

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ
по дисциплине «Дифференциальная геометрия и топология»
для студентов направления подготовки
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
направленность (профиль)
«Анализ данных и искусственный интеллект»

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Целью освоения дисциплины «Дифференциальная геометрия и топология» является формирование соответствующих общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки.

Основными задачами освоения дисциплины является формирование:

- минимума фундаментальных знаний по дифференциальной геометрии и топологии;
- научного мировоззрения;
- устойчивого познавательного интереса к изучению геометрии;
- сознания, ориентированного на связь математики с жизнью и практикой и на эстетическое восприятие окружающего мира;
- общей математической культуры;
- прикладной и практической направленности обучения геометрии;
- вычислительной, алгоритмической и графической культуры;
- логического мышления и логической грамотности;
- абстрактного мышления и пространственных представлений;
- потребности в проведении доказательств, воспитание привычки обосновывать высказываемые суждения;
- развитие памяти, внимания, мышления;
- освоение применения методов математического анализа при изучении свойств геометрических образов, усвоение внутренней логики связывающей различные разделы, решения задач.

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

№ п/п	Содержание компетенции	Шифр
<u>Общепрофессиональные компетенции</u>		
1.	Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности	ОПК-1

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

ЗНАТЬ	• основные понятия дифференциальной геометрии и топологии, • определения и свойства математических объектов в этой области, формулировки утверждений, методы их доказательства, • возможные сферы их приложений, в том числе в компьютерном моделировании геометрических и топологических объектов и явлений.
УМЕТЬ	• решать задачи вычислительного и теоретического характера в области дифференциальной геометрии и топологии, • доказывать утверждения.
ВЛАДЕТЬ	• математическим аппаратом дифференциальной геометрии и топологии, • дифференциально-геометрическими методами исследования

	геометрических объектов и теоретико-множественными методами исследования объектов топологии.
--	--

Методические рекомендации подготовлены с учетом требований ФГОС ВО и имеющейся программы по данной дисциплине.

Предлагаемые методические рекомендации содержат систематизированный минимум теоретических сведений, необходимых для подготовки к практическим занятиям, закрепления материала, изученного на занятиях, содержит материалы для организации СКР и проведения текущего контроля знаний и умений студентов. Приведены примеры решения типовых задач, демонстрирующие основные приемы и методы решения.

Рассмотренный в пособии материал охватывает весь программный материал по соответствующей дисциплине для указанных специальностей и содержит дополнительный материал, способствующий целостному пониманию материала.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Векторная функция скалярного аргумента

1.1. Определение вектор-функции. Предел. Непрерывность

Кривые и поверхности удобно задавать функциями, принимающими векторные значения или вектор-функциями. Кратко сформулируем основные понятия анализа применительно к вектор-функциям.

Пусть E_3 – трёхмерное евклидово пространство и I – некоторый числовой промежуток.

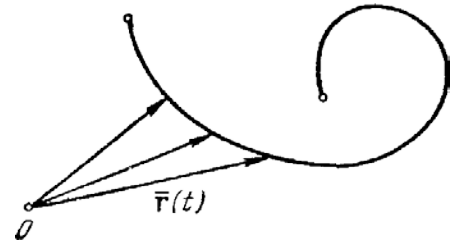


Рисунок 1

Определение 1.1. Если каждому числу $t \in I$ по некоторому закону поставлен в соответствие определённый вектор $\vec{r}(t)$ из пространства E_3 , что в промежутке I задана векторная функция скалярного аргумента или вектор-функция $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

Здесь $x(t), y(t), z(t)$ – некоторые непрерывные скалярные функции.

С вектор-функцией $\vec{r}(t)$ связываются следующие наглядные представления. Если откладывать от начала координат векторы $\vec{r}(t)$, отвечающие различным значениям аргумента t , то концы этих векторов составят некоторую кривую – график вектор-функции $\vec{r}(t)$, обычно называемую *годографом* функции $\vec{r}(t)$ (рис. 1). Если рассматривать аргумент t как время, то годограф функции $\vec{r}(t)$ – это траектория движения некоторой точки.

1.2. Дифференцирование вектор-функции

Вектор-функция $\vec{r}(t)$ непрерывна в точке t_0 тогда и только тогда, когда все три ее компоненты – скалярные функции $x(t), y(t), z(t)$ – непрерывны в точке t_0 . Сумма, разность, скалярное и векторное произведения непрерывных вектор-функций непрерывны.

Определение 1.2. Векторная функция $\vec{r}(t)$ имеет в точке t производную, если существует предел отношения $\frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

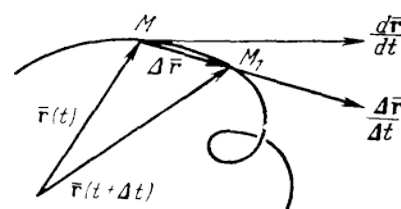
Обозначается производная через $\frac{d\bar{r}}{dt}$ или $\bar{r}'(t)$. Таким образом,

$$\bar{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)}{\Delta t}. \quad (1.1)$$

Легко проверить, что существование $\bar{r}'(t)$ равносильно существованию трех производных $x'(t)$, $y'(t)$ и $z'(t)$, причем $\bar{r}'(t) = x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t)\bar{k}$.

Определение 1.3. Векторная функция $\bar{r}(t)$ называется дифференцируемой на множестве или простой дифференцируемой, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Вектор $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ направлен по секущей MM_1 годографа функции $\bar{r}(t)$ (рис. 2), а направление вектора $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ — это



направление предельной прямой, к которой стремится эта секущая, когда точка M_1 приближается к M , т. е. направление касательной к годографу в точке M .

Рисунок 2

Для вектор-функции имеют место следующие правила дифференцирования:

- 1) если $\bar{r}(t) = \text{const}$, то $\bar{r}'(t) = 0$;
- 2) $(k\bar{r}(t))' = k\bar{r}'(t)$, где $k = \text{const}$;
- 3) $(u(t)\bar{r}(t))' = u'(t)\bar{r}(t) + u(t)\bar{r}'(t)$, где $u(t)$ — скалярная функция;
- 4) $(\bar{r}_1(t) \pm \bar{r}_2(t))' = \bar{r}_1'(t) \pm \bar{r}_2'(t)$;
- 5) $(\bar{r}_1(t) \cdot \bar{r}_2(t))' = (\bar{r}_1'(t) \cdot \bar{r}_2(t)) + (\bar{r}_1(t) \cdot \bar{r}_2'(t))$ — для скалярного произведения;
- 6) $[\bar{r}_1(t), \bar{r}_2(t)]' = [\bar{r}_1'(t), \bar{r}_2(t)] + [\bar{r}_1(t), \bar{r}_2'(t)]$ — для векторного произведения;
- 7) если $\bar{r} = \bar{r}(t)$ и $t = t(\tau)$, то $\frac{d\bar{r}}{d\tau} = \frac{d\bar{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau}$ — правило дифференцирования сложной функции.

Пример 1.1. Задана векторная функция

$$\bar{r}(t) = (a \cos t)\bar{i} + (a \sin t)\bar{j} + (bt)\bar{k}, \quad \text{где } a, b = \text{const.} \quad \text{Найти } \bar{r}'(t).$$

Решение. Координатами вектора $\bar{r}(t)$ являются числовые функции

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = a \sin t, \quad z(t) = bt.$$

Тогда $\bar{r}'(t) = -(a \sin t)\bar{i} + (a \cos t)\bar{j} + b\bar{k}$. ■

Отметим следующие частные случаи дифференцирования вектор-функции:

а) *Производная вектора постоянного направления.* Пусть вектор $\bar{r}(t)$ имеет постоянное направление (т. е. от t зависит лишь его длина). Тогда векторы $\bar{r}(t)$ и $\bar{r}'(t)$ коллинеарны. Действительно, в этом случае $\bar{r}(t)$ можно записать в виде $\bar{r}(t) = u(t) \cdot \bar{e}$, где $u(t)$ – скаляр, а $\bar{e}$ – постоянный вектор, например единичный. Тогда $\bar{r}'(t) = u'(t) \cdot \bar{e}$, т.е.

$$\bar{r}'(t) = \frac{u'(t)}{u(t)} \bar{r}(t).$$

б) *Производная вектора постоянной длины.* Если $|\bar{r}(t)| = \text{const}$, то векторы $\bar{r}(t)$ и $\bar{r}'(t)$ взаимно ортогональны. Действительно, в этом случае $(\bar{r}(t) \cdot \bar{r}'(t)) = \text{const}$; дифференцируя это равенство, получаем $2(\bar{r}(t), \bar{r}'(t)) = 0$, т.е. $(\bar{r}(t) \cdot \bar{r}'(t)) = 0$, что и требовалось доказать.

