

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине «МАТЕМАТИКА»

для студентов направления подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика
направленность (профиль) «Информационная бизнес-аналитика и цифровые
технологии»

**Ставрополь
2026**

Методические указания по дисциплине «Математика» содержат задания для студентов, необходимые для проведения практических занятий.

Проработка практических заданий позволит студентам приобрести необходимые знания в области организации научных исследований и систематизировать знания, полученные на лекциях.

Предназначены для студентов направления подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика, направленность (профиль) «Информационная бизнес-аналитика и цифровые технологии».

Содержание

Практическое занятие № 1 «ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ, ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ	10
1. Матрицы, основные определения.	
2. Действия над матрицами.	
3. Элементарные преобразования матрицы. Ранг матрицы.»	
Практическое занятие № 2 «ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ, ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ	20
1. Системы линейных уравнений. Основные определения.	
2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.	
3. Критерий совместности систем линейных уравнений.»	
Практическое занятие № 3 «ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ, ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ	30
1. Прямоугольные декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Основные задачи на прямоугольные координаты.	
2. Полярная система координат, ее связь с прямоугольной. Цилиндрическая и сферическая системы координат.	
3. Скаляры и векторы, основные определения. Линейные действия над векторами.	
4. Линейная зависимость системы векторов, базис и ранг системы векторов, координаты вектора.»	
Практическое занятие № 4 «ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ И ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ, ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ	42
1. Прямая линия на плоскости. Различные уравнения прямой.	
2. Кривые второго порядка.»	
Практические занятия № 5 «С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	53
1. Предел числовой последовательности. Число e .	
2. Предел функции. Односторонние и бесконечные пределы. Основные теоремы о пределах.	
3. Замечательные пределы и следствия из них.»	
Практические занятия № 6 «С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	66
1. Понятие производной, её механический и геометрический смысл.	
2. Правила дифференцирования. Таблица основных производных.	
3. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой.»	
Практическое занятие № 7 «С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	72
1. Функции заданные неявно, их дифференцирование.	
2. Параметрически заданные функции и их дифференцирование.»	
Практическое занятие № 8 «С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	80

1. Логарифмическое дифференцирование.	
2. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения.»	
Практическое занятие № 9 «С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	86
1. Применение производной к вычислению пределов функций. Правила Лопиталья.	
2. Формула Тейлора.»	
Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	93

ПРЕДИСЛОВИЕ

Целями освоения дисциплины «Математика» являются:

- понимание и восприятие основных понятий математики;
- формирование математической культуры студентов: умения логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения практических задач;
- освоение основ современного математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач, связанных с применением математических методов в практической деятельности;
- создание условий для развития профессионального творчества и опыта самостоятельной деятельности по усвоению содержания математического образования.

К числу задач освоения курса можно отнести:

- формирование минимума фундаментальных математических знаний в области линейной алгебры, дифференциального и интегрального исчислений, обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных, теории разложения функций в ряд;
- применение основных понятий, идей и методов фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач;
- применение численных методов решения базовых математических задач в практической деятельности;
- умение находить, анализировать и контекстно обрабатывать научно-техническую информацию.

Дисциплина «Математика» относится к числу базовых дисциплин *Математического и естественнонаучного цикла*. Материал курса излагается в такой последовательности, чтобы одни из математических разделов являлись основой для изучения других. Изучение дисциплины основывается на знаниях студентами курса математики общеобразовательной школы.

В результате изучения дисциплины «Математика» студент должен обладать следующими компетенциями:

- Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК-1);

ИД-1 УК-1. выделяет проблемную ситуацию, осуществляет ее многофакторный анализ и диагностику на основе системного подхода

ИД-2 УК-1. осуществляет поиск, отбор и систематизацию информации для определения альтернативных вариантов стратегических решений в проблемной ситуации

ИД-3 УК-1. определяет и оценивает риски возможных вариантов решений проблемной ситуации, выбирает оптимальный вариант её решения

При формировании названных компетенций в результате изучения дисциплины «Математика» специалист должен

Знать:

- основные понятия, определения и свойства объектов математического анализа: функция, предел, непрерывность функции, производная функции, первообразная функция и неопределенный интеграл, определенный интеграл, возможные сферы их приложения;
- основные понятия линейной алгебры: теория матриц, системы линейных уравнений;
- основные понятия аналитической геометрии, определения и свойства геометрических объектов, их уравнения, формулировки утверждений, возможные сферы их приложений;
- основные понятия теории дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, возможные сферы их приложений.

Уметь:

- решать задачи математического анализа: исследовать функции, опираясь на аппарат дифференциального исчисления, и строить их графики, вычислять пределы функций, находить производные и дифференциалы функций, применять их в приближенных вычислениях; вычислять

неопределенные и определенные интегралы, разлагать основные элементарные функции в ряд и исследовать ряд на сходимость, использовать теорию рядов в приближенных вычислениях, применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания;

- решать обыкновенные дифференциальные уравнения первого и второго порядков, понижать порядок дифференциальных уравнений, применять теорию рядов для решения дифференциальных уравнений, составлять дифференциальные уравнения для задач предметной области;
- решать системы линейных уравнений, вычислять определители, выполнять действия над матрицами, применять методы решения этих задач при нахождении интегралов, решении дифференциальных уравнений;
- выполнять действия над векторами; составлять уравнения прямой и плоскости, кривых и поверхностей второго порядка, приводить уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определять взаимное расположение перечисленных геометрических объектов, применять решение этих задач при решении задач математического анализа и задач предметной области;
- решать численными методами уравнения, системы уравнений, дифференциальные уравнения и их системы, вычислять приближенными методами определенные интегралы;
- применять необходимые методы математического анализа обработки экспериментальных данных, выбрать соответствующий математический аппарат для решения и контроля правильности решения;
- применять полученные знания для анализа основных задач, типичных для естественнонаучных дисциплин.

Владеть:

- аппаратом математического анализа, методами доказательства утверждений, навыками применения этого в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания;

- математическим аппаратом дифференциальных уравнений, методами решения задач в этой области;
- методами линейной алгебры;
- математическим аппаратом аналитической геометрии, аналитическими методами исследования геометрических объектов;
- методами и технологиями разработки численных методов для задач из указанных разделов.

Математическое образование предполагает формирование у будущих специалистов таких компетенций профессиональной деятельности как умение

- сформулировать гипотезу и проверить ее в дальнейшем;
- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- ставить новые вопросы и видеть проблемы в традиционных ситуациях;
- владеть основными методиками решения учебно-исследовательских задач;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- стимулировать фантазию;
- систематизировать результаты наблюдений и экспериментов;
- применять основные понятия, идеи и методы фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач;
- применять численные методы решения базовых математических задач в практической деятельности;
- планировать самостоятельную работу;
- осуществлять самоконтроль за работой, объективно оценивать ее результат.

Данное учебно-методическое пособие представляет собой учебно-методические материалы по организации практических занятий по математике для студентов. Пособие подготовлено в соответствии со стандартами третьего поколения указанного направления и согласно с учебным планом содержит 18 занятий по следующим разделам: «Основы

линейной и векторной алгебры», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Интегральное исчисление функции одной переменной», «Числовые и функциональные ряды», «Функции нескольких переменных», «Дифференциальные уравнения». Для каждого занятия указаны цель занятия; предложены вопросы, выносимые на обсуждение; даны методические рекомендации по подготовке и проведению каждого занятия. Подготовка к каждому занятию предполагает изучение рекомендуемой литературы по вопросам, выносимым на обсуждение. Список литературы с указанием пунктов и параграфов для изучения приводится к каждому занятию. Здесь можно рекомендовать воспользоваться одним – двумя источниками, в зависимости от имеющихся в наличии. Для эффективной подготовки к занятиям рекомендуется найти ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями, а также изучить разобранные в пособии примеры решения типовых задач. Формирование практических умений и навыков происходит при решении практических заданий для развития и контроля владения компетенциями, которые в пособии разделены на две части: задания, решаемые в аудитории, и задания для самостоятельной работы дома.

Данное пособие может служить также основой для организации самостоятельной работы студентов. В нем содержатся предусмотренные программой дисциплины индивидуальные домашние задания в тридцати вариантах, примерные варианты контрольных работ, вопросы к коллоквиумам, а также примерная тематика проектов по курсу.

Хочется надеяться, что работа студентов с данным пособием позволит им освоить дисциплину «Математика» на хорошем уровне и научиться применять математические методы в своей профессиональной деятельности.

РАЗРАБОТКИ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие № 1 (часть 1)

Тема занятия «Матрицы, основные определения. Действия над матрицами»

Цель занятия: Введение основных понятий линейной алгебры, формирование умений выполнять действия над матрицами и вычислять определители.

Организационная форма занятия: практикум.

Компетенции, формируемые на занятии: УК-1.

При формировании названных компетенций на занятии специалист должен знать основные понятия линейной алгебры, уметь вычислять определители, выполнять действия над матрицами, применять решение этих задач при решении задач математического анализа и задач предметной области.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Линейные действия над матрицами.
2. Определители второго и третьего порядков.
3. Теорема о вычислении определителя.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.

Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. Получите индивидуальное задание у преподавателя по подготовке проекта по курсу, по приведенным темам в конце этого учебно-методического пособия. Защита этого проекта будет проходить в течении года по графику, указанному преподавателем.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома. Подготовьтесь к самостоятельной работе №1 по теме «Действия над матрицами. Вычисление определителей». Примерный вариант этой работы Вы можете найти в программе дисциплины.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 3 п. 3.1.
- [2] часть 1 глава I § 5; глава III §§ 1 – 2.
- [3] часть 1 глава 2 §§ 8 – 9.
- [4] часть I занятие 15.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Рекомендуется рассмотреть в [2] часть 1 разобранные задания 399-401 - на действия над матрицами, 217 - на вычисление определителей второго и третьего порядков, 218, 383, 384 – на применение теоремы о вычислении определителя путем разложения по элементам строки (столбца) и на свойства определителя.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение матрицы, элементов матрицы; расскажите, как матрицы обозначаются, приведите примеры.
2. Введите понятия квадратной, диагональной, единичной, нулевой, ступенчатой, транспонированной, симметрической матриц, матрицы-строки и матрицы-столбца. Приведите примеры.
3. Когда говорят о размерах, а когда о размерности матрицы? Приведите примеры и введите соответствующие обозначения.
4. Дайте определение суммы двух матриц. Какие матрицы можно складывать? Приведите примеры.
5. Как умножить матрицу на число? Приведите пример.
6. Для каких двух матриц можно определить операцию произведения? Введите эту операцию, проиллюстрируйте ее на примере. Коммутативно ли умножение двух матриц?
7. Приведите пример использования матриц в области Вашей предметной деятельности.
8. Какие задачи приводят к понятиям определителей второго и третьего порядков. Как обозначаются определители?
9. Расскажите о правилах вычисления определителей второго и третьего порядков. Как называют правило вычисления определителей третьего порядков?
10. Введите понятия члена определителя, перестановки, транспозиции. Как определить четность перестановки?
11. Дайте определение определителя n -го порядка? Докажите, что правило «треугольника» является частным случаем этого определения.
12. Сформулируйте основные свойства определителей.
13. Введите понятия минора и алгебраического дополнения элемента определителя.
14. Сформулируйте теорему о вычислении определителя и следствие из нее.

Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями
Задания, решаемые в аудитории

1. Выполните действия над матрицами:

a) $5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найдите произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}$;

б) $A = (1 \ 2 \ 4 \ 5), B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите определители второго порядка:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$.

4. По правилу «треугольника» вычислите определители третьего порядка:

a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -2 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & -7 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

г) $\begin{vmatrix} x & 2 & -1 \\ 0 & 3 & x+1 \\ 4 & -2 & x \end{vmatrix} = 35$.

5. Найдите сумму корней уравнения:

6. Найдите определители, используя их свойства:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 8 & -3 \\ 1 & -12 & 15 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 9 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$.

7. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, разложив его

а) по элементам первой строки;

б) по элементам третьего столбца

8. Вычислите определитель, предварительно получив максимально возможное число нулей в каком-либо столбце или какой-либо строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Выполните действия над матрицами:

а) $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^T + 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A \cdot A^T$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \\ 2 & 6 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -4 \end{pmatrix}^2$.

2. Найдите произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 8 & -2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = (2 \quad -1 \quad 5 \quad -3)$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{tg} \alpha \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}$.

4. Вычислите определители третьего порядков по правилу «треугольника»:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ 12 & 5 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$.

5. Решите неравенство:

$$\begin{vmatrix} x-1 & x & 2 \\ -1 & 1 & -x \\ 2 & 1 & x+1 \end{vmatrix} \leq 2.$$

6. Найдите определители, используя их свойства:

а) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & 25 & 125 \\ 3 & 9 & 27 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 18 & 24 & -48 \\ 36 & 12 & 192 \\ 42 & -6 & 288 \end{vmatrix}$.

7. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 6 \\ -4 & 3 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, разложив его

а) по элементам второй строки;

б) по элементам четвертого столбца.

8. Вычислите определитель, предварительно получив максимально возможное число нулей в каком-либо столбце или какой-либо строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & -7 \end{vmatrix}.$$

Практическое занятие № 1 (часть 2)

Тема занятия «Элементарные преобразования матрицы. Ранг матрицы.»

Цель занятия: Формирование умений находить ранг матрицы.

Организационная форма занятия: вычислительный практикум.

Компетенции, формируемые на занятии: УК-1.

При формировании на занятии названных компетенций специалист должен освоить понятие ранга матрицы, уметь применять основные методы вычисления ранга матрицы при исследовании систем линейных уравнений, применять решение этих задач при решении задач математического анализа и задач предметной области.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Определение ранга матрицы.
2. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
3. Метод окаймляющих миноров нахождения ранга матрицы.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.

Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.

2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Рекомендуемая литература

[1] глава 3 пп. 3.1. – 3.2.

[2] часть 1 глава IV § 4.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Найдите ранг матрицы с помощью элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -15 & -4 \\ 2 & 5 & -16 & -7 \\ 1 & -11 & 19 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение. Сводим матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -15 & -4 \\ 2 & 5 & -16 & -7 \\ 1 & -11 & 19 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -20 & -9 \\ 0 & 9 & -18 & -9 \\ 0 & -9 & 18 & 9 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -20 & -9 \\ 0 & 9 & -18 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -20 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\text{rang } A = 3$.

2. С помощью метода окаймленных миноров найдите ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим ненулевой минор 1-го порядка. Начнем с левого верхнего угла: $M_1 = 1$.

Окаймляем его, добавляя 2-ю строку и 2-ой столбец:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

Находим другое окаймление минора 1-го порядка. Например, добавим 2-ю строку и 3-й столбец:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -5 \neq 0.$$

Окаймляем минор M_{21} . Добавим 3-ю строку и 4-й столбец:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 9 + 0 - 0 - 18 + 6 = 0.$$

Составляем другое окаймление M_{21} , добавляем 3-ю строку и 2-ой столбец:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 - 8 - 2 + 8 - 12 = 0.$$

Так как все окаймляющие миноры 3-го порядка равны нулю, то наивысший порядок отличных от нуля миноров равен 2. Следовательно, $\text{rang } A = 2$.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какая матрица называется матрицей ступенчатого вида?
2. Дайте определение ранга матрицы.
3. Перечислите элементарные преобразования матрицы.
4. Как вычислить ранг матрицы с помощью элементарных преобразований?
5. Введите понятия линейно зависимых и линейно независимых строк (столбцов) матрицы. Какое еще можно дать определение ранга матрицы?
6. Изложите метод окаймляющих миноров для нахождения ранга матрицы. На каких свойствах этот метод основан?

Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. С помощью элементарных преобразований вычислите ранги следующих матриц:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 & 3 \\ 10 & 18 & 22 & 17 \\ 4 & 8 & 10 & 7 \\ 0 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}; \text{ б) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -7 & 2 & 7 & -5 & -1 & 3 \\ 6 & -1 & -9 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Методом окаймляющих миноров найдите ранги следующих матриц:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -2 \\ 9 & 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \text{ б) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -7 & 2 & 7 & -5 & -1 & 3 \\ 6 & -1 & -9 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. С помощью элементарных преобразований вычислите ранги следующих матриц:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -2 \\ 9 & 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \text{ б) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -7 & 2 & 7 & -5 & -1 & 3 \\ 6 & -1 & -9 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Методом окаймляющих миноров найдите ранги следующих матриц:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \text{ б) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Практические занятия № 2

Тема занятия «Системы линейных уравнений. Основные определения.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Критерий совместности систем линейных уравнений.»

Цель занятия: Сформировать умения и навыки решения систем линейных уравнений, овладение критериями исследования систем линейных уравнений.

Организационная форма занятия: практикум

Компетенции, формируемые на занятии: УК-1.

Формирование на занятии у будущих специалистов этих компетенций предполагает обучение студентов

- сформулировать гипотезу и проверить ее в дальнейшем;
- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- применять основные понятия, идеи и методы фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач;
- планировать самостоятельную работу;
- осуществлять самоконтроль за работой, объективно оценивать ее результат.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Системы линейных уравнений. Основные определения.
2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
3. Критерий совместности систем линейных уравнений.
4. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
5. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.
6. Однородная система линейных уравнений, условие существования ненулевых решений

Методические рекомендации

Для подготовки дома к занятию № 2

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

Для подготовки дома к занятию № 2 подготовьтесь к самостоятельной работе №3 по теме «Методы решения систем линейных уравнений».

