

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению практических занятий
по дисциплине «Математический анализ»
для студентов

Специальности 10.05.03 Информационная безопасность
автоматизированных систем

Специализация «Анализ безопасности информационных систем»

Ставрополь
2026

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	8
1. Множества	9
2. Действительные функции действительного переменного. Числовые последовательности	11
3. Предел функции в точке и на бесконечности	16
4. Непрерывность функций. Производная функции	18
5. Правила дифференцирования. Производная сложной функции.....	24
6. Производные высших порядков. Дифференциал	27
7. Основные теоремы дифференциального исчисления	29
8. Экстремум функции. Промежутки монотонности. Направление выпуклости. Точка перегиба	33
9. Исследование функций и построение графиков.....	37
10. Неопределенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования.....	44
11. Метод интегрирование по частям	46
12. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций.....	47
13. Метод подстановки.....	49
14. Интегрирование рациональных функций.....	50
15. Определенный интеграл. Основная формула интегрального исчисления.....	52
16. Основные методы вычисления определенного интеграла	53
17. Несобственные интегралы	55
18. Функция нескольких переменных	56
19. Дифференцируемость функции нескольких переменных	58
20. Дифференциал функции нескольких переменных	62
21. Производные и дифференциалы высших порядков	66
22. Дифференциалы высших порядков	67
23. Экстремум функции нескольких переменных.....	68
24. Метод множителей Лагранжа.....	70
25. Метод наименьших квадратов.....	71
Список рекомендуемой литературы	74

ВВЕДЕНИЕ

Цель и задачи освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Математический анализ» является формирование у будущего специалиста по специальности 10.05.03 Информационная безопасность автоматизированных систем специализация «Анализ безопасности информационных систем» понимания основных методов, средств и технологий эффективного взаимодействия и реализации успешной командной работы.

Задачи дисциплины:

- Развитие математического мышления – умения строго формулировать и доказывать утверждения, анализировать сложные системы и процессы.
- Освоение методов математического анализа – дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов, функций многих переменных, дифференциальных уравнений.
- Применение математического аппарата для моделирования и анализа процессов в информационных системах

1. Множества

1. Известно, что множество M состоит из двузначных чисел, кратных 7. Образуйте подмножество множества M , состоящее из чисел, которые не делятся на 14.
2. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна следующие множества: A - множество книг по математике, B - множество книг в твердом переплете, C - множество книг, изданных в 2021 г., D - множество документальных фильмов, E - множество книг, изданных в 2021 году по математике.
3. Найдите объединение и пересечение множеств A и B , если $A = \{ \text{э, к, з, а, м, е, н} \}$, $B = \{ \text{з, а, ч, е, т} \}$.
4. Найдите пересечение множеств: $A = \{ x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ - двузначное число} \}$, $B = \{ x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ оканчивается цифрой 7} \}$.
5. Сформулируйте свойства элементов множества $P \cap Q \cap S$ и перечислите его элементы, если, $P = \{ x \mid x \in \mathbb{N}, x < 20 \}$, $Q = \{ x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ - четное число} \}$, $S = \{ x \mid x \text{ кратно 3} \}$.
6. Найдите пересечение а) смежных углов, б) вертикальных углов.
7. Даны множества $A = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, -6 \leq x \leq 2 \}$, $B = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 6 \}$; $C = \{ x \mid x \in \mathbb{R}, -5 \leq x \leq 5 \}$. Используя числовую прямую, укажите характеристическое свойство элементов множества $A \cup B \cup C$ и $A \cap B \cap C$.
8. Найдите дополнение к множеству B до множества A , если
а) $A = \{ 11, 12, 48, 54, 7 \}$, $B = \{ 7, 12 \}$,
б) $A = \{ \text{а, б, в, г, д, е} \}$, $B = \{ \text{а, е} \}$,
в) A - множество студентов СКФУ, B - множество отличников СКФУ
9. Найдите разность множеств P и Q , Q и P , если $P = \{ \text{к, о, м, п, ь, ю, т, е, р} \}$, $Q = \{ \text{м, ы, ш, ь} \}$
10. Даны два множества: $X = \{ 3; 4; 5 \}$, $Y = \{ \text{б; в} \}$. Запишите элементы множеств $X \times Y$ и $Y \times X$ в виде таблицы.
11. С помощью диаграмм Эйлера-Венна проверьте справедливость равенства $(A \setminus B) \cap A \cap (C \setminus B) = C \cap (A \setminus B)$, если $A \subset C$, $B \subset A$
12. С помощью диаграмм Эйлера-Венна проверьте справедливость равенства $(A \cap B) \setminus A \setminus (C \cup B) = C \setminus (A \cap B)$, если $A \cap C$, $B \cap C = \emptyset$ $B \subset A$
13. Расположите два угла так, чтобы их пересечение представляло собой отрезок.

ДОМАШНЯЯ РАБОТА по теме «Множества»

1. Пусть A - множество студентов в нашем университете, B - множество студентов старше 20 лет. Опишите множество $A \cap B$ и изобразите эти множества графически (изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна).
2. Используя числовую прямую, найдите пересечение и объединение множеств A и B , если $A = \{ x \mid x \in \mathbb{Z}, x > -1 \}$, $B = \{ x \mid x \in \mathbb{Z}, x < 4 \}$

3. A - множество букв в слове «единорог», B - множество букв в слове «легенда», C - множество букв в слове «год», а D - множество цифр в числе 12112212. Укажите элементы следующих множеств: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) $C \times D$; д) дополнение к подмножеству C до множества A .

4. С помощью диаграмм Эйлера-Венна проверьте справедливость равенства

$$(A \setminus B) \cup C = C \setminus (C \cap B), \text{ если } A \cap B, C \subset A, C \cap B$$

6. Найдите дополнение к множеству B до множества A , если $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 5\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 2\}$

7. Найдите разность множеств $P \setminus Q$ и $Q \setminus P$, если $P = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -5 \leq x \leq 2\}$, $Q = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 4\}$

8. Даны множества $B = \{f; k; g\}$ и $C = \{2; 3; 4\}$. Запишите множества $B \times C$ и $C \times B$.

2. Действительные функции действительного переменного. Числовые последовательности

Найти область существования функций

1. $y = 3x^3 + 5x^2 - 7x + 2$ 2. $y = \frac{1}{x}$ 3. $y = \frac{5}{1-x}$ 4. $y = \frac{1}{7x-2}$ 5. $y = \frac{x-1}{x^2-7x+12}$
6. $y = \frac{x^2-5x+4}{x^2+x+1}$ 7. $y = \sqrt{2-x}$ 8. $y = x+4$ 9. $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$ 10. $y = \frac{5}{\sqrt{4-x}}$ 11. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{8-x}}$
12. $y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x+3}$ 13. $y = \frac{\sin x}{\lg(x^2-4)}$ 14. $y = \lg \frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1}$

Построить графики функций:

15. $y = 3x - 5$ 16. $y = -2x + 3$ 17. $y = 4x - 1$ 18. $y = -3x + 1$ 19. $y = x^2$

Проверить четность функций

20. $f(x) = \frac{(1+3^x)^2}{3^x}$ 21. $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ 22. $f(x) = \frac{x^4+x^2-1}{2x^3+7}$ 23. $f(x) = \frac{x^3}{\cos x}$
24. $f(x) = \sin x + \cos x$ 25. $f(x) = 2x + 7$ 26. $f(x) = x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 27. $f(x) = x^3 \sin x$

Найти точки пересечения этих парабол с осями Ох и Оу

28. $y = -x^2 + 2x + 2$ 29. $y = -2x^2 + 3x - 4$ 30. $y = 5x^2 + 4x + 7$ 31. $y = 2x^2 + 4x$
32. $y = -3x^2 - 1$

33. По известному графику функции $y = x^2$ построить графики функций:

а) $y = 3x^2$ б) $y = \frac{1}{2}x^2$ в) $y = \frac{1}{3}x^2$ г) $y = -x^2$ д) $y = -3x^2$ е) $y = (x+1)^2$ ж) $y = (x-2)^2$
з) $y = x^2 + 2x + 2$

34. Исходя из графика функции $y = \sin x$, построить графики функций

а) $y = -\sin x$ б) $y = |\sin x|$ в) $y = \frac{1}{2}\sin x$ г) $y = 2\sin x$ д) $y = \sin(x+2)$ е) $y = \sin 2x$
ж) $y = \sin \frac{x}{2}$

Построить график функций

$$35. y = \begin{cases} 2, & \text{если } x \leq -1 \\ x + 3, & \text{если } -1 < x \leq 0 \\ -x + 3, & \text{если } 0 < x \leq 1 \\ 2, & \text{если } x > 1 \end{cases} \quad 36. \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 0 \\ x, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

37. Построить точки, заданные полярными координатами:

$$M_1\left(2; \frac{\pi}{6}\right), \quad M_2\left(1; \frac{3\pi}{4}\right), \quad M_3\left(3; \frac{5\pi}{4}\right), \quad M_4\left(2; \frac{5\pi}{6}\right), \quad M_5\left(\frac{3}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \quad M_6(4; 0), \quad M_7\left(3; \frac{7\pi}{4}\right)$$

38. Найти декартовы координаты точек, заданных в предыдущем номере,

$$\text{учитывая, что } \begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi, & \rho \geq 0 \\ y = \rho \cdot \sin \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

39. Точки заданы декартовыми координатами: $A(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $B(0, -3)$, $C(\sqrt{3}, 1)$.

Построить эти точки и найти их полярные координаты.

40. Записать уравнение линии $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 4(x^2 - 3y^2)$ в полярных координатах.

41. Записать уравнение линии $\rho^2 = 8\sin^2 2\varphi$ в декартовых координатах.

42. Построить кривую, заданную уравнением: $\rho = 2 + \cos^2 \varphi$.

43. Построить кардиоиду, заданную уравнением в полярных координатах $\rho = 4(1 - \sin \varphi)$.

44. Выяснить, какая линия определяется параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a \cdot t \cdot \cos t \\ y = a \cdot t \cdot \sin t, & a > 0, b > 0, t \geq 0 \\ z = bt \end{cases}$$

45. Выяснить, какая линия определяется параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a \cdot \sin^2 t \\ y = a \cdot \cos^2 t, & a > 0, b > 0, -\infty < t < \infty \\ z = 0 \end{cases}$$

Зная общий член последовательности, написать ее первые десять членов

$$46. x_n = n \quad 47. x_n = \frac{n}{n+2}$$

Написать формулу общего члена последовательности по первым членам:

48. $\frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{14}{15}, \frac{21}{22}, \frac{30}{31}, \dots$

49. Привести примеры:

- а) возрастающей ограниченной последовательности;
- б) возрастающей неограниченной последовательности;
- в) убывающей ограниченной последовательности;
- г) убывающей неограниченной последовательности.

50. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{2n+1}$ – монотонно возрастающая

51. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{n+1}$ – имеет предел, равный 1.

52. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{4n}{2n+1}$ – имеет предел, равный 2.

53. Доказать, что последовательность $q, q^2, q^3, \dots, q^n, \dots$ сходится к нулю, если абсолютная величина q меньше 1, т.е. если $|q| < 1$.

54. Доказать, что последовательность $3, 3^2, 3^3, \dots, 3^n, \dots$ не имеет предела.

55. Доказать, пользуясь определением предела последовательности, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+1}{\sqrt{n^2+1}-1}$ имеет предел $=1$.

Домашняя работа

Найти область существования функций 1. $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 2. $y = \arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)$ 3.

$y = \lg(x^2 - 3)$

4. По известному графику функции $y = x^2$ построить графики функций а) $y = 2(x+2)^2$ б) $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$ в) $y = 4x^2 + 8x + 12$

5. Зная график $y = \lg x$, построить графики функций:

а. $y = \lg x^2$ б. $y = \lg(-x)$ в. $y = \lg x^3$ г. $y = \lg(x-1)$ д. $y = \lg \frac{1}{x}$

6. Исходя из графика функции $y = \cos x$, построить графики функции

а) $y = -\cos x$ б) $y = |\cos x|$ в) $y = \frac{1}{2} \cos x$ г) $y = 2 \cos x$ д) $y = \cos(x + 2)$ е)

$y = \cos 2x$ ж) $y = \cos \frac{x}{2}$

Построить график функций

7. $\begin{cases} 2, \text{ если } x < 0 \\ -2, \text{ если } x > 0 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x, \text{ если } x \neq 2 \\ 5, \text{ если } x = 2 \end{cases}$

8. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

а) $\rho = 5$ б) $\varphi = \frac{\pi}{3}$ в) $\rho = a\varphi$ (спираль Архимеда) г) $\rho = 6 \cdot \cos \varphi$ д) $\rho = 10 \cdot \sin \varphi$ е)

$\rho \cos \varphi = 2$ ж) $\rho \sin \varphi = 1$ з) $\rho = \frac{4}{1 - \cos \varphi}$ (парабола) и) $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ (кардиоида) к)

$\rho = \frac{3}{\varphi}$ (гиперболическая спираль) л) $\rho = 2^\varphi$, $\rho = \left(\frac{1}{2}\right)^\varphi$ (логарифмические спирали)

м) $\rho = a \cdot \sin 3\varphi$ (трех-лепестковая роза) н) $\rho = a \cdot \sin^2 2\varphi$ (четырёхлепестковая роза)

о) $\rho = a^2 \cdot \cos 2\varphi$ (лемниската Бернулли)

9. Составить в полярных координатах уравнения следующих линий:

а) прямой, перпендикулярной к полярной оси и отсекающей на ней отрезок, равный 3 ($\rho \cos \varphi = 3$)

б) прямых, параллельных полярной оси и отстоящих от нее на расстоянии 5 ($\rho \cdot \sin \varphi = \pm 5$)

в) окружности радиусом $R=4$ с центром на полярной оси и проходящей через полюс ($\rho = 8 \cdot \cos \varphi$)

г) окружностей радиусом $R=3$, касающихся полярной оси в полюсе ($\rho = \pm 6 \cdot \sin \varphi$)

10. Построить следующие линии, заданные параметрическими уравнениями: а)

$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -2t + 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 3 \cos t + 3 \\ y = 3 \sin t - 2 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 5 + 4 \cos t \\ y = -1 + \sin t \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ (циклоида)

д) $\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t \\ y = a \cdot \sin^3 t \end{cases}$ (астроида) е) $\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \sin t \\ z = bt \end{cases}$ (винтовая линия) ж) $\begin{cases} x = \frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \\ y = \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \end{cases}$

Написать первые пять членов последовательности

11. $x_n = \frac{2n}{3n-2}$ 12. $x_n = n!$ 13. $x_n = \frac{1}{n}$ 14. $x_n = -2^n$ 15. $x_n = \frac{1}{2^n}$ 16. $x_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ 17.