Определение 1.4. Дифференциалом вектор-функции $\bar{r}(t)$ называется вектор

$$d\bar{r} = dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j} + dz \cdot \bar{k}.$$

Иначе говоря, $d\bar{r} = x'(t)dt \cdot \bar{i} + y'(t)dt \cdot \bar{j} + z'(t)dt \cdot \bar{k} = \bar{r}'(t)dt$.

Дифференциал вектор-функции равен произведению ее производной на дифференциал (т. е. приращение) независимой переменной. Как и в случае скалярной функции, дифференциал $d\bar{r}$ вектор-функции отличается от ее приращения $\Delta\bar{r}$ на величину выше первого порядка малости относительно Δt .

1.3. Интеграл от векторной функции по скалярному аргументу

Для вектор-функции $\bar{r}(t)$, заданной на отрезке $a \leq t \leq b$, как и для обычных скалярных функций, можно составить интегральные суммы и рассмотреть их предел при стремлении к нулю максимальной длины отрезков, на которые разбит отрезок $[a, b]$. Этот предел называется *интегралом* от $\bar{r}(t)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается символом

$$\int_a^b \bar{r}(t) dt.$$

При этом
$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \vec{i} \cdot \int_a^b x(t) dt + \vec{j} \cdot \int_a^b y(t) dt + \vec{k} \cdot \int_a^b z(t) dt.$$

На интегралы от вектор-функций распространяются обычные свойства интегралов от скалярных функций.

2. Сведения из теории кривых

2.1. Элементарная кривая

Пусть M – любое множество точек пространства.

Определение 2.1. Если каждой точке $x \in M$ поставлено в соответствие некоторая точка $f(x)$ пространства, то говорят, что задано отображение f множества M в пространство.

Точка $f(x)$ пространства называется *образом* точки x .

Множество точек $f(M)$, составленное из образов всех точек множества M , называется *образом* множества M .

Отображение f множества M называется *однозначным*, если образы различных точек различны.

Пусть f – однозначное отображение. Тогда определено отображение f^{-1} , которое точке $f(x)$ сопоставляет точку x . Это отображение называется *обратным* к f .

Определение 2.2. Отображение f множества M называется *непрерывным*, если какова бы ни была точка $x \in M$ и число $\varepsilon > 0$, существует число $\delta > 0$ такое, что для любой точки $y \in M$ расстояние $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, если расстояние $|y - x| < \delta$.

Определение 2.3. Отображение $f: M \rightarrow f(M)$ называется *гомеоморфизмом* или *топологическим отображением*, если оно взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Это значит, что f удовлетворяет двум условиям:

- 1) f – однозначное отображение;
- 2) f и f^{-1} – непрерывные отображения.

Относительно множества M и его образа $f(M)$ говорят, что они гомеоморфны или топологически эквивалентны.

Определение 2.4. Множество γ точек пространства называется *элементарной кривой*, если это множество является образом открытого отрезка при топологическом отображении его в пространство (при гомеоморфизме).

Пусть γ – элементарная кривая и $a \leq t \leq b$ – отрезок, образом которого при отображении f является кривая; $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ – координаты точки кривой, соответствующие точке t отрезка.

Определение 2.5. Система равенств
$$\begin{cases} x=f_1(t) \\ y=f_2(t) \\ z=f_3(t) \end{cases}$$
 называется параметрическими

уравнениями кривой γ .

Определение 2.6. Кривая γ называется регулярной (k – раз дифференцируемой), если функции $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ имеют непрерывные производные до порядка k включительно. При $k = 1$ кривая называется гладкой.

2.2. Касательная прямая к кривой

Пусть задана гладкая кривая γ , и её уравнение имеет вид $\bar{r} = \bar{r}(t)$ или

$$\bar{r}(t) = f_1(t)\bar{i} + f_2(t)\bar{j} + f_3(t)\bar{k}.$$

Возьмём на линии γ две точки M и M_1 , соответствующие значениям параметра t и $t + \Delta t$ (рис. 2). Вектор $\Delta \bar{r} = \bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t)$ является направляющим вектором секущей прямой MM_1 . Следовательно, вектор $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ также направляющий вектор секущей MM_1 . Когда $\Delta t \rightarrow 0$, точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M , вектор $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ стремится занять положение касательной в точке M (касательная к кривой в точке определяется как предельное положение секущей).

Вместе с тем отношение $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ стремится к производной $\bar{r}'$ как к своему пределу.

Отсюда следует, что производная от радиус – вектора точки параметрической кривой есть вектор, направленный по касательной к этой кривой в сторону возрастания параметра t .

Чтобы получить уравнение касательной к вектор – функции, выразим радиус – вектор $\bar{\rho} = \{x(t), y(t), z(t)\}$ любой точки касательной прямой через радиус – вектор $\bar{r}$ начальной точки, направляющий вектор $\bar{r}'$ и параметр λ .

Тогда $\bar{\rho} = \bar{r} + \lambda \bar{r}'$ – уравнение касательной в параметрическом виде.

Заменяя это векторное уравнение скалярными функциями, получим параметрические уравнения касательной:

$$\begin{cases} x(t) = f_1(t) + \lambda f_1'(t) \\ y(t) = f_2(t) + \lambda f_2'(t) \\ z(t) = f_3(t) + \lambda f_3'(t) \end{cases}$$

или, исключив параметр λ , каноническое уравнение касательной:

$$\frac{x - f_1(t)}{f_1'(t)} = \frac{y - f_2(t)}{f_2'(t)} = \frac{z - f_3(t)}{f_3'(t)}.$$

Указанный способ определения касательной, очевидно, неприменим к той точке t_0 , для которой $\bar{r}'(t_0) = 0$. Такие точки будем называть *особыми* точками кривой и будем исключать их из рассмотрения.

2.3. Соприкасающаяся плоскость кривой

Пусть PQ — касательная в точке P к кривой γ (рис. 3). Через касательную PQ и точку M кривой проведем плоскость PQM . Плоскость π , к которой стремится плоскость PQM при $M \rightarrow P$, называется *соприкасающейся плоскостью* к кривой γ в точке P .

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.1. *Регулярная, дважды дифференцируемая кривая γ без особых точек имеет соприкасающуюся плоскость π каждой точке, в которой векторы $\bar{r}(t)$ и $\bar{r}'(t)$ не коллинеарны.*

Получим уравнение соприкасающейся плоскости в другой форме. Так как векторы $\bar{R} - \bar{r}(t)$, $\bar{r}'(t)$, $\bar{r}''(t)$ компланарны, то вектор $\bar{R}$ удовлетворяет следующему уравнению

$$(\bar{R} - \bar{r}(t))\bar{r}'(t)\bar{r}''(t) = 0. \quad (2.1)$$

Если X, Y, Z — координаты вектора $\bar{R}$ (координаты переменной точки s плоскости π), а $x(t), y(t), z(t)$ — координаты вектора $\bar{r}(t)$, то в координатной форме уравнение (2.1) запишется следующим образом:

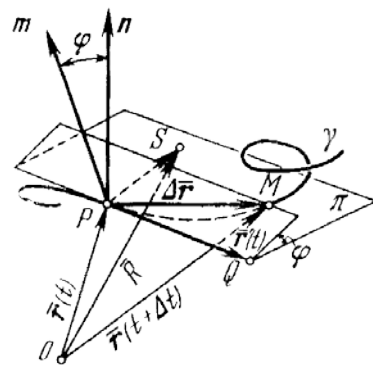


Рисунок 3

$$\begin{bmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{bmatrix} = 0. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.2), очевидно, представляет собой уравнение соприкасающейся плоскости.