Примерный вариант этой работы Вы можете найти в программе дисциплины. На занятии по указанию преподавателя.

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. На занятии № 2 решите предложенный преподавателем вариант самостоятельной работы №2.
4. На занятии № 2 решите предложенный преподавателем вариант самостоятельной работы №3.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома. В тетради для индивидуальных домашних заданий выполните ИДЗ №1 по теме «Методы решения систем

линейных уравнений» и сдайте на следующем занятии его на проверку преподавателю. Индивидуальные задания выполняются по вариантам определенным для Вас преподавателем.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 3 п. 3.4.
- [2] часть 1 глава I §5, глава IV §§ 5 – 7.
- [3] часть 1 глава 2 § 8.
- [4] часть 1 занятие 15.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Решите систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}.$$

Решение. Составляем расширенную матрицу и сводим ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 2 & -1 & 3 & | & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 0 & -3 & 2 & | & -1 \\ 0 & -5 & 5 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица свелась к треугольному виду, следовательно, система имеет единственное решение.

Восстанавливаем систему и решаем её снизу вверх.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 = 0, \\ x_3 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 + x_3, & x_1 = 2 - 2 + 1, & x_1 = 1 \\ x_2 = x_3, & x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

2. Решите систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу и сводим её к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Данная система не совместна, так как последняя строка матрицы соответствует уравнению $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 5$, которое решения не имеет.

3. Решите систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу и сводим ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица свелась к трапецеидальному виду, следовательно, система является неопределенной:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть x_3 - свободная неизвестная. Тогда получаем общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

4. Исследуйте системы из примеров 1-3 согласно критерию совместности.

Решение. Для примера 1. $\text{rang } A = \text{rang } B = 3$ и число неизвестных $n=3$, т.е. система определенная.

Для примера 2. $\text{rang } A = 3, \text{rang } B = 4$, поэтому система несовместна.

Для примера 3. $\text{rang } A = \text{rang } B = 2$, число неизвестных $n=3$, поэтому система является неопределенной.

5. Решите систему в матричной форме:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}.$$

Решение. Запишем систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & 5 & 1 & -7 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5/11 & -1/11 & 7/11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/11 & 5/11 & -2/11 \\ 0 & 1 & 0 & 1/11 & -2/11 & 3/11 \\ 0 & 0 & 1 & -5/11 & -1/11 & 7/11 \end{array} \right).$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/11 & 5/11 & -2/11 \\ 1/11 & -2/11 & 3/11 \\ -5/11 & -1/11 & 7/11 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

Получаем решение системы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/11 & 5/11 & -2/11 \\ 1/11 & -2/11 & 3/11 \\ -5/11 & -1/11 & 7/11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 5/11 - 4/11 \\ 0 - 6/11 + 6/11 \\ 0 - 3/11 + 14/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Замечание. Матричный метод решения систем линейных уравнений применим только тогда, когда число уравнений системы равно числу неизвестных и матрица A является невырожденной.

6. Решите систему из примера 5 методом Крамера.

Решение. Вычисляем основной определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -14 + 3 = -11 \neq 0.$$

Вычисляем определители Δ_i :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(15 - 4) = -11.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -14 + 3 = -11.$$

Получаем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-11}{-11} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-11} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-11}{-11} = 1.$$

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определения системы линейных уравнений, однородной и неоднородной систем, решения системы.
2. Какая система называется совместной, а какая несовместной?
3. Дайте определение определенной и неопределенной систем.
4. Сформулируйте критерий совместности систем линейных уравнений.
5. Расскажите о методе Гаусса. Перечислите элементарные преобразования матрицы.
6. Когда, решая систему методом Гаусса, делаем вывод
 - о несовместности системы;
 - об определенности системы;
 - о неопределенности системы?
7. Как найти общее решение системы, приведенной к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса?
8. В чем особенность применения метода Гаусса при решении однородной системы?
9. Как записать систему линейных уравнений в матричной форме?
10. Вспомните условия существования обратной матрицы и методы ее нахождения.
11. Изложите матричный метод решения систем линейных уравнений. Какие системы можно решать этим методом.
12. Расскажите о методе Крамера решения систем линейных уравнений. Каковы границы его применения?
13. Какие выводы можно сделать о числе решений однородной системы линейных уравнений.
14. Сделайте сравнительный анализ рассмотренных методов решения систем линейных уравнений.

Задания практикума
для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

2. Решите систему линейных уравнений матричным методом, методом Крамера и методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 13x_3 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 13x_3 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

3. Исследуйте и решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 7 \end{cases}.$$

4. Найдите фундаментальную систему решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

Задания для самостоятельной работы дома

Выполните ИДЗ по теме «Методы решения систем линейных уравнений»

1. Исследовать систему на совместность и число решений системы.
2. Изменить систему таким образом, чтобы она была совместной (определенной и неопределенной), несовместной.
3. Решить систему методом Гаусса.

Для определенной системы

4. Решить систему методом Крамера.

5. Решить систему матричным методом.

Системы к индивидуальным домашним заданиям.

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 18, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 = -10, \\ x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = -48. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 12, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 17, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_3 + 6x_4 = 8, \\ 2x_2 + 5x_4 = 9. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 12x_3 - 3x_4 = 27, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 7. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 - 7x_2 + 8x_3 + x_4 = 15, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 25, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 13x_4 = 11, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + 14x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 13. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
15. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + 14x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases} & 16. \begin{cases} x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 9x_3 - 5x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6. \end{cases} \\
17. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 5. \end{cases} & 18. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2. \end{cases} \\
19. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases} & 20. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 21x_3 + 52x_4 = -8, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = -48. \end{cases} \\
21. \begin{cases} x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 265x_4 = -48, \\ 4x_2 + 18x_3 + 48x_4 = -10, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases} & 22. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 29, \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + x_4 = 41, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 30, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases} \\
23. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 29, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 12, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases} & 24. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases} \\
25. \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1. \end{cases} & 26. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 16. \end{cases} \\
27. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 16, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 11. \end{cases} & 28. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ x_1 - 12x_2 + 15x_3 + 5x_4 = 23, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases} \\
29. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12. \end{cases} & 30. \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 25, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 19, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8. \end{cases}
\end{array}$$

Практическое занятие № 3 (часть 1)

Тема занятия «Скаляры и векторы, основные определения. Линейные действия над векторами. Линейная зависимость системы векторов, базис и ранг системы векторов, координаты вектора.»

Цель занятия: Введение основных понятий векторной алгебры, имеющих большое значение для механики, электротехники и других технических дисциплин.

Организационная форма занятия: практикум.

Компетенции, формируемые на занятии: УК-1.

Формирование на занятии у будущих специалистов этих компетенций предполагает обучение студентов

- анализировать ситуации и делать выводы;
- видеть проблемы в традиционных ситуациях;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- применение основных понятий, идей и методов математики для решения базовых задач.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Линейные операции над векторами.
2. Скалярное произведение векторов.
3. Векторное произведение векторов.
4. Смешанное произведение векторов.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.

3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. Решите предложенный вариант самостоятельной работы №1 по теме «Действия над матрицами. Вычисление определителей».

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 2.
- [2] часть 1 глава 2 §§ 2 – 3.
- [4] часть 1 занятие 16.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие величины относятся к скалярным, а какие к векторным величинам? Приведите примеры.
2. Дайте определение вектора, модуля вектора. Как обозначают эти величины.

3. Введите понятие единичного вектора, нулевого вектора, коллинеарных, сонаправленных и противоположно направленных векторов, равных векторов, компланарных векторов.
4. Расскажите, какие операции над векторами относят к числу линейных операций.
5. Объясните правила построения суммы двух векторов (правило треугольника, правило параллелограмма), суммы конечного числа векторов (правило ломанной).
6. Дайте определение разности двух векторов и постройте разность двух векторов.
7. Как найти произведение вектора на действительное число?
8. Перечислите основные свойства линейных операций над векторами.
9. Введите понятие линейной комбинации системы векторов, линейно зависимой и линейно независимой системы векторов. Сколько векторов на плоскости и в пространстве могут быть линейно независимы?
10. Дайте определение базиса и ранга системы векторов, координат вектора.
11. Как определяются линейные операции над векторами в координатной форме?
12. Дайте определение скалярного произведения двух геометрических векторов и сформулируйте его основные свойства и геометрическую интерпретацию.
13. Как определить угол между векторами и длину вектора? Запишите формулы в координатной форме.
14. Расскажите о компланарных векторах и о направляющих косинусах.
15. Сформулируйте определение векторного произведения, расскажите о его геометрических приложениях. Перечислите основные свойства векторного произведения.
16. Дайте определение смешанного произведения векторов. Сформулируйте основные свойства смешанного произведения, расскажите о его геометрических приложениях

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Рекомендуется рассмотреть в [2] часть 1 разобранные задания 240, 241 на линейные действия над векторами, 257 - 259 на скалярное произведение и его приложения, 260 – 262 на векторное произведение и его приложения, 264 – 266 на смешанное произведение векторов и его приложения; в [3] часть 1, глава 1, §3 задание 7 на применение скалярного произведения в производственной сфере.

Задания практикума

1. Даны точки A и B . Найдите:

- а) координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$;
- б) длину вектора $\overrightarrow{AB}$;
- в) направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{BA}$.

2. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями Oy и Oz углы β и $\gamma = 120^\circ$. Какой угол он составит с осью Ox ?

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол β , причем $|\vec{a}| = 5$ и $|\vec{b}| = 8$. Определите $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

4. В прямоугольнике $OACB$ M и N – середины сторон BC и AC . Разложите вектор $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ по векторам $\vec{a} = \overrightarrow{ON}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BM}$.

5. Определите угол между векторами $\vec{a} = (2; -4; 4)$ и $\overrightarrow{AC}$

6. Даны векторы $\vec{a} = (4; -2; -4)$, $\vec{b} = (6; -3; 2)$.

Вычислите: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $(2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$; в) $(\vec{a} + \vec{b})^2$.

7. Дан вектор $\vec{a} = (-3; -4)$ и точка $A(1; 1)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если известно, что точка B принадлежит оси Oy и скалярное произведение $\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB} = -5$.

8. Даны векторы $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ и $\vec{b} = (1; 2; -1)$. Найдите:

- а) $\vec{a} \times \vec{b}$; б) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$; в) $(2\vec{a} - \vec{b}) \times (2\vec{a} + \vec{b})$

9. Постройте треугольник с вершинами A, B, C . Вычислите его площадь и высоту BD .

10. Найдите смешанное произведение векторов $\overline{BC} = \bar{a}$, $\bar{b}(1; 3; -1)$, $\bar{c}(1; 1; 4)$.

11. Найдите объем пирамиды с вершинами в точках $A, B, C, D(2; 3; 8)$ и вычислите ее высоту, опущенную на грань ABC .

Данные для заданий выберите из таблицы согласно своему варианту:

Вариант	$A(x_1; y_1; z_1)$	$B(x_2; y_2; z_2)$	$C(x_3; y_3; z_3)$	α
1	(-1; 3; 2)	(1; 1; -5)	(-4; 2; 4)	30°
2	(-2; 3; 1)	(1; 2; 4)	(-4; 4; 5)	45°
3	(-3; 3; -5)	(1; 4; -2)	(-5; 1; 4)	60°
4	(-4; 3; 2)	(2; 1; 2)	(-5; 2; -3)	120°
5	(-5; 3; 1)	(2; 2; -5)	(-5; 4; -4)	135°
6	(-1; 1; 5)	(2; 4; -3)	(1; 3; 1)	150°
7	(-1; 2; -3)	(3; 1; 4)	(2; 3; -5)	30°
8	(-1; 4; 1)	(3; 2; -1)	(3; 3; 7)	45°
9	(-2; 1; -1)	(3; 4; -2)	(4; 3; -2)	60°
10	(-2; 2; 4)	(4; 1; -2)	(5; 3; -6)	120°
11	(-2; 4; 1)	(4; 2; -5)	(1; 1; -7)	135°
12	(-3; 1; 1)	(4; 4; 2)	(1; 2; -6)	150°
13	(-3; 2; 3)	(5; 1; -2)	(3; -2; 6)	30°
14	(-3; 4; -2)	(5; 2; -3)	(3; -4; -5)	45°
15	(-4; 1; 2)	(5; 4; -2)	(4; -1; -6)	60°
16	(-4; 2; 4)	(1; -1; 3)	(-4; -2; -5)	120°
17	(-4; 4; 5)	(1; -2; 7)	(-4; -4; 1)	135°
18	(-5; 1; 4)	(1; -4; 2)	(-5; -1; 6)	150°
19	(-5; 2; -3)	(2; -1; -2)	(-5; -2; 2)	30°
20	(-5; 4; -4)	(2; -2; 3)	(-5; -4; 2)	45°
21	(1; 3; 1)	(2; -4; -3)	(1; 1; -5)	60°
22	(2; 3; -5)	(3; -1; 2)	(1; 2; 4)	120°
23	(3; 3; 7)	(3; -2; 6)	(1; 4; -2)	135°
24	(4; 3; -2)	(3; -4; -5)	(2; 1; 2)	150°
25	(5; 3; -6)	(4; -1; -6)	(2; 2; -5)	30°
26	(1; 1; -7)	(-4; -2; -5)	(2; 4; -3)	45°
27	(1; 2; -6)	(-4; -4; 1)	(3; 1; 4)	60°
28	(1; 4; 2)	(-5; -1; 6)	(-3; 4; -2)	120°
29	(2; 1; -5)	(-5; -2; 2)	(-4; 1; 2)	135°
30	(2; 2; -6)	(-5; -4; 2)	(-4; 2; 4)	150°

Задания для самостоятельной работы дома

- Даны точки $A(3; -1; 2)$ и $B(-1; 2; 1)$. Найдите:
 - координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$;
 - длину вектора $\overrightarrow{AB}$;
 - направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{BA}$.
- Вектор $\vec{a}$ составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$. Вычислите его координаты при условии, что $|\vec{a}| = 2$.
- Даны: $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$. Вычислите $|\vec{a} + \vec{b}|$.
- Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = 120^\circ$, причем $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Определите $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.
- На плоскости Oxy постройте векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$. Разложите вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- Определите, при каких значениях α и β векторы $\vec{a}(3; \alpha; -1)$ и $\vec{b}(4; -1; \beta)$ компланарны.
- Определите угол между векторами $\vec{a} = (1; 2; 3)$ и $\vec{b} = (6; 4; -2)$.
- Вычислите: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $(\vec{a} - \vec{b})^2$; в) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$.
- Даны вектор $\vec{a}(2; -9; 1)$ и точка $A(3; 0; -1)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, перпендикулярного вектору $\vec{a}$, если известно, что точка B принадлежит оси OZ .
- Даны точки $A(2; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(3; 2; 1)$. Найдите:
 - $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$;
 - $(\overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{CA}) \times \overrightarrow{CB}$;
 - $(\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CA}) \times (\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CA})$.
- Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$.
- Найдите смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, если $A(2; 2; 2)$, $B(4; 3; 3)$, $C(4; 5; 4)$, $D(5; 5; 6)$.

13. Найдите объем пирамиды с вершинами в точках

$O(0; 0; 0)$, $A(5; 2; 0)$, $B(2; 5; 0)$, $C(1; 2; 4)$ и вычислите площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.

14. Проверьте компланарность векторов $\vec{a}(2; 3; -1)$, $\vec{b}(1; -1; 3)$, $\vec{c}(1; 9; -11)$.

15. Объем тетраэдра равен 5 ед^3 , три его вершины находятся в точках

$A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Найдите координаты четвертой вершины D , если известно, что она лежит на оси Oy .

Практическое занятие № 3 (часть 2)

Тема занятия «Прямоугольные декартовы координаты на плоскости и в пространстве. Основные задачи на прямоугольные координаты.

Полярная система координат, ее связь с прямоугольной. Цилиндрическая и сферическая системы координат»

Цель занятия: Изучение способов изображения геометрических объектов на плоскости и в пространстве.

Организационная форма занятия: практикум.

Компетенции, формируемые на занятии: УК-1.

Формирование на занятии у будущих специалистов этих компетенций предполагает обучение студентов

- анализировать ситуации и делать выводы;
- видеть проблемы в традиционных ситуациях;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- применение основных понятий, идей и методов математики для решения базовых задач.

При формировании на занятии названных компетенций специалист должен освоить понятие ранга матрицы, уметь применять основные методы вычисления ранга матрицы при исследовании систем линейных уравнений, применять решение этих задач при решении задач математического анализа и задач предметной области.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве.
2. Основные задачи в прямоугольной декартовой системе координат.
3. Преобразования прямоугольной декартовой системы координат.
4. Полярная система координат на плоскости, ее связь с прямоугольной.
5. Цилиндрическая и сферическая системы координат.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 1.
- [2] часть 1 глава I § 1, § 4.
- [3] часть 1 глава 1 § 3, § 5.
- [4] часть 1 занятия 1, 2, 7, 12, 13.
- [6] глава 1 § 3, глава 3 §§ 1 – 4.
- [7] глава 2 §1.
- [8] глава III §§ 1 – 4.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Рекомендуется рассмотреть в [2] часть 1 разобранные задания 2, 10, 14, 27, 28.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Расскажите о координатной прямой и о прямоугольной декартовой системе координат на плоскости и в пространстве.
2. Раскройте сущность метода координат.
3. Выведите формулу расстояния между двумя точками плоскости или двумя точками пространства по их прямоугольным декартовым координатам.
4. Докажите формулу деления отрезка в заданном отношении (на плоскости и в пространстве). Как будет выглядеть формула при делении отрезка пополам?
5. Какие виды преобразования прямоугольной декартовой системы координат на плоскости Вы знаете?
6. Расскажите о параллельном переносе прямоугольной декартовой системы координат и о зеркальном отображении осей координат.