$x_n = \frac{1}{(3n-1)(3n+1)}$ 18. $x_n = \frac{\sin \pi}{2n}$ 19. $x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{для } n \text{ нечетных} \\ \frac{n}{n+1} & \text{для } n \text{ четных} \end{cases}$ 20. $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$

Написать формулу общего члена последовательности по первым членам:

21. $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \dots$ 22. $\frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{5 \cdot 6}, \frac{1}{7 \cdot 8}, \frac{1}{9 \cdot 10}, \dots$ 23. $\frac{1}{6}, \frac{4}{11}, \frac{7}{16}, \frac{10}{21}, \frac{13}{26}, \dots$

24. $\frac{3}{5}, \frac{7}{8}, \frac{11}{11}, \frac{15}{14}, \frac{19}{17}, \dots$ 25. $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \dots$ 26. $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \dots$

27. $\frac{3}{5}, \frac{12}{17}, \frac{27}{37}, \frac{48}{65}, \frac{75}{101}, \dots$

28. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{4n-3}$ – монотонно

убывающая, а с общим членом $x_n = \frac{n-1}{n}$ – монотонно возрастающая.

29. Доказать, что последовательность $\left\{ \frac{3n}{n+1} \right\}$ – ограниченная и монотонно

возрастающая, а последовательность $\left\{ \frac{2^n+1}{2^n} \right\}$ – ограниченная и монотонно

убывающая.

20. Доказать, что переменная $x_n = \frac{1}{n}$ имеет предел, равный нулю.

3. Предел функции в точке и на бесконечности

Найти предел функции

1. $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 7x + 4)$ 2. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x+5}{x-5}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$ 4. $\lim_{x \rightarrow 5+0} \frac{3x+5}{x-5}$ 5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2}$ 6.

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+\sqrt[7]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$ 7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-5}{x^2-7x+12}$ 8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ 9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ 10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-4x+3}{2x^2-7x+5}$ 11.

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-3x+2}$ 12. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+6x+8}{x^3+8}$ 13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$ 14. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$ 15.

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$ 16. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-3x-2}{x^2+x}$ 17. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$ 18. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}$ 19.

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$ 20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$ 21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$ 22. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$ 23.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x-4}{x^2-11x+18}$ 24. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$ 25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+2}{x^2-x+4}$ 26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-2}{x^2-5x+7}$ 27.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3+2}{5x^2-2x+7}$ 28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2+3x-6}{3x^2-8x+12}$ 29. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n+2}$ 30. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$ 31.

$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1})$ 32. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{n^2-n+1}{8n^2+n+3}}$ 33. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{\frac{5n}{4n+3}} \right)^{\frac{1}{2}}$ 34. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{1-n^3} + n)$ 35.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 36. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$ 37. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$ 38. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1})$

39. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{(n+a)(n+b)} - n)$ 40. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+5n}}{3n+2}$ 41. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+5-6+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{4n^2-1}}$ 42.

$\lim_{x \rightarrow 9} \lg(x+1)$ 43. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+x+5}{x^2-2}$ 44. $\lim_{x \rightarrow 4} \left[\ln \frac{x-4}{\sqrt{x+4}-\sqrt{8}} \right]$ 45. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$ 46.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{3^{2x}-1}$ 47. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+tgx)^{\frac{3}{x}}$

Домашняя работа

Найти предел функции

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 - 7x^2 + 4x + 2) \quad 2. \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{1}{2}x^3 - x + 2 \right) \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x + 4} \quad 4. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{2x^3 - x^2 + x + 2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 9x + 9} \quad 6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} \quad 7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 - 6x^2}{4x^5 + 2x^3 + x^2} \quad 8.$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 - 3x^2 - 45x - 81} \quad 9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[4]{x}}{1 - \sqrt[6]{x}} \quad 10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[5]{x}} \quad 11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3x + 2} \quad 12.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) \quad 13. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) \quad 14. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12} \quad 15.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x + 2}{3x^2 - 2x + 5} \quad 16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^2 + 5x - 9}{6x^2 - 2x + 19} \quad 17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + 2x^2 - 7x + 10}{3x^2 - 6x + 1} \quad 18. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 5x - 8}{3x^2 - 12x + 9}$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5n} \quad 20. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4} \quad 21. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{9n} \quad 22. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^7} \quad 23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} \quad 24. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n+3} \quad 25.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{2}} \quad 26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(n+1)^{\frac{2}{3}} - (n-1)^{\frac{2}{3}} \right] \quad 27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n+7}{2n-5} \quad 28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{9n+1} \quad 29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 + 4n - 6}{2n^3 + 9n}$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4 + 6n - 11}{5n^3 - 2n^2}$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\lg x} - 1}{x} \quad 32. \lim_{x \rightarrow 1} (1 + 5 \ln x)^{\frac{1}{\ln x}} \quad 33. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad 34. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{5}{x}} \quad 35. \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$$

4. Непрерывность функций. Производная функции

План занятий

1. Разобрать решение примеров
2. Обсудить проблемы решения индивидуальных задач для самостоятельной работы по данной теме.

Компетенции, формируемые на занятии: ПК1

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Основные правила дифференцирования.
 2. Дифференцирование сложной функции.
 3. Логарифмическое дифференцирование. Производные высших порядков.
- Функции, заданные неявно и параметрически и их дифференцирование

Методические рекомендации

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Применяя правила дифференцирования и таблицу производных, найдите

$$y = \ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}$$

производные следующих функций:

Решение. I способ. Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции: сначала находим производную логарифмической функции, затем корня и наконец производную дроби:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}} \right)' = \frac{1}{\sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}} \right)' = \sqrt{\frac{1+e^{3x}}{e^{3x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}}} \cdot \left(\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}} \right)' = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1+e^{3x}}{e^{3x}} \cdot \frac{(e^{3x})'(1+e^{3x}) - (1+e^{3x})' \cdot e^{3x}}{(1+e^{3x})^2} = \frac{3e^{3x}(1+e^{3x}) - 3e^{3x} \cdot e^{3x}}{2e^{3x}(1+e^{3x})} = \frac{3e^{3x}}{2e^{3x}(1+e^{3x})} = \\ &= \frac{3}{2(1+e^{3x})}. \end{aligned}$$

II способ. Чтобы упростить дифференцирование, сначала преобразуем функцию на основании свойств логарифмов:

$$\begin{aligned} y &= \ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{1+e^{3x}}} = \frac{1}{2} (\ln e^{3x} - \ln(1+e^{3x})) = \frac{1}{2} (3x - \ln(1+e^{3x})) \\ y' &= \frac{1}{2} \left(3 - \frac{(1+e^{3x})'}{1+e^{3x}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 + 3e^{3x} - 3e^{3x}}{1+e^{3x}} = \frac{3}{2(1+e^{3x})} \end{aligned}$$

Тогда

Замечание. Вообще, если под знаком подлежащей дифференцированию логарифмической функции содержится выражение, поддающееся логарифмированию (произведение, частное, степень, корень), то полезно сначала выполнить логарифмирование.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение производной функции в точке.
 2. Назовите основные правила дифференцирования функций.
 3. Запишите таблицу производных основных элементарных функций.
 4. Дайте определение сложной функции. Приведите примеры.
 5. Сформулируйте теорему для нахождения производной сложной функции.
 6. Составьте таблицу нахождения производных для функций вида $f(u)$, где f - одна из элементарных функций, $u = u(x)$.
1. Доказать, что функция $f(x) = 3x^3 - 4x + 5$ непрерывна при любом x , т.е. непрерывна на бесконечном интервале $(-\infty; +\infty)$.
 2. Доказать, что любой многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ непрерывен при всех значениях x .
 3. Доказать, что любая дробно-рациональная функция $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены непрерывна для всех значений x , за исключением тех из них, при которых знаменатель обращается в нуль.
 4. Найти приращение функции Δy функции $f(x) = x^2$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 3$ к новому значению $x_2 = 4$.
 5. Найти приращение функции Δy функции $f(x) = x^3$ при переходе аргумента от значения x к новому значению $x + \Delta x$.
 6. Найти приращение функции Δy функции $f(x) = \sin x$ при переходе аргумента от значения x к новому значению $x + \Delta x$.
 7. Найти приращение функции $y = a^x$.
 8. Доказать, что при $x=0$ функция $\sin x$ непрерывна.
 9. Доказать, что функция $\sin x$ непрерывна при любом значении x .
 10. Пользуясь вторым определением непрерывности функции, доказать, что функция $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$ непрерывна в произвольной точке x .
 10. Проверить на непрерывность при $x=1$ функцию $f(x) = 2 + \frac{1}{2^{1-x}}$.

11. Какого рода разрыв имеет функция

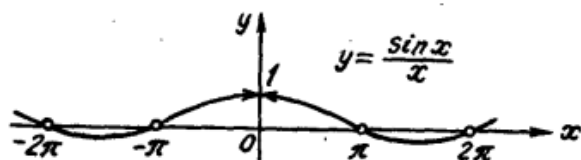
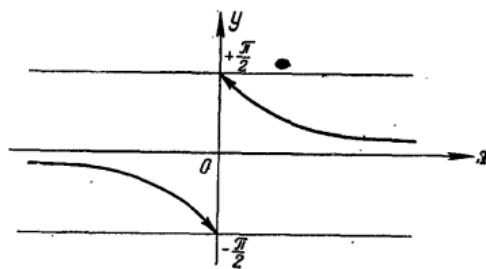
$$y = \frac{1}{x} \text{ в точке } x=0?$$

12. Какого рода разрыв имеет функция

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \text{ в точке } x=0?$$

13. Какого рода разрыв имеет функция

$$y = \frac{\sin}{x} \text{ в точке } x=0?$$



14. Проверить непрерывность функции $y = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

15. Доказать, что функция $y = x^3 \cos^2 x + \frac{x^4}{x^2 + 1}$ непрерывна при всех значениях x .

Найти производные функций

16. $y = x^4$ 17. $y = x^5$ 18. $y = \sqrt{x}$ 19. $y = \sqrt[4]{x^3}$ 20. $y = 5x^3$ 21. $y = -4x^2$ 22. $y = 7\sqrt{x}$ 23. $y = \frac{8}{x^2}$

24. $y = 4\sqrt[3]{x^2}$ 25. $y = \frac{6}{\sqrt{x}}$ 26. $y = \frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$ 27. $y = -\frac{5}{4x^3}$ 28. $y = \frac{7\sqrt{x}}{8}$ 29. $y = 5x^3 - 3x^2 + x - 1$ 30.

$y = (5x^2 + 7x - 1)^3$ 31. $y = (5x^3 + 4x^2 + 9x + 2)^4$ в точке $x_0 = 1$ 32. $y = \sqrt{(x^2 + 2)^5}$ в точке

$x_0 = 1$ 33. $y = \sqrt{3x}$ 34. $y = \frac{2}{(3x^2 - 5)^3}$ в точке $x_0 = 2$ 35. $y = \frac{3}{\sqrt[5]{(x^2 + x + 1)^2}}$ в точке $x_0 = 3$ 36.

$y = 5x^3 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^4} + \sqrt[5]{x^3}$ в точке $x_0 = 2$ 37. $y = x^2(5x - 4)^6$ 38.

$y = \frac{4}{(3x^2 + 5x - 2)^5} + \sqrt{(x + 3x^2)^3}$ в точке $x_0 = 2$ 39. $y = (9a^2 - 6abx + 5b^2x^2)\sqrt[3]{(a + bx)^2}$

40. $y = (2a + 3bx)(2a - 3bx)^2\sqrt{4a + 6bx}$ 41. $y = \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$ 42. $y = \frac{5 + 3x + x^2}{5 - 3x + x^2}$ 43. $y = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$

44. $y = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ 45. $y = (4x - 7)(3x + 7)\sqrt[3]{3x + 7}$ 46. $y = \frac{a - x}{a + x}$ 47. $y = \frac{x}{1 + x^2}$ 48. $y = \frac{x^m}{(1 - x)^n}$

Домашняя работа

1. При каких значениях x непрерывна дробно-рациональная функция

$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 5}{x^2 - 6x + 8}$$

2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{x}$

3. Найти приращение функции Δy функции $f(x) = x^3$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 2$ к новому значению $x_2 = 3$.

4. Найти приращение функции Δy функции $f(x) = \cos x$ при переходе аргумента от значения x к новому значению $x + \Delta x$.

5. Найти приращение функции Δy функции $f(x) = \sin x$ при переходе аргумента от значения $x_1 = \frac{\pi}{6}$ к новому значению $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

6. Найти приращение функции ΔS функции $S = \frac{gt^2}{2}$ при переходе аргумента от значения t к новому значению $t + \Delta t$.

7. Доказать, что функция $\cos x$ непрерывна при любом значении x .

8. Доказать, что функции $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ непрерывны в любой точке своей области определения.

9. Пользуясь вторым определением непрерывности функции, доказать, что

функция $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ непрерывна в произвольной точке x .

10. Доказать, что функция $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ непрерывна при $x=3$.

11. Доказать, что функция $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ непрерывна в произвольной точке x .

12. Проверить на непрерывность функцию $f(x) = \frac{2}{3 + 5^{\frac{1}{x-2}}}$ при $x=2$.

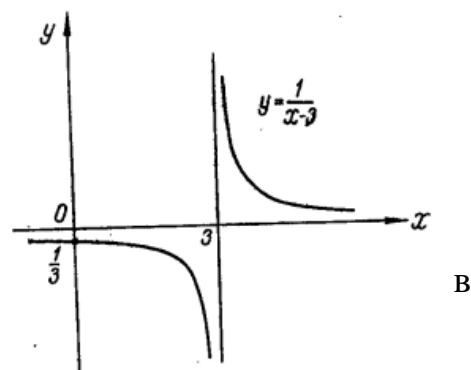
13. Проверить на непрерывность функцию $f(x) = \frac{1}{3 + 5^{\frac{1}{x}}}$ при $x=0$.

14. Проверить на непрерывность функцию $f(x) = \frac{5}{2 + 7^{\frac{1}{5-x}}}$ при $x=5$.

15. Какого рода разрыв имеет функция $y = 3^{\frac{1}{x}}$ в точке $x=0$? Начертить график.

16. Какого рода разрыв имеет функция $y = \frac{1}{x}$ в точке $x=0$?

16. Какого рода разрыв имеет функция $y = \frac{1}{x-3}$ в точке $x=3$?



16. Какого рода разрыв имеет функция $y = \frac{1}{x^2}$ в точке $x=0$?

17. Определить точки разрыва функции $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ и род этих точек разрыва.

18. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ и начертить график функции. Чему должно быть равно $f(-3)$, чтобы дополненная этим значением функция была непрерывна при $x=-3$?

19. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ и начертить график функции. Как следует доопределить эту функцию, чтобы она была непрерывной?

20. Пользуясь теоремами о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций, решить вопрос о непрерывности функций

а) $f(x) = \frac{x^2}{9 - x^2}$ б) $g(x) = \frac{\sin x}{1 - x^3}$ в) $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{\sin x}$

1. $y = 7x^6$ 2. $y = 8\sqrt{x}$ 3. $y = \frac{4}{x^5}$ 4. $y = \frac{a}{x^n}$ 5. $y = \frac{5}{4\sqrt{x^3}}$ 6. $y = \frac{\sqrt[6]{x^5}}{8}$ 7. $y = \frac{4\sqrt{x}}{7}$ 8.

$y = a\sqrt{x} + x\sqrt{a}$ 9. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^5 - 2x^6 + \frac{4}{7}x^7$ 10. $y = 9x^7 - \frac{3}{x^5} - \frac{3}{x^{11}} - \frac{a}{x^m}$ 11.

$y = 3x^2\sqrt[3]{x} - 4x^4\sqrt{x^3} + 9\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{4}{7x^2\sqrt[3]{x}}$ 12. $y = \frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}} + 30\sqrt[15]{x} + \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$ 13.

$y = (5x^2 + 7)^3$ 14. $y = (1 + 5x - 8x^2)^5$ 15. $y = \sqrt[3]{5x^4 + 4x + 7} + \frac{6}{(3x - 1)^5}$ в точке $x_0 = 2$ 16.

$y = \left(1 + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}\right)^4$ в точке $x_0 = 4$ 17. $y = \sqrt{3x^2 + 5x + 1}$ в точке $x_0 = 0$ 18. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5}}$

19. $y = \frac{10}{(4x^3 - 5x^2 + 7x - 1)^4}$ 20. $y = \sqrt[3]{4 + 2\sqrt{3x} + 3x}$ 21. $y = \sqrt[4]{(3 + 4\sqrt[3]{2x})^3}$ 22.

$$y = (5x^2 - 7x + 2)(15x^2 + 5)^3 \quad \mathbf{23.} \quad y = \left(40 - 12x + \frac{27}{5}x^2\right)\sqrt{5 + 3x} \quad \mathbf{24.}$$

$$y = \left(\frac{2}{27x} - \frac{1}{9x^2}\right)\sqrt{3x + x^2} \quad \mathbf{25.} \quad y = (8x^3 - 21)\sqrt[3]{(7 + 4x^3)^2} \quad \mathbf{26.}$$

$$y = \left(\frac{10}{3} - 2x + x^2\right)\sqrt{(5 + 2x)^3} \quad \mathbf{27.} \quad y = (3x^4 + 4)\sqrt[4]{9x^4 - 3} \quad \mathbf{28.} \quad y = \left(\frac{2}{3x^3} + \frac{28}{27x}\right)\sqrt{7x^2 - 9}$$

5. Правила дифференцирования. Производная сложной функции

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. С помощью логарифмического дифференцирования найдите производные следующих функций:

а) $y = \sqrt[5]{\frac{x(x^2+1)}{(1-x)^2}};$

б) $y = x^{e^x}.$

Решение. а) Производную функции найдем по следующему плану:

1) Прологарифмируем данную функцию:

$$\ln y = \ln \sqrt[5]{\frac{x(x^2+1)}{(1-x)^2}} = \frac{1}{5} (\ln x + \ln(x^2+1) - 2 \ln(1-x)).$$

2) Найдем производную от $\ln y$:

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{5} (\ln x + \ln(x^2+1) - 2 \ln(1-x)) \right)' = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{1-x} \right) = \frac{-x^3 + 3x^2 + x + 1}{5x(x^2+1)(1-x)}.$$

Определим производную данной функции

$$y' = y(\ln y)' = \sqrt[5]{\frac{x(x^2+1)}{(1-x)^2}} \cdot \frac{-x^3 + 3x^2 + x + 1}{5x(x^2+1)(1-x)} = \frac{-x^3 + 3x^2 + x + 1}{5\sqrt[5]{(1-x)^7 x^4 (x^2+1)^4}}.$$

б) Производную функции с помощью логарифмического дифференцирования находим по указанному плану:

1) $\ln y = \ln x^{e^x} = e^x \ln x.$

2) $(\ln y)' = (e^x \ln x)' = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} = \frac{e^x (x \ln x + 1)}{x}.$

3) $y' = y(\ln y)' = x^{e^x} \frac{e^x (x \ln x + 1)}{x} = x^{e^x-1} e^x.$

2. Для функции $y = \operatorname{tg} x$ найдите производные второго и третьего порядков.

Решение. По определению производных высших порядков имеем:

$y'' = (y')'$ и $y''' = (y'')'$, т.е. производная второго порядка есть производная от производной первого порядка, а производная 3-го порядка есть производная от производной 2-го порядка. Поэтому последовательно находим:

$$y' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad y'' = (y')' = \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)' = 2 \cos^{-1} x \sin x = 2 \operatorname{tg} x, \quad y''' = (y'')' = (2 \operatorname{tg} x)' = \frac{2}{\cos^2 x}.$$

3. Для данных неявных функций найдите производные первого порядка $y'(x)$:

а) $5x^2 + 3xy - 2y^2 + 2 = 0;$ б) $x^y = y^x.$

Решение. а) Дифференцируем по x обе части равенства, считая, что y есть функция от x , получим:

$$10x + 3y + 3xy' - 4yy' = 0, \text{ отсюда } y'(4y - 3x) = 10x + 3y, \text{ или } y' = \frac{10x + 3y}{4y - 3x}.$$

б) Логарифмируем обе части данного уравнения, затем дифференцируем по x , рассматривая y как функцию от x :

$$y \ln x = x \ln y, \quad y' \left(\ln x - \frac{x}{y} \right) = \ln y - \frac{y}{x}, \quad \text{отсюда } y' = \frac{(x \ln y - y)y}{x(y \ln x - x)}.$$

2. Для функции, заданной параметрически, найдите производную: $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

Решение. Учитывая, что $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, найдем $x'_t = -\sin t$ и $y'_t = \cos t$.

Тогда $y'_x = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctgt}.$

Найти производные функций

1. $y = \sin kx$ 2. $y = \cos px$ 3. $y = \operatorname{tg} 3x$ 4. $y = \operatorname{ctg} 7x$ 5. $y = \sin 2x^3$ 6. $y = \sin \sqrt{x}$

7. $y = \operatorname{tg} \frac{1+x}{x}$ 8. $y = \cos \frac{1}{1+x}$ 9. $y = 3\sin^2 x$ 10. $y = \cos^6 x$ 11. $y = \sqrt{\sin x}$

12. $y = \sqrt{\sin^2 x + 3\cos^3 4x}$ 13. $y = \frac{1}{\cos^3 x}$ 14. $y = x\sin^3 x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6\cos x$ 15.

$y = \arcsin 2x$ 16. $y = \arccos x^m$ 17. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x} \quad (x > 0)$ 18. $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (x > 0)$

19. $y = \arcsin^2 x$ 20. $y = \arcsin^3 3x$ 21. $y = \operatorname{arctg}^4 \sqrt{x}$ 22. $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$

23. $y = \operatorname{tg}(\arcsin x)$ 24. $y = 2^{3x}$ 25. $y = 7^{\frac{1}{4x}}$ 26. $y = 2^{x^2}$ 27. $y = 4^{\sin^2 x}$ 28. $y = e^{x^4}$

29. $y = e^{\sqrt{x^2+x+2}}$ 30. $y = e^{\sqrt{\sin x}}$ 31. $y = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$ 32. $y = e^{\operatorname{tg} x}$ 33. $y = e^{\arcsin^2 x}$ 34.

$y = \ln \frac{x}{1-x^4}$ 35. $y = \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 36. $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ 37. $y = \sin^2 3x \cdot \operatorname{arctg} 3x^5$

38. $y = \cos^5 \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x^4$ 39. $y = \operatorname{tg}^6 2x \cdot \cos 7x^2$ 40. $y = \ln(x+9) \cdot \arcsin^3 \sqrt{x}$

41. $y = \lg(x+2) \cdot \arcsin^2 3x$

Домашняя работа

Найти производные функций

1. $y = \sin 3x$ 2. $y = \sin 5x$ 3. $y = \cos 15x$ 4. $y = \cos 4x$ 5. $y = \operatorname{tg} 5x$ 6. $y = \operatorname{ctg} 12x$

7. $y = \sin^3 x$ 8. $y = \operatorname{tg}^3 x$ 9. $y = \operatorname{ctg}^4 x$ 10. $y = 5\cos^5 x$ 11. $y = 7\operatorname{tg}^6 x$ 12. $y = 8\sin^2 x$

$$13. y = tgx + \frac{1}{3}tg^3x \quad 14. y = \left(\frac{2}{\cos^4x} + \frac{3}{\cos^2x} \right) \sin x \quad 15. y = tgx - ctgx - 2x$$

$$16. y = \left(\cos^2x + \frac{2}{3} \right) \sin^3x \quad 17. y = \arcsin 5x \quad 18. y = \arcsin \sqrt{x} \quad (x > 0) \quad 19. y = \arcsin mx$$

$$20. y = \arccos 6x \quad 21. y = \arccos(1 - x^2) \quad 22. y = \operatorname{arctg} 5x \quad 23. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \quad 24. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$25. y = \arcsin^3 x^2 \quad 26. y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x^2} \quad 27. y = \arccos^4 5x \quad 28. y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^3}$$

$$29. y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} \quad 30. y = ctg^3 4x \cdot \arcsin \sqrt{x} \quad 31. y = ctg \frac{1}{x} \cdot \arccos x^4$$

6. Производные высших порядков. Дифференциал

Теоретические задания для развития и контроля владения компетенциями

- Запишите формулу логарифмического дифференцирования.
- Когда применяется формула логарифмического дифференцирования?
- Расскажите о дифференцировании показательной-степенной функции.
- Дайте определение производной второго порядка, производной n-го порядка.
- Дайте определение неявного задания функции. Приведите примеры.
- Как от неявного задания перейти к явному заданию функции? Всегда ли это можно сделать. Приведите примеры.
- Как проводят дифференцирование неявной функции?
- Расскажите о нахождении производных высших порядков от неявно заданных функций.
- Дайте определение параметрически заданной функции. Приведите примеры.
- Расскажите, как от параметрического задания функции перейти к явному заданию функции.
- Запишите формулы для нахождения производных первого и второго порядков от параметрически заданной функции.

Найти дифференциалы следующих функций

$$1. y = \cos^3 2x \quad 2. y = x\sqrt{7-2x} \quad 3. y = \frac{1}{12} \cdot \ln \frac{x-6}{x+6} \quad 4. y = -\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{3} \quad 5. y = \frac{e^{5x}}{x^2}$$
$$6. y = \ln(1 + e^{10x}) + \operatorname{arccotg} e^{5x}, \quad 7. y = \frac{x-1}{x+1} \quad 8. y = \sin^2 \sqrt{x} \quad 9. y = x^3 \cdot \ln(1+x).$$

Найти производные третьего порядка

$$1. y = 5x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 6x + 5 \quad 2. y = \operatorname{tg} x \quad 3. y = \operatorname{ctg} x \quad 4. y = \arcsin \frac{x}{2} \quad 5. y = \sin^2 x \quad 6. y = \cos^2 x \quad 7. y = \sqrt{1+x^2}$$
$$8. y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \quad 9. y = \ln(2x-3) \quad 10. y = e^x \cdot \cos x \quad 11. y = x \cdot \ln x \quad 12. y = e^{x/2} \quad 13. y = x \cdot \cos x \quad 14. y = 2^{3x}$$

Найти указанные производные

$$1. y = 5x^4 \quad y'' - ? \quad 2. y = 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 8 \quad y^{(4)} - ? \quad 3. y = \sin^2 x \quad y^{(5)} - ? \quad 4. y = \sqrt{x+5} \quad y^{(4)} - ?$$
$$5. y = \ln \sin x \quad y^{(4)} - ? \quad 6. y = a^x \quad y^{(n)} - ? \quad 7. y = e^x \quad y^{(n)} - ? \quad 8. y = \ln x \quad y^{(n)} - ?$$
$$9. y = \sin x \quad y^{(n)} - ? \quad 10. y = e^{4x} \sin 3x \quad y^{(5)} - ?$$

Домашняя работа

Найти указанные производные

$$1. y = \arcsin x \quad y'' - ? \quad 2. y = \operatorname{arctg} x \quad y'' - ? \quad 3. y = \ln x \quad y^{(4)} - ? \quad 4. y = \frac{1+x}{1-x} \quad y^{(3)} - ? \quad 5. y = \sqrt{x} \quad y^{(3)} - ?$$
$$6. y = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad y^{(3)} - ? \quad 7. y = \sqrt[3]{x} \quad y^{(4)} - ? \quad 8. y = \cos x \quad y^{(n)} - ? \quad 9.$$

$$y = \frac{1}{x} \quad y^{(n)} = ? \quad \mathbf{10.} \quad y = x^4 e^{2x} \quad y^{(6)} = ? \quad \mathbf{11.} \quad y = x^2 e^x \quad y^{(n)} = ? \quad \mathbf{12.} \quad y = x^3 \ln \frac{x}{a} \quad y^{(4)} = ?$$

$$\mathbf{13.} \quad y = e^x \cos x \quad y^{(5)} = ?$$

7. Основные теоремы дифференциального исчисления

План занятий

1. Разобрать решение примеров
2. Обсудить проблемы решения индивидуальных задач для самостоятельной работы по данной теме.

Компетенции, формируемые на занятии: ПК1

1. Приложения производной: уравнение касательной и нормали к плоской кривой,
2. Правило Лопиталья, формула Тейлора

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Составьте уравнения касательной и нормали к параболе $y = x^2$ в точке $A(2;4)$.

Решение. Так как надо составить уравнения касательной и нормали в точке $A(2;4)$, то $x_0 = 2, y_0 = 4$.

Тогда уравнение касательной в точке $A(2,4)$ будет иметь вид:
 $y = 4 + 4(x - 2)$, или $y = 4x - 4$.

А уравнение нормали: $y = \frac{1}{4}(x - 2)$ или $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$.

2. С помощью правила Лопиталья найдите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \operatorname{tg} 5x$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x) x^{\frac{1}{2}}$.