Замечание 2.1. Соприкасающаяся плоскость определена геометрически с помощью предельного перехода, и поэтому в случае ее существования она будет единственна. Отсюда и из доказанного в этом пункте утверждения вытекает, что если в данной точке кривой существует соприкасающаяся плоскость, то при любой параметризации кривой вектор $\bar{r}''(t)$ параллелен этой плоскости.

2.4. Длина дуги как параметр

Выберем на гладкой кривой $\gamma: \bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ некоторую точку M_0 , соответствующую значению параметра $t = t_0$ и назовём её начальной точкой.

Длина дуги, имеющий начало в точке M_0 и конец в произвольной точке M , определяется, как известно из курса математического анализа, по формуле:

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

или в векторной форме $s = \int_{t_0}^t |\bar{r}'(t)| dt$.

Следовательно, длина дуги $s = s(t)$ является дифференцируемой функцией параметра t .

Так как производная этой функции $s' = |\bar{r}'(t)| > 0$ во всех точках кривой, то функция $s = s(t)$ является возрастающей функцией параметра t . Ввиду того, что все точки t кривой γ и значения длины дуги s находятся во взаимно однозначном и непрерывном соответствии, s можно принять за новый параметр. Такая параметризация называется *естественной* или *натуральной* параметризацией, где s – естественный или натуральный параметр. Так как $\frac{ds}{dt} = |\bar{r}'(t)|$, то $|ds| = |\bar{r}'(t)dt| = |d\bar{r}|$ и $\left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right| = 1$.

Отсюда следует, что $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{r}'(s)$ – единичный вектор. Будем называть его *единичным*

вектором касательной к линии в точке M и обозначать через $\bar{\tau}$, т.е. $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}$ или

$\bar{r}'(s) = \bar{\tau}$. Тогда $|\bar{\tau}| = 1$.

Задача 2.1. Найти длину дуги гиперболической винтовой линий $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = a \operatorname{sh} t, \\ z = at \end{cases}$ за-

ключённую между точками O и t . Параметризовать при помощи естественного параметра.

Решение. Найдём длину дуги

$$s = \int_0^t \sqrt{(a^2 \operatorname{sh}^2 t + a^2 \operatorname{ch}^2 t) + a^2} dt = \int_0^t a \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t + 1} dt. \text{ Вычислим отдельно}$$

$$\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t + 1 = \frac{(e^t - e^{-t})^2}{4} + \frac{(e^t + e^{-t})^2}{4} + 1 = \frac{2e^{2t} + 2e^{-2t} + 4}{4} = \frac{2(e^t + e^{-t})^2}{4} = 2 \operatorname{ch}^2 t$$

Тогда $s = a \int_0^t \sqrt{2} \operatorname{ch} t dt = a\sqrt{2} \operatorname{sh} t \Big|_0^t = a\sqrt{2} \operatorname{sh} t$. Выразим из равенства $s = a\sqrt{2} \operatorname{sh} t$

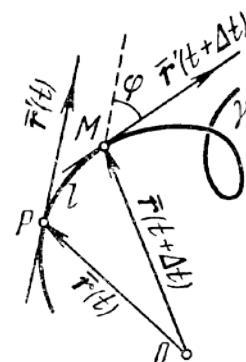
параметр t . Имеем $\operatorname{sh} t = \frac{s}{a\sqrt{2}}$ и, следовательно, $t = \operatorname{arcsch} \frac{s}{a\sqrt{2}}$.

Таким образом, получены естественные уравнения кривой

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} \left(\operatorname{arcsch} \frac{s}{a\sqrt{2}} \right); \\ y = a \operatorname{sh} \left(\operatorname{arcsch} \frac{s}{a\sqrt{2}} \right); \\ z = a \operatorname{arcsch} \frac{s}{a\sqrt{2}}. \end{cases}$$

2.5. Кривизна кривой

Пусть P — произвольная фиксированная точка регулярной кривой γ без особых точек и M — точка этой кривой, отличная от P . Обозначим через φ угол между касательными в точках P и M , а через s — длину дуги PM (рис. 4).



О п р е д е л е н и е 2.7. К р и в и з н о й k кривой γ в точке P называется предел отношения φ / l при $s \rightarrow 0$ т. е. при $M \rightarrow P$ или $k = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{l}$.

Рисунок 4

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.2. Регулярная (дважды дифференцируемая) кривая γ без особых точек имеет в каждой точке определенную кривизну k .

Докажем это утверждение.

Пусть точки P и M кривой отвечают соответственно значениям t и $t + \Delta t$ параметра. Вычислим $\sin \varphi$ и s . Так как кривая γ регулярна, то $\bar{r}'(t) \neq 0$ в любой точке кривой γ , и поэтому

$$\sin \varphi = \frac{|\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)|}{|\bar{r}'(t)| |\bar{r}'(t + \Delta t)|}, \quad (2.3)$$

$$s = \int_t^{t + \Delta t} |\bar{r}'(\tau)| d\tau = |\bar{r}'(\tau^*)| \Delta t = |\bar{r}'(t)| \Delta t + \delta \Delta t, \quad (2.4)$$

где $\delta \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Отметим, что при преобразованиях выражения для s мы воспользовались формулой среднего значения для интеграла и непрерывностью функции $\bar{r}'(t)$.

Преобразуем выражение (2.3) для $\sin \varphi$. По формуле Тейлора

$$\bar{r}'(t + \Delta t) = \bar{r}'(t) + \bar{r}''(t) \Delta t + \alpha \Delta t, \quad \alpha \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0.$$

С помощью этой формулы выражение (2.3) для $\sin \varphi$ принимает следующий вид:

$$\sin \varphi = \frac{|\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)| + \beta}{|\bar{r}'(t)|^2 + \varepsilon}, \quad (2.5)$$

где $\beta \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Обращаясь к формулам (2.4) и (2.5) и используя при $\varphi \neq 0$ тождество

$$\frac{\varphi}{s} = \frac{\varphi}{\sin \varphi} \frac{\sin \varphi}{\varphi} \quad (\text{при } \varphi = 0 \text{ отношение } \frac{\varphi}{s} \text{ равно нулю}), \text{ получим}$$

$$\frac{\varphi}{s} = \frac{\varphi}{\sin \varphi} \frac{|\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)| + \varepsilon}{|\bar{r}'(t)|^3 + \mu}, \quad (2.6)$$

где β и μ стремятся к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$. Так как $\varphi \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$, то $\frac{\varphi}{\sin \varphi} \rightarrow 1$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Поэтому из соотношения (2.6) следует, что при $\Delta t \rightarrow 0$, т.е. $M \rightarrow P$ предел $\frac{\varphi}{s}$ существует и

равен $\frac{|\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)|}{|\bar{r}'(t)|^3}$. Утверждение доказано. ■

Итак, при условиях утверждения кривизна k существует и может быть найдена по формуле

$$k = \frac{|\bar{r}'(t), \bar{r}''(t)|}{|\bar{r}'(t)|^3}. \quad (2.7)$$

Замечание 2.2. Если в качестве параметра на кривой выбрана длина дуги s , так что $\bar{r} = \bar{r}(s)$, то $|\bar{r}'(s)| = 1$ и вектор $\bar{r}''(s)$ ортогонален вектору $\bar{r}'(s)$. В этом случае, очевидно, формула (2.7) примет следующий вид

$$k = |\bar{r}''(s)|. \quad (2.8)$$

На всей линии γ кривизна k есть функция параметра s , т.е. $k=k(s)$. Если в данной точке M имеем $k \neq 0$, то число $\rho = \frac{1}{k}$ называется *радиусом кривизны* линии в точке M .

Таким образом, если линия задана в естественной параметризации, то её кривизна вычисляется по формуле:

$$k = \left| \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right| = \left| \frac{d^2 \bar{r}}{ds^2} \right|$$

или в координатах:

$$k = \sqrt{\left(\frac{d^2 x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{ds^2} \right)^2}.$$

Примем без доказательства следующее утверждение.

Утверждение 2.3. Для того, чтобы линия была простейшей (прямая, отрезок, луч) необходимо и достаточно, чтобы кривизна была равна нулю в каждой точке этой линии.