7. Выведите формулы поворота прямоугольной декартовой системы координат.
8. Дайте определение полярной системы координат.
9. Установите связь между полярной и прямоугольной системой координат на плоскости.
10. Какие системы координат в пространстве помимо прямоугольной декартовой системы Вы знаете? Расскажите о цилиндрической и сферической системах координат. Установите взаимосвязь этих систем с прямоугольной декартовой системой координат.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Постройте на числовой прямой точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям:
а) $|x| = 5$; б) $|x - 1| = 3$; в) $|2x - 3| = 1 - x$; г) $|1 - 3x| = 3x - 1$
2. Постройте на числовой прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам
а) $2x - 3 \leq 0$; б) $x^2 - 16 > 0$; в) $x^2 - 8x + 15 \leq 0$; г) $|2x - 3| \geq 3$.
3. Постройте точки по их прямоугольным координатам
 $A(3; -5)$; $B(1; 3)$; $C(0; -2)$;
Найдите координаты точек, симметричных относительно
а) оси Ox ; б) начала координат; в) биссектрисы первого и третьего координатных углов.
4. Даны точки $A(3; 2)$; $B(-2; -5)$; $C(2; -3)$. Определите длины сторон треугольника, вычислите его площадь.
5. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках $A(-3; 4)$; $B(1; 2)$; $C(1; -1)$; $D(-3; -2)$.

6. Постройте точки, заданные полярными координатами $A\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$; $B\left(3; \frac{3\pi}{2}\right)$; $C\left(1; \frac{5\pi}{3}\right)$. Найдите координаты этих точек в прямоугольной декартовой системе координат.
7. Даны точки в прямоугольной декартовой системе координат $A(2; -2)$; $B(-\sqrt{3}; 1)$; $C(0; 4)$; $D(-5; 0)$. Найдите полярные координаты этих точек.
8. Даны точки в полярной системе координат а) $A\left(3; \frac{\pi}{6}\right)$ и $B\left(5; \frac{2\pi}{3}\right)$; б) $A(\rho_1; \varphi_1)$ и $B(\rho_2; \varphi_2)$. Найдите расстояние d между ними.
9. Одна из вершин треугольника OAB находится в полюсе, две другие – точки $A\left(5; \frac{\pi}{4}\right)$ и $B\left(4; \frac{\pi}{12}\right)$. Найдите площадь этого треугольника.
10. Найдите координаты точек, симметричных точке $A(5; -1; 4)$ относительно
а) плоскости Oxy ; б) плоскости Oxz ; в) плоскости Oyz ; г) оси абсцисс; д) оси ординат; е) оси аппликат; ж) начала координат.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Постройте на числовой прямой точки, координаты которых удовлетворяют уравнениям:
а) $|x|=2$; б) $|2x+5|=2$; в) $|1-5x|=3+2x$; г) $|4-2x|=4-2x$.
2. Постройте на числовой прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам
а) $14-7x > 0$; б) $x^2 - 25 \leq 0$; в) $x^2 - 6x + 5 \geq 0$; г) $|5-3x| \leq 1$.
3. Постройте точки по их прямоугольным координатам
 $A(-1; 3)$; $B(-2; 0)$; $C(-1; -4)$
Найдите координаты точек, симметричных относительно
а) оси Oy ; б) точки $B(-2; 0)$; в) биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

4. Даны точки $A(-2;3)$; $B(4;5)$; $C(3;4)$. Определите длины сторон треугольника, вычислите его площадь.

5. Найдите площадь четырехугольника с вершинами в точках $A(-2;-3)$; $B(0;4)$; $C(7;-3)$; $D(1;-6)$.

6. Постройте точки, заданные полярными координатами $A\left(3; \frac{\pi}{3}\right)$; $B(4;\pi)$; $C\left(2; \frac{5\pi}{6}\right)$. Найдите координаты этих точек в прямоугольной декартовой системе координат.

7. Даны точки в прямоугольной декартовой системе координат $A(3;3)$, $B(-2;-2\sqrt{3})$, $C(0;-3)$; $D(4;0)$. Найдите полярные координаты этих точек.

8. Найдите площадь треугольника, вершина которого точки $A\left(3; \frac{\pi}{8}\right)$; $B\left(8; 7\pi/24\right)$; $C\left(6; \frac{5\pi}{8}\right)$.

9. Даны точки $A(2;3;7)$; $B(-2;3;1)$; $C(4;-2;0)$; $D(3;0;0)$. Найдите координаты их проекций на

а) плоскость Oxy ; б) плоскость Oxz ; в) плоскость Oyz ; г) ось абсцисс; д) ось ординат; е) ось аппликат.

10. Найдите координаты точек, симметричных точке $B(-2;3;-4)$ относительно

а) плоскости Oxy ; б) плоскости Oxz ; в) плоскости Oyz ; г) оси абсцисс; д) оси ординат; е) оси аппликат; ж) начала координат.

Практическое занятие № 4 (часть 1)

Тема занятия «Прямая линия на плоскости. Различные уравнения прямой.»

Цель занятия: Формирование умений составлять различные уравнения прямой и исследовать их взаимное расположение.

Организационная форма занятия: компьютерный тренинг.

Компетенции, формируемые на занятии: УК-1.

При формировании названных компетенций на занятии специалист должен знать способы задания прямой на плоскости; уметь составлять уравнения прямой, определять их взаимное расположение, применять решение этих задач при решении задач математического анализа и задач предметной области; владеть математическим аппаратом аналитической геометрии, аналитическими методами исследования геометрических объектов, основными методиками решения учебно-исследовательских задач.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
2. Общее уравнение прямой.
3. Уравнение прямой в отрезках.
4. Нормальное уравнение прямой.
5. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
6. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.

3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. Пройдите тестирование по теме этого занятия. Просмотрите протокол выполненных заданий.
3. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории. Обратите внимание на задания, в которых Вы допустили ошибки при компьютерном тестировании.
4. Решите, предложенный преподавателем, вариант самостоятельной работы №5 по теме «Функции одной переменной, основные определения».

Дома

1. Закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.
2. Выполните в тетради для индивидуальных домашних заданий ИДЗ №2 по теме «Прямая на плоскости» и сдайте выполненную работу на проверку преподавателю.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 1 п.1.4.
- [2] часть 1 глава I § 2.
- [3] часть 1 глава 2 § 6.
- [4] часть I занятия 3 – 5.

[6] глава 3 § 5.

[7] глава 2 § 3.

[8] глава III § 6.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Рекомендуется рассмотреть в [2] часть 1 разобранные задания 65, 82, 87, 92 – на составление различных уравнений прямой; 66 – на построение прямой; 78 – на определение угла между прямыми; 79, 80, 83 – на взаимное расположение прямых; 85 – на определение расстояния от точки до прямой.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение уравнения линии. К линиям какого порядка относят прямую?
2. Выведите уравнение прямой с угловыми коэффициентами. Назовите геометрический смысл углового коэффициента. Любая ли прямая может быть задана уравнением с угловым коэффициентом?
3. Расскажите об общем уравнении прямой и о её расположении относительно координатных осей в зависимости от коэффициентов уравнения.
4. Выведите уравнение прямой в отрезках; назовите геометрический смысл его коэффициентов.
5. Расскажите о нормальном уравнении прямой.
6. Определите угол между прямыми. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
7. Выведите формулу расстояния между точкой и прямой.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Составьте уравнение прямой, отсекающей на оси O_y отрезок $b=3$ и образующий с осью O_x угол:
а) 45° , б) 90° , в) 120° .

2. Уравнение прямой $2x - 3y = 6$ приведите к виду «в отрезках» на осях.
3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ и составляющей с осью Ox угол 60° и построить её.
4. Найдите точку пересечения двух прямых $3x - 4y - 29 = 0$, $2x + 5y + 19 = 0$.
5. Напишите уравнения двух прямых, проходящих через точку $A(3; 4)$, так, чтобы одна была параллельна оси Ox , другая параллельна оси Oy .
6. Напишите уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1; 1)$ под углом 45° к прямой $2x + 3y = 6$.
7. Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(6; 2)$ на прямую $x - 4y - 7 = 0$.
8. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(5; -4)$ и составляющей с осью Ox тот же угол, что и прямая $5x + 2y - 3 = 0$.
9. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $2x - 3y + 5 = 0$ и $3x + y - 7 = 0$ перпендикулярной к прямой $y = 2x$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Составьте уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок $b = 3$ и образующий с осью Ox угол:
а) 60° , б) 135° .
2. Уравнение прямой $3x - 2y + 4 = 0$ приведите к виду «в отрезках» на осях.
3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ и составляющей с осью Ox угол: а) 45° , б) 135° и построить её.
4. Стороны AB , BC и AC треугольника ABC даны соответственно уравнениями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Определите координаты его вершин.
5. Напишите уравнение прямой, параллельной оси Ox и отсекающей на оси Oy отрезок, равный: а) 6 , б) -2 , в) 0 .
6. Напишите уравнение прямой, если точка $A(2; 3)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

7. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4;3)$ и параллельной другой прямой $x + 2y + 3 = 0$.
8. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - 3y - 1 = 0$ и $3x - y - 2 = 0$ перпендикулярно прямой $y = x + 1$.
9. В треугольнике ABC даны: 1) уравнение стороны AB $3x + 2y = 12$; 2) уравнение высоты BM $x + 2y = 4$; 3) уравнение высоты AM $4x + y = 6$, где M – точка пересечения высот. Напишите уравнения сторон AC , BC и высоты CM .
10. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $5x - y + 10 = 0$ и $8x + 4y + 9 = 0$ и параллельной прямой $x + 3y = 0$.
11. Выполните ИДЗ №2 по теме «Прямая на плоскости»:
 1. Составить уравнение прямой
 - а) проходящей через точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$;
 - б) проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ параллельно прямой $l: Ax + By + C = 0$;
 - в) проходящей через точку $B(x_2; y_2)$ перпендикулярно прямой $l: Ax + By + C = 0$;
 - г) проходящей через точку $B(x_2; y_2)$ и параллельной оси Ox ;
 - д) проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ и параллельной оси Oy ;
 - е) проходящей через точку $B(x_2; y_2)$ и перпендикулярной оси Ox ;
 - ж) проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ и перпендикулярной оси Oy ;
 - з) с угловым коэффициентом k и проходящей через точку $A(x_1; y_1)$;
 - и) проходящей через точку $B(x_2; y_2)$ и составляющей с осью Ox угол α ;
 - к) проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ и образующей с прямой $l: Ax + By + C = 0$ угол α .
 2. Построить все прямые из задания 1.
 3. Для каждой из прямой из задания 1 записать (если это возможно)
 - а) общее уравнение прямой;
 - б) уравнение прямой с угловым коэффициентом;
 - в) уравнение прямой в отрезках;
 - г) нормальное уравнение прямой.
 4. Определить угол между прямой AB и прямой $l: Ax + By + C = 0$.
 5. Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой AB , концы которого лежат на осях координат.
 6. Записать уравнения диагоналей квадрата из задания 5 и определить их длину.
 7. Определить координаты всех вершин квадрата из задания 5 и координаты точки O - точки пересечения его диагоналей.
 8. Определить расстояние от точки O из задания 7 до прямой $l: Ax + By + C = 0$.

9. Найти координаты такой точки C , что треугольник ABC будет равносторонним.

Данные для заданий выберите из таблицы согласно своему варианту:

Вариант	$A(x_1; y_1)$	$B(x_2; y_2)$	$l: Ax + By + C = 0$	k	α
1	$(-1; 3)$	$(1; 1)$	$2x + 3y - 1 = 0$	-1	30°
2	$(-2; 3)$	$(1; 2)$	$x + 2y - 1 = 0$	-2	45°
3	$(-3; 3)$	$(1; 4)$	$2x - 3y - 1 = 0$	-3	60°
4	$(-4; 3)$	$(2; 1)$	$5x + 3y - 10 = 0$	-4	120°
5	$(-5; 3)$	$(2; 2)$	$x + 2y - 10 = 0$	-5	135°
6	$(-1; 1)$	$(2; 4)$	$x + 4y - 5 = 0$	-6	150°
7	$(-1; 2)$	$(3; 1)$	$-5x + y - 7 = 0$	6	30°
8	$(-1; 4)$	$(3; 2)$	$2x - 5y - 1 = 0$	5	45°
9	$(-2; 1)$	$(3; 4)$	$-2x + 3y + 1 = 0$	4	60°
10	$(-2; 2)$	$(4; 1)$	$-x + 2y + 1 = 0$	3	120°
11	$(-2; 4)$	$(4; 2)$	$-2x + 3y - 1 = 0$	2	135°
12	$(-3; 1)$	$(4; 4)$	$-5x + 3y - 10 = 0$	1	150°
13	$(-3; 2)$	$(5; 1)$	$-x + 2y - 10 = 0$	8	30°
14	$(-3; 4)$	$(5; 2)$	$-x + 4y - 5 = 0$	10	45°
15	$(-4; 1)$	$(5; 4)$	$-5x + y + 7 = 0$	-9	60°
16	$(-4; 2)$	$(1; -1)$	$2x + 5y - 1 = 0$	-1	120°
17	$(-4; 4)$	$(1; -2)$	$4x - 3y - 1 = 0$	-2	135°
18	$(-5; 1)$	$(1; -4)$	$-x + 2y - 7 = 0$	-3	150°
19	$(-5; 2)$	$(2; -1)$	$-2x + 5y - 1 = 0$	-4	30°
20	$(-5; 4)$	$(2; -2)$	$5x - y - 10 = 0$	-5	45°
21	$(1; 3)$	$(2; -4)$	$x - 8y - 10 = 0$	-6	60°
22	$(2; 3)$	$(3; -1)$	$-7x + 4y - 5 = 0$	6	120°
23	$(3; 3)$	$(3; -2)$	$-6x + y - 7 = 0$	5	135°
24	$(4; 3)$	$(3; -4)$	$2x - 9y - 1 = 0$	4	150°
25	$(5; 3)$	$(4; -1)$	$-4x + 3y - 1 = 0$	3	30°
26	$(1; 1)$	$(-4; -2)$	$x - 3y - 8 = 0$	2	45°
27	$(1; 2)$	$(-4; -4)$	$x - 9y - 1 = 0$	1	60°
28	$(1; 4)$	$(-5; -1)$	$x + 3y - 5 = 0$	8	120°
29	$(2; 1)$	$(-5; -2)$	$x - 4y - 1 = 0$	10	135°
30	$(2; 2)$	$(-5; -4)$	$-3x + 4y - 5 = 0$	-9	150°

Практическое занятие № 4 (часть 2)

Тема занятия «Кривые второго порядка.»

Цель занятия: Формирование умений составлять канонические уравнения кривых второго порядка.

Организационная форма занятия: практикум.

Компетенции, формируемые на занятии: УК-1.

При формировании названных компетенций на занятии специалист должен уметь:

- сформулировать гипотезу и проверить ее в дальнейшем;
- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- ставить новые вопросы и видеть проблемы в традиционных ситуациях;
- владеть основными методиками решения учебно-исследовательских задач;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- применять основные понятия, идеи и методы фундаментальных математических дисциплин для решения базовых задач.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Каноническое уравнение окружности.
2. Эллипс, вывод его канонического уравнения.
3. Гипербола, составление ее канонического уравнения.
4. Парабола, определение и каноническое уравнение.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия.
Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.

3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 5.
- [2] часть 1 глава I § 3.
- [3] часть 1 глава 3 § 10.
- [4] часть I занятия 10 – 11.
- [6] глава 3 § 7.
- [7] глава 2 § 4.
- [8] глава III § 7.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Рекомендуется рассмотреть в [2] часть 1 разобранные задания 128, 130 – на составление уравнения окружности; 141 – на составление канонического уравнения эллипса; 152, 154 – на составление канонического уравнения гиперболы; 168 – на составление канонического уравнения параболы.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение окружности. Выведите уравнение окружности с центром в заданной точке. Запишите каноническое уравнение окружности.
2. В каком случае уравнение вида $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ на плоскости задает окружность?
3. Сформулируйте определение эллипса. Определите следующие понятия: центр эллипса, фокусное расстояние, полуфокусное расстояние, диаметр эллипса, большая и малая оси (полуоси) эллипса, эксцентриситет эллипса.
4. Укажите способы построения эллипса. Нарисуйте эллипс и покажите на нем все понятия, определенные выше.
5. Выведите каноническое уравнение эллипса.
6. Дайте определение гиперболы. Нарисуйте эту линию. Введите понятия центра гиперболы, фокусного и полуфокусного расстояний, диаметра гиперболы, действительной оси (полуоси), мнимой оси гиперболы, вершин и асимптот гиперболы. Покажите введенные понятия на рисунке. Определите эксцентриситет гиперболы.
7. Выведите каноническое уравнение гиперболы.
8. Расскажите о равнобочной гиперболе.
9. Сформулируйте определение параболы и постройте ее. Покажите фокус и директрису параболы, вершину параболы.
10. Выведите каноническое уравнение параболы.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Постройте эллипс $9x^2 + 25y^2 = 225$. Найдите: 1) полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет.
2. Напишите каноническое уравнение эллипса, если известно, что:

1) расстояние между фокусами равно 8 , а малая полуось $b=3$; 2) расстояние между фокусами равно 6 , а эксцентриситет $\varepsilon=3/5$; 3) расстояние между фокусами равно $2\sqrt{13}$, а $a-b=1$.

