>

5. Колокольникова, А.И. Спецразделы информатики: введение в MatLab : учебное пособие / А.И. Колокольникова, А.Г. Киренберг. - Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2014. - 73 с. : [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275268>

Дополнительная литература

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. - 8-е изд. (эл.). - М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. - 639 с. : табл., ил. - (Классический университетский учебник). - То же [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222833>

2. Калиткин, Н. Н. Численные методы : учеб. пособие / Н.Н. Калиткин ; под ред. А.А. Самарского. – 2-е изд. – СПб. : БХВ-Петербург, 2014. – 586 с. : ил. – (Учебная литература для вузов). – Гриф.: Рек. Научно-методическим советом. – Библиогр.: с. 575-581 (129 назв.). – Предм. указ.: с. 582-586. – ISBN 978-5-9775-0500-0 (электронный каталог библиотеки СКФУ)

3. Численные методы в информационных системах : учебное пособие / Ю.Ю. Громов, О.Г. Иванова, М.А. Ивановский и др. ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет». - Тамбов : Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. - 135 с. : ил. - Библиогр. в кн. ; То же [Электронный ресурс]. - Режим доступа: biblioclub.ru/index.php?page=book&id=277634

4. Мурашкин, В.Г. Инженерные и научные расчеты в программном комплексе Python : учебное пособие / В.Г. Мурашкин. - Самара : Самарский государственный архитектурно-строительный университет, 2011. - 84 с. - [Электронный ресурс]. – Режим доступа URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=143487>

Методическая литература

1. Крахоткина Е. В. Численные методы в научных расчетах: учебное пособие (курс лекций). – Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2015. – 162 с.

6.3 Internet-ресурсы

- 1) <http://www.exponenta.ru> – образовательный математический сайт;
- 2) <http://www.intuit.ru> – Национальный открытый университет «ИНТУИТ»;
- 3) <http://www.window.edu.ru> – Единое окно доступа к образовательным ресурсам.

6.4 Материально-техническое обеспечение дисциплины

К материально-техническому уровню освоения содержания дисциплины «Численные методы и вычислительная математика» можно отнести:

- индивидуальное взаимодействие со студентами в процессе проведения лекционных и лабораторных занятий;

- использование на лекциях и лабораторных занятиях мультимедийного оборудования;
- включение в лабораторные работы индивидуального поиска, систематизации и анализа информации через Internet;
- авторские презентации к лекциям;
- аудитория для проведения лекционных и лабораторных занятий должна быть оборудована проектором для проведения занятий в интерактивной форме;
- Microsoft Office - Word, Excel;
- пакет автоматизации математических вычислений – Python;
- ОС Windows;
- компьютерный класс с предустановленным программным обеспечением.