2.6. Кривизна кривой

Пусть P — произвольная фиксированная точка регулярной кривой $\gamma: r = r(t)$ без особых точек и M — точка этой кривой, отличная от P . Обозначим через φ угол между соприкасающимися плоскостями в точках P и M , а через s — длину дуги PM .

Определение 2.8. Абсолютным кручением $|\chi|$ кривой γ в точке P называется предел отношения φ/s при $s \rightarrow 0$ (т. е. при $M \rightarrow P$).

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.4. Регулярная (трижды дифференцируемая) кривая γ без особых точек имеет в каждой точке, где кривизна отлична от нуля, определенное абсолютное кручение.

Докажем это утверждение.

Пусть точки P и M кривой γ отвечают соответственно значениям t и $t + \Delta t$ параметра. Нормали к соприкасающимся плоскостям в P и M определяются векторами векторных произведений $[\bar{r}', \bar{r}'']_P$ и $[\bar{r}', \bar{r}'']_M$. По формуле Тейлора с учетом равенства $[\bar{r}', \bar{r}''] = 0$ получим

$$[\bar{r}', \bar{r}'']_M = [\bar{r}', \bar{r}'']_P + ([\bar{r}', \bar{r}''']_P) \Delta t + \alpha \Delta t = [\bar{r}', \bar{r}''']_P \Delta t + \beta \Delta t \quad (2.9)$$

где $\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Для вычисления предела φ/s при $s \rightarrow 0$ нам понадобится значение синуса угла φ между нормальными к соприкасающимся плоскостям в точках P и M . Для этой цели найдем модуль векторного произведения $[\bar{r}', \bar{r}''']_P$ и $[\bar{r}', \bar{r}'']_M$, а также произведение модулей этих векторов. С помощью (2.9) получим

$$[[\bar{r}', \bar{r}''']_P, [\bar{r}', \bar{r}'']_M] = [[\bar{r}', \bar{r}''']_P, ([\bar{r}', \bar{r}''']_P + [\bar{r}', \bar{r}''']_P \Delta t + \beta \Delta t)]$$

Отсюда, используя распределительное свойство векторного произведения и известную формулу $[a, [b, c]] = b(ac) - c(ab)$ для двойного векторного произведения, найдем

$$[[\bar{r}', \bar{r}''']_P, [\bar{r}', \bar{r}'']_M] = \bar{r}'_P (\bar{r}'' \bar{r}''' \bar{r}''')_P \Delta t + \beta \Delta t,$$

где $\varepsilon = \left| \left[\bar{r}', \bar{r}'' \right]_P \right|$, и поэтому $\beta \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Из последнего выражения для $\left| \left[\bar{r}', \bar{r}'' \right]_P, \left[\bar{r}', \bar{r}'' \right]_M \right|$ получаем следующую формулу:

$$\left| \left[\left[\bar{r}', \bar{r}'' \right]_P, \left[\bar{r}', \bar{r}'' \right]_M \right] \right| = \left| \bar{r}'_P \right| \left| (\bar{r}' \bar{r}'' \bar{r}''')_P \right| \Delta t + e \Delta t, \quad (2.10)$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Путем аналогичных рассуждений получается также следующая формула:

$$\left| \left[\bar{r}', \bar{r}'' \right]_P \right| \cdot \left| \left[\bar{r}', \bar{r}'' \right]_M \right| = \left[\bar{r}', \bar{r}'' \right]_{2P} + m \Delta t \quad (2.11)$$

где $\mu \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Из формул (2.10) и (2.11) получаем нужное нам выражение для $\sin \varphi$:

$$\sin \varphi = \frac{\left(\left| \bar{r}' \right| (\bar{r}' \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{r}''') + e \right) \Delta t}{\left[\bar{r}', \bar{r}'' \right]^2 + m \Delta t}.$$

Отметим, что в этом выражении значения производных векторной функции $\bar{r}(t)$ вычислены в точке P .

$$s = \int_t^{t+\Delta t} \left| \bar{r}'(\phi) \right| d\phi = \left| \bar{r}'(\phi) \right| \Delta t = \left| \bar{r}'(t) \right| \Delta t + o(\Delta t). \quad (2.12)$$

Обращаясь к выражению (2.12) для s , используя только что полученную формулу для $\sin \varphi$ и известный предел $\frac{\varphi}{\sin \varphi} \rightarrow 1$ при $\varphi \rightarrow 0$, убедились, что предел

$$\frac{\varphi}{s} \text{ при } s \rightarrow 0 \text{ существует и равен } \frac{\left| (\bar{r}' \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{r}''') \right|}{\left[\bar{r}', \bar{r}'' \right]^2}.$$

Итак, в условиях утверждения абсолютное кручение $|\chi|$ существует и может быть найдено по формуле

$$\chi = \frac{\left| (\bar{r}' \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{r}''') \right|}{\left[\bar{r}', \bar{r}'' \right]^2}.$$

Определим *кручение* χ кривой с помощью равенства

$$\chi = + \frac{\left| (\bar{r}' \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{r}''') \right|}{\left[\bar{r}', \bar{r}'' \right]^2}. \quad (2.13)$$

2.7. Формулы Френе

Рассмотрим регулярную (трижды непрерывно дифференцируемую) кривую

$\bar{r} = \bar{r}(s)$. Если в E_3 выбрана прямоугольная система координат, то

$$\gamma: \bar{r}(s) = x(s)i + y(s)j + z(s)k.$$

Вектор $\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}$ является *единичным вектором касательной* к линии γ в точке M ,

где $\overline{OM} = \bar{r}$.

Вектор $\bar{N} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}$ называется *вектором кривизны* линии γ в точке M и

$$\bar{N} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \bar{r}''(s).$$

Прямая, проходящая через точку M в направлении $\bar{N}$ называется *главной нормалью* линии γ в точке M (рис. 5).

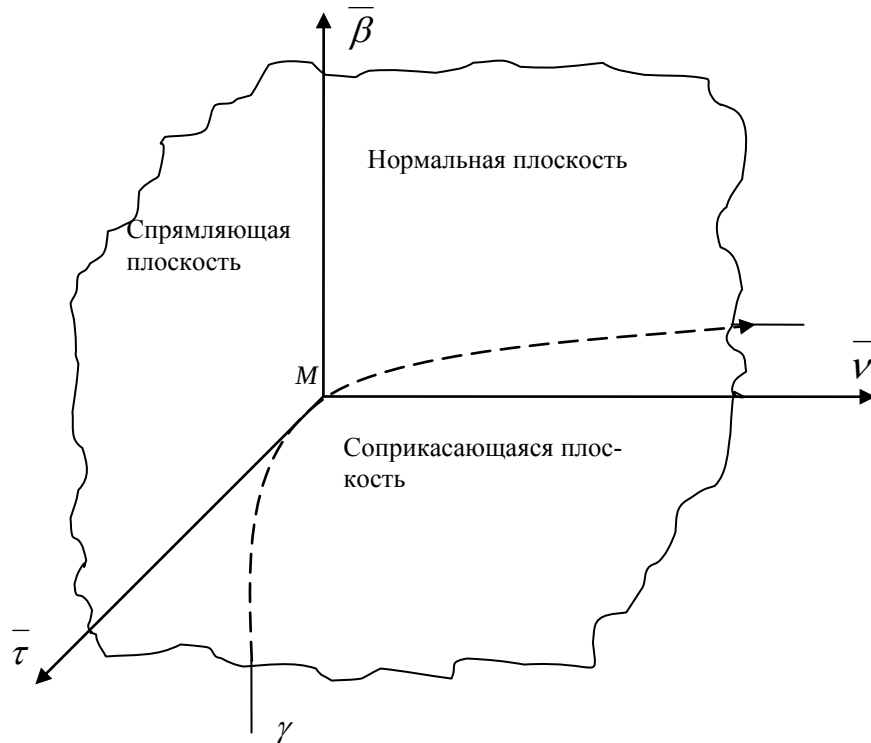


Рисунок 5

Имеем $\bar{N} \perp \bar{\tau}$, так как вектор $\bar{\tau}$ – вектор постоянной длины и, следовательно, перпендикулярен вектору $\bar{\tau}'$. Отсюда, главная нормаль перпендикулярна касательной.