3. Напишите каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $M_1=(2;3)$ и $M_2=(1;3\sqrt{5}/2)$.

4. Постройте гиперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$.

Найдите: 1) действительную и мнимую полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.

5. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:

1) расстояние между фокусами $2c=10$, а между вершинами $2a=8$;

2) расстояние между фокусами $2c=6$, а эксцентриситет $\varepsilon=3/2$.

6. Напишите уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы

– в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

7. Постройте параболу $y^2 = 6x$. Найдите: 1) координаты фокуса; 2) уравнение директрисы.

8. Напишите уравнение параболы, проходящей через точки $(0;0)$ и $(1;-3)$ и симметричной относительно оси Ox .

Задания для самостоятельной работы дома

1. Постройте эллипс $3x^2 + 16y^2 = 192$. Найдите 1) полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет.

2. Напишите каноническое уравнение эллипса, если известно, что:

1) большая полуось $a=6$, а эксцентриситет $\varepsilon=0,5$; 2) расстояние между фокусами равно 6 , а $a+b=9$.

3. Напишите каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки:

1) $M_1(4; 9/5)$ и $M_2(5\sqrt{5}/3; 2)$; 2) $M_1(2; 0)$ и $M_2(1; 2)$.

4. На эллипсе $9x^2 + 25y^2 = 225$ найдите точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния ее от левого фокуса.

5. Постройте гиперболу $3x^2 - 4y^2 = 12$. Найдите 1) действительную и мнимую полуоси; 2) координаты фокусов; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот.

6. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:

1) действительная полуось $a = 2\sqrt{5}$, а эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{1,2}$;

2) расстояние между фокусами $2c = 20$, а уравнение асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$;

3) мнимая полуось $b = 4$, а расстояние между фокусами $2c = 10$.

7. Найдите расстояние фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ от ее асимптот и угол между асимптотами.

8. Напишите уравнение гиперболы, проходящей через точки $(0;0)$ и $(2; -4)$, и симметричной относительно оси Oy .

9. Напишите уравнение параболы и ее директрисы, если известно, что парабола проходит через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 + 4y = 0$, и симметрична относительно оси Oy .

10. Определите, пересекает ли заданная прямая L данный эллипс Γ , касается его или проходит вне его:

1) $L: 2x - y - 3 = 0$, $\Gamma: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;

2) $L: 2x + y - 10 = 0$, $\Gamma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$;

3) $L: 3x + 2y - 20 = 0$, $\Gamma: \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$.

Практическое занятие № 5 (часть 1)

Тема занятия «Предел числовой последовательности. Число e . Предел функции. Односторонние и бесконечные пределы. Основные теоремы о пределах»

Цель занятия: Введение понятия предел функции, формирование навыков вычисления пределов.

Организационная форма занятия: практикум-тренинг.

Компетенции, формируемые на занятии: УК-1.

При формировании на занятии названных компетенций специалист должен знать основополагающее понятие математического анализа предела функции; уметь использовать это понятие в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания; владеть техникой вычисления пределов.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Определение предела функции.
2. Основные теоремы о пределах.
3. Предел функции на бесконечности.
4. Односторонние пределы.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.

5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома. Подготовьтесь к самостоятельной работе №6 по теме «Предел функции», примерный вариант самостоятельной работы вы можете найти в программе дисциплины.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 7 пп. 7.3. - 7.5.
- [2] глава VI §§ 4 – 5 .
- [3] глава 4 § 18.
- [4] часть II занятия 14 – 17.
- [5] глава 1 § 1.2.
- [6] глава 4 §§ 2 – 6.
- [7] глава IV §§ 2 – 6.
- [8] глава 4 §§ 2 – 6.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Найдите пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$.

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x - 6) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 3x^2 + 2x) = 0$, то мы имеем неопределенность 0/0. Раскроем ее, разложив числитель и знаменатель на множители и упростив дробь:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x-1)}{x+3} = \frac{-2(-2-1)}{-2+3} = 6.$$

2. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}.$

Решение. Так как $\lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{2x+1}-3) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow 4} (x-4) = 0$, то имеем

неопределенность $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель дроби на выражение сопряженное числителю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+1-9}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = 2 \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{2x+1}+3} = 2 \cdot \frac{1}{3+3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + x - 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 1}{x^3 + 5x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}.$

Решение. В каждом из пределов имеем неопределенность вида ∞/∞ . Для ее раскрытия числитель и знаменатель разделим на старшую степень знаменателя:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{3}{5},$

т.к. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0.$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 1}{x^3 + 5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{5}{x^2}} = \infty.$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^4}}{1 - \frac{1}{x^4}} = 0.$

Замечание. Если числитель и знаменатель дроби есть многочлен, то предел дроби при $x \rightarrow \infty$ равен:

а) отношению коэффициентов при старших степенях, если старшая степень числителя равна старшей степени знаменателя;

б) бесконечности, если старшая степень числителя выше старшей степени знаменателя;

в) нулю, если старшая степень числителя меньше старшей степени знаменателя.

4. Вычислите односторонние пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x-3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x-3}$.

Решение. а) Если $x \rightarrow 3-0$, то $(x-3) \rightarrow -0$, а следовательно $\frac{1}{x-3} \rightarrow -\infty$, или $\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x-3} = -\infty$.

б) Если $x \rightarrow 3+0$, то $(x-3) \rightarrow +0$, следовательно $\frac{1}{x-3} \rightarrow +\infty$, т.е. $\lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x-3} = +\infty$.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Что называется пределом функции в точке?
2. Определите предел функции на бесконечности.
3. Дайте определение предела функции слева (справа).
4. Может ли функция $f(x)$ иметь два различных предела при $x \rightarrow a$?
5. Чему равен предел постоянной величины?
6. Чему равен предел: а) суммы; б) разности; в) произведения функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$?
7. Чему равен предел частного функций $f(x)$ и $g(x)$, имеющих предел при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ ($x \rightarrow a$)?
8. Как можно избавиться от неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$, если числитель и знаменатель дроби содержат многочлены?

9. Как разложить квадратный трехчлен на линейные множители?
10. Сформулируйте теорему Виета.
11. Как можно избавиться от неопределенности $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, если числитель и (или) знаменатель содержат иррациональные выражения?
12. Запишите формулы сокращенного умножения, помогающие определить сопряженные выражения для данных.
13. Сформулируйте правила вычисления пределов дроби при $x \rightarrow \infty$, если числитель и знаменатель содержат многочлены.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите пределы

а) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 3)$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 8x + 20}{x^3 + 3x^2 + 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^3 + 2x^2}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$; д) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$; е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$;
 ж) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$; з) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt[3]{2+x} + x}$; и) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2)^3}{(x-5)^3}$;
 к) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2}}{x^2 - 3x + 2}$.

2. Найдите пределы функций при $x \rightarrow \infty$:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+7}{x+2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-10^7}{3x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{\sqrt{3x^2} + x - 4}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 1}{x^3 + 5x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$.

3. Вычислите пределы функции при $x \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow -\infty$, если

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3}, & (x > 1) \\ \frac{2x}{4x-15}, & (x \leq 1) \end{cases}.$$

4. Найдите односторонние пределы:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{3}{4-2x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{3}{4-2x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{4-2x}.$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -0} 2^{\frac{1}{x}}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow +0} 2^{\frac{1}{x}}.$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите пределы:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 2x^3 + 1}{x^2 + 5x + 3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)(x-3)}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x^2 + x}{(x-2)(x^2 + x + 1)} - \frac{2}{x-2} \right); \quad \text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x};$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x}; \quad \text{к) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x^2} - 1}{x^2 + x^3}; \quad \text{л) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x-4};$$

$$\text{м) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}; \quad \text{н) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}}.$$

2. Найдите пределы функций при $x \rightarrow \infty$:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2}{2x + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 - 1}{3x^4 + 3}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{5x^2 + x - 4}.$$

5. Найдите односторонние пределы:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x-3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x-3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -1-0} 3^{\frac{1}{1+x}}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow -1+0} 3^{\frac{1}{1+x}}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow -1} 3^{\frac{1}{x+1}}.$$

Практическое занятие № 5 (часть 2)

Тема занятия «Замечательные пределы и следствия из них.»

Цель занятия: Формирование умений вычислять пределы функций с помощью замечательных пределов.

Организационная форма занятия: практический тренинг.

Компетенции, формируемые на занятии: УК-1.

При формировании на занятии названных компетенций специалист должен знать основополагающее понятие математического анализа предела функции; уметь использовать это понятие в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания; владеть техникой вычисления пределов, в том числе с помощью замечательных пределов и следствий из них.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Первый замечательный предел и следствия из него.
2. Второй замечательный предел и следствия из него.
3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. Решите, предложенный преподавателем, вариант самостоятельной работы №6 по теме «Предел функции» и сдайте выполненную работу на проверку.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома. В тетради для индивидуальных домашних заданий выполните ИДЗ №4 по теме «Пределы функций» и сдайте на следующем занятии его на проверку преподавателю.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 7 пп. 7.3. - 7.5.
- [2] глава VI §§ 4 – 5 .
- [3] глава 4 § 18.
- [4] часть II занятия 14 – 17.
- [5] глава 1 § 1.2.
- [6] глава 4 §§ 2 – 6.
- [7] глава IV §§ 2 – 6.
- [8] глава 4 §§ 2 – 6.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. С помощью первого замечательного предела вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}.$$

Решение. Для решения примера воспользуемся первым замечательным

пределом $\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \right)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{3}}{x} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{3}}{\frac{x}{3}} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot 1 \right)^2 = \frac{1}{9}.$$

2. С помощью второго замечательного предела вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+1} \right)^x.$$

Решение. В данном примере имеем неопределенность 1^∞ . Для ее раскрытия воспользуемся 2-м замечательным пределом в виде:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x+1}{4}} \right)^x.$$

Положим $t = \frac{3x+1}{4}$, заметим, что при $x \rightarrow \infty$ $t \rightarrow \infty$, а $x = \frac{4}{3}t - \frac{1}{3}$.

Имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+1} \right)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{\frac{4}{3}t - \frac{1}{3}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t} \right)^t \right)^{\frac{4}{3}} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-\frac{1}{3}} = \\ &= e^{\frac{4}{3}} \cdot 1^{-\frac{1}{3}} = e^{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$

3. С помощью второго замечательного предела вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{5}{x}}.$$

Решение. В данном пределе имеем неопределенность 1^∞ . Для ее раскрытия

воспользуемся вторым замечательным пределом в виде $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Положим $-2x=y$, тогда при $x \rightarrow 0$ имеем, что $y \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{5}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{-\frac{10}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left((1+y)^{\frac{1}{y}} \right)^{-10} = e^{-10}.$$

Можно и не проводить замену переменной. Тогда решение примера имеет

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{5}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+(-2x))^{\frac{5(-2)}{-2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1+(-2x))^{-\frac{1}{2x}} \right)^{-10} = e^{-10}.$$

ВИД:

4. Определите, какие из функций при $x \rightarrow 0$ будут бесконечно малыми (б.м) одного порядка малости, высшего порядка, низшего порядка по сравнению с бесконечно малой $\beta(x) = x$:

а) $\alpha(x) = \sqrt[3]{\sin x}$; б) $\alpha(x) = \sqrt{1+2x} - \sqrt{1-x}$; в) $\alpha(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$.

Решение. Чтобы решить поставленную задачу, найдем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ в каждом из случаев:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{\sin x}{x^3}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot x^2}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}} = \infty ,$$

следовательно $\alpha(x)$ (б.м.) более низкого порядка, чем $\beta(x)$.

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+2x-1+x}{x(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x(\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-x}} = \frac{3}{2} , \text{ таким образом, } \alpha(x) \text{ и } \beta(x) \text{ одного порядка}$$

малости.

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 - 1 = 0 , \text{ следовательно } \alpha(x) \text{ б.м}$$

более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Запишите первый замечательный предел и следствия из него.
2. Запишите второй замечательный предел и следствия из него.
3. Определите число e . Укажите его приближенное значение с точностью до одного десятичного знака.
4. Какая показательная функция называется экспоненциальной? Постройте ее график.
5. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?

6. Какая функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой величиной при $x \rightarrow x_0$, при $x \rightarrow \pm\infty$?
7. Какова простейшая связь между бесконечно большой и бесконечно малой величинами?
8. Какова простейшая связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой величиной?
9. Что значит сравнить две бесконечно малые величины?
10. Какие две бесконечно малые величины называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных величин.
11. Как эквивалентные бесконечно малые величины могут быть использованы при вычислении пределов функции?

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Вычислите пределы с помощью первого замечательного предела:
 а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{3x}$; г) $\lim_{v \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos v}{\sin\left(v - \frac{\pi}{3}\right)}$.
2. Вычислите пределы с помощью второго замечательного предела:
 а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x+5}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{5x+1}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x/2)^{\frac{3}{x}}$.
3. Определите порядок малости нижеследующих б.м функций относительно б.м функции $\beta(x) = x - 1$, если $x \rightarrow 1$:
 а) $\alpha(x) = x^3 + 2x - 3$; б) $\alpha(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$; в) $\alpha(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2x - 1}$

4. Пройдите компьютерное тестирование по теме «Пределы функции»

Задания для самостоятельной работы дома

1. Вычислите пределы с помощью первого замечательного предела:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x$; в) $\lim_{z \rightarrow 1} (1-z) \operatorname{tg} \frac{\pi z}{2}$.

2. Вычислите пределы с помощью второго замечательного предела:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{7x}\right)^{5x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{1+x}\right)^{3x-1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{1}{2x}}$.

3. Выполните ИДЗ №4 по теме «Пределы функций»

Вычислить пределы функций путем алгебраических образований и применения замечательных пределов;

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + px + q}{bx^2 - a}$; 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + px + q}{bx^3 - ax^2}$;

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - b}{ax^2 + px + q}$; 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + px + q}{x^2 - a}$;

5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + px + q}{x^3 + b}$; 6. $\lim_{x \rightarrow k} \frac{ax^2 + px + q}{x^2 - a}$;

7. $\lim_{x \rightarrow m} \frac{x^3 + b}{x^2 + px + q}$; 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\operatorname{tg} bx}$;

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} px}{\operatorname{ctg} qx}$; 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} px \cdot \sin 2ax$;

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{bx}\right)^{mx}$; 12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{p+ax}{q+ax}\right)^{bx+k}$.

Для выполнения заданий коэффициенты a, b, k, m, p, q выбираются из таблицы в соответствии с номером варианта.

ВАРИАНТ	a	b	k	m	p	q
1	4	-1	2	1	-3	2
2	9	-1	3	1	-4	3
3	16	-1	4	1	-5	4
4	25	-1	5	1	-6	5
5	4	1	2	-1	-1	-2
6	9	1	3	-1	-2	-3
7	16	1	4	-1	-3	-4
8	25	1	5	-1	-4	-5
9	4	-27	2	3	-5	6
10	64	-8	8	2	-10	16
11	16	-8	4	2	-6	8
12	25	-8	5	2	-7	10
13	9	8	3	-2	-1	-6
14	16	8	4	-2	-2	-8
15	25	8	5	-2	-3	-10
16	4	27	2	-3	1	-6
17	16	-27	4	3	-7	12
18	16	27	4	-3	-1	-12
19	25	-27	5	3	-8	15
20	25	27	5	-3	-2	-15
21	25	-64	5	4	-9	20
22	25	64	5	-4	-1	-20
23	4	1	-2	-1	3	2
24	9	8	-3	-2	5	6
25	16	27	-4	-3	7	12
26	25	64	-5	-4	9	20
27	9	64	-3	-4	7	12
28	9	125	-3	-5	8	15
29	4	64	-2	-4	6	8
30	4	125	-2	-5	7	10

Практическое занятие № 6

Тема занятия «Понятие производной, её механический и геометрический смысл. Правила дифференцирования. Таблица основных производных.

Уравнения касательной и нормали к плоской кривой»

Цель занятия: Введение понятия производной функции с помощью операции предельного перехода, отработка навыков в вычислении производных.

Организационная форма занятия: практикум.

Компетенции, формируемые на занятии:УК-1.

При формировании названных компетенций в результате изучения дисциплины «Математика» специалист должен знать основные правила дифференцирования; уметь дифференцировать с помощью формул и простейших приемов; владеть методами нахождения производных функций. Формирование у будущих специалистов этой компетенций на занятии предполагает обучение студентов

- сформулировать основные цели выполняемой работы;
- анализировать ситуации и делать выводы;
- вести поиск альтернативных средств и способов решения;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- осуществлять самоконтроль за работой, объективно оценивать ее результат.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Определение производной, её механический и геометрический смысл.
2. Правила вычисления производной.
3. Таблица производных основных элементарных функций.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения. Выучите основные правила дифференцирования и таблицу производных основных элементарных функций.