Решение. а) В данном пределе имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. По правилу Лопиталья заменим отношение этих величин отношением их производных:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x^4 + 2x^2 - 3)'}{(x^2 - 3x + 2)'} = \frac{4x^3 + 4x}{2x - 3} = \frac{4 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{2 \cdot 1 - 3} = -\frac{8}{1} = -8.$$

Замечание. Аналогично можно раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

б) В данном пределе имеем неопределенность $0 \cdot \infty$. Сведем эту неопределенность к виду $\frac{0}{0}$, а затем применим правило Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \operatorname{tg} 5x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{1}{\operatorname{tg} 5x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)'}{\left(\frac{1}{\operatorname{tg} 5x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \operatorname{tg}^2 5x \cdot \cos^2 5x}{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^2 5x = \frac{1}{5} \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin^2 \frac{5\pi}{2} = \frac{1}{5}.$$

в) В данном пределе имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Преобразуем функцию к виду дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, затем применим правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctgx} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{tg} x)'}{(x \operatorname{tg} x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1 - 1}{0 + 1} = 0. \end{aligned}$$

г) В данном пределе имеем неопределенность вида 1^∞ . Заметим сразу, что таким образом можно раскрыть неопределенности вида ∞^0 и 0^0 . Эти случаи нахождения

предела функции сводятся к случаю $0 \cdot \infty$ (а затем к случаю $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$) следующим путем: функция логарифмируется и сначала находится предел ее логарифма, а затем по найденному пределу логарифма находится и предел самой функции.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x) x^{\frac{1}{2}} = a$$

Таким образом, пусть

Логарифмируем функцию и находим предел ее логарифма:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x) x^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (\cos x) x^{\frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}.$$

Здесь нахождение предела свелось к случаю $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x \cos x}.$$

получим: Неопределенность $\frac{0}{0}$ осталась. Применим правило Лопиталя 2-й раз:

$$\ln a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\sin x)'}{(2x \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{2x \sin x + 2 \cos x} = -\frac{1}{2}.$$

Теперь по найденному пределу логарифма функции находим искомый предел самой функции: $a = e^{\ln a} = e^{-\frac{1}{2}}.$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x) x^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом:

3. Разложите многочлен $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ по степеням $x + 2$ по формуле Тейлора.

Решение. Найдем значение многочлена и его производных при $x = 2$:

$$P(-2) = (-2)^3 - 6(-2)^2 + 11(-2) - 6 = -60,$$

$$P'(x) = 3x^2 - 12x + 11, P'(-2) = 12 + 24 + 11 = 47,$$

$$P''(x) = 6x - 12, P''(-2) = -12 - 12 = -24,$$

$P'''(x) = 6, P'''(-2) = 6; P^{IV}(x) = 0$ и все последующие производные равны 0. Тогда для разложения многочлена по степеням $(x+2)$ по формуле Тейлора имеем:

$$P(x) = P(-2) + \frac{P'(-2)}{1!}(x+2) + \frac{P''(-2)}{2!}(x+2)^2 + \frac{P'''(-2)}{3!}(x+2)^3, \quad \text{т.е.}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= -60 + 47(x+2) + \frac{-24}{2!}(x+2)^2 + \frac{6}{3!}(x+2)^3 = \\ &= -60 + 47(x+2) - 12(x+2)^2 + (x+2)^3. \end{aligned}$$

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Сформулируйте геометрический смысл производной функции.
2. Выведите уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
3. Какая прямая называется нормалью к кривой? Какой вид имеет уравнение нормали?
4. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов функции.
5. Сформулируйте правило Лопиталя для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов функции.
6. Сколько раз подряд можно применять правило Лопиталя и когда это правило неприменимо?
7. Как можно раскрыть неопределенность вида $0 \cdot \infty$ при вычислении предела функции?
8. Что нужно сделать при вычислении предела функции, если он содержит неопределенность вида $\infty - \infty$?
9. Какой прием применяют для применения правил Лопиталя, если предел функции содержит неопределенность вида 0^0 , или ∞^0 , или 1^∞ ?
10. Расскажите о формуле Тейлора и формуле Маклорена. Для чего эти формулы могут использоваться?
11. Разложите по формуле Тейлора (Маклорена) функции $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Найти пределы

$$\begin{aligned}
& 1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \sqrt[n]{a^n - x^n}}{x^n} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}} \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \\
& 5. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \quad 6. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x} \quad 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \quad 7. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad 8. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x-1} \right) \quad 9. \\
& \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{2x^2} - \frac{1}{x(e^{2x}-1)} \right) \quad 10. \lim_{x \rightarrow +0} (x \cdot \ln x) \quad 11. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{-x} \quad 12. \\
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2 + ax + x^2} - \sqrt{a^2 - ax + x^2}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} \quad 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} \quad 14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \quad 15. \\
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{\sin^3 x} \quad 16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} \quad 17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})^2}{x^2 \cdot \cos x} \quad 18. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \quad 19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1}}{\operatorname{ctg} x} \quad 20. \\
& \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \operatorname{tg} 2x} \quad 21. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x} \quad 22. \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{\ln \left(x - \frac{1}{a} \right)}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{a}}
\end{aligned}$$

Дополнительно

$$\begin{aligned}
& \text{а)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 12x + 16}; \quad \text{б)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}; \quad \text{в)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}; \quad \text{г)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}; \quad \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0+0} x^2 \ln x; \\
& \text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}; \quad \text{ж)} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\ln \sin 5x}; \quad \text{з)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}; \quad \text{и)} \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} \ln x; \\
& \text{к)} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{x^2-1} - \frac{7}{x^3-1} \right); \quad \text{л)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right); \quad \text{м)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.
\end{aligned}$$

Домашняя работа

Найти пределы

$$\begin{aligned}
& 1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 8x^2 + 17x - 10}{x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 11x - 5} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 3x^2 - 4} \\
& 4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 3x^2 - 4} \quad 5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 4x^2 + x + 6} \quad 6. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{2a}}{\sqrt{a+2x} - \sqrt{3a}} \quad 7. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x^3 - a^3}}{\sqrt{x-a}} \quad 8. \\
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}
\end{aligned}$$

8. Экстремум функции. Промежутки монотонности. Направление выпуклости. Точка перегиба

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 3x - x^3$ на отрезке $[0; 3]$

Решение. Функция достигает наибольшего и наименьшего значения либо в критических точках, принадлежащих заданному отрезку, либо на концах этого отрезка. Найдем критические точки (т.е. точки, в которых производная равна нулю или не существует):

$$y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$$

$$y' = 0 \text{ при } x = 1 \in [0; 3] \text{ и } x = -1 \notin [0; 3]$$

Найдем значение функции в этих точках и на концах отрезка

$$y(1) = 2; \quad y(0) = 0; \quad y(3) = -18$$

Выберем из предложенных значений наибольшее и наименьшее.

Итак, наибольшее значение функции на заданном отрезке равно 2 и достигается при $x = 1$, $y_{\text{наиб}}(1) = 2$, а наименьшее значение равно -18 при $x = 3$, $y_{\text{наим}}(3) = -18$.

Найдите точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости функции $y = x + 2 - \sqrt[3]{x^5}$.

Решение. 1. Ищем точки x , в которых $y' = 0$ или не существует, и которые лежат в области

$$y' = 1 - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}; \quad y'' = -\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{10}{9\sqrt[3]{x}}.$$

определения функции:

$$y'' \neq 0 \text{ ни при каких } x; \quad y'' \text{ не существует при } x = 0 \in D(y).$$

2. Исследуем точку $x = 0$ на перегиб, определяя знак y'' слева и справа от нее. Запишем это исследование в таблицу:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y''	+	0	-
y	∪	2 перегиб	∩

Таким образом, $x = 0$ - абсцисса точки перегиба кривой: $y(0) = 2$. Эта кривая в интервале $(-\infty; 0)$ вогнута, а в интервале $(0; +\infty)$ - выпукла.

6. Найдите асимптоты следующих функций:

$$\text{а) } y = \frac{x}{2x-1} + x; \quad \text{б) } y = xe^{\frac{1}{x}}.$$

$$D(y) = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

Решение. а) Область определения данной функции:

Отсюда

следует, что $x = \frac{1}{2}$ - вертикальная асимптота, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-0} \left(\frac{x}{2x-1} + x \right) = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}+0} \left(\frac{x}{2x-1} + x \right) = +\infty.$$

Наклонные (невертикальные) асимптоты определяем из условий:

$$y = ax + b, \quad \text{где} \quad a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - ax);$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{(2x-1)x} = 1; \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2}{(2x-1)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, $y = x + \frac{1}{2}$ - наклонная асимптота.

б) $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, следовательно, $x = 0$ - вертикальная асимптота, так как

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\left(\frac{1}{e^x} \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{\left(\frac{1}{x} \right)' e^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow \pm 0} e^{\frac{1}{x}} = \begin{cases} +\infty & \text{при } x \rightarrow +0 \\ 0 & \text{при } x \rightarrow -0 \end{cases},$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = 1.$$

Следовательно, $y = x + 1$ - наклонная асимптота.

Определить интервалы возрастания и убывания функции

$$1. y = x^3 - 12x + 11 \quad 2. y = \sin x \quad 3. y = \frac{2x}{1-x^2} \quad 4. y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$$

Найти экстремум функции, найти ее наибольшее и наименьшее значение на отрезке

$$5. y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2 \quad [-2; 4] \quad 6. y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \quad [2; 5]$$

$$7. y = x^4 + 8x^3 + 16x^2 \quad [-3; 1]$$

Найти экстремум функции

$$8. y = (x-1)^3 (x+1)^2 \quad 9. y = \sqrt[3]{x^2}$$

Определить интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции

$$9. y = 5x^2 + 20x + 9 \quad 10. y = -6x^2 + 8x - 11 \quad 11. y = x^3 \quad 12. y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2 \quad 13. y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 45x - 14 \quad 14. y = (x-1)^4 \quad 15. y = e^{-x^2}$$

Найти асимптоты графика функции

$$16. y = \frac{1}{x} \quad 17. y = \frac{2}{x^2 - 4} \quad 18. y = \arctg x \quad 19. y = \frac{x^2 + 1}{2x + 3} \quad 20. y = \frac{2x^2 + 4x\sqrt{x} + 2}{2x + 4}$$

Домашняя работа

Определить интервалы возрастания и убывания функции

$$1. y = x^3 - 3x - 2 \quad 2. y = x^3 \quad 3. y = \operatorname{tg} x \quad 4. y = \frac{2x}{1+x^2} \quad 5. y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$$

6. Найти экстремум функции $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 7x^2 + 24x + 1$, а также наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $[-5; 2]$

Найти экстремум функции

$$7. y = x^4 - \frac{20}{3}x^3 + 8x^2 \quad 8. y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$$

Определить интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графика функции

9. $y = 3x^2 + x + 1$ **10.** $y = -2x^2 + 8x - 9$ **11.** $y = x^2 + x$ **12.** $y = x(x^2 - b^2)$ **13.**

$y = -x^3 + 15x^2 - x - 250$

Определить асимптоты графика функции

14. $y = \frac{3}{x-2}$ **15.** $y = \frac{x-2}{x+4}$ **16.** $y = \frac{x^2-1}{x^4}$ **17.** $y = \frac{x}{1+x^2}$

9. Исследование функций и построение графиков

Общее исследование функции

- 1) Найти область определения функции
- 2) Исследовать на непрерывность определенный вид точки разрыва, если они есть
- 3) Определить четность, нечетность, периодичность
- 4) Найти точки пересечения с осями координат
- 5) Найти асимптоты графика функции. Если асимптот нет, то полезно изучить поведение функции в граничных точках области существования, т.е. найти пределы при приближении к этим точкам
- 6) Определить интервалы возрастания и убывания, точки экстремума графика функции.
- 7) Определить интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
- 8) Построение графика функции начинается с построения асимптот, а затем наносятся все замечательные точки.

Теоретические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Дайте определение возрастающей и убывающей функции на некотором промежутке.
2. Как найти интервалы монотонности функции?
3. Дайте определения экстремумов функции.
4. Определите наибольшее и наименьшее значения функции.
5. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
6. Какие точки называются критическими?
7. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.
8. Как ведется исследование функции на экстремум с помощью второй производной?
9. Укажите порядок исследования функции на возрастание и убывание и экстремумы.

10. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции? Укажите порядок решения этой задачи.

11. Определите понятия выпуклость и вогнутость графика функции.

12. Какую точку называют точкой перегиба?

13. Как найти интервалы выпуклости и вогнутости функции?

14. Как определить точки перегиба?

15. Что называется асимптотой кривой $y = f(x)$?

16. Как найти асимптоту $y = ax + b$ кривой $y = f(x)$, т.е. как найти a и b ?

17. По какой схеме следует проводить исследование функции и построение ее графика?

18. Для решения каких вопросов исследования функции и построения ее графика:

а) не нужны теория пределов и дифференциальное исчисление?

б) необходимо уметь вычислять пределы?

в) нужна первая производная?

г) нужна вторая производная?

Пример.

Исследовать функцию $y = \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}$ и построить ее график.

Решение.

Общая схема исследования функций:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать поведение функции на концах области определения. Найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в этих точках. Найти вертикальные асимптоты.
3. Выяснить, является функция четной, нечетной, периодической.

4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.
5. Найти наклонные асимптоты графика функции.
6. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.
7. Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.
8. Построить схематический график функции, используя все полученные результаты.

1. Функция не определена, если $x-1=0$, ($x=1$)

Область определения: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$

2. Т.к. $x=1$ - точка разрыва функции исследуем поведение функции в этой точке слева и справа

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} = +\infty$$

Т.к. пределы равны ∞ значит $x=1$ точка разрыва второго рода.

Следовательно, прямая $x=1$ - вертикальная асимптота.

1. Проверим функцию на четность, нечетность. Напомним, что функция $y = f(x)$ называется четной (нечетной) если выполнены два условия:

1. Область определения симметрична относительно начала координат
2. $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Если $y = f(x)$ четная, то график симметричен относительно оси ординат, а для нечетной – относительно начала координат.

$$f(-x) = \frac{(-x+2)^3}{4(-x-1)^2} = -\frac{(x-2)^3}{4(x+1)^2}$$

Функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. общего вида.

Функция не является периодической

4. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат

с ОХ: $y = 0$ при $x = -2$;

с ОУ: $x = 0$ при $y = 2$;

Найдем промежутки знакопостоянства функции

$$y < 0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} < 0 \Rightarrow x+2 < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -2);$$

$$y > 0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} > 0 \Rightarrow x+2 > 0 \Rightarrow x \in (-2; 1) \cup (1; +\infty)$$

5. Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$$

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)^3}{4x(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{4};$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2} - \frac{1}{4}x \right] = [\infty - \infty] = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 2$$

$$y = \frac{1}{4}x + 2 - \text{наклонная асимптота.}$$

Для $x \rightarrow -\infty$ k и b вычисляются аналогично

6. Найдем точки экстремума функции и промежутки монотонности.