Вектор $\frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} = \bar{\nu}$ называется *единичным вектором главной нормали*, т.е. $|\bar{\nu}|=1$. Так

как $|\bar{N}| = k$, то $\bar{N} = k\bar{\nu}$ и, следовательно, $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = k\bar{\nu}$ или

$$\bar{\tau}' = k\bar{\nu}. \quad (2.14)$$

Определим ещё вектор $\bar{\beta} = [\bar{\tau}, \bar{\nu}]$

Прямая, проходящая через точку M в направлении вектора $\bar{\beta}$ называется *бинормалью* линии γ в точке M , а вектор $\bar{\beta}$ – *единичный вектор бинормали*. Имеем, $|\bar{\beta}|=1$.

Плоскость, содержащая векторы $\bar{\tau}$ и $\bar{\nu}$ является *соприкасающейся плоскостью*; содержащая векторы $\bar{\nu}$ и $\bar{\beta}$ – *нормальной плоскостью*; содержащая векторы $\bar{\beta}$ и $\bar{\tau}$ – *спрямляющей плоскостью*.

Трёхгранник с вершиной в точке M , образованный этими тремя плоскостями, называются *сопровождающим трёхгранником* пространственной кривой (рис. 5).

Так как вектор $\bar{\nu}$ – единичный, т.е. постоянной длины, то $\bar{\nu}' \perp \bar{\nu}$ и значит вектор $\bar{\nu}'$, параллелен спрямляющей плоскости. Поэтому его можно разложить по векторам $\bar{\tau}$ и $\bar{\beta}$

$$\bar{\nu}' = \alpha\bar{\tau} + \chi\bar{\beta}, \quad (2.15)$$

где α, χ – координаты в базисе $\bar{\tau}, \bar{\beta}$.

Тождество $\bar{\tau} \cdot \bar{\nu} = 0$ дифференцируем по параметру s : $\bar{\tau}' \cdot \bar{\nu} + \bar{\tau} \cdot \bar{\nu}'$. Если в этом равенстве $\bar{\tau}'$ и $\bar{\nu}'$ заменить формулами (2.14) и (2.15), то получим $k\bar{\nu} \cdot \bar{\nu} + \bar{\tau} \cdot (\alpha\bar{\tau} + \chi\bar{\beta}) = 0$ или $k\bar{\nu} \cdot \bar{\nu} + \alpha\bar{\tau} \cdot \bar{\tau} + \chi\bar{\tau} \cdot \bar{\beta} = 0$. Учитывая, что $\bar{\nu} \cdot \bar{\nu} = \bar{\tau} \cdot \bar{\tau} = 1$, т.к. это скалярное произведение единичных векторов, а $\bar{\tau} \cdot \bar{\beta} = 0$, как скалярное произведение перпендикулярных векторов. Тогда будем иметь, что $k = -\alpha$ и, отсюда, $\alpha = -k$. Формула (2.15) принимает вид после подстановки $\alpha = -k$

$$\bar{\nu}' = -k\bar{\tau} + \chi\bar{\beta}. \quad (2.16)$$

Тождество $\bar{\beta} = [\bar{\tau}, \bar{\nu}]$ дифференцируем по параметру s :

$$\bar{\beta}' = [\bar{\tau}', \bar{\nu}] + [\bar{\tau}, \bar{\nu}'].$$

Заменяя здесь векторы $\bar{\tau}'$ и $\bar{\nu}'$ их выражения через (2.12) и (2.14), находим, что

$$\bar{\beta}' = [k\bar{\nu}, \bar{\nu}] + [\bar{\tau}, [-k\bar{\tau}, \chi\bar{\beta}]].$$

Отсюда $\bar{\beta}' = \chi[\bar{\tau}, \bar{\beta}]$ или $\bar{\beta}' = -\chi\bar{\nu}$. Здесь взят знак “минус”, так как тройка векторов $\bar{\tau}, \bar{\beta}, \bar{\nu}$ – левая; а число χ есть кручение линии γ в точке M .

Мы получили следующие *формулы Френе*:

$$\bar{\tau}'(s) = k\bar{\nu}, \quad \bar{\nu}'(s) = -k\bar{\tau} + \chi\bar{\beta}, \quad \bar{\beta}'(s) = -\chi\bar{\nu}. \quad (2.17)$$

Вся теория гладких линии основана на применении этих формул.

Найдём формулу для вычисления кручения, если линия γ задана естественным уравнением $\bar{r} = \bar{r}(s)$ или $\bar{r} = x(s)i + y(s)j + z(s)k$.

Первую формулу Френе можно записать так: $\bar{r}''(s) = k\bar{\nu}$. Продифференцируем это соотношение по s и используем вторую формулу Френе: $\bar{r}'''(s) = k'\bar{\nu} + k\bar{\nu}'$, получим

$$\bar{r}''' = k(-k\bar{\tau} + \chi\bar{\beta}) + k'\bar{\nu} = -k^2\bar{\tau} + k\chi\bar{\beta} + k'\bar{\nu}.$$

Таким образом, смешанное произведение векторов по базису $\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}$ найдётся, как

$$\bar{r}' \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{r}''' = \bar{\tau} \cdot (k\bar{\nu}) \cdot (-k^2\bar{\tau} + k\chi\bar{\beta} + k'\bar{\nu}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ -k^2 & k' & k\chi \end{vmatrix} = k^2\chi.$$

Отсюда получаем искомую *формулу для кручения линии*:

$$\chi = \frac{\bar{r}' \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{r}'''}{k^2} \quad (2.18)$$

или в координатах

$$\chi = \frac{1}{k^2} \begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) & z'(s) \\ x''(s) & y''(s) & z''(s) \\ x'''(s) & y'''(s) & z'''(s) \end{vmatrix}. \quad (2.19)$$

Линия γ называется *плоской*, если все её точки лежат в некоторой плоскости.

Примем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Кручение плоской линии во всех точках равно нулю.*

Верно и обратное утверждение.

Пример 2.2. Найти кривизну и кручение винтовой линии
 $\bar{r} = (a \cos t)i + (a \sin t)j + (bt)k, a > 0.$

Решение. Найдем производные вектор – функции

$$\bar{r}' = (-a \sin t)i + (a \cos t)j + bk,$$

$$\bar{r}'' = (-a \cos t)i + (-a \sin t)j,$$

$$\bar{r}''' = (a \sin t)i + (-a \cos t)j.$$

Теперь определим векторное произведение

$$\begin{aligned} [\bar{r}', \bar{r}''] &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = (ab \sin t)i - (ab \cos t)j + (a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t)k = \\ &= (ab \sin t)i - (ab \cos t)j + a^2 k. \end{aligned}$$

Далее для смешанного произведения имеем

$$\bar{r}' \cdot \bar{r}'' \cdot \bar{r}''' = \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} = b(a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t) = a^2 b.$$

Найдём длины векторов.

$$|\bar{r}'| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$|[\bar{r}', \bar{r}'']| = \sqrt{a^2 b^2 \sin^2 t + a^2 b^2 \cos^2 t + a^4} = \sqrt{a^2 b^2 + a^4} = a \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$|[\bar{r}', \bar{r}'']|^2 = a^2 b^2 \sin^2 t + a^2 b^2 \cos^2 t + a^4 = a^2 (a^2 + b^2).$$

Отсюда кривизна будет равна $k = \frac{a \sqrt{a^2 + b^2}}{(\sqrt{a^2 + b^2})} = \frac{a}{a^2 + b^2},$ кручение

$$\chi = \frac{a^2 b}{a^2 (a^2 + b^2)} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Следовательно, для винтовой линии кривизна и кручение постоянны. ■

3. Теория поверхностей в дифференциальной геометрии

3.1. Элементарная поверхность

Определение 3.1. Область на плоскости называется элементарной областью, если она является образом открытого круга при гомеоморфизме, т.е. при взаимно однозначном и непрерывном отображении.

Таким образом, внутренность квадрата, прямоугольника, эллипса – всё это элементарные области.

Пусть Φ – элементарная поверхность и G – элементарная область на плоскости, являющаяся образом Φ при гомеоморфизме.

Определение 3.2. Поверхностью F в пространстве называется множество точек пространства, которое можно покрыть конечным или счётным множеством элементарных поверхностей.