2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Выучите наизусть правила дифференцирования и таблицу основных производных.
6. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. Пройдите тестирование на знание правил дифференцирования и таблицы основных производных.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 8 пп. 8.1. – 8.2.
- [2] глава VII § 1.
- [3] глава 6 § 24.
- [4] ч II занятия 21 – 23.
- [5] глава 2 § 2.1.
- [6] глава 5 §§ 1 – 8.
- [7] глава V §§ 1 – 8.
- [8] глава 5 §§ 1 – 8.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Пользуясь определением производной найдите производные функций:

$$\text{а) } y = x^2 + 5x - 1; \quad \text{б) } y = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Решение. а) По определению производной

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

Поэтому для нахождения производной по определению можно воспользоваться следующим общим правилом.

1. Придаем аргументу x произвольное приращение $\Delta x \neq 0$ и находим приращенное значение функции:

$$y(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) - 1 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 5x + 5\Delta x - 1.$$

2. Находим приращение функции:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 5x + 5\Delta x - 1) - (x^2 + 5x - 1) = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 5\Delta x$$

3. Находим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + 5\Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 5.$$

4. Ищем предел отношения приращения функции к приращению аргумента при $\Delta x \rightarrow 0$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x + 5) = 2x + 5.$$

Таким образом, $y'(x) = (x^2 + 5x - 1)' = 2x + 5$.

б) Руководствуясь указанным общим правилом для нахождения

производной по определению, для функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ последовательно находим:

$$1. \quad y(x + \Delta x) = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x}}.$$

$$2. \quad \Delta y = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+\Delta x}}.$$

$$3. \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+\Delta x}}{\Delta x \sqrt{x} \sqrt{x+\Delta x}}.$$

4.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+\Delta x}}{\Delta x \sqrt{x} \sqrt{x+\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x - (x + \Delta x)}{\Delta x \sqrt{x} \sqrt{x+\Delta x} (\sqrt{x} + \sqrt{x+\Delta x})} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x (x\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}(x+\Delta x))} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}(x+\Delta x)} = \frac{1}{x\sqrt{x} + x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\alpha(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}.$$

2. Дана функция $\alpha(x)$. Существует ли производная в точке $x=0$? Будет ли эта функция в точке $x=0$ непрерывной?

Решение. Воспользуемся общим правилом для нахождения производной в точке $x=0$ по определению:

$$1) \quad \alpha(0 + \Delta x) = \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

$$2) \quad \Delta \alpha = \alpha(0 + \Delta x) - \alpha(0) = \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} - 0 = \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

$$3) \quad \frac{\Delta \alpha}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

$$4) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

Этот предел не существует. Таким образом, функция $\alpha(x)$ в точке $x=0$ не имеет производной.

Исследуем данную функцию на непрерывность в точке $x=0$:

Так как бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, то данная функция непрерывна в точке $x=0$.

Таким образом, данная функция непрерывна в точке $x=0$, но не имеет производной в этой точке.

3. Применяя правила дифференцирования и таблицу производных, найдите производную функции $y = \sqrt[3]{(1+2x)^2}$.

Решение. Преобразуем данную функцию, переходя к дробным показателям, и воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции:

$$y' = \left((1+2x)^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2}{3} (1+2x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (1+2x)' = \frac{4}{3\sqrt[3]{1+2x}}.$$

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Какие задачи, приводящие к понятию производной, Вам известны?
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Как найти производную функции $y=f(x)$ по определению?
4. В чем состоит механический смысл производной?
5. Дайте определение непрерывной функции в точке и на отрезке. Сформулируйте свойства непрерывных функций.
6. Как связаны между собой дифференцируемость функции в некоторой точке с непрерывностью функции в этой точке?
7. Приведите пример непрерывной функции, не имеющей производной в некоторой точке.
8. Чему равна производная:
 - а) постоянной;
 - б) алгебраической суммы дифференцируемых функций;
 - в) произведения двух дифференцируемых функций;
 - г) дроби;
 - д) сложной функции;
 - е) обратной функции?
10. Запишите формулы для нахождения производных основных элементарных функций.

Практические задания
для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Пользуясь определением производной, найдите производные от следующих функций:

а) $y = 3x^2 - 4x$; б) $y = \frac{1}{x^2}$; в) $y = \sqrt{4x+1}$; г) $y = \sin(3x+1)$.

2. Дана функция:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$
. Найдите производную этой функции в точке $x = 0$.

3. Найдите производные следующих функций:

а) $y = x^4 + 3x^2 - 6$; б) $y = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 5$; в) $y = (x^2 + 2x + 1)(4x^2 + 1)$;

г) $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$; д) $y = \sqrt[3]{(1+2x)^2}$; е) $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$; ж) $y = x^2 - \frac{3}{x^4}$;

з) $y = 2x \sin 3x - \cos 4x$.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Пользуясь определением производной, найдите производные от следующих функций:

$y = -2x$; $y = (2x-1)^2$; $y = \sqrt{x}$.

2. Найдите производные следующих функций:

а) $y = 6x^3 - x^2$; б) $y = x - 2\sqrt{x}$; в) $y = (\sqrt{x} - 2)^2$; г) $y = x^3(1-3x)$;

д) $y = (x^3 - 3x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^5}$; е) $y = \frac{2x}{1-x^2}$; ж) $y = \frac{1+2x}{1-3x}$;

з) $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; и) $y = x^2 \sin 5x$; к) $y = 3x + \operatorname{tg} 2x$.

Практическое занятие № 7

**Тема занятия «Функции заданные неявно, их дифференцирование.
Параметрически заданные функции и их дифференцирование.»**

Цель занятия: Формирование навыков вычисления производной сложной функции.

Организационная форма занятия: компьютерный тренинг.

Компетенции, формируемые на занятии: УК-1.

При формировании на занятии названных компетенций специалист должен знать основополагающее понятие математического анализа производной функции; уметь использовать это понятие в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания; владеть техникой вычисления производных.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Основные правила дифференцирования.
2. Таблица производных основных элементарных функций.
3. Дифференцирование сложной функции.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.
6. Повторите таблицу основных производных.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. Пройдите тестирование на компьютере по теме «Производная функции».

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома. В тетради для индивидуальных домашних заданий выполните задания 1-3 ИДЗ №5 по теме «Вычисление производных». Подготовьтесь к самостоятельной работе №7 по теме «Производная функции», примерный вариант самостоятельной работы вы можете найти в программе дисциплины.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 8 пп. 8.1. – 8.2.
- [2] глава VII § 1.
- [3] глава 6 § 24.
- [4] ч II занятия 24 – 25.
- [5] глава 2 § 2.1.
- [6] глава 5 § 8.
- [7] глава V § 8.
- [8] глава 5 § 8.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Применяя правила дифференцирования и таблицу производных, найдите

производные следующих функций: $y = \ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{1 + e^{3x}}}$.

Решение. I способ. Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции: сначала находим производную логарифмической функции, затем корня и наконец производную дроби:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}} \right)' = \sqrt{\frac{1+e^{3x}}{e^{3x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}} \cdot \left(\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^{3x}}{e^{3x}} \cdot \frac{(e^{3x})'(1+e^{3x}) - (1+e^{3x})' \cdot e^{3x}}{(1+e^{3x})^2} = \frac{3e^{3x}(1+e^{3x}) - 3e^{3x} \cdot e^{3x}}{2e^{3x}(1+e^{3x})} = \frac{3e^{3x}}{2e^{3x}(1+e^{3x})} = \\ &= \frac{3}{2(1+e^{3x})}. \end{aligned}$$

II способ. Чтобы упростить дифференцирование, сначала преобразуем функцию на основании свойств логарифмов:

$$y = \ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}} = \frac{1}{2} (\ln e^{3x} - \ln(1+e^{3x})) = \frac{1}{2} (3x - \ln(1+e^{3x}))$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{(1+e^{3x})'}{1+e^{3x}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 + 3e^{3x} - 3e^{3x}}{1+e^{3x}} = \frac{3}{2(1+e^{3x})}$$

Тогда

Замечание. Вообще, если под знаком подлежащей дифференцированию логарифмической функции содержится выражение, поддающееся логарифмированию (произведение, частное, степень, корень), то полезно сначала выполнить логарифмирование.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение производной функции в точке.
2. Назовите основные правила дифференцирования функций.
3. Запишите таблицу производных основных элементарных функций.
4. Дайте определение сложной функции. Приведите примеры.

5. Сформулируйте теорему для нахождения производной сложной функции.

6. Составьте таблицу нахождения производных для функций вида $f(u)$, где f - одна из элементарных функций, $u = u(x)$.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Найдите производные следующих функций:

а) $y = e^{-x^2}$; б) $y = \frac{1}{4} \ln(1+x^2)$; в) $y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$;

г) $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$; д) $y = \arccos(e^{x^2})$; е) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}$;

ж) $y = 2 \sin^2 2x \cdot \operatorname{ctg}^3 2x$; з) $y = \arcsin \sqrt{\sin x}$;

и) $y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$; к) $y = \sqrt{\frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}}} \cdot (\arccos e^{2x})$.

2. Вычислите $y' \left(-\frac{1}{2} \right)$, если $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}$.

3. Пройдите компьютерное тестирование по теме занятия, результаты покажите преподавателю.

Задания для самостоятельной работы дома

1. Найдите производные следующих функций:

а) $y = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$; б) $y = 3^{\operatorname{arctg} \sqrt{x^2+1}}$; в) $y = x - \operatorname{arctg} 2x$;

г) $y = e^{-2x} (1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2})$; д) $y = \frac{5^{2x}}{2 + \sqrt{4 + 5^{2x}}}$; е) $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

ж) $y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$; з) $y = \frac{\cos \sqrt{e^{1-2x}}}{x}$.

2. Вычислите $u'(2) + u'(0)$, если $u = x\sqrt{4-x^2} + 4\arcsin\frac{x}{2}$.

3. Покажите, что $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, $y = e^{-\sin x} + \sin x - 1$.

4. В тетради для индивидуальных домашних заданий выполните задания 1-3 из ИДЗ №5 по теме «Вычисление производных» в соответствии с Вашим вариантом. В заданиях 1-3 вычислите производные функций с помощью правил дифференцирования. В задании 4 найти производную с помощью логарифмического дифференцирования; в задании 5 найти производную y'_x для функции заданной неявно.

Вариант 1 1. $y = \frac{5}{\cos^2 2x} - e^{3x} + 3\sqrt{x}$; 2. $y = \frac{(2+\sqrt{x})^2}{x^3}$; 3. $y = \arcsin \frac{(2+\sqrt{x})^2}{x^3}$; 4. $y = \frac{(1-2x)^3 \cdot (3+5x)^2}{\sqrt[4]{(2-x)^5} \cdot (7+x)^4}$; 5. $5x - 2y + 3x^2y - x^2y^2 + 7y^2 = 0$.	Вариант 2 1. $y = \frac{4}{\sqrt{9-x^2}} - e^{\frac{x}{3}} + \frac{12}{16+x^2}$; 2. $y = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^3}$; 3. $y = \arccos \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^3}$; 4. $y = \frac{(4-6x)^3 \cdot (1-x)^4}{\sqrt[3]{(x+2)^4} \cdot (5x-2)^2}$; 5. $x + 6y - 3x^2y + x^3y^2 - 5y^2 = 0$.
Вариант 3 1. $y = 3 \cos 6x + 5^{-x} - \frac{2}{x^2 - 4}$; 2. $y = \frac{(1-x)^3}{x}$; 3. $y = \operatorname{arctg} \frac{(1-x)^3}{x}$; 4. $y = \frac{(x-2)^2 \cdot (3x+2)^4}{\sqrt{(4x-6)^3} \cdot (1-x)^3}$; 5. $2x - 3y + x^3y - x^2y^2 + 4y^2 = 0$.	Вариант 4 1. $y = \frac{4}{9-x^2} - \sin 2x + 3\sqrt{x}$; 2. $y = \frac{(2+3x)^2}{\sqrt[3]{x}}$; 3. $y = \operatorname{arcctg} \frac{(2+3x)^2}{\sqrt[3]{x}}$; 4. $y = \frac{(x+5x)^2 \cdot (6x-7)^4}{\sqrt[4]{(1-x)^3} \cdot (2x+3)^5}$; 5. $2x + 4y - x^2y + x^2y^2 - 8y^3 = 0$.
Вариант 5 1. $y = e^{4x} - 3 \cos \frac{x}{2} + \frac{2}{\sqrt{x^2+5}}$; 2. $y = \frac{(2+x)^3}{x}$;	Вариант 6 1. $y = \operatorname{tg} 2x - 2^{-3x} + 6\sqrt[3]{x} - 10^{2x}$; 2. $y = \frac{(2-x)^2}{\sqrt{x}}$;

3. $y = \log_2 \frac{(2+x)^3}{x}$; 4. $y = \frac{(7x-2)^3 \cdot (x+3)^2}{\sqrt{(1-5x)^5} \cdot (3x-2)^4}$; 5. $4x - 2y + x^2y - 3x^2y^2 + 4y^2 = 0$.	3. $y = \cos \frac{(2-x)^2}{\sqrt{x}}$; 4. $y = \frac{(x-4)^2 \cdot (3x+5)^5}{\sqrt[5]{(1-2x)^2} \cdot (3-4x)^3}$; 5. $6x + y - 5x^2y + 3x^3y^4 - y^2 = 0$.
Вариант 7 1. $y = 4ctg 2x + \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} - 6^{-3x}$; 2. $y = \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x}$; 3. $y = \ln \frac{\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x}$; 4. $y = \frac{(7x-2)^3 \cdot (1-x)^7}{\sqrt[5]{(3x+2)^4} \cdot (8x+2)^3}$; 5. $7x - 4y + x^2y - 4x^2y^3 + 7y^4 = 0$.	Вариант 8 1. $y = 8 \cos 4x - \frac{6}{\sqrt{5+x^2}} - 3^{-2x}$; 2. $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{1+2\sqrt{x}}$; 3. $y = \sin \frac{\sqrt[3]{x}}{1+2\sqrt{x}}$; 4. $y = \frac{(8x-7)^4 \cdot (1-3x)^2}{\sqrt[3]{(2x+3)^5} \cdot (4x+3)^3}$; 5. $x + 6y - x^5y + x^3y^4 - 8y^2 = 0$.
Вариант 9 1. $y = 4tg 2x + \frac{5}{x^2-25} - 2\sqrt{x}$; 2. $y = \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}$; 3. $y = \arcsin \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}$; 4. $y = \frac{(5x-2)^2 \cdot (2x+3)^4}{\sqrt{(1-5x)^3} \cdot (2x-6)^3}$; 5. $3x - 5y + 4x^5y - x^3y^3 + 5y^6 = 0$.	Вариант 10 1. $y = 3 \cos 9x - \frac{6}{9+x^2} - tg x$; 2. $y = \frac{\sqrt[5]{x}}{(1-2x)^2}$; 3. $y = \arccos \frac{\sqrt[5]{x}}{(1-2x)^2}$; 4. $y = \frac{(5x-3)^2 \cdot (1-3x)^3}{\sqrt[3]{(4x-5)^2} \cdot (2-3x)^4}$; 5. $x + 4y - 4x^2y + x^2y^2 - 6y^3 = 0$.
Вариант 11 1. $y = 3ctg 2x - 7 \sin 6x - \sqrt[3]{x}$; 2. $y = \frac{(3-2x)^2}{\sqrt[4]{x}}$; 3. $y = \log_4 \frac{(3-2x)^2}{\sqrt[4]{x}}$; 4. $y = \frac{(5x+7)^3 \cdot (3-x)^2}{\sqrt[3]{(1-3x)^2} \cdot (4x+1)^5}$; 5. $5x - 6y + 4x^3y - 3x^3y^3 + 4y^6 = 0$.	Вариант 12 1. $y = 2^{3x} - \frac{7}{4+x^2} - 4tg 2x$; 2. $y = \frac{\sqrt[5]{x}}{3+2x}$; 3. $y = \arcsin \frac{\sqrt[5]{x}}{3+2x}$; 4. $y = \frac{(3x+2)^2 \cdot (2x-5)^4}{\sqrt[3]{(4-3x)^2} \cdot (2x+4)^4}$; 5. $x + 5y - 5x^3y + 2x^3y^2 - y^2 = 0$.
Вариант 13 1. $y = 4 \sin 8x - \frac{3}{\cos^3 6x} + 2\sqrt[4]{x}$;	Вариант 14 1. $y = \frac{5}{x^2} - \frac{3}{\sqrt{x^2-1}} + 4 \sin 2x$;