Возрастание и убывание функции $y = f(x)$ характеризуется знаком ее производной y' : если в некотором интервале $y' > 0$, то в этом интервале функция возрастает, а если $y' < 0$, то функция убывает в этом интервале.

Функция $y = f(x)$ может иметь экстремум только в тех точках, которые принадлежат области определения и в которых ее производная равна нулю или не существует. Если y' меняет знак с “+” на “-” при переходе через исследуемую точку, то эта точка максимума, если y' меняет знак с “-” на “+” при переходе через исследуемую точку, то эта точка является точкой минимума. Если y' не меняет знак при переходе через точку x_0 , в этой точке экстремума нет.

Найдем все точки из области определения функции $y = f(x)$, в которых производная (y') обращается в ноль или не существует.

$$y' = \frac{3(x+2)^2(x-1)^2 - 2(x-1)(x+2)^3}{4(x-1)^4} = \frac{(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^3}.$$

$y' = 0$ при $x_1 = -2$, $x_2 = 7$;

y' не существует при $x = 1$

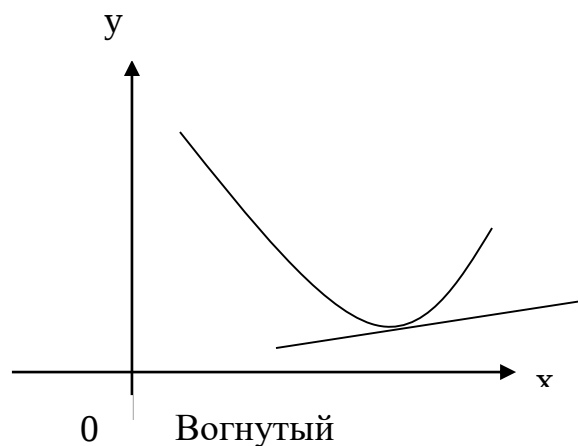
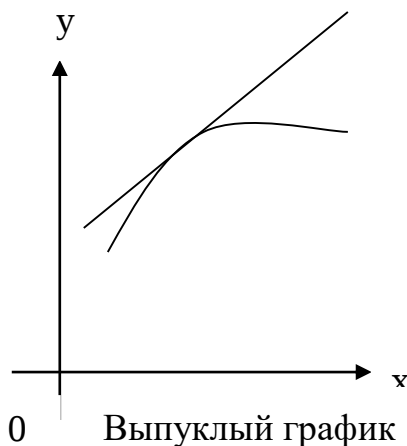
Составим таблицу

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; 7)$	7	$(7; +\infty)$
y'	+	0	+	не существует	-	0	+
y		0		не существует		≈ 5	
	возрастает		возрастает		убывает	min	возрастает

Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$, $(7; +\infty)$ и убывает на интервале $(1; 7)$. Точка $x = 7$ есть точка минимума $y_{\min} = y(7) = \frac{729}{144}$

7. Найдем точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости функции

Напомним, что график функции $y = f(x)$ называется выпуклым на интервале $(a; b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит ниже любой своей касательной. График функции $y = f(x)$ называется вогнутым на интервале $(a; b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит выше любой своей касательной.



Точки, в которых функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называются точками перегиба.

Перегиб возможен в точках, в которых y'' равна нулю или не существует. Если $y'' < 0$ на интервале $(a; b)$, то график функции является выпуклым ($\cap$) на этом интервале, если же $y'' > 0$, то на интервале $(a; b)$ график вогнутый ($\cup$).

Найдем точки перегиба $y = f(x)$:

$$y'' = \frac{[2(x+2)(x-7) + (x+2)^2](x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^6} = \frac{54(x+2)}{4(x-1)^4} = \frac{27(x+2)}{2(x-1)^4}$$

$$y'' = 0 \text{ при } x = -2$$

$$y'' \text{ не существует при } x = 1$$

Составим таблицу

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	-	0	+	не существует	+
y	$\cap$	0	$\cup$	не существует	$\cup$

Точка $(-2; 0)$ - точка перегиба.

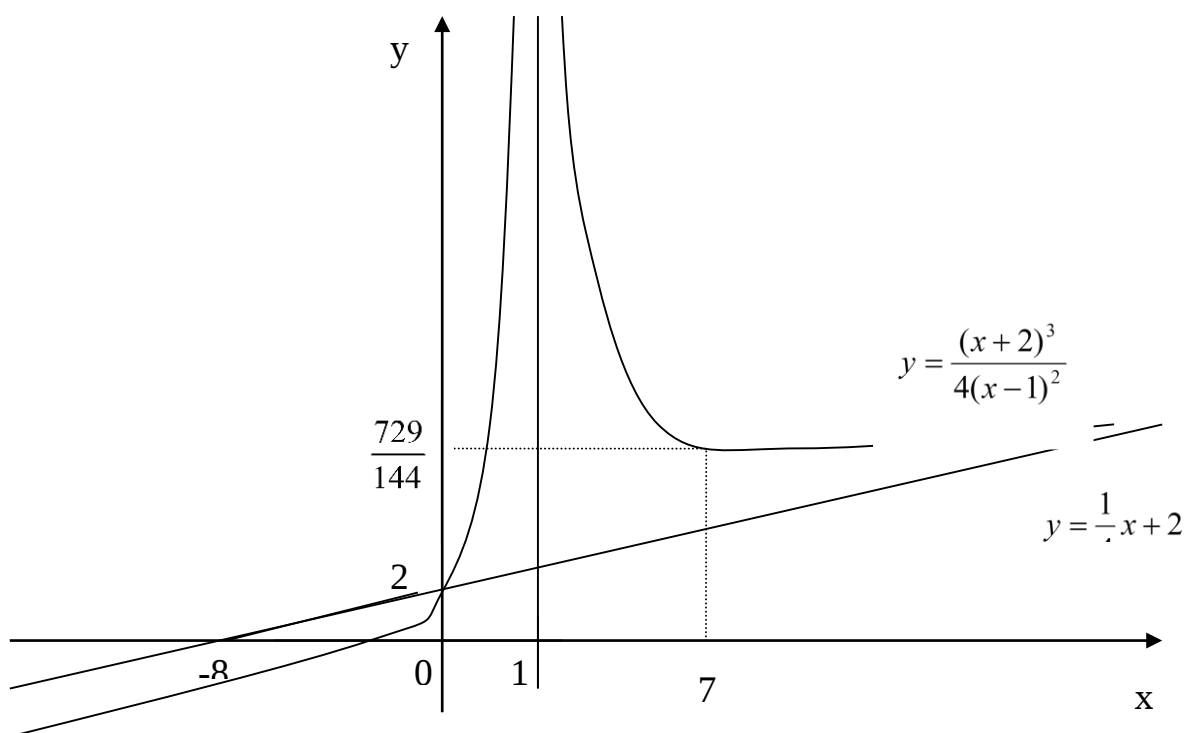
Дополнительные точки:

$$y(-3) \approx -0,01$$

$$y(3) \approx 7,8$$

$$y(-6) \approx -0,3$$

8. Построим график функции, используя результаты исследования.



Замечание:

При построении графика масштабы по оси ОХ и ОУ могут не совпадать.

Исследовать функцию и построить график функции

$$1. y = \frac{x^3}{2(x+1)^2} \quad 2. y = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 3} \quad 3. y = \frac{e^x}{x}$$

Домашняя работа

Исследовать функцию и построить график функции

$$1. y = \frac{3x^3}{3x^2 + 4x + 4} \quad 2. y = \frac{x}{e^x} \quad 3. y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \quad 4. y = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 \quad 5. y = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$6. y = x \cdot \ln x$$

10. Неопределенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования

Вычислить интегралы:

1. $\int x dx$ 2. $\int x^3 dx$ 3. $\int x^5 dx$ 4. $\int \sqrt{x} dx$ 5. $\int \sqrt[3]{x^2} dx$ 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 7. $\int 7x^5 dx$ 8. $\int 3\sqrt[4]{x^3} dx$ 9. $\int \frac{6}{x^2} dx$ 10. $\int \frac{4}{x^n} dx$ 11. $\int 5 dx$ 12. $\int (x^3 - 3x^2 + 5x - 4) dx$ 13. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^3} - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}} \right) dx$ 14. $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 5\sqrt[3]{x} - 7x + 6}{\sqrt[3]{x}} dx$ 15. $\int (x^2 + 5)^7 \cdot 2x dx$ 16. $\int (3x^3 + 5x^2 - 8) \cdot (9x^2 + 10x) dx$ 17. $\int \sqrt{x^2 + 6} \cdot 2x dx$ 18. $\int (2x^2 + 7)^3 \cdot x dx$ 19. $\int \sqrt[3]{x^3 + 8} \cdot x^2 dx$ 20. $\int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot x dx$ 21. $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx$ 22. $\int \cos^5 4x \cdot \sin 4x dx$ 23. $\int \frac{x^2}{(4x^3 + 9)} dx$ 24. $\int \frac{\arctg^3 x}{1 + x^2} dx$ 25. $\int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx$ 26. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \cdot \sin x dx$ 27. $\int \frac{\ln x}{x} dx$ 28. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}} dx$ 29. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln^4 x}$ 30. $\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} dx$ 31. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5 + \cos x}} dx$ 32. $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{3 - \sin^2 x}} dx$ 33. $\int \frac{dx}{x + a}$ 34. $\int \frac{2x}{x^2 + 5} dx$ 35. $\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$ 36. $\int \frac{x}{1 - x^2} dx$ 37. $\int \frac{dx}{a - x}$ 38. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}$ 39. $\int \frac{x^2}{4 + 3x^3} dx$ 40. $\int \frac{x}{1 + x} dx$ 41. $\int \frac{e^x}{5 + e^x} dx$ 42. $\int \frac{x^3}{x + 2} dx$

43. Какая функция имеет производную $5x^2 - 7x + 4$ и принимает значение, равное 3, при $x=1$?

Домашняя работа

Вычислить интегралы:

1. $\int \left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt[7]{x^6}} \right) dx$ 2. $\int \left(\frac{3}{x^5} - \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3} \right) dx$ 3. $\int (3x^2 - 5)^3 dx$ 4. $\int \frac{x^6 + 3x^5 - 7x^4 + 5\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$ 5. $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx$ 6. $\int \frac{(4 + 2\sqrt{x}) \cdot (x^3 + 5)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ 7. $\int (5x + 4)^4 dx$ 8. $\int (9 + 7x^2)^5 dx$ 9. $\int (8ax^2 + 9bx^3)^{\frac{4}{3}} \cdot (16ax + 27bx^2) dx$ 10. $\int \sqrt{4x^2 + 8x} \cdot (2x + 2) dx$ 11. $\int \frac{x^2}{\sqrt{7 + x^3}} dx$ 12. $\int \sqrt{1 - x} dx$ 13. $\int \frac{\cos x}{\sin^7 x} dx$ 14. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ 15. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^4}} dx$ 16.

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad 17. \int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{1+x^2} dx \quad 18. \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{7-\cos^2 x}} dx \quad 19. \int \frac{2x}{\sqrt{1-3x^2}} dx \quad 20. \int \frac{dx}{a+bx} \quad 21. \\
& \int \frac{x}{a^2-b^2x^2} dx \quad 22. \int \frac{dx}{(1+x^2) \cdot \operatorname{arctg} x} \quad 23. \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x} \quad 24. \int \frac{\sin x}{5+7\cos x} dx \quad 25. \\
& \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x} \quad 26. \int \frac{dx}{x(1-\ln x)} \quad 27. \int \frac{\sin 2x}{b^2 \cos^2 x + a^2} dx \quad 28. \int \frac{x^4}{x-1} dx \quad 29. \int \frac{3x-2}{2x+3} dx \\
& 30. \int \operatorname{tg} x dx \quad 31. \int \operatorname{ctg} x dx
\end{aligned}$$

31. Какая функция имеет производную $3x^2 + 2x + 1$ и принимает значение, равное 2, при $x=0$?

32. Какая функция имеет производную $5 - 9x + 4x^2$, если известно, что при $x=2$ эта функция равна 50?

11. Метод интегрирование по частям

Вычислить интегралы

$$\begin{aligned} & 1. \int x \cdot e^x dx \quad 2. \int x \cdot \sin 3x dx \quad 3. \int x^2 \cdot \sin x dx \quad 4. \int \ln x dx \quad 5. \int \operatorname{arctg} x dx \quad 6. \int \arcsin 2x dx \quad 7. \\ & \int x \cdot \ln x dx \quad 8. \int x \cdot \ln x dx \quad 9. \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad 10. \int e^x \cdot \cos x dx \quad 11. \int e^{3x} \cdot \sin 3x dx \quad 12. \\ & \int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} dx \quad 13. \int \sin x \cdot \ln \cos x dx \quad 14. \int \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2} dx \quad 15. \int e^x \cdot \ln(e^x + 1) dx \quad 16. \\ & \int (\ln x)^2 dx \quad 16. \int (\arcsin x)^2 dx \end{aligned}$$

Домашняя работа

Вычислить интегралы

$$\begin{aligned} & 1. \int x \cdot \cos x dx \quad 2. \int x^3 \cdot \ln x dx \quad 3. \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad 4. \int \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} dx \quad 5. \int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin^2 x} dx \quad 6. \int x \cdot e^{5x} dx \quad 7. \\ & \int \sqrt[3]{x} \cdot \ln^2 x dx \quad 8. \int e^{4x} \cdot \sin 5x dx \quad 9. \int \sin(\ln x) dx \quad 10. \int \cos(\ln x) dx \end{aligned}$$

12. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций

Вычислить интегралы

Повторение

$$\begin{aligned} & 1. \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x}}{\cos^2 2x} dx \quad 2. \int \frac{x^2}{7+3x^3} dx \quad 3. \int \frac{\operatorname{ctg} ax}{\sin^2 ax} dx \quad 4. \int (ax^2+b)^n \cdot x dx \quad 5. \int \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} \quad 6. \\ & \int \frac{e^{ax}}{e^{ax}+5} dx \quad 7. \int \frac{\sin 2x}{\sin^n x} dx \quad (n \neq -2) \quad 8. \int \frac{\ln x}{x \cdot \sqrt{7+\ln^2 x}} dx \quad 9. \int \frac{dx}{(1+4x^2)\sqrt{5+\operatorname{arctg} 2x}} \quad 10. \\ & \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{a^2+b^2 \sin^2 x}} dx \quad 11. \int \frac{\sin x \cdot \cos x}{a \cdot \cos^2 x + b \cdot \sin^2 x} dx \quad 12. \int \frac{b \cos x - c \cdot \sin x}{\sqrt{a+b \cdot \sin x + c \cdot \cos x}} dx \quad 13. \\ & \int \frac{x}{a^2-x^2} dx \quad 14. \int \frac{3x}{4+7x^2} dx \quad 15. \int \frac{x^3}{\sqrt{5+4x^4}} dx \quad 16. \int \frac{e^{3x}}{e^x+2} dx \quad 17. \int \frac{dx}{a+bx} \quad 18. \int \frac{dx}{x \cdot \ln^4 x} \\ & 19. \int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx \quad 20. \int \frac{3x}{\sqrt{9-7x^2}} dx \end{aligned}$$