Из этого определения следует, что для любой точки M поверхности F существует элементарная поверхность Φ , такая, что $M \in \Phi \subset F$, т.е. у каждой точки поверхности существует окрестность, являющаяся элементарной.

Введем понятие координат на поверхности.

Пусть на некоторой поверхности F задано однопараметрическое семейство линий, т.е. каждая линия этого семейства характеризуется определенным значением некоторого параметра. Назовем это семейство *правильным*, если через каждую точку поверхности проходит одна и только одна линия из данного семейства.

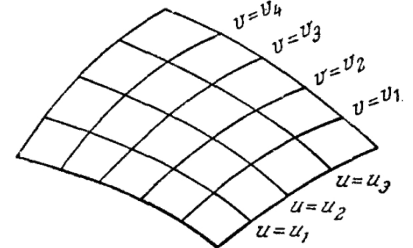


Рисунок 6

Если на поверхности даны два правильных семейства, такие, что каждая из линий первого семейства пересекается без касания с каждой линией второго семейства не более чем в одной точке, то говорят, что на поверхности задана *координатная сеть*. Пусть линии первого из семейств, образующих координатную сеть, определяются значениями некоторого параметра u . А линии второго семейства – значениями некоторого параметра v . Так как по условию через каждую точку поверхности проходит единственная кривая из первого семейства и единственная кривая второго семейства, то положение точки на поверхности однозначно определяется соответствующими этим линиям значениями u_0 и v_0 параметров u и v (рис.6). Параметры u и v , значениями которых определяются линии, составляющие координатную сеть, называются *координатами на данной поверхности*.

Если на поверхности введены каким-либо образом координаты u, v , то говорят, что эта поверхность *параметризована* параметрами u и v . Каждая точка такой поверхности может быть задана значениями параметров u и v . Но эта же точка может быть за-

дана и своими декартовыми координатами. Следовательно, декартовы координаты точек параметризованной поверхности представляют собой функции координат на поверхности.

Пусть u, v – декартовы координаты произвольной точки, принадлежащей G , а x, y, z – координаты соответствующей точки поверхности. Тогда координаты x, y, z есть функции координат u, v при отображении f , т.е.

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v) . \quad (3.1)$$

Эту систему равенств, задающих отображение f области G в пространство, называют *уравнениями поверхности* в параметрической форме. Здесь u, v называются *криволинейными координатами на поверхности*. Параметрические уравнения (3.1) при фиксированных значениях u, v задают кривую, лежащую на поверхности. Будем также пользоваться

векторной записью уравнения поверхности $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ или $\bar{r} = f_1(u, v)\bar{i} + f_2(u, v)\bar{j} + f_3(u, v)\bar{k}$.

Последняя запись есть *векторная функция двух скалярных аргументов* u, v .

Замечание 3.1. Уравнение $z = f(x, y)$ можно рассматривать как частный случай параметрического уравнения, если принять x и y за параметры и положить $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + f(x, y)\bar{k}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать поверхности, заданные именно параметрическими уравнениями, причем функцию $\bar{r}(u, v)$ будем предполагать непрерывной и имеющей непрерывные частные производные по u и v . В некоторых случаях, нам придется потребовать также существования и непрерывности ее частных производных второго порядка.

3.2. Регулярная поверхность

Пусть Φ – элементарная поверхность, заданная уравнением $\bar{r} = x(u, v)\bar{i} + y(u, v)\bar{j} + z(u, v)\bar{k}$.

Определение 3.3. Поверхность Φ называется *регулярной* (k раз дифференцируемой), если функции x, y, z имеют непрерывные, частные производные до порядка k вклю-

чительно, причём в каждой точке $M(u, v) \in G$ ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$

равен двум.

При $k = 1$ поверхность называется *гладкой*.

Замечание 3.2. Частные производные $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x(u, v)}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ и т.д. функций x, y, z

будем обозначать $x_u, y_u, \dots$. Таким образом, $\frac{\partial x}{\partial u} = x_u$, $\frac{\partial x}{\partial v} = x_v$.

Найдём частные производные радиус-вектора $\bar{r}$ по u и v :

$$\bar{r}_u = x_u \bar{i} + y_u \bar{j} + z_u \bar{k}, \quad \bar{r}_v = x_v \bar{i} + y_v \bar{j} + z_v \bar{k}.$$

Тогда матрица A примет вид $A = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$ и состоит из координат векторов $\bar{r}_u$ и

$\bar{r}_v$. Условие, что ранг A равен двум означает, что векторы $\bar{r}_u$ и $\bar{r}_v$ не коллинеарны. Далее будем рассматривать только такие векторы.

Как известно, из курса математического анализа, если функции $x(u, v)$ и $y(u, v)$ удовлетворяют условию $\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq 0$, то вблизи данных значений u, v и соответствующих им значений x и y уравнения $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ могут быть разрешены относительно u, v . Таким образом, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ и получаем $z = z\{u(x, y), v(x, y)\}$ или $z = f(x, y)$ – уравнение поверхности в явном виде.

3.3. Кривые на поверхности

Рассмотрим на поверхности F множество точек, криволинейные координаты которых определяются уравнениями:

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad \text{где } t \text{ – независимая}$$

переменная. Тогда векторная функция каждой точки поверхности может быть записана в виде:

$$\bar{r} = \bar{r}(u(t), v(t)).$$

При изменении параметра, вектор $\bar{r}$ описывает своим концом некоторую кривую γ в пространстве, тем самым кривую γ на поверхности F .

В параграфе 3.1 построена, так называемая сеть кривых на поверхности или координатная сеть.

3.4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Рассмотрим всевозможные кривые на поверхности, проходящие через данную точку M , и касательные векторы к ним в этой точке (рис. 7). Каждый из этих векторов представляет собой линейную комбинацию векторов $\bar{r}_u$ и $\bar{r}_v$, т. е. лежит в определяемой этими векторами плоскости. Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к данной поверхности в точке M . Напишем уравнение касательной плоскости. Поскольку векторы $\bar{r}_u$ и $\bar{r}_v$ лежат в касательной плоскости, вектор $\bar{N} = [\bar{r}_u, \bar{r}_v]$ нормален к ней и уравнение этой плоскости имеет вид:

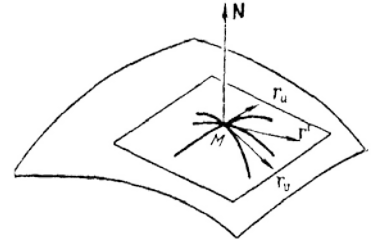


Рисунок 7

$$(\bar{\rho} - \bar{r}, \bar{N}) = 0, \quad (3.2)$$

здесь $\bar{r}$ – радиус-вектор точки касания, $\bar{\rho}$ – радиус-вектор текущей точки касательной плоскости.

Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, т. е. в векторной форме $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + f(x, y)\bar{k}$. Напишем уравнение касательной плоскости для такой поверхности. Имеем $\bar{r}_x = \bar{i} + f'_x\bar{k}$, $\bar{r}_y = \bar{j} + f'_y\bar{k}$ и, следовательно,

$$\bar{N} = [\bar{r}_x, \bar{r}_y] = -f'_x\bar{i} - f'_y\bar{j} + \bar{k}. \quad (3.3)$$

Подставив в уравнение касательной плоскости (3.2) вместо $\bar{\rho} - \bar{r}$ вектор $(x - x_0)\bar{i} + (y - y_0)\bar{j} + (z - z_0)\bar{k}$, а вместо нормального вектора $\bar{N}$ его выражение (3.3), получим *уравнение касательной плоскости* к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0) :

$$z - z_0 = f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0). \quad (3.4)$$

где значения производных f'_x и f'_y берутся в точке касания (x_0, y_0) .

Если поверхность задана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$, которое определяет z как дифференцируемую функцию от x и y , то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (3.4), получаем уравнение плоскости, касательной к поверхности $F(x, y, z) = 0$:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (3.5)$$

Здесь значения F'_x , F'_y и F'_z берутся в точке касания (x_0, y_0, z_0) .