$2. \quad y = \frac{(1-6x)^2}{\sqrt[3]{x}} ;$ $3. \quad y = \operatorname{arctg} \frac{(1-6x)^2}{\sqrt[3]{x}} ;$ $4. \quad y = \frac{(8x+1)^2 \cdot (4x-3)^5}{\sqrt[5]{(2x-7)^5} \cdot (5x+3)^4} ;$ $5. \quad 10x - 6y + x^3y - x^4y^2 + y^2 = 0 .$	$2. \quad y = \frac{(1+x)^3}{\sqrt{1-x}} ;$ $3. \quad y = \operatorname{arctg} \frac{(1+x)^3}{\sqrt{1-x}} ;$ $4. \quad y = \frac{(3x-4)^3 \cdot (5-x)^2}{\sqrt{(3x+4)^5} \cdot (2x+3)^4} ;$ $5. \quad x + 5y - x^2y + 3x^2y^3 - 5y^2 = 0 .$
Вариант 15 $1. \quad y = \frac{6}{\cos^2 2x} - \frac{4}{x^2 + 9} - 5x^2 ;$ $2. \quad y = \frac{(3-2x)^2}{\sqrt{x}} ;$ $3. \quad y = \sin \frac{(3-2x)^2}{\sqrt{x}} ;$ $4. \quad y = \frac{(9-5x)^3 \cdot (4-6x)^2}{\sqrt[5]{(1+3x)^4} \cdot (5x+3)^4} ;$ $5. \quad 8x - y + 6x^2y - x^2y^3 + 4y^7 = 0 .$	Вариант 16 $1. \quad y = 3 \cos 8x - 9 - 4 \operatorname{ctg} 3x ;$ $2. \quad y = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^2} ;$ $3. \quad y = \log_5 \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x^2} ;$ $4. \quad y = \frac{(8x+5)^3 \cdot (x-5)^6}{\sqrt{(3x+7)^6} \cdot (6x+3)^2} ;$ $5. \quad 8x + 9y - x^3y + x^2y^3 - 7y^2 = 0 .$
Вариант 17 $1. \quad y = 8 \operatorname{ctg} 2x + \sqrt{x} - \frac{7}{x^2 - 9} ;$ $2. \quad y = \frac{(1+3x)^2}{x^2} ;$ $3. \quad y = \cos \frac{(1+3x)^2}{x^2} ;$ $4. \quad y = \frac{(8x+4)^3 \cdot (x-4)^5}{\sqrt{(1-2x)^3} \cdot (3x+6)^2} ;$ $5. \quad x - 7y + x^4y - 2x^2y^2 + 7y^3 = 0 .$	Вариант 18 $1. \quad y = 3 \operatorname{tg} 10x + 7^{2x} - \frac{5}{\sqrt{81-x^2}} ;$ $2. \quad y = \frac{(1-4x)^2}{x} ;$ $3. \quad y = \operatorname{ctg} \frac{(1-4x)^2}{x} ;$ $4. \quad y = \frac{(7-4x)^2 \cdot (3x+4)^4}{\sqrt[3]{(3x+5)^7} \cdot (6x-2)^5} ;$ $5. \quad 5x + 6y - x^3y + 2x^3y^2 - 7y^3 = 0 .$
Вариант 19 $1. \quad y = 4^{-3x} - 3 \cos \frac{x}{2} + \frac{2}{4+x^2} ;$ $2. \quad y = \frac{(2x-3)^2}{\sqrt{x}} ;$ $3. \quad y = \operatorname{tg} \frac{(2x-3)^2}{\sqrt{x}} ;$ $4. \quad y = \frac{(2x+9)^5 \cdot (6-3x)^2}{\sqrt[3]{(3x+5)^4} \cdot (3-7x)^3} ;$ $5. \quad 8x - 7y + 12x^2y - 8x^4y^3 + 5y^2 = 0 .$	Вариант 20 $1. \quad y = 4x^7 - 5 \cos 3x + 2^{-x} - \ln 2x ;$ $2. \quad y = \frac{2x+5}{\sqrt{x-1}} ;$ $3. \quad y = \arcsin \frac{2x+5}{\sqrt{x-1}} ;$ $4. \quad y = \frac{(3x+4)^6 \cdot (4x-7)^2}{\sqrt[4]{(2x+5)^7} \cdot (1-3x)^3} ;$ $5. \quad 9x + 4y - x^3y + 3x^2y^6 - 7y^2 = 0 .$
Вариант 21	Вариант 22

1. $y = 9^{4x} - 3 \cos \frac{x}{5} + 13\sqrt[5]{x} - 2 \ln 5x$; 2. $y = \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x-3}}$; 3. $y = \ln \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x-3}}$; 4. $y = \frac{(2x+3)^4 \cdot (x-4)^3}{\sqrt{(6x-5)^3} \cdot (2x-3)^2}$; 5. $6x - 3y + 3x^3y - 4x^2y^2 + 9y^3 = 0$.	1. $y = \frac{7}{x} + 4 \operatorname{tg} 2x - \sqrt[4]{x} + 6^{3x}$; 2. $y = \frac{(x+8)^2}{\sqrt[3]{x}}$; 3. $y = \arccos \frac{(x+8)^2}{\sqrt[3]{x}}$; 4. $y = \frac{(4x-2)^5 \cdot (4+3x)^4}{\sqrt[5]{(1-12x)^2} \cdot (3x-4)^2}$; 5. $7x + 8y - 9x^2y + x^2y^4 - 3y^5 = 0$.
Вариант 23 1. $y = 9^{4x} - 3 \cos \frac{x}{5} + 13\sqrt[5]{x}$; 2. $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x+4}}$; 3. $y = \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{x+4}}$; 4. $y = \frac{(7x+3)^2 \cdot (x+2)^5}{\sqrt[4]{(1-3x)} \cdot (2+3x)^4}$; 5. $7x - 4y + x^5y - 12x^3y^2 + 3y^2 = 0$.	Вариант 24 1. $y = 2x^3 - \frac{4}{x^2+1} - 2 \operatorname{tg} \frac{x}{3}$; 2. $y = \frac{(2x-1)^2}{x^3}$; 3. $y = \operatorname{arctg} \frac{(2x-1)^2}{x^3}$; 4. $y = \frac{(x+3)^2 \cdot (4x-5)^3}{\sqrt[3]{(7-2x)^4} \cdot (8x+3)^5}$; 5. $5x + 6y - 3x^3y + 4x^3y^6 - 2y^2 = 0$.
Вариант 25 1. $y = \frac{4}{x^2+16} - \cos \frac{x}{2} + 5^{3x}$; 2. $y = \frac{(3-4x)^2}{x}$; 3. $y = \log_7 \frac{(3-4x)^2}{x}$; 4. $y = \frac{(x-7)^4 \cdot (2x+5)^3}{\sqrt[4]{(1-7x)^5} \cdot (4x-3)^2}$; 5. $x - 6y + 5x^3y - x^3y^3 + 6y^2 = 0$.	Вариант 26 1. $y = 5\sqrt{x} - 3 \operatorname{ctg} 6x + 4^{2x}$; 2. $y = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x}}$; 3. $y = \ln \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt[3]{x}}$; 4. $y = \frac{(x-4)^5 \cdot (2x-6)^3}{\sqrt{(4x+6)^3} \cdot (3x-5)^2}$; 5. $6x + y - 8x^2y + 3x^3y^2 - y^2 = 0$.
Вариант 27 1. $y = \frac{5}{\cos^2 x} - 2^x + 16 \cos 4x$; 2. $y = \frac{(1-3x)^2}{\sqrt{x}}$; 3. $y = \arccos \frac{(1-3x)^2}{\sqrt{x}}$;	Вариант 28 1. $y = 5x^4 - \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} + 6^{4x}$; 2. $y = \frac{(1-7x)^2}{\sqrt{x}}$; 3. $y = \arcsin \frac{(1-7x)^2}{\sqrt{x}}$;

$y = \frac{(6x-5)^4 \cdot (2-x)^3}{\sqrt[3]{(1-3x)^5} \cdot (4-2x)^4};$ 4. $x - 2y + x^4y - 2x^2y^2 + 8y^5 = 0.$ 5.	$y = \frac{(1+3x)^2 \cdot (2x-5)^5}{\sqrt[5]{(2x+4)^6} \cdot (3x-4)^3};$ 4. $5x + 6y - 7x^2y + 3x^2y^3 - 6y^3 = 0.$ 5.
Вариант 29 1. $y = 4 \cos 2x - \sqrt[4]{x} + 6^{-3x};$ 2. $y = \frac{(1+3x)^2}{x^4};$ 3. $y = \operatorname{arccctg} \frac{(1+3x)^2}{x^4};$ 4. $y = \frac{(6x+4)^3 \cdot (4x-5)^2}{\sqrt[5]{(3x-4)^2} \cdot (8x+5)^4};$ 5. $9x - 6y + 4x^2y - 2x^3y^4 + 2y^5 = 0.$	Вариант 30 1. $y = 7x^6 - 3 \operatorname{ctg} \frac{x}{7} + 4^{5x};$ 2. $y = \frac{1-3x}{\sqrt{x+1}};$ 3. $y = \operatorname{arctg} \frac{1-3x}{\sqrt{x+1}};$ 4. $y = \frac{(6x-4)^3 \cdot (3-2x)^6}{\sqrt[5]{(3x+6)^4} \cdot (x-6)^2};$ 5. $6x + 8y - 4x^5y + 2x^5y^2 - 5y^3 = 0.$

Практическое занятие № 8

Тема занятия «Логарифмическое дифференцирование. Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения»

Цель занятия: Формирование умений и навыков нахождения производных неявно заданных и параметрически заданных функций, применения логарифмического дифференцирования.

Организационная форма занятия: практикум-тренинг.

Компетенции, формируемые на занятии: УК-1.

Формирование у будущих специалистов этой компетенций на занятии предполагает обучение студентов

- анализировать ситуации и делать выводы;
- видеть проблемы в традиционных ситуациях;
- абстрагировать содержание и выделять существенное;
- применение основных понятий, идей и методов математического анализа для решения базовых задач.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Логарифмическое дифференцирование.
2. Производные высших порядков.
3. Неявно заданные функции и их дифференцирование.
4. Нахождение производной параметрически заданной функции.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.

4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.
5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.
6. Подготовьтесь к самостоятельной работе №7 по теме «Производная функции», просмотрев решение основных типов задач, предложенных в примерном варианте самостоятельной работы.

На занятии по указанию преподавателя

1. Дайте ответы на вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.
3. Решите, предложенный преподавателем, вариант самостоятельной работы №7 по теме «Производная функции» и сдайте выполненную работу на проверку.

Дома

1. Закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.
2. В тетради для индивидуальных домашних заданий закончите выполнение ИДЗ №5 по теме «Вычисление производных» в соответствии с Вашим вариантом. Решите задания 4 и 5. В задании 4 найдите производную функции с помощью логарифмического дифференцирования; в задании 5 найдите производную y'_x для функции заданной неявно. Сдайте тетрадь на проверку преподавателю.
3. Подготовьтесь к самостоятельной работе №8 по теме «Дифференцирование неявно заданных и параметрически заданных функций», примерный вариант самостоятельной работы вы можете найти в программе дисциплины.

Рекомендуемая литература

- [1] глава 8 пп. 8.4. - 8.5.
- [2] глава VII § 1.
- [3] глава 6 § 29.
- [4] часть II занятия 25 – 27.
- [5] глава 2 § 2.1.
- [6] глава 5 §§ 9 – 11.
- [7] глава V §§ 9 – 11.
- [8] глава 5 §§ 9 – 11.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные следующих функций:

$$\text{а) } y = \sqrt[5]{\frac{x(x^2 + 1)}{(1-x)^2}}; \quad \text{б) } y = x^{e^x}.$$

Решение. а) Производную функции найдем по следующему плану:

- 1) Прологарифмируем данную функцию:

$$\ln y = \ln \sqrt[5]{\frac{x(x^2 + 1)}{(1-x)^2}} = \frac{1}{5} (\ln x + \ln(x^2 + 1) - 2 \ln(1-x))$$

- 2) Найдем производную от $\ln y$:

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{5} (\ln x + \ln(x^2 + 1) - 2 \ln(1-x)) \right)' = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{2}{1-x} \right) = \frac{-x^3 + 3x^2 + x + 1}{5x(x^2 + 1)(1-x)}.$$

Определим производную данной функции

$$y' = y(\ln y)' = \sqrt[5]{\frac{x(x^2 + 1)}{(1-x)^2}} \cdot \frac{-x^3 + 3x^2 + x + 1}{5x(x^2 + 1)(1-x)} = \frac{-x^3 + 3x^2 + x + 1}{5\sqrt[5]{(1-x)^7 x^4 (x^2 + 1)^4}}.$$

б) Производную функции с помощью логарифмического дифференцирования находим по указанному плану:

1) $\ln y = \ln x^{e^x} = e^x \ln x.$

2) $(\ln y)' = (e^x \ln x)' = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} = \frac{e^x (x \ln x + 1)}{x}.$

$$3) \quad y' = y(\ln y)' = x^{e^x} \frac{e^x (x \ln x + 1)}{x} = x^{e^x-1} e^x.$$

2. Для функции $y = \operatorname{tg} x$ найдите производные второго и третьего порядков.

Решение. По определению производных высших порядков имеем:

$y'' = (y')'$ и $y''' = (y'')'$, т.е. производная второго порядка есть производная от производной первого порядка, а производная 3-го порядка есть производная от производной 2-го порядка. Поэтому последовательно находим:

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad y'' = (y')' = \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)' = 2 \cos^{-1} x \sin x = 2 \operatorname{tg} x, \quad y''' = (y'')' = (2 \operatorname{tg} x)' = \frac{2}{\cos^2 x}.$$

3. Для данных неявных функций найдите производные первого порядка $y(x)$:

$$\text{а) } 5x^2 + 3xy - 2y^2 + 2 = 0; \quad \text{б) } x^y = y^x.$$

Решение. а) Дифференцируем по x обе части равенства, считая, что y есть функция от x , получим:

$$10x + 3y + 3xy' - 4yy' = 0, \quad \text{отсюда } y'(4y - 3x) = 10x + 3y, \quad \text{или } y' = \frac{10x + 3y}{4y - 3x}.$$

б) Логарифмируем обе части данного уравнения, затем дифференцируем по x , рассматривая y как функцию от x :

$$y \ln x = x \ln y, \quad y' \left(\ln x - \frac{x}{y} \right) = \ln y - \frac{y}{x}, \quad \text{отсюда } y' = \frac{(x \ln y - y)y}{x(y \ln x - x)}.$$

4. Для функции, заданной параметрически, найдите производную: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

Решение. Учитывая, что

$$\text{найдем } x'_t = -\sin t \quad \text{и} \quad y'_t = \cos t.$$

$$\text{Тогда } y'_x = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Запишите формулу логарифмического дифференцирования.

2. Когда применяется формула логарифмического дифференцирования?
3. Расскажите о дифференцировании показательно-степенной функции.
4. Дайте определение производной второго порядка, производной n-го порядка.
5. Дайте определение неявного задания функции. Приведите примеры.
6. Как от неявного задания перейти к явному заданию функции? Всегда ли это можно сделать. Приведите примеры.
7. Как проводят дифференцирование неявной функции?
8. Расскажите о нахождении производных высших порядков от неявно заданных функций.
9. Дайте определение параметрически заданной функции. Приведите примеры.
10. Расскажите как от параметрического задания функции перейти к явному заданию функции.
11. Запишите формулы для нахождения производных первого и второго порядков от параметрически заданной функции.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные следующих функций:
 а) $y = x^5(1+3x)^3(1-2x)^2$; б) $y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$; в) $y = \sqrt[3]{\frac{x(1+x)^2}{(1-x)^2}}$;
 г) $y = (\sin x)^x$; д) $y = \sqrt[x]{x}$.
2. Найдите производные высших порядков для следующих функций:
 а) $y = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 1$; $y'' = ?$ б) $y = \cos 2x$; $y''' = ?$
3. Для данных неявных функций найдите производные первого порядка $y'(x)$:
 а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; б) $y = \operatorname{tg}(x + y)$.

4. Для функций, заданных параметрически, найдите производные первого и второго порядков

$$\text{а) } \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 + 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы дома

1. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные следующих функций:

$$\text{а) } y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}; \quad \text{б) } y = \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{в) } y = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3} \sqrt[3]{(x-3)^7}};$$

$$\text{г) } y = (\cos x)^{\sin 2x}.$$

2. Найдите производные высших порядков для следующих функций:

$$\text{а) } y = 3x^3 - 5x^2 + x; \quad y''' = ? \quad \text{б) } y = e^x + 2x; \quad y^{IV} = ?$$

3. Для данной неявной функции найдите производные первого и второго порядков $e^y \sin x = e^{-x} \cos y$.

4. Для функций, заданных параметрически, найдите производные первого и второго порядков

$$\text{а) } \begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{3t}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

Практическое занятие № 9

Тема занятия «Применение производной к вычислению пределов функций.

Правила Лопиталя. Формула Тейлора»

Цель занятия: изучение приложений производной функции.

Организационная форма занятия: семинар-практикум.

Компетенции, формируемые на занятии: УК-1.

При формировании на занятии названных компетенций специалист должен уметь применять аппарат дифференциального исчисления для решения различных практических задач; в частности, у студента должны быть сформированы умения составлять уравнения касательной и нормали к плоской кривой; развиты навыки раскрытия неопределенностей при вычислении пределов с помощью применения правил Лопиталя; сформированы навыки разложения функции по формуле Тейлора для приближенных вычислений.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Составление уравнений касательной и нормали к плоской кривой.
2. Применение правил Лопиталя при вычислении пределов функции.
3. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора.

Методические рекомендации

Для подготовки к занятию дома

1. Прочитайте конспект лекции, соответствующий теме занятия. Запомните основные определения.
2. Изучите рекомендуемую литературу по вопросам, выносимым на обсуждение.
3. Найдите ответы на теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями. Подготовьтесь к ответам на эти вопросы на занятии.
4. Законспектируйте ответы на теоретические задания, которые не содержатся в Вашем конспекте лекции по указанной теме.