Вычислить интегралы

$$\begin{aligned} & 21. \int 3^x dx \quad 22. \int (\sqrt{2})^x dx \quad 23. \int 4^{-x} dx \quad 24. \int e^{-x} dx \quad 25. \int 2^{3x} dx \quad 26. \int e^{5x} dx \quad 27. \int e^{kx} dx \\ & 28. \int 5^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad 29. \int e^{\cos x} \cdot \sin x dx \quad 30. \int 7^{x^2} \cdot x dx \quad 31. \int e^{x^3} \cdot x^2 dx \quad 32. \int \frac{2^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx \quad 33. \\ & \int e^{-(x^3+x+3)} \cdot (3x^2+1) dx \quad 34. \int e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx \quad 35. \int (e^x + e^{-x}) dx \quad 36. \int \sin mx dx \quad 37. \int \cos nx dx \\ & 38. \int \operatorname{tg} kx dx \quad 39. \int \operatorname{ctg} px dx \quad 40. \int \frac{1}{\cos^2 kx} dx \quad 41. \int \frac{1}{\sin^2 qx} dx \end{aligned}$$

Домашняя работа

Вычислить интегралы

$$\begin{aligned} & 1. \int (e^{kx} - e^{-kx}) dx \quad 2. \int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad 3. \int e^{\sin x} \cdot \cos x dx \quad 4. \int \left(e^{\frac{x}{3}} + 2 \right)^3 \cdot e^{\frac{x}{3}} dx \quad 5. \\ & \int 9^{x^3+6x^2+3x} \cdot (x^2+4x+1) dx \quad 6. \int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x} dx \quad 7. \int (e^{ay} + e^{-ay})^3 dy \quad 8. \int \frac{e^{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx \quad 9. \\ & \int e^{5+\sin^2 2x} \cdot \sin 4x dx \quad 10. \int \frac{dx}{1-\cos x} \quad 11. \int \frac{dx}{1+\cos x} \quad 12. \int \sin x^2 \cdot x dx \quad 13. \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad 14. \end{aligned}$$

$$\int \operatorname{tg}(2x-3) dx \quad 15. \int \sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \quad 16. \int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)} \quad 17. \int \operatorname{cose}^x \cdot e^x dx \quad 18. \int \frac{dx}{1+\sin x}$$

$$19. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \quad 20. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \quad 21. \int \sin(2x+5) dx \quad 22. \int \frac{dx}{\left(x \cdot \cos \frac{1}{x}\right)^2} \quad 23.$$

$$\int \frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x} dx \quad 24. \int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx \quad 25. \int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} dx \quad 26. \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} dx \quad 27. \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx \quad 28.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} \quad 29. \int \operatorname{ctg} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} dx$$

13. Метод подстановки

Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} & 1. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \quad 2. \int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x} \quad 3. \int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}} \quad 4. \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \quad 5. \int \frac{x dx}{\sqrt{x-1}} \quad 6. \int \frac{4dx}{3+\sin^2 x} \quad 7. \\ & \int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x} \quad 8. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} \quad 9. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} \quad 10. \int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} \quad 11. \int \sqrt{a^2-x^2} dx \quad 12. \\ & \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx \quad 13. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} \quad 14. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad 15. \int \frac{\cos x}{\sqrt{6-\sin^2 x}} dx \quad 16. \int \frac{dx}{1+\cos^2 x} \quad 17. \\ & \int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^2 x} \quad 18. \int \frac{dx}{\sin x \cdot \sqrt{4\sin^2 x - 9\cos^2 x}} \end{aligned}$$

Домашняя работа

Вычислить интеграл

$$\begin{aligned} & 1. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \quad (x = \sin t) \quad 2. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x = \operatorname{ctg} t) \quad 3. \int \frac{dx}{(5x+7)\sqrt{x}} \quad (x = z^2) \quad 4. \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} \\ & \left(x = \frac{1}{z}\right) \quad 5. \int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{e^x-1}} dx \quad (x = 2\ln z) \quad 6. \int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+3} \quad \sqrt{x+2} = t \quad 7. \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \quad (t = 1+\sqrt{x}) \quad 8. \\ & \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \quad t = 1+\sqrt{x} \quad 9. \int \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \quad (t = \operatorname{ctg} x) \quad (t = \operatorname{ctg} x) \end{aligned}$$

14. Интегрирование рациональных функций

Разложить на простейшие дроби следующие рациональные дроби

1. $\frac{x^2 + 2x - 4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)}$ 2. $\frac{x^3 + 2}{(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)}$
3. $\frac{3x^3 - 10x^2 - 11x + 21}{x^2 - 5x + 4}$ 4. $\frac{x^4 - x^3 - 9x^2 - 10x - 14}{x^2 - 2x - 8}$ 5. $\frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3(x-5)}$
6. $\frac{30x^5 + 90x^4 + 165x^3 + 341x^2 + 271x + 30}{x^3 + 3x^2 + 2x}$ 7. $\frac{x^4 + 5x^3 - 10x^2 - 8x + 5}{(x-2)^3(x+3)^2}$
8. $\frac{-69x^3 - 12x^2 + 475x + 646}{(x+2)^2(x-3)^2}$ 9. $\frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2(x+1)^2}$ 10. $\frac{3x^2 + 13x + 11}{(x+2) \cdot (x+1)^2}$
11. $\frac{x^2 - x + 14}{(x-4)^3 \cdot (x-2)}$ 12. $\frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 4}{(x-2)^2 \cdot x^2}$ 13. $\frac{x^3 - 8x + 7}{(x^2 - 3x - 10)^2}$ 14. $\frac{1}{x^3 + 1}$
15. $\frac{x^2}{1 - x^4}$ 16. $\frac{x^2 + 2}{(x-1)(x+1)(x-2)(x^2 + 1)}$

Найти интегралы

17. $\int \frac{dx}{x-3}$ 18. $\int \frac{dx}{5-x}$ 19. $\int \frac{dx}{2x-1}$ 20. $\int \frac{dx}{(x-2)^3}$ 21. $\int \frac{dx}{(4x+3)^5}$ 22. $\int \frac{dx}{(2x-1)^4}$
23. $\int \frac{dx}{(4-3x)^3}$ 24. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$ 25. $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$ 26. $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 6}$
27. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}$ 28. $\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 1}$ 29. $\int \frac{dx}{x^2 - x + 14}$ 30. $\int \frac{dx}{5x^2 + 7x + 2}$
31. $\int \frac{dx}{4x^2 + x + 5}$ 32. $\int \frac{dx}{3x^2 - 8x + 9}$ 33. $\int \frac{3x+4}{x^2 + 7x + 14} dx$ 34. $\int \frac{2x+3}{x^2 + x + 5} dx$
35. $\int \frac{7x-8}{x^2 + 5x + 3} dx$ 36. $\int \frac{3x-11}{x^2 + 8x + 18} dx$ 37. $\int \frac{x+7}{x^2 + 11x + 42} dx$ 38. $\int \frac{x-3}{x^2 - 9x + 23} dx$ 39. $\int \frac{7x+4}{x^2 + x + 9} dx$
40. $\int \frac{5x-7}{x^2 + 3x + 8} dx$ 41. $\int \frac{4x+6}{x^2 + 3x + 2} dx$ 42. $\int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$ 43. $\int \frac{x+2}{x^2 + 4x + 6} dx$ 44. $\int \frac{2x+1}{x^2 - 3x + 6} dx$
45. $\int \frac{x+2}{x^2 + 2x + 8} dx$ 46. $\int \frac{3x+4}{2x^2 + 4x + 5} dx$ 47. $\int \frac{x+1}{x^2 + x + 8} dx$ 48. $\int \frac{x+1}{3x^2 + x + 1} dx$

$$\begin{aligned}
 &49. \int \frac{x-4}{2x^2-4x+7} dx \quad 50. \int \frac{2x+7}{x^2-x+2} dx \quad 51. \int \frac{3x-5}{2x^2-x+2} dx \quad 52. \int \frac{x+5}{x^2+2x+2} dx \quad 53. \\
 &\int \frac{5x-4}{5x^2-x+3} dx \quad 54. \int \frac{5x+2}{5x^2+4x+3} dx \quad 55. \int \frac{x+6}{4x^2-x+5} dx \quad 56. \int \frac{3x-2}{x^2-x+11} dx \quad 57. \\
 &\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx
 \end{aligned}$$

Домашняя работа по теме «Простейшие дроби»

Разложить на простейшие дроби следующие рациональные дроби

$$\begin{aligned}
 &1. \frac{x^2+1}{x^3+1} \quad 2. \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} \quad 3. \frac{x^2}{x^4+x^2-2} \quad 4. \frac{1}{1-x^6} \quad 5. \frac{11x-4}{x^2+2x-8} \\
 &6. \frac{2x^3+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} \quad 7. \frac{3x^3-24x^2-41x+20}{(x+1)(x+2)(x-3)(x-2)} \quad 8. \frac{5x^2-25x+26}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\
 &9. \frac{11x+40}{4(x-4)(x+2)} \quad 10. \frac{3x^2+23x+28}{(x+2)(x+3)(x-4)} \quad 11. \frac{1}{x^4+1}
 \end{aligned}$$

Найти интегралы

$$\begin{aligned}
 &12. \int \frac{dx}{x-13} \quad 13. \int \frac{dx}{15-3x} \quad 14. \int \frac{dx}{4-7x} \quad 15. \int \frac{dx}{3-8x} \quad 16. \int \frac{3}{4x-9} dx \quad 17. \int \frac{dx}{x^2+x+5} \quad 18. \\
 &\int \frac{dx}{x^2+2x+6} \quad 19. \int \frac{dx}{x^2+6x+19} \quad 20. \int \frac{dx}{x^2+5x+12} \quad 21. \int \frac{dx}{x^2-7x+20} \quad 22. \int \frac{dx}{x^2-2x+2} \quad 23. \\
 &\int \frac{2z+1}{2z^2+5z+40} dz \quad 24. \int \frac{2x+7}{x^2+x+2} dx \quad 25. \int \frac{x-7}{x^2+3x+4} dx \quad 26. \int \frac{3x+2}{x^2-2x+10} dx \quad 27. \int \frac{x+1}{5x^2+6x+3} dx \\
 &28. \int \frac{3x+8}{4x^2+4x+5} dx \quad 29. \int \frac{3x+1}{x^2+x+1} dx \quad 30. \\
 &\int \frac{dx}{5x^2+9x+10} \quad 31. \int \frac{dx}{7x^2-3x+5} \quad 32. \int \frac{dx}{9x^2+x+12} \quad 33. \int \frac{dx}{6x^2+7x+15} \quad 34. \\
 &\int \frac{dx}{3x^2-11x+17}
 \end{aligned}$$

15. Определенный интеграл. Основная формула интегрального исчисления

Вычислить определенные интегралы методом непосредственного интегрирования

$$1. \int_1^2 (3x^2 - 1) dx \quad 2. \int_1^2 \frac{dx}{x} \quad 3. \int_1^2 e^x dx \quad 4. \int_{0,25}^1 (\sqrt{x} - x^2) dx \quad 5. \int_0^\pi \sin x dx \quad 6. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad 7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \quad 8. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad 9. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2} dx \quad 10. \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{1+x^2} dx$$

Вычислить определенные интегралы по частям

$$11. \int_0^\pi x \sin 2x dx \quad 12. \int_0^1 x e^{-x} dx \quad 13. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx \quad 14. \int_1^e \ln x dx \quad 15. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{x dx}{\cos^2 x} \quad 16. \int_1^2 x \cdot \ln x dx \quad 17. \int_0^1 x^2 e^{-x} dx \quad 18. \int_0^1 x^2 \ln x dx \quad 19. \int_1^e \ln^2 x dx \quad 20. \int_1^e x \cdot \ln^2 x dx$$

ДОМАШНЯЯ РАБОТА

I. Вычислить определенные интегралы методом непосредственного интегрирования:

1. $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$	2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$	3. $\int_0^2 x(3-x) dx$	4. $\int_0^\pi \sin 2x dx$	5. $\int_0^\pi \sin^2 x \cdot \cos x dx$
6. $\int_1^3 x^3 dx$	7. $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx$	8. $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$	9. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$	10. $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

III. Вычислить определенные интегралы по частям:

11. $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$	12. $\int_0^\pi e^x \cdot \cos x dx$	13. $\int_0^\pi e^x \cdot \sin x dx$	14. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$
--------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------	--

16. Основные методы вычисления определенного интеграла

Геометрические приложения определенного интеграла

Вычислить определенные интегралы методом замены переменной:

$$\left| \begin{array}{l} x = 2 \sin t \quad x \rightarrow 2 \quad t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ dx = 2 \cos t \, dt \quad x \rightarrow 0 \quad 0 \end{array} \right. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t \, dt =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} \, dt = 2 \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \, dx = \left| \begin{array}{l} x=t^2 \quad x \rightarrow 9 \quad t \rightarrow 3 \\ dx=2t \, dt \quad x \rightarrow 4 \quad t \rightarrow 2 \end{array} \right. = \int_2^3 \frac{t}{t-1} 2t \, dt = 2 \int_2^3 \frac{t^2-1+1}{t-1} \, dx = 2 \int_2^3 \frac{t^2-1}{t-1} \, dt + 2 \int_2^3 \frac{1}{t-1} \, dt =$$

$$= 2 \int_2^3 (t+1) \, dt + 2 \ln|t-1| \Big|_2^3 = 2 \cdot \frac{1}{2} (t+1)^2 \Big|_2^3 + 2 \ln 2 = 16 - 9 + 2 \ln 2 = 7 + 2 \ln 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right. \begin{array}{l} x \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad t \rightarrow 1 \\ x \rightarrow 0 \quad 0 \end{array} = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2) \left(1 + \frac{2t^2}{1+t^2} \right)} = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{3} \cdot t \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Вычислить определенные интегралы методом замены переменной:

1. $\int_0^1 \frac{3^x}{1+9^x} \, dx$	2. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$	3. $\int_0^1 \frac{x \, dx}{(x^2+1)^2}$	4. $\int_1^2 \frac{x \, dx}{1+x^2}$	5. $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x \, dx}{\sqrt{e^x+1}}$
6. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} \, dx$	7. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \, dx$	8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$	9. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$	10. $\int_0^{\ln 2} e^x \sqrt{e^x-1} \, dx$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: 11. $y=4-x$, $y=0$	12. $y=4x-x^2$, $y=0$	13. $y=\sin x$, $y=0$, $0 \leq x \leq \pi$	14. $y=16-x^4$, $y=0$	15. $y=-2+3x-x^2$, $y=0$
16. $y=x^2$, $y=\frac{x^3}{3}$	17. $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\frac{x^2}{2}$	18. $y=x^2$, $y=x^5$	19. $y=x^2+3x$, $y=x^2+2x+1$	20. $y=x^2$, $y=2-x^2$

Определить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Oх фигур, ограниченных линиями:

21. $y^2=9x, y=3x$	22. $y=4x-x^2, y=x$	23. $x^2+y^2=25$	24. $y = x^3$ при $x \in \left[0, \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right]$	25. $9y^2 = x(3-x)^2$ при $x \in [0, 3]$
26. $x^2 + y^2 = 9$ при $x \in [-2, 1]$	27. $xy = 6, \quad x = 1,$ $y = 0$	28. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$	29. $y = \frac{x}{1+x^2}$ при $x \in [-1, 1]$	30. $xy = 1, \quad xy = 8,$ $y^2 = x, \quad y^2 = 8x$

Определить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Оу фигур, ограниченных линиями:

31. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$ $y = \pm b$	32. $y^2 = (x+4)^3, x=0$	33. $y = 4x - x^2, \quad y = 0$	34. $x^2 + y^2 = z^2,$ $x^2 + y^2 = 2z^2 - 1$	35. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x,$ $y = 0$
---	--------------------------	------------------------------------	--	---

ДОМАШНЯЯ РАБОТА

Вычислить определенные интегралы методом замены переменной:

1. $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\ln x \, dx}{x \sqrt{1 - (\ln x)^4}}$	2. $\int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx$	3. $\int_0^1 (e^x - 1)^4 \cdot e^x \, dx$	4. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx$	5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}$
---	--------------------------------------	---	--	---

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

6. $x^2 + y^2 = 16$	7. $y^2 = x^3, x=3$	8. $y^2 = 2x+4, x=0$	9. $y = \ln x, x=e, y=0$	10. $y = x \sin x, y=0,$ $0 \leq x \leq \pi$
---------------------	---------------------	----------------------	--------------------------	---

Определить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Оу фигур, ограниченных линиями:

11. $y^2 = 2x, x=1$	12. $y = x^2, y^2 = x$	13. $y^2 = 8x, 1 \leq x \leq 2$
---------------------	------------------------	---------------------------------

Определить объемы тел, образованных вращением вокруг оси Оу фигур, ограниченных линиями:

14. $y^2 = 4-x, x=0$	15. $y = x \sqrt{-x}, x=-4, y=0$
----------------------	----------------------------------

17. Несобственные интегралы

Вычислить интегралы или установить их расходимость;

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$	2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$	4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$	5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$	7. $\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x \cdot \frac{dx}{x^2+1}$	8. $\int_0^{+\infty} \frac{3x^2 dx}{x^3+1}$	9. $\int_3^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x}$	10. $\int_0^{+\infty} 2xe^{x^2} dx$
11. $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$	12. $\int_0^{+\infty} x \cos x dx$	13. $\int_0^2 \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$	14. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$	

18. Функция нескольких переменных

Найти область определения функции и изобразить ее графически

$$1. z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad 2. z = \ln(x - y) \quad 3. z = \arcsin(3 - x^2 - y^2) \quad 4. z = \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

$$5. z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1} \quad 6. z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \quad 7. z = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y} \quad 8.$$

$$z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arccos(1 - y^2) \quad 9. z = \ln \left(1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \right) \quad 10. z = \frac{\ln(x - 4)}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$$

$$11. z = \sqrt{1 - x^2 + y} + \frac{x^2 + 3y}{\ln(y - 2)}$$

Найти предел или доказать, что он не существует

$$12. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow -1}} \frac{x}{y} \quad 13. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow +\infty}} x^y \quad 14. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad 15. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad 16. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + 2y}{y - x^2} \quad 17. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad 18.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \frac{x}{x^4 + y^2} \quad 19. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 6} + x^2 + y^2}{\sqrt{x^4 + y^4 + 2(1 + x^2 y^2)} - \sqrt{x^2 + y^2}} \quad 20. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2} \quad 21.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)xy^2} \quad 22. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\sin xy - \sin xy^2}{xy - x} \quad 23. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 + \sin xy)}{\operatorname{arctg}(3x^2)} \quad 24. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(1 + \frac{2}{3x^2 + y^2} \right)^{xy}$$

$$25. \text{Для заданной функции } z = \frac{\ln(1 - x - y)}{(x + y)^2} \text{ вычислить следующие пределы:}$$

$$a) \lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} z \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} z \quad в) \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} z$$

Домашняя работа по теме Функции нескольких переменных

Найти область определения функции и изобразить ее графически

$$1. u = \frac{z}{x + y} \quad 2. z = xy \quad 3. z = x^2 + y^2 \quad 4. z = \arcsin 3xy \quad 5.$$

$$z = \arcsin(1 - x^2 - y^2) + \arcsin(2xy)$$

$$6. z = \ln x + \ln y \quad 7. z = \sqrt{\ln x + \ln y} \quad 8. z = \sqrt{\ln \frac{x^2 + y^2}{4}} + \arcsin \frac{y}{x^2} + \sqrt{x}$$

Найти предел или доказать, что он не существует

$$9. \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow -1}} \left(\frac{x}{y} - xy^3 \right) \quad 10. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} \quad 11. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad 12. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3x}{x + y^3} \quad 13. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + 2x - 2xy - 4y} \quad 14.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} \quad 15. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{1 - \sqrt[3]{1 + xy}} \quad 16. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \quad 17. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} \quad 18.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} (1 + xy)^{\frac{1}{x^2 + xy}} \quad 19. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} (1 + xy^2)^{\frac{y}{x^7 + xy^2}}$$

19. Дифференцируемость функции нескольких переменных

Найти частные производные функций:

1. $z = x^2 + 3xy + 4y^3$ 2. $u = \sin(3x + 5y - 4z)$ 3. $z = e^{\frac{x}{y}}$ 4. $u = x \cdot \ln(1 - y^3) + \arcsin z$

5. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ 6. $u = \ln^2(x^2 + y^2 + z^2)$ 7. $z = (x^3 + y^3 - xy^2)^3$ 8. $z = \arcsin \frac{y}{x}$ 9.

$z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}$ 10. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ 11. $\ln(xy + \ln xy)$ 12. $u = \operatorname{arctg} \frac{xy}{z}$ 13.

$u = \ln \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + z^2}}$ 14. $u = (xy)^z$

15. Формула Клапейрона $pV = RT$, где R — величина постоянная, связывает для идеального газа его объем V , давление p и абсолютную температуру T . Считая каждую из этих величин V , p и T функцией, а две другие — независимыми переменными, определить частные производные этих функций.

16. Доказать, что функция $z = y^2 \cdot \sin(x^2 - y^2)$ удовлетворяет уравнению

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$$

17. Вычислить значения частных производных функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + x^3} - xyz$ в точке $M_0(2, -2, 1)$.

18. Вычислить $u'_x + u'_y + u'_z$ в точке $M_0(1, 1, 1)$, если $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$

19. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = \sin(3u + 2v - 4w)$, а $u = 2x^3$; $v = 3x^2$; $w = x^4$.

20. Найти полную производную $\frac{dz}{dt}$ функции $z = \sin \frac{x}{y}$, где $x = e^t$; $y = t^2$.

21. Определить полную производную функции $u = e^{ax}(y - z)$, $y = a \cdot \sin x$, $z = \cos x$

22. Движение точки задано уравнениями $x = 3t^2$; $y = 2t^4$; $z = 4t^6$. С какой скоростью возрастает ее расстояние от начала координат?

23. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где $x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой.

$$u = \sqrt{x + y + 3}, \quad x = \ln t, \quad y = t^2, \quad t_0 = 1$$

24. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \ln(u^2 + v^2)$, а $u = x \cdot \cos y$; $v = y \cdot \sin x$.

25. Определить $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$, а $u = x \cdot \cos y$; $v = x \cdot \sin y$

26. Доказать, что функция $z = y\varphi(x^2 - y^2)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$

27. Доказать, что функция $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$

28. Вычислить значение производной сложной функции $z = \arccos \frac{x^2}{y}$, где

$x = 1 + \ln t$, $y = -2e^{-t^2+1}$ при $t_0 = 1$ с точностью до двух знаков после запятой.

29. Продифференцировать сложную функцию $u = x^3 y z^2$, где $x = \sin t$, $y = \sqrt{t}$, $z = t^2$.

30. Найти производные сложной функции $z = \ln(xy^2 - 2x^2 y)$, где

$x = \frac{u}{v^2}$, $y = u \cdot \sin v$.

31. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = f(x, u, v)$, $u = \frac{1}{x}$, $v = \ln x$

32. Найти $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y = \sin^2 x$

Домашняя работа

Найти частные производные функций:

1. $z = \frac{x}{y}$ 2. $z = x^3 + y^3$ 3. $z = \cos(2x + 3y)$ 4. $u = 5x + 8y^2 - 7z^3$ 5. $z = u \cdot \sin x + \sin y$ 6.

$z = x^{\sin y}$ ($x > 0$) 7. $u = z^{xy}$ ($z > 0$) 8. $u = \sqrt{x^2 + y^y + z^2}$ 9. $z = e^x \cos y - e^y \sin x$

10. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 11. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ 12. $z = e^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$ 13. $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

14. Известно, что сторона треугольника a определяется через две другие стороны и угол β между ними по формуле $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \beta}$. Найти $\frac{\partial a}{\partial b}$, $\frac{\partial a}{\partial c}$, $\frac{\partial a}{\partial \beta}$.

15. Сила тока, согласно закону Ома, выражается по формуле $I = \frac{U}{R}$. Найти $\frac{\partial I}{\partial U}$, $\frac{\partial I}{\partial R}$.

16. Доказать, что функция $z = \ln(x^2 + y^2)$ удовлетворяет уравнению $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

17. Доказать, что если $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, то имеет место равенство $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

18. Вычислить значения частных производных функции $z = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M_0(3, 4)$.

Найти полную производную $\frac{du}{dx}$ функции

19. $u = z^2 + y^2 + zy$; $z = \sin x$; $y = e^x$

20. $u = v^2 + vy$, $v = \ln x$, $y = e^x$

21. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = u^v$, $u = \sin x$, $v = \operatorname{tg} x$.

22. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = uvw$, $u = \sin x$, $v = \ln x$, $w = \operatorname{tg} x$.

23. Найти $\frac{dz}{dx}$ и $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z = x^y$, $y = \ln x$

24. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = e^{\frac{x}{y}}$, $y = \sin^3 x$

25. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = \ln(x^2 + y^2)$, $y = e^{x^2}$

26. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$, $y = \cos x$

27. Определить $\frac{\partial u}{\partial t}$; $\frac{\partial u}{\partial v}$; $\frac{\partial u}{\partial w}$, если $u = \ln \cos \frac{xy}{\sqrt{z}}$, где $x = tvw$, $y = e^{\frac{t}{v}}$, $z = \sqrt{\frac{tv}{w}}$.

28. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = f(u, v)$, $u = x^2 + y^2$, $v = xy$

29. Вычислить значение производной сложной функции $u = u(x, y)$, где

$x = x(t)$, $y = y(t)$, при $t = t_0$ с точностью до двух знаков после запятой

$u = \operatorname{arctg}(x + y)$, $x = t^2 + 2$, $y = 4 - t^2$, $t_0 = 1$

30. Доказать, что функция $z = x + y + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ удовлетворяет дифференциальному

уравнению $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$

31. Доказать, что функция $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \varphi(x - y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$

32. Доказать, что функция $z = e^y \varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz$

33. Доказать, что функция $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x^2 - y^2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$

20. Дифференциал функции нескольких переменных

1. Пусть функция $z = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x; y)$ (окрестностью точки M называется произвольная область, содержащая точку M).

Придадим переменной x произвольное приращение Δx , аргументу y - приращение Δy . Тогда функция z получит наращенное значение $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Величина (функция) $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называется **полным приращением функции** $z = f(M)$ в точке $M(x; y)$. Если задать только приращение аргумента x или только приращение аргумента y , то полученные приращения функции соответственно $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называются **частными**.

Полное приращение функции не равно сумме частных, т.е. $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$

Пример. Найти частные и полное приращение функции $z = xy$.

Решение. $\Delta_x z = (x + \Delta x)y - xy = y\Delta x$; $\Delta_y z = x(y + \Delta y) - xy = x\Delta y$

$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$. Получили, что $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Определение. Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).

Обозначается частная производная так: z'_x, z'_y , или $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, или $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

Основные понятия функции многих переменных

Основные понятия.

Определение. Символика. Переменная z называется однозначной функцией двух переменных x и y если каждой паре значений x и y в некоторой области их изменения поставлено в соответствие одно значение z . Переменные x, y называются независимыми переменными (или аргументами), z - зависимой переменной, а символ F означает закон соответствия.

Функциональную зависимость z от x и y записывают в виде:

$$z = F(x, y) \quad (1)$$

Частным значением функции $z = F(x, y)$ называется ее значение, соответствующее какой-либо определенной паре значений аргументов. Если, например, при $x = a$ и $y = b$ функция принимает частное значение c , то пишут $c = F(a, b)$.

Геометрическое изображение. Уравнение (1) геометрически определяет некоторую поверхность. Пара значений x и y определяет на плоскости XOY

точку $P(x, y)$, $z = F(x, y)$ - аппликату соответствующей точки $M(x, y, z)$ на поверхности. Поэтому говорят, что z есть функция точки $P(x, y)$ и пишут $z = F(P)$ **Область определения функции.** Область определения функции $z = F(x, y)$ в общем случае может быть достаточно сложной, ограничимся рассмотрением только тех случаев, когда эта область есть конечная или бесконечная часть плоскости, ограниченная одной или несколькими непрерывными линиями - границами области. Не исключается и тот случай, когда какая-то из границ превращается в одну точку. Область называется замкнутой, если она включает в себя все свои границы. Область D определения функции задается вместе с определением самой функции и обуславливается теми геометрическими, физическими и т.д. условиями, которыми эта функция определена. Если функция задана аналитическим выражением (формулой) без каких-либо дополнительных условий, то под ее областью определения понимают область существования аналитического выражения, т.е. совокупность всех тех точек, в которых данное аналитическое выражение определено и принимает только действительные значения.