Нормаль к поверхности. Пусть $F(x, y, z) = 0$ – неявное уравнение поверхности. Нормаль к поверхности (перпендикулярная прямая к касательной плоскости в точке касания) имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Вычислим направляющие косинусы вектора $\bar{N} = [\bar{r}_u, \bar{r}_v]$, нормального к поверхности, заданной уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$. Так как

$$\bar{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{и} \quad \bar{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

то вектор $[\bar{r}_u, \bar{r}_v]$ имеет координаты

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad (3.6)$$

а его направляющие косинусы соответственно равны

$$\cos(N, x) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos(N, y) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos(N, z) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3.5. Измерение на поверхности длин, углов, площадей. Первая квадратичная форма поверхности

Для решения многих физических, технических и геометрических задач нужно уметь вычислять длины дуг, лежащих на поверхности, углы между такими дугами, площади тех или иных частей поверхности.

Основная идея всех излагаемых в этом параграфе рассуждений состоит в замене бесконечно малого элемента гладкой поверхности соответствующим элементом касательной плоскости. Поэтому полезно начать с некоторых формул и понятий, относящихся к вычислению длин, углов и площадей на плоскости.

Перейдем к изучению поверхности в бесконечно малом, вблизи какой-нибудь её точки $M(x, y)$.

Вычислим дифференциал вектора $\bar{r}$ вдоль кривой. Тогда $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$, где $du = u'(t)dt$, $dv = v'(t)dt$. Найдём скалярные квадраты левой и правой частей этого равенства: $(d\bar{r})^2 = (\bar{r}_u du + \bar{r}_v dv)^2$ или

$$(d\bar{r})^2 = (\bar{r}_u)^2 du^2 + 2\bar{r}_u \bar{r}_v du dv + (\bar{r}_v)^2 dv^2. \quad (3.7)$$

Введём для этих скалярных произведений сокращённые обозначения:

$$\begin{cases} \bar{r}_u \cdot \bar{r}_u = E; \\ \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = F; \\ \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v = G; \end{cases} \text{ или в координатах } \begin{cases} E = (x_u)^2 + (y_u)^2 + (z_u)^2; \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v; \\ G = (x_v)^2 + (y_v)^2 + (z_v)^2. \end{cases}$$

Тогда формула (3.7) перепишется в виде:

$$(d\bar{r})^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \equiv I. \quad (3.8)$$

Выражение (3.8), называется *первой квадратичной формой* на поверхности и играет важную роль в теории поверхностей.

Первая квадратичная форма служит прежде всего для измерения бесконечно малых дуг на поверхности. Далее посредством интегрирования, нетрудно перейти к точному вычислению *длин на поверхности*.

Пусть задана часть кривой на поверхности: $u=u(t)$, $v=v(t)$, где $t_1 \leq t \leq t_2$.

Тогда длина части кривой на поверхности выражается формулой:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E(u, v) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F(u, v) \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G(u, v) \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt.$$

Зная первую квадратичную форму на поверхности, можно находить и углы между кривыми.

Определение 3.4. Углом между кривыми γ_1 и γ_2 называется угол между касательными к этим линиям в их общей точке M .

Пусть $\bar{dr}_1$ и $\bar{dr}_2$ – векторы касательных к линиям γ_1 и γ_2 в точке M . Тогда

$$\cos \varphi = \frac{\bar{dr}_1 \bar{dr}_2}{|\bar{dr}_1| |\bar{dr}_2|} \text{ или, в координатах, учитывая, что } |\bar{x}| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} \text{ для произвольного век-}$$

тора $\bar{x}$, имеем

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{(\bar{r}_u)^2 (du)_1 (du)_2 + \bar{r}_u \bar{r}_v ((du)_1 (dv)_2 + (dv)_1 (du)_2) + (\bar{r}_v)^2 (dv)_1 (dv)_2}{\sqrt{(\bar{r}_u)^2 du^2 + 2\bar{r}_u \bar{r}_v du dv + (\bar{r}_v)^2 dv^2} \sqrt{(\bar{r}_u)^2 \bar{du}^2 + 2\bar{r}_u \bar{r}_v \bar{du} \bar{dv} + (\bar{r}_v)^2 \bar{dv}^2}} \text{ или} \\ \cos \varphi &= \frac{E du \bar{du} + F(du \bar{dv} + dv \bar{du}) + G dv \bar{dv}}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \bar{du}^2 + 2F \bar{du} \bar{dv} + G \bar{dv}^2}}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.6. Площадь поверхности

Через первую квадратичную форму можно определить площади любых участков поверхности. Пусть f – гладкая поверхность, заданная уравнениями

$$x=x(u, v), y=y(u, v), z=z(u, v)$$

и D – область на ней, ограниченная конечным числом кусочно-гладких кривых.

Тогда площадь поверхности вычисляется по формуле:

$$\sigma = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Заметим, что если $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ – векторная функция, т.е.

$\bar{r} = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$, то в любой точке $M(u, v)$ поверхности имеем:

$$\sqrt{EG - F^2} = [\bar{r}_u, \bar{r}_v].$$

Следовательно, площадь поверхности можно вычислить по формуле:

$$\sigma = \iint_D [\bar{r}_u, \bar{r}_v] du dv. \quad (3.10)$$

Задача 3.1. Найти первую квадратичную форму поверхностного вращения $x = \varphi(u) \cos v$, $y = \varphi(u) \sin v$, $z = \psi(u)$, где φ, ψ – функции, имеющие непрерывные производные.

Решение. Имеем $x_u = \varphi_u \cos v$, $x_v = -\varphi \sin v$, $y_u = \varphi_u \sin v$, $y_v = \varphi \cos v$. Тогда

$$E = (\varphi_u' \cos v)^2 + (\varphi_u' \sin v)^2 + (\psi_u')^2 = (\varphi_u')^2 + (\psi_u')^2,$$

$$F = -\psi_u' \cos v \varphi \sin v + \varphi' \sin v \varphi \cos v + 0 = \sin v \cos v (\varphi' \varphi - \varphi' \varphi) = 0,$$

$$G = (-\varphi \sin v)^2 + (\varphi \cos v)^2 + 0 = \varphi^2.$$

Таким образом, первая квадратичная форма имеет вид

$$I = E(du)^2 + 2Fdu dv + G(dv)^2 = (\varphi_u'^2 + \psi_u'^2) du^2 + \varphi^2 dv^2. \blacksquare$$

Мы видим, что зная первую квадратичную форму, можно решать *метрические задачи*, т.е. задачи на вычисления.

В связи с этим говорят, что первая квадратичная форма задаёт *метрику* поверхности и её часто называют *линейным элементом поверхности*. Первая квадратичная форма описывает поверхность в первом приближении, когда малый участок поверхности заменяется на участок касательной плоскости.

Все факты, которые могут быть получены путём измерения на поверхности с помощью первой квадратичной формы, относятся к так называемой *внутренней геометрии поверхности*.

3.7. Вторая квадратичная форма поверхности

Вторая квадратичная форма описывает поверхность во втором приближении. Она показывает, как отклоняется поверхность от касательной плоскости и полностью определяет кривизну поверхности. Можно было бы само понятие второй квадратичной формы ввести, исходя из задачи о вычислении расстояния от точки поверхности до касательной плоскости, проведенной через близкую точку.

Пусть f – регулярная поверхность, заданная уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, а

γ – линия на этой поверхности. Имеем $d\bar{r} = \bar{r}_u du + \bar{r}_v dv$. Введём вектор нормали

$\bar{N} = [\bar{r}_u, \bar{r}_v]$, тогда единичный вектор нормали в точке M к поверхности f имеет вид

$$\bar{n} = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} = \frac{[\bar{r}_u, \bar{r}_v]}{|\bar{r}_u, \bar{r}_v|}.$$

Найдём

квадратичную

форму

$d\bar{r} \cdot d\bar{n} = \bar{r}_u \cdot \bar{n}_u du^2 + (\bar{r}_u \cdot \bar{n}_v + \bar{r}_v \cdot \bar{n}_u) du dv + \bar{r}_v \cdot \bar{n}_v dv^2$. Так как $d\bar{r} \perp \bar{n}$, то скалярное произведение $d\bar{r} \cdot \bar{n} = 0$ и, следовательно, $d(d\bar{r} \cdot \bar{n}) = d^2\bar{r} \cdot \bar{n} + d\bar{r} \cdot d\bar{n} = 0$.