5. Изучите разобранные примеры решения типовых задач и законспектируйте их решение в рабочую тетрадь.

На занятии по указанию преподавателя

1. Обсудите вопросы из теоретических заданий для развития и контроля владения компетенциями.
2. В рабочей тетради и на доске решите практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий, решаемых в аудитории.

Дома закрепите полученные практические умения и навыки, решая практические задания для развития и контроля владения компетенциями из заданий для самостоятельной работы дома.

Рекомендуемая литература

[1] глава 8 п. 8.6., п. 8.9.

[2] глава VII § 1.

[3] глава 6 § 25.

[4] часть II занятия 30, 36.

[5] глава 2 § 2.3.

[6] глава 6 §§ 1-3.

[7] глава VI §§ 1-3.

[8] глава 5 §§ 13-14.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Составьте уравнения касательной и нормали к параболе $y = x^2$ в точке $A(2;4)$.

Решение. Так как надо составить уравнения касательной и нормали в точке $A(2;4)$, то $x_0 = 2, y_0 = 4$.

Тогда уравнение касательной в точке $A(2,4)$ будет иметь вид:
 $y = 4 + 4(x - 2)$, или $y = 4x - 4$.

А уравнение нормали: $y = \frac{1}{4}(x - 2)$ или $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$.

2. С помощью правила Лопиталя найдите пределы:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \operatorname{tg} 5x; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctgx} - \frac{1}{x} \right); \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x) x^{\frac{1}{2}}.$$

Решение. а) В данном пределе имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. По правилу Лопиталя заменим отношение этих величин отношением их производных:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x^4 + 2x^2 - 3)'}{(x^2 - 3x + 2)'} = \frac{4x^3 + 4x}{2x - 3} = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 3} = -\frac{8}{1} = -8.$$

Замечание. Аналогично можно раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

б) В данном пределе имеем неопределенность $0 \cdot \infty$. Сведем эту

неопределенность к виду $\frac{0}{0}$, а затем применим правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \operatorname{tg} 5x &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{1}{\operatorname{tg} 5x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)'}{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} 5x} \right)'}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \operatorname{tg}^2 5x \cdot \cos^2 5x}{5} = \\ &= \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^2 5x = \frac{1}{5} \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin^2 \frac{5\pi}{2} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

в) В данном пределе имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Преобразуем функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, затем применим правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctgx} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{tg} x)'}{(x \operatorname{tg} x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1 - 1}{0 + 1} = 0. \end{aligned}$$

г) В данном пределе имеем неопределенность вида 1^∞ . Заметим сразу, что таким образом можно раскрыть неопределенности вида ∞^0 и 0^0 . Эти случаи

нахождения предела функции сводятся к случаю $0 \cdot \infty$ (а затем к случаю $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$) следующим путем: функция логарифмируется и сначала находится

предел ее логарифма, а затем по найденному пределу логарифма находится и предел самой функции. Таким образом, пусть $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = a$.

Логарифмируем функцию и находим предел ее логарифма:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}.$$

Здесь нахождение предела свелось к случаю $\frac{0}{0}$. Применяя правило

Лопиталя, получим: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x \cos x}$. Неопределенность $\frac{0}{0}$

осталась. Применим правило Лопиталя 2-й раз:

$$\ln a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\sin x)'}{(2x \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2x \sin x + 2 \cos x} = -\frac{1}{2}.$$

Теперь по найденному пределу логарифма функции находим искомый предел самой функции: $a = e^{\ln a} = e^{-\frac{1}{2}}$.

Таким образом: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$.

3. Разложите многочлен $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ по степеням $x + 2$ по формуле Тейлора.

Решение. Найдем значение многочлена и его производных при $x = -2$:

$$P(-2) = (-2)^3 - 6(-2)^2 + 11(-2) - 6 = -60,$$

$$P'(x) = 3x^2 - 12x + 11, P'(-2) = 12 + 24 + 11 = 47,$$

$$P''(x) = 6x - 12, P''(-2) = -12 - 12 = -24,$$

$P'''(x)=6, P'''(-2)=6; P^{IV}(x)=0$ и все последующие производные равны 0.

Тогда для разложения многочлена по степеням $(x+2)$ по формуле Тейлора имеем:

$$P(x)=P(-2)+\frac{P'(-2)}{1!}(x+2)+\frac{P''(-2)}{2!}(x+2)^2+\frac{P'''(-2)}{3!}(x+2)^3, \quad \text{т.е.}$$

$$P(x)=-60+47(x+2)+\frac{-24}{2!}(x+2)^2+\frac{6}{3!}(x+2)^3=$$

$$=-60+47(x+2)-12(x+2)^2+(x+2)^3.$$

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Сформулируйте геометрический смысл производной функции.
2. Выведите уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
3. Какая прямая называется нормалью к кривой? Какой вид имеет уравнение нормали?
4. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов функции.
5. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов функции.
6. Сколько раз подряд можно применять правило Лопиталя и когда это правило неприменимо?
7. Как можно раскрыть неопределенность вида $0 \cdot \infty$ при вычислении предела функции?
8. Что нужно сделать при вычислении предела функции, если он содержит неопределенность вида $\infty - \infty$?
9. Какой прием применяют для применения правил Лопиталя, если предел функции содержит неопределенность вида 0^0 , или ∞^0 , или 1^∞ ?

10. Расскажите о формуле Тейлора и формуле Маклорена. Для чего эти формулы могут использоваться?

11. Разложите по формуле Тейлора (Маклорена) функции $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

Задания, решаемые в аудитории

1. Составьте уравнение касательной и нормали

а) к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке с абсциссой $x = 1$;

б) к кривой $y = \ln x$ в точке с абсциссой $x = 1$.

2. Используя правило Лопиталья, найдите следующие пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$; в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 \ln x$;

е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$; ж) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 5x}$; з) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\tan x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$; и) $\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} \ln x$;

к) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{x^2 - 1} - \frac{7}{x^3 - 1} \right)$; л) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$; м) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$.

3. По формуле Тейлора разложите многочлен $P(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$ по степеням $x+1$.

4. Закон зависимости массы вещества, вступившего в химическую реакцию, в зависимости от времени, выражается формулой: $m = e^{2t-2}(t^2 + 1)$, где t - время в минутах, m - масса в граммах. Сколько вещества вступит в реакцию через 66 секунд?

Задания для самостоятельной работы дома

1. Составьте уравнение касательной и нормали

а) к окружности $x^2 + y^2 = 25$ в точке $A(3; -4)$;

б) к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ в точке $A(1; 1)$.

2. Используя правило Лопиталья, найдите следующие пределы:

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 11x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1+x)}; \\
 & \text{д) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{\ln(e^x - e^2)}{\ln(x-2)}; \quad \text{ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 5x}; \quad \text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x; \\
 & \text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \ln(x + e^x); \quad \text{к) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right); \quad \text{л) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}; \quad \text{м) } \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}.
 \end{aligned}$$

3. По формуле Тейлора разложите многочлен:

а) $P(x) = x^5 - 4x^3 + 6x^2 - 8x + 10$ по степеням $x - 2$;

б) $P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ по степеням $x - 1$.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 14-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2017. - 608 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: . 599-603. - ISBN 978-5-8112-6472-8

2. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2016. - 816 с. : ил., табл. - Прил.: с. 809-815. - ISBN 978-5-17-099894-4. - ISBN 978-5-94666-805-7

Дополнительная

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко ; Моск. гос. ун-т тех. и упр. им. К.Г. Разумовского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 396 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс). - На учебнике гриф: Доп.МО. - ISBN 978-5-9916-3467-0

2. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов. 3-е изд.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.

3. Макаров, С. И. Математика для экономистов : [учеб. пособие] / С.И. Макаров. - 2-е изд., стер. - М. : КНОРУС, 2011. - 264 с. - На учебнике гриф: Рек.УМО. - Прил.: с. 226-262. - Библиогр.: с. 263-263. - ISBN 978-5-406-01739-5

4. Красс, М. С. Математика для экономистов : [учеб. пособие] / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - СПб. : Питер, 2009. - 464 с. : ил. - (Учебное пособие). - На учебнике гриф: Рек.УМО. - Библиогр.: с. 461-461. - ISBN 978-5-94723-672-9

Методическая литература

1. Барашков, А. С. Математика: [учебник] / А.С. Барашков. - М.: АСТ; Владимир: ВКТ, 2011. - 480 с. - (Высшее образование).

2. Виленкин, И. В. Высшая математика: линейная алгебра; аналитическая геометрия; дифференциальное и интегральное исчисление - 6-е изд. - Ростов н/Д: Феникс, 2011. - 416 с.

3. Красс, М. С. Математика для экономистов: [учеб. пособие] / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - СПб.: Питер, 2009. - 464 с.

Интернетресурсы

Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика: <http://www.allmath.ru/>

Общероссийский математический портал Math- Net.ru: <http://Math-Net.ru/>

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «Математика»
направление подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика
направленность (профиль) «Информационная бизнес-аналитика и цифровые технологии»

**Ставрополь
2026**

Методические указания к самостоятельной работе составлены в соответствии с рабочими учебными планами и программами дисциплины «Математика» по направлению подготовки 38.03.05 «Бизнес-информатика», направленность (профили): «Информационная бизнес-аналитика и цифровые технологии». Они содержат рекомендации по организации работы.

Составитель: Обласова И. Н.

ВВЕДЕНИЕ

Математика учит учиться, думать, принимать решения, развивает логическое мышление, способствует самообразованию. Она, по словам М.В. Ломоносова, «Ум в порядок приводит».

Данные методические рекомендации являются дополнением к учебно-методическим пособиям:

1) Грешилов А.А., Дубограй И.В. Вычисление пределов функций. Техника дифференцирования. Исследование функций и построение графиков: Компьютерный курс. Учебное пособие. – М.: Логос, 2004.

2) Математика. Часть 1. Линейная алгебра: Практикум для студентов экономических специальностей / Авторы - сост. Бондарь В.В., Смирнов А.А., Малофеев А.О. - Ставрополь: Изд-во СГУ, 2004.

3) Роженко О.Д. Математика. Для студентов экономического факультета. Раздел: Алгебра и геометрия. Электронный учебник. – Ставрополь: Изд-во СГУ, 2010.

4) Математика: Учебно-методическое пособие / Авторы - сост. Бреслер Г.Р., Роженко О.Д. - Ставрополь: Изд-во СГУ, 2004.

5) Смирнов А.А., Сенник В.В. Теория множеств, аналитическая геометрия и линейная алгебра: Электронный учебник. – Ставрополь: Изд-во СГУ, 2003.

6) Элементы логики и теории множеств, аналитической геометрии и линейной алгебры. Лекции по математике: Учебное пособие / Сост. Копыткова Л.Б. – Ставрополь: Изд-во СГУ, 2003.

Курс математики включает в себя следующие разделы:

1. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии.
2. Математический анализ.
3. Теория вероятностей и математическая статистика.

Предметом линейной алгебры является изучение теории линейных пространств, линейных преобразований и квадратичных форм, матриц, исследование и решение систем линейных уравнений.

Методами линейной алгебры является использование действительных (вещественных) чисел, арифметики и алгебры, а также теории определителей, методов Гаусса и Жордано-Гаусса, матричного метода решения систем.

Практические потребности людей, привели их к необходимости решать задачи, связанные с взаимным расположением одних предметов относительно других.

Так, например, в астрономии возникла задача определения положения одних небесных светил относительно других при помощи чисел. В III веке до н.э. Тимохарис и Аристилл определяли положение главных звезд при помощи измерения их расстояния от некоторых постоянных точек небесного свода.

В дальнейшем в связи с развитием механики, астрономии и других естественных наук перед геометрией была поставлена задача изучения различных траекторий движущихся точек.

Из всего сказанного следует, что из практических задач возникает необходимость изучения таких геометрических образов, как точки, прямые, кривые, плоскости, поверхности и их взаимное расположение.

Решение рассмотренных выше задач и составляет основное содержание геометрии.

Предмет аналитической геометрии заключается в исследовании геометрических форм с помощью алгебраического анализа, т.е. с помощью чисел выражаются не величины геометрических образов, а их расположение.

Числа, определяющие собой положение геометрической формы, называют координатами. Основными средствами исследования в геометрии служат **метод координат и методы линейной алгебры**.

Метод координат – это способ определения положения одних геометрических образов относительно других при помощи чисел.

Так, например, в астрологии возникла задача определения положения одних небесных светил относительно других при помощи чисел. Именно с бурным развитием астрономии, механики и техники в 17 веке связано возникновение метода координат.

Итак, способ определения положения одних геометрических образов относительно других при помощи чисел называется в геометрии **методом координат**.

Тот геометрический образ, относительно которого определяется положение другого геометрического образа, называется **системой координат**, а числа, определяющие положение геометрического образа, называются **координатами**.

Геометрические формы весьма разнообразны. В связи с этим при построении геометрии, естественно, мы должны принять какую-нибудь одну из форм за первичную, и с ее помощью затем образовывать все остальные. Проще всего за такую начальную форму принять геометрическую точку (самая простая геометрическая форма). Тогда всякую другую геометрическую форму, например, линию или поверхность, можно рассматривать как **геометрическое место точек**.

Приняв за начальный момент точку, необходимо, прежде всего, показать, каким образом определяется положение точки в пространстве с помощью чисел. Это первая идея метода координат, которая была положена в основу решения различных геометрических задач. Вторая идея этого метода заключается в установлении того, каким образом геометрические свойства линии отражаются на координатах точек, принадлежащих этим

линиям. Благодаря развитию дифференциального и интегрального исчисления, он стал мощным орудием математических исследований.

Отчетливые и исчерпывающие изложения этого метода и основ аналитической геометрии были сделаны Рене Декартом в его «Геометрии» (1637г).

В настоящее время, в связи с практическими потребностями классическая геометрия в трудах русских математиков М.М. Постникова и Д.Б. Фуксии претерпела значительные изменения.

Во-первых, совершен переход от трехмерного пространства к многомерному, введено понятие гиперплоскости и гиперповерхности. (Все сложные конструкции зависят от множества факторов, параметров).

Во-вторых, в геометрии широко используется идея вычислительной математики и при вычислениях используется ЭВМ, что связано с увеличением объема вычислений (в многомерном пространстве) так и возросшей требовательностью к оперативности расчетов.

Все явления в природе и технике можно описать в виде математической модели (математической формулы) т.е. в результате исследований получить (идентифицировать) математическую модель, а затем эта модель исследуется математическими методами в зависимости от поставленной задачи.

Это достигается на основе использования понятий, определений и теорем раздела **«Математический анализ»**.

Научный прогресс последних десятилетий показал, что математические методы первоначально открытые и разработанные для задач физики, механики и астрономии, т.е. для изучения простейших форм движения материи, успешно используется почти во всех разделах современного естествознания и техники, а также в ряде гуманитарных дисциплин.

Математическое моделирование широко применяется в геофизике атмосферы и океана, геологии, химии, биологии, теории управления и связи, экологии, экономике, медицине, лингвистике. Без него немыслимо современное производство, создание новейших образцов техники и прогрессивных технологий.

«Ни одна из естественных наук, если дело идет не о собирании сырого материала, а о действительном творчестве, не обойдется без математики — матери всех наук», — писал академик В. А. Стеклов в 1921 г.

Мощные методы современной математики позволяют не только исследовать математические модели сложных систем и процессов, но и предсказывать новые явления или объекты. Применение ЭВМ существенно расширило класс математических моделей, допускающих детальный анализ. Без преувеличения можно сказать, что уровень развития науки определяется уровнем математических методов, применяемых в ней.

Математика — древнейшая из точных наук — имела своим источником потребности счета, землемерия, навигации и астрономии (составление календаря). Еще в Вавилоне, Древнем (Китае), Египте и Китае знали абстрактные свойства целых чисел и элементы геометрии.

В XX столетии математика развивается во все возрастающем темпе с высокой степенью абстракции и обособления её от своих естественных приложений. Наиболее яркое отражение этот процесс получил в многотомной серии математических монографий французской школы, известной под псевдонимом Н.Бурбаки.

Абстрактность современной математики составляет её силу, т.к. одни математические понятия можно применять к разнообразным областям практики (дифференциальные уравнения). Абстрактность не означает отрыва и противопоставления математики реальному миру, т.к. математическое абстрагирование происходит не произвольно, а на основе реальных задач практики (механический и геометрический смысл производной и определенного интеграла).

Конечно, математика не всесильна. Для достижения успеха в той или иной области, помимо математических методов, необходимо иметь достаточно большой запас фактов и закономерностей, способных служить основой для добротной математической модели. И наоборот, следствием поспешного применения математических методов и ЭВМ без знания закономерностей и изучаемой системе могут стать неправильные практические рекомендации. Так случилось, например, с проектом переброски вод северных рек на юг. Здесь уместно вспомнить слова академика А. Крылова: «Математика, подобна жернову, перемалывает то, что под него засыпают, и как, засыпав лебеду, вы не получите пшеничной муки, так, исписав целые страницы формулами, вы не получите истины из ложных посылок».

Многие математические теории возникли первоначально как продукты «чистой» математики, не имевшие существенных приложений.