Область определения функции трех переменных представляет собой некоторую пространственную область, в частности, некоторый объем. Под пространственной областью понимается часть пространства, ограниченная одной или несколькими поверхностями.

Иными словами, как только расстояние переменной точки $P(x, y)$ от фиксированной точки $P_0(x_0, y_0)$ станет достаточно малым, значение функции Z в точке P будет отличаться от числа A меньше, чем на ε , где ε может быть выбрано сколь угодно малым. При этом пишут

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} F(x, y) = A \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} F(P) = A$$

1. Найти полное приращение Δu и полный дифференциал du функции

$u(x, y) = 3x^2 + xy - y^2 + 1$ в точке $(1, 2)$, если а) $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$ б) $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$

в) $\Delta x = 0,01$, $\Delta y = 0,02$

Найти частные производные, частные дифференциалы и полный дифференциал первого порядка

2. $z = \ln(x^2 + y^2)$ 3. $z = x^y$ 4. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ 5. $z = \sin(x^2 y)$ 6. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ 7.

$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 8. $u = \frac{\operatorname{arctg} y}{1 + x^2}$ 9. $u = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$ 10. $u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 11. $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$

Найти приближенные значения выражений

12. $1,03^{3,001}$ 13. $\ln(\sqrt{1,04} + \sqrt[3]{0,94} - 1)$ 14. $\sin 31^\circ \cdot \operatorname{tg} 44^\circ$

15. Для вычисления объема цилиндра были вычислены его высота и диаметр основания. При этом оказалось, что высота $h = 60$ см, а диаметр $D = 50$ см, и

границы ошибок,

допущенных при измерении, $\Delta h = \Delta D = 0,1$ см. Найти границу ошибки ΔV в объеме цилиндра, вычисленном по этим данным

16. Для вычисления удельного веса тела его взвешивают и измеряют его объем. Оказывается, что вес $P = 326$ г, а объем $V = 126$ см³, при этом границы ошибок величин P и V равны $\Delta P = 0,5$ г, $\Delta V = 1$ см³. Определите границу ошибки ΔD в удельном весе D , вычисленном по этим данным.

Домашняя работа по теме «Дифференциал ФНП»

1. Найти полное приращение и полный дифференциал этой функции $u(x, y) = x^3 y^2$ в точке $(2, 1)$, при а) $\Delta x = -0,1$, $\Delta y = -0,1$ б) $\Delta x = -0,01$, $\Delta y = -0,01$

Найти частные производные, частные дифференциалы и полный дифференциал первого порядка

2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 3. $z = y^{x^2}$ 4. $z = \sin \frac{y}{x}$ 5. $z = \frac{x^2 + 4}{y}$ 6. $z = \frac{ay - bx}{by - ax}$ 7.

$$z = x \sin y + y \sin x$$

8. $z = x + y e^{\frac{x}{y}}$

Вычислить приближенные значения выражения

9. $0,97^{2,02}$ 10. $1,003^{2,07}$ 11. $\sqrt{6,03^2 + 8,04^2}$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке M_0

1. $z = x^2 + 3y^2$ $M_0(1;1)$

2. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z - 1 = 0$ $M_0(1;2;2)$

3. $x^2 + 3y^2 - z^2 - 2yz + x = 5$ $M_0(1;-1;2)$

4. $z = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4$ $M_0(-1;0;1)$

5. К поверхности $x^2 + 3y^2 + z^2 = 1$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $2x + 4y + z = 0$

6. Определить уравнение той касательной плоскости к эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, которая отсекает равные отрезки на координатных осях.

7. В какой точке эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

Домашняя работа

Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке M_0

1. к эллиптическому параболоиду $z = 2x^2 + y^2$ в точке $M_0(1;1;3)$

2. к поверхности $z = x^4 + 2x^2y - xy + x$ в точке $M_0(1;0;2)$

3. к гиперболическому параболоиду $z = xy$ в точке $M_0(1;2;2)$

4. $x^2 + y^2 - x + 2y + 4z - 13 = 0$ $M_0(2;1;2)$

5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $M_0(x_0; y_0; z_0)$

6. К поверхности $x^2 + 2y^2 + z^2 = 0$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x - y + 2z = 0$

21. Производные и дифференциалы высших порядков

Найти частные производные второго порядка:

1. $z = x^4 + 3x^3y - 4x^2y^2 + 5xy^3 - y^4$ 2. $z = xy \ln \frac{x}{y}$ 3. $z = \sin x \operatorname{tg} y$ 3.

$z = 3x^2 + 2xy^2 - 4xy + x^2y - y^3$ 4. $u = e^{xyz}$ 5. $u = \sin\left(\frac{xy}{z}\right)$ 6. $z = \arcsin(x + y)$ 7.

$z = x \sin xy + y \cos xy$ 8. $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x+y}{x-y}$ 9. $z = x^2 \ln(x + y)$ 10. $z = x^2 \sin \sqrt{y}$ 11.

$z = x^y$

12. Определить производную $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z}$ функции $u = \sin(xyz)$.

13. Показать, что функция $z = \ln r$, где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

Домашняя работа

Найти частные производные второго порядка:

1. $z = xy$ 2. $z = ye^x$ 3. $z = \sin x \cdot \cos 2y$ 4. $z = y \ln x$ 5. $z = e^{x+y^2}$ 6. $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{xy}$ 7.

$z = \frac{y^2}{1+x}$ 8. $z = \ln(x^2 + y^2)$ 9. $z = e^{xy}$

22. Дифференциалы высших порядков

Найти дифференциал второго порядка d^2z функции z :

1. $z = x^2 y^2$ 2. $z = 2x^2 - 3xy - y^2$ 3. 5^{2x-3y} 4. $z = x^y$, где $x = uv$; $y = u + v$

5. $z = z(x, y)$; $x = \varphi(u, v)$; $y = \psi(u, v)$ 6. $z = \frac{y \cdot \sin 2y}{\sqrt[3]{x^2}}$

7. Найти дифференциал третьего порядка d^3z функции $z = \cos(x + 2y^2)$

Домашняя работа

Найти дифференциал второго порядка d^2z функции z :

1. $z = x^3 y^3$ 2. $z = e^{x-y^2} + \cos x$ 3. $z = y \cdot \ln x$ 4. $z = xy$ 5. $z = e^{ax+by}$ 6. $z = y + e^{xy}$ 7.

$z = z(u, v)$, где $u = x^2 + y^2$; $v = xy$

8. Найти дифференциал третьего порядка функции $z = \sin(2x + y)$ при $x = \frac{\pi}{2}$; $y = 0$.

23. Экстремум функции нескольких переменных

Исследовать на экстремум функцию нескольких переменных

1. $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$ 2. $z = 14x^3 + 27xy^2 - 69x - 54y$ 3. $z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 6y$ 4. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ 5. $z = xy(x + y - 2)$ 6. $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y - 2z$ 7. $u = -2x^2 - y^2 + 2z^2 - 2xy + 3xz - 2yz - 4x + 8y + z + 4$ 8. $z = \frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 5x - y + 2$ 9. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ 10. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$ 11. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$ 12. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ 13. $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$ 14. $z = 4 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ 15. $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$

Домашняя работа

Исследовать на экстремум функцию нескольких переменных

1. $z = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} - 4x - 5y$ 2. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ 3. $z = x^3y^2(12 - x - y)$ 4. $z = xy(xy(x + y - 1))$ 5. $z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ 6. $u = x^2 + y^2 + x^2 - xy + x - 2z$ 7. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$ 8. $z = xy^2 - xy - xy^3$ ($x > 0, y > 0$)

Наибольшее и наименьшее значение функции нескольких переменных

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = z(x, y)$ в области D , ограниченной заданными линиями

1. $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ $D: x = 0, y = 0, x + y + 5 = 0$
2. $z = xy - y^2 + 3x + 4y$ $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$
3. $z = x^3 + 33xy^2 + 66y^2 - 147x$ $D: x = 0, y = 0, 3x + y = 27$
4. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$
5. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$
6. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ $D: x = 3, y = 0, x - y + 1 = 0$
7. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$ $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$
8. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2$ $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$
9. Доказать, что из всех треугольников, имеющих данный периметр $2p$, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.
10. Канал, подводящий воду к турбине, имеет в сечении равнобедренную трапецию, площадь которой задана и равна S . Определить глубину канала и угол α откоса так, чтобы периметр, смоченный водой, был наименьшим*.

Домашняя работа

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в прямоугольнике с вершинами $A(1, -3)$, $B(1, 2)$, $C(4, 2)$, $D(4, -3)$,

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = z(x; y)$ в области D , ограниченной заданными линиями

2. $z = xy(x + y + 1)$ $D: x = 1, x = 2, y = \frac{1}{x}, y = -\frac{3}{2}$

3. $z = \cos x \cdot \cos y \cdot \cos(x + y)$ $D: x = 0, x = 2, x = \pi, y = 0, y = \pi$

4. $z = xy(x + y + 1)$ $D: x = 1, x = 2, y = \frac{1}{x}, y = -\frac{3}{2}$

5. $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ $D: x = 0, y = \frac{x^2}{2}, y = 2$

6. $z = x^3 + 33xy^2 - 108x + 165y^2$ $D: x = 0, y = 0, 3x + y = 48$

7. $z = x^3 + 15xy^2 - 27x - 30y^2$ $D: x = 0, y = 0, 3x + y = 27$

8. $z = x^3 + 63xy^2 - 75x + 126y^2$ $D: x = 0, y = 0, 2x + y = 38$

9. Число **a** разделить на три слагаемых так, чтобы произведение этих трех слагаемых было наибольшим.

24. Метод множителей Лагранжа

Найти условный экстремум функции $z = z(x, y)$ при заданном уравнении связи

1. $z = 5x^2y \quad 2x + y - 3 = 0$

2. $z = x + y - 1 \quad y^3 - 6xy + x^3 = 0$

3. $z = xy \quad x + y - 1 = 0$

4. $z = 2x^2 + y^2 \quad x + 2y - 1 = 0$

5. $z = x^2 - y^2 \quad 2x - y - 3 = 0$

6. $z = xy^2 \quad x + 2y - 1 = 0$

7. $z = x^2y \quad 2x - y + 2 = 0$

8. $z = 3xy \quad x - y + 3 = 0$

Домашняя работа

1. $z = 2xy \quad x - 2y + 1 = 0$

2. $z = x^2 + 2y^2 \quad 2x + 3y - 4 = 0$

3. $z = 3x^2 - y^2 \quad x - 2y + 1 = 0$

4. $z = 4xy^2 \quad 3x - y + 2 = 0$

5. $z = 3x^2y \quad x + 2y + 3 = 0$

25. Метод наименьших квадратов

ВАРИАНТ – 1

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую.

x_i	1	12	20	30	32
y_i	8	9	11	13	14

ВАРИАНТ – 2

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую.

x_i	21	23	31	38	45
y_i	-9	-7	-13	-16	-18

ВАРИАНТ – 3

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	3	5	8	11	23
y_i	-4	-7	-9	-13	-18

ВАРИАНТ – 4

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	11	21	34	43	49
y_i	1	2	4	8	9

ВАРИАНТ – 5

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	5	8	12	13	40
y_i	6	7	9	9	16

ВАРИАНТ – 6

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	10	11	13	16	18
y_i	9	8	6	3	2

ВАРИАНТ – 7

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	12	17	33	41	43
y_i	-3	-5	-17	-23	-24

ВАРИАНТ – 8

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	1	3	5	12	21
y_i	10	11	12	14	16

ВАРИАНТ – 9

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	7	9	13	16	23
y_i	7	8	9	10	12

ВАРИАНТ – 10

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	32	41	53	67	73
y_i	16	14	11	9	7

ВАРИАНТ – 11

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	-35	-32	-31	-25	-15
y_i	-14	-13	-12	-9	-4

ВАРИАНТ – 12

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	11	13	17	19	22
y_i	13	14	15	16	17

ВАРИАНТ – 13

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	2	2,5	3	3	3,5
y_i	11	13	14	14,5	15

ВАРИАНТ – 14

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	2	3	4,5	5	6
y_i	1	-4	-12	-16	-18

ВАРИАНТ – 15

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	7	9	12	13	17
y_i	17	11	8	1	-5

ВАРИАНТ – 16

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	1	2,5	3,5	4	5
y_i	3	5	5	7	8

ВАРИАНТ – 17

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	-11	-5	2	4	7
y_i	2	3,5	5	6	7

ВАРИАНТ – 18

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	2	3	4	4,5	6
y_i	-3	-4	-5	-5	-6

ВАРИАНТ – 19

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	-12	-7	3	2	2
y_i	6	5	0	0,5	-1

ВАРИАНТ – 20

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	-11	-7	-5	-1	12
y_i	2	2,5	3	4	5

ВАРИАНТ – 21

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	2	3	3,5	4	5
y_i	3,5	8	9	13	15

ВАРИАНТ – 22

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	-10	-8	-2	-1	2
y_i	24	20	5	1	-6

ВАРИАНТ – 23

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	1	-6	-20	-30	-50

ВАРИАНТ – 24

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	4,5	5	5,5	6	6,5
y_i	8,5	10	10,5	13	13

ВАРИАНТ – 25

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	-1	2	5	9	12
y_i	-7	-6	-4,5	-3	-1

ВАРИАНТ – 26

Методом наименьших квадратов найти эмпирическую формулу. Изобразить на графике эмпирические значения и прямую

x_i	-3	-1,5	-1	1	2
y_i	14	8	5	-2	-5

Список рекомендуемой литературы

Перечень основной литературы:

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ — М.: Проспект, 2023. — 660 с. ISBN 978-5-392-35821-4
2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа (в 3 томах) — М.: Дрофа, 2020. ISBN 978-5-358-23108-0
3. Зорич В.А. Математический анализ (часть 1, 2) — М.: МЦНМО, 2022. — 564 с. ISBN 978-5-4439-1672-7

Перечень дополнительной литературы:

1. Математический анализ. Ч.І: учебное пособие / И.А. Антипова [и др.]. - Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2018. - 196 с. - ISBN 978-5-7638-3326-3. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/84232.html>
2. Математический анализ. Ч.ІІ: учебное пособие / И.А. Антипова [и др.]. - Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2018. - 188 с. - ISBN 978-5-7638-3327-0. — Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/84231.html>
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу — М.: АСТ, 2019. — 624 с. ISBN 978-5-17-115929-0