Однако при последующем развитии науки многие из них находят самые разные приложения. Например, у теории чисел — древнейшего раздела математики - не было приложений на протяжении тысячелетий. В настоящее время на свойствах простых чисел основана теория кодирования, применяемая при решении важнейших народнохозяйственных и оборонных задач.

История науки дает немало примеров, когда с помощью одних только математических рассуждений и вычислений, как говорят, “на кончике пера”, удалось предсказать новые физические явления или существование новых физических объектов, что впоследствии блестяще подтверждалось на опыте. Таковы, например: вычисления У.С.Адомсом и У.Леверье положения планеты Нептун, вскоре открытой астрономом И.Г.Галле; вывод из уравнений Максвелла об электромагнитной природе света, подкрепленный опытами Г.Герца; предсказание Дираком антиэлектрона (позитрона) на основе анализа решений дифференциальных уравнений движения электрона (позитрон вскоре был обнаружен К.Д. Андерсеном в космических лучах); фигура высшего пилотажа “мертвая петля” была теоретически рассчитана великим русским ученым Н.Е. Жуковским и только потом выполнена П.Н.Нестеровым.

Огромная роль принадлежит математике при создании летательных аппаратов, в разработке теории навигации (без этой теории не возможно точные дальние перелеты), в разработке теории стрельбы и бомбометания и т.д. Особо важную роль играет математика в освоении космического пространства (проект “Вега”, полет к Марсу, полет орбитальных станций и т.д.

ОСНОВНЫЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТАМ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «МАТЕМАТИКА»

1. Важнейшее требование – заниматься регулярно и систематически в течение всего семестра, не «запускать» материал.

2. Идеальным и самым эффективным методом отработки лекции является ее отработка в день прочтения лекции. Критерием того, что материал лекции усвоен, является умение самостоятельно изложить суть вопроса, поясняя его графиками и чертежами, сделать необходимые математические доказательства, не прибегая к помощи конспекта.

3. Решать, возможно, больше задач, решать самостоятельно. Если вы решили задачу с помощью товарища, то не считайте, что материалом вы овладели. Пока подобную задачу вы не решили полностью самостоятельно, не считайте, что упражнение выполнено.

4. Тщательно готовиться к каждому практическому занятию или лекции.

5. У человека, изучающего новый для него предмет, неизбежно появляются вопросы. Если вы чего-то не поняли, то обязательно задайте вопрос преподавателю.

6. Не следует заучивать материал, который понят вами не до конца. Бессмысленная зубрежка абсолютно недопустима.

7. Если в ваших знаниях имеются пробелы по элементарной математике, то ликвидируйте их как можно быстрее самостоятельно.

8. Установите тесный контакт с лектором и преподавателями, ведущими практические занятия, посещайте консультации, обращайтесь за советами к преподавателям кафедры.

При изучении математики и технических дисциплин широко используются краткие значки или **символы** для упрощения длинных записей, громоздких определений и формулировок теорем.

№ п\п	Символ	Название	Читается	Пример
1	$\vee$	Дизъюнкция (логическое сложение)	или	$a \vee b$
2	$\wedge$	Конъюнкция	и	$a \wedge b$

		(логическое умножение)		
3	—	Логическое отрицание	не	$\bar{a}$
4	$\Rightarrow$	Операция следования	если, то; следует; влечет	$x > 0 \Rightarrow 2^x > 1$
5	$\Leftrightarrow$	Равнозначность	тогда и только тогда	$\log_a x > 0 \Leftrightarrow a > 1 \wedge x$
6	, :		такие, что	$x : f(x) > 0$
7	$\exists$	Квантор существования	существует	$\exists x : x^3 - 1 = 0$
8	$\forall$	Квантор общности	для всех, для каждого	$\forall x \wedge \forall y \Rightarrow x^2 + y^2 +$
9	$\in$	Знак принадлежности	принадлежит	$x \in A$
10	$\cup$	Объединение множеств	Сумма (или)	$A \cup B$
11	$\cap$	Пересечение множеств	произведение (и)	$A \cap B$
12	$\setminus$	Разность	Вычитание	$A \setminus B$

Для более глубокого освоения студентами всего курса математики предлагается самостоятельно выполнить ниже представленные задания в соответствии с разделами и темами учебной программы.

САМОСТОЯТЕЛЬНОЕ КОНТРОЛИРУЕМОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

Для выполнения задания СКР № 1 необходимо повторить следующие вопросы:

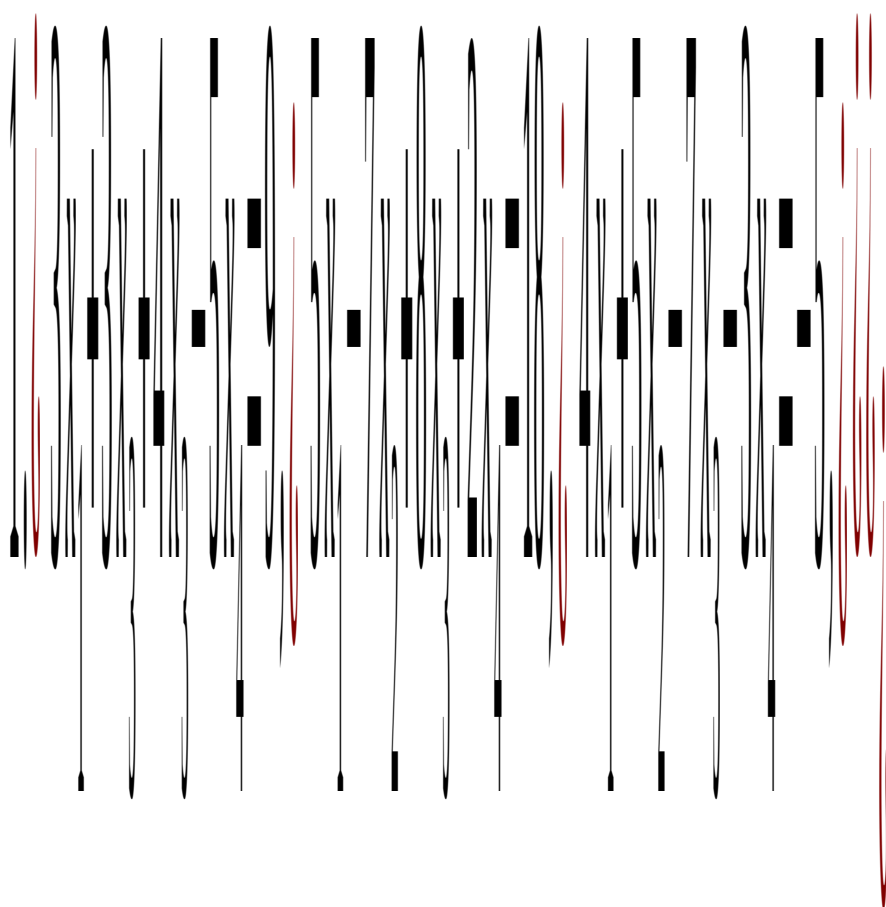
1. Определители 2-го и 3-го порядка, их вычисление.
2. Свойства определителей, понятия: минор, алгебраическое дополнение.
3. Матрицы и действия над ними.
4. Понятие обратной матрицы. Алгоритм составления обратной матрицы.
5. Ранг матрицы и его определение.
6. Решение систем алгебраических уравнений по правилу Крамера и матричным способом.
7. Решение систем алгебраических уравнений методом Гаусса (Гаусса-Жордана).
8. Основные типы систем линейных уравнений и способы их исследования. Теорема Кронекера-Капелли.

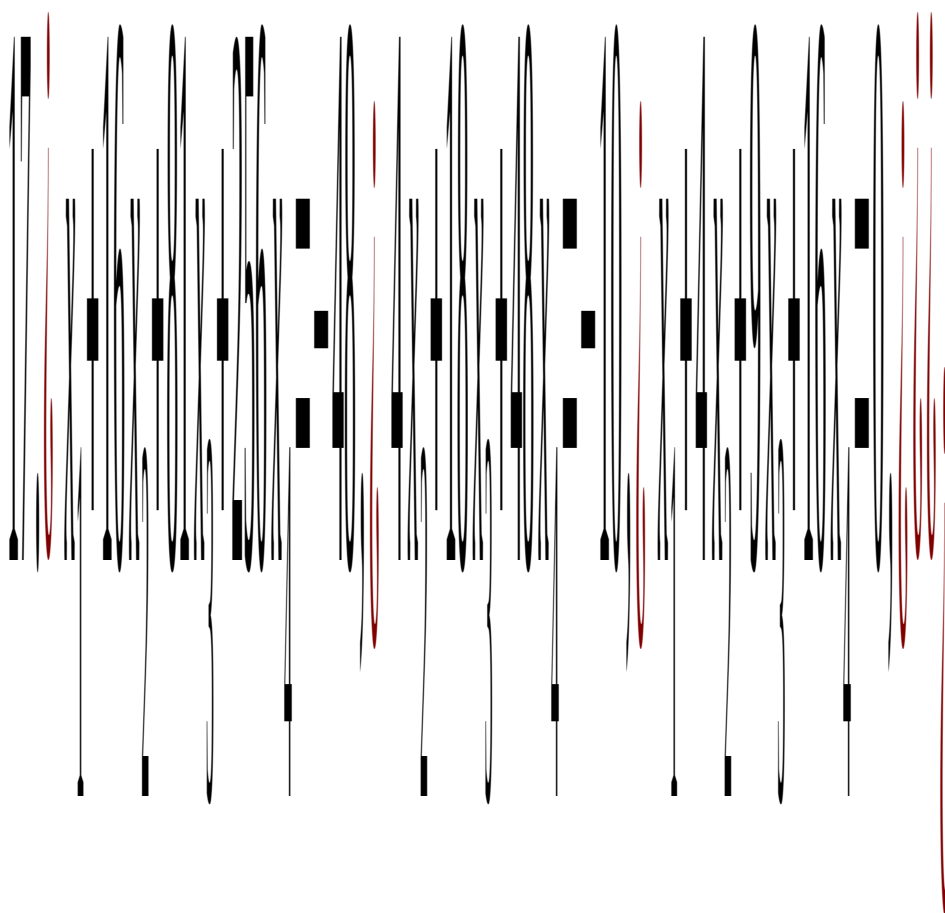
Варианты к индивидуальным домашним заданиям

6. Исследовать систему на совместность и число решений системы.
7. Решить систему методом Жордана-Гаусса.

Для определенной системы:

8. Решить систему методом Крамера.
9. Решить систему матричным методом.





САМОСТОЯТЕЛЬНОЕ КОНТРОЛИРУЕМОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

Для выполнения задания СКР № 2 необходимо повторить следующие вопросы:

1. Числовая последовательность и ее предел. Действия с последовательностями.
2. Предел последовательности. Основные свойства пределов последовательностей.
3. Предел функции в точке и на бесконечности.
4. Основные теоремы о пределах.
5. Бесконечно малые функции и их свойства.
6. Связь функции, ее предела и бесконечно малой.
7. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.
8. Замечательные пределы и их использование.
9. Сравнение бесконечно малых функций.

Вычислить пределы функций

Вариант -1

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2};$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+x} - 1};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x+5}.$

Вариант -2

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 7x \cdot \operatorname{ctg} 2x;$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+4x}{3+4x} \right)^{2x}.$

Вариант -3

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 3x};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x-2} \right)^x$$

Вариант -4

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{3x^2 + 2x};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{4x}.$$

Вариант -5

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^3 - 8};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt{1+x} - 1};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 12x}{\operatorname{tg} 4x};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x} \right)^{3x+2}.$$

Вариант -6

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 3x^3}{5x^4 + 2x^3};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \cdot \sin 3x;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-2} \right)^{2x+5}$$

Вариант -7

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+x}-1};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x+5}.$$

Вариант -8

$$1. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 7x \cdot \operatorname{ctg} 2x;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+4x}{3+4x} \right)^{2x}.$$

Вариант -9

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 3x};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x-2} \right)^x$$

Вариант -10

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{3x^2 + 2x};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{4x}.$$

Вариант -11

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^3 - 8};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt{1+x} - 1};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 12x}{\operatorname{tg} 4x};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{3x+2}.$$

Вариант -12

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 3x^3}{5x^4 + 2x^3};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \cdot \sin 3x;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x+5}$$

Вариант -13

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2};$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+x} - 1};$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x+5}.$$

Вариант -14

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 7x \cdot \operatorname{ctg} 2x;$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+4x}{3+4x} \right)^{2x}.$

Вариант -15

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 3x};$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x-2} \right)^x;$

Вариант -16

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{3x^2 + 2x};$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{4x}.$

Вариант -17

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^3 - 8};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt{1+x} - 1};$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 12x}{\operatorname{tg} 4x};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x} \right)^{3x+2}.$

Вариант -18

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 3x^3}{5x^4 + 2x^3};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \cdot \sin 3x;$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-2} \right)^{2x+5}$

Вариант -19

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2};$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+x} - 1};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{x+5}.$

Вариант -20

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 7x \cdot \operatorname{ctg} 2x;$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+4x}{3+4x} \right)^{2x}.$

Вариант -21

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 3x};$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x-2} \right)^x$

Вариант -22

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{3x^2 + 2x};$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{4x}.$

Вариант -23

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^3 - 8};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt{1+x} - 1};$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 12x}{\operatorname{tg} 4x};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x} \right)^{3x+2}.$

Вариант -24

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 3x^3}{5x^4 + 2x^3};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \cdot \sin 3x;$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-2} \right)^{2x+5}$

Вариант -25

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2};$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+x} - 1};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{x+5}.$

Вариант -26

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 7x \cdot \operatorname{ctg} 2x;$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+4x}{3+4x} \right)^{2x}.$

Вариант -27

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 3x};$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x-2} \right)^x$

Вариант -28

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{3x^2 + 2x};$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{4x}.$

Вариант -29

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 12}{x^3 - 8};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 2x}{\sqrt{1+x} - 1};$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 12x}{\operatorname{tg} 4x};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x} \right)^{3x+2}.$

Вариант -30

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 3x^3}{5x^4 + 2x^3};$
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \cdot \sin 3x;$
3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4};$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-2} \right)^{2x+5}$

ОБОБЩАЮЩИЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ ОТРАБОТКИ СТУДЕНТАМИ

1. Роль математики в жизни общества.
2. Основные математические понятия.
3. Сущность аксиоматического метода.
4. Соотношение индукции и дедукции в математике.
5. Модели и моделирование.
6. Понятие множества.
7. Множество и подмножества.
8. Способы задания множеств.
9. Операции над множествами.
10. Свойства операций разности над множествами.
11. Операция объединения и её свойства.
12. Операции включения, равенства.
13. Метод тождественных преобразований множеств.
14. Понятие функции и способы её задания.
15. Предел функции в точке и на бесконечности.
16. Бесконечно малые функции и их свойства.
17. Замечательные пределы и их использование.
18. Сравнение бесконечно малых.
19. Производная функции в точке, её физический и геометрический смысл.
20. Производные сложной и обратной функций одной переменной.
21. Дифференциал функции и его геометрический смысл.
22. Условия возрастания и убывания функции. Понятие экстремума функции.
23. Необходимое условие экстремума. Достаточные признаки существования экстремумов.
24. Исследование функции на экстремумы.
25. Исследование функции на выпуклость и вогнутость, точки перегиба графика функции.

ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО КОНТРОЛЯ УСВОЕННЫХ ЗНАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

Задания проверочной работы

1. Найти предел функции:

I вариант: 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2}$;

II вариант: 1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x+2}{2x+3}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}$;

III вариант: 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$.

2. Найти производную:

I вариант: 1) $y = (x^2 + 5x + 7)^8$; 2) $y = \sin^3 \frac{x}{3}$;

II вариант: 1) $y = (2x^3 - 3x + 4)^5$; 2) $y = 2 \cos^2 3x$;

III вариант: 1) $y = (4x^2 + 5x - 10)^7$; 2) $y = 5 \operatorname{tg}^3 2x$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

Основная

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 14-е изд. - Москва : Айрис Пресс, 2017. - 608 с. : ил., табл. - (Высшее образование). - Прил.: . 599-603. - ISBN 978-5-8112-6472-8

2. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : [для студентов высших проф. учебных заведений] / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. - 7-е изд. - Москва : АСТ : Мир и Образование, 2016. - 816 с. : ил., табл. - Прил.: с. 809-815. - ISBN 978-5-17-099894-4. - ISBN 978-5-94666-805-7

Дополнительная

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для бакалавров / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко ; Моск. гос. ун-т тех. и упр. им. К.Г. Разумовского. - 5-е изд., перераб. и доп. - М. : Юрайт, 2014. - 396 с. : ил. - (Бакалавр. Базовый курс). - На учебнике гриф: Доп.МО. - ISBN 978-5-9916-3467-0

2. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов. 3-е изд.- М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.

3. Макаров, С. И. Математика для экономистов : [учеб. пособие] / С.И. Макаров. - 2-е изд., стер. - М. : КНОРУС, 2011. - 264 с. - На учебнике гриф: Рек.УМО. - Прил.: с. 226-262. - Библиогр.: с. 263-263. - ISBN 978-5-406-01739-5

4. Красс, М. С. Математика для экономистов : [учеб. пособие] / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - СПб. : Питер, 2009. - 464 с. : ил. - (Учебное пособие). - На учебнике гриф: Рек.УМО. - Библиогр.: с. 461-461. - ISBN 978-5-94723-672-9