Отсюда

$$\begin{aligned} d^2\bar{r} \cdot \bar{n} &= \bar{n} \cdot (\bar{r}_{uu} du^2 + 2\bar{r}_{uv} du dv + \bar{r}_{vv} dv^2) = \\ &+ \bar{n} \cdot \bar{r}_{uu} du^2 + 2\bar{n} \cdot \bar{r}_{uv} du dv + \bar{n} \cdot \bar{r}_{vv} dv^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь учтено, что $\bar{n} \cdot \bar{r}_u = 0$, $\bar{n} \cdot \bar{r}_v = 0$, т.е. отсутствуют слагаемые с этими произведениями.

Введём обозначения
$$\begin{cases} \bar{n} \cdot \bar{r}_{uu} = L; \\ \bar{n} \cdot \bar{r}_{uv} = M; \\ \bar{n} \cdot \bar{r}_{vv} = N. \end{cases}$$

или в координатах:
$$L = \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}$$
 и аналогично,

$$M = \frac{\bar{r}_u \cdot \bar{r}_v \cdot \bar{r}_{uv}}{\left\| \begin{bmatrix} \bar{r}_u \\ \bar{r}_v \end{bmatrix} \right\|} = \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = \frac{\bar{r}_u \cdot \bar{r}_v \cdot \bar{r}_{vv}}{\left\| \begin{bmatrix} \bar{r}_u \\ \bar{r}_v \end{bmatrix} \right\|} \Rightarrow \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Замечание 3.3. Здесь d^2u – дифференциал второго порядка и $du^2 = (du)^2 = du du$ – квадрат дифференциала.

Тогда равенство (3.11) принимает вид:

$$d^2\bar{r} \cdot \bar{n} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2 \equiv II. \quad (3.12)$$

В формуле (3.12) правая часть равенства называется *второй квадратичной формой поверхности*.

Замечание 3.4. В частности, если поверхность задана явным уравнением

$$z = z(x, y), \text{ то } L = \frac{z_{xx}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \quad M = \frac{z_{xy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}, \quad N = \frac{z_{yy}}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}.$$

3.8. Кривизна кривой, лежащей на поверхности

Пусть f – регулярная поверхность и γ – регулярная кривая на поверхности f , проходящая через точку M .

Предположим, что вдоль этой кривой за параметр принята длина дуги s , так что текущие координаты u и v выражаются как функции от s (естественная параметризация кривой): $u=u(s)$, $v=v(s)$ и, следовательно, кривая γ может быть представлена в виде $\gamma: \bar{r} = \bar{r}(u(s), v(s))$.

Рассмотрим скалярное произведение $\bar{r}'' \cdot \bar{n}$, где $\bar{r}'' = \frac{d^2 \bar{r}}{ds^2}$ и $\bar{n}$ – единичный вектор нормали к поверхности. Тогда $\bar{r}'' \cdot \bar{n} = |\bar{r}''| |\bar{n}| \cos \theta$, где θ есть угол между главной нормалью $\bar{V}$ кривой и нормалью $\bar{n}$ к поверхности.

Так как $|\bar{r}''| = k$, где k – кривизна кривой, то имеем $\bar{r}'' \cdot \bar{n} = k \cos \theta$. С другой стороны, учитывая, что $\bar{r}' = \bar{r}_u \cdot u' + \bar{r}_v \cdot v'$, имеем

$$\begin{aligned} \bar{r}'' \cdot \bar{n} &= (\bar{r}_{uu} u'^2 + \bar{r}_{uv} u' v' + \bar{r}_{vu} v' u' + (\bar{r}_{vu} u' + \bar{r}_{vv} v') v' + \bar{r}_v v'') \cdot \bar{n} = \\ &= (\bar{r}_{uu} u'^2 + 2 \bar{r}_{uv} u' v' + v'^2 + \bar{r}_u u'' + \bar{r}_v v'') \cdot \bar{n} = \\ &= (\bar{r}_{uu} \cdot \bar{n}) u'^2 + 2(\bar{r}_{uv} \cdot \bar{n}) u' v' + (\bar{r}_{vv} \cdot \bar{n}) v'^2 + (\bar{r}_u \cdot \bar{n}) u'' + (\bar{r}_v \cdot \bar{n}) v'' = \\ &= L u'^2 + 2M u' v' + N v'^2 = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{ds^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая, что $ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$, имеем

$$k \cos \theta = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \frac{II}{I}.$$

Правая часть этого равенства зависит только от направления кривой в точке $M(u, v)$. Таким образом, $k \cos \theta = k_n = \text{const}$ в точке $M(u, v)$ для всех кривых γ , проходящих через эту точку и имеющую в ней одну и ту же касательную плоскость.

Величину k_n называют *нормальной кривизной* линии γ в точке M . Если γ – *нормальное сечение* поверхности, т.е. сечение поверхности плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности в точке M , то тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Нормальная кривизна любой линии поверхности, проходящей через точку M , с точностью до знака равна кривизне нормального сечения, имеющего с данной линией общую касательную (знак зависит от направления векторов $\vec{n}$ и $\vec{v}$).*

3.9. Главные направления и кривизны поверхности

Исследуем теперь вопрос, как меняется нормальная кривизна в зависимости от направления её вектора скорости. Как и для всякой квадратичной формы, для второй квадратичной формы найдётся ортонормированный базис в касательной плоскости, в котором форма имеет диагональный вид $II(du, dv) = \lambda_1 du^2 + \lambda_2 dv^2$.

Определение 3.5. *Направления, задаваемые векторами этого базиса, называются главными направлениями, а числа λ_1, λ_2 – главными кривизнами.*

Определение 3.6. *Произведение $K = \lambda_1 \lambda_2$ называется гауссовой или полной кривизной поверхности в данной точке, полусумма $(\lambda_1 + \lambda_2)/2$ – средней кривизной.*

Знание главных кривизн и главных направлений позволяет найти нормальную кривизну в произвольном направлении по формуле

$$k_n = \lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi,$$

где φ – угол между данным направлением и направлением первого базисного вектора (формула Эйлера).

Из формулы Эйлера следует экстремальное свойство главных направлений: это те направления, где нормальная кривизна принимает наибольшее или наименьшее значение. Это свойство помогает находить главные направления: вектор с координатами du, dv задаёт главное направление, если выполнено условие:

$$(E du + F dv)(M du + N dv) - (L du + M dv)(M du + N dv) = 0.$$

Главные кривизны ищутся из условия $\det(II - \lambda I) = 0$, т.е. из уравнения $(L - \lambda E)(N - \lambda G) - (M - \lambda F)^2 = 0$.

3.10. Внутренняя геометрия поверхности

Утверждение 3.1. *Две поверхности являются изгибаемыми одна в другую, если в некоторых параметризациях их первые квадратичные формы совпадают.*

Совокупность тех свойств поверхности, которые не меняются при ее изгибании, называется внутренней геометрией поверхности. Две поверхности изгибаемы друг в друга в том и только том случае, если на них можно ввести одну и ту же первую квадра-

тичную форму. Две различные поверхности могут иметь одну и ту же внутреннюю геометрию. Например, плоскость и параболический цилиндр.

Следовательно, к внутренней геометрии поверхности относятся те, и только те ее свойства, которые могут быть выражены через первую квадратичную форму. Т.е., например, длины линий, лежащих на поверхности; полная кривизна K поверхности. Далее, поскольку угол между линиями на поверхности и площадь поверхности выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы, то эти величины также относятся к внутренней геометрии. В то же время ни средняя кривизна, ни главные кривизны при изгибании не сохраняются.

Внутренняя геометрия плоскости – это обычная планиметрия, которую все изучают в школе. Однако, все теоремы планиметрии останутся верны, если вместо плоскости рассматривать любую наложимую на нее поверхность, скажем параболический цилиндр. А вот внутренняя геометрия сферы существенно отличается от геометрии плоскости: например, на сфере сумма углов треугольника всегда больше, чем π .

ТОПОЛОГИЯ

§1. Метрическое пространство

В 1906г. Фреше ввел понятие метрического пространства.

Пусть X – непустое множество.

Определение 1. Говорят, что на множестве X задана *метрика*, если каждой упорядоченной паре элементов $x, y \in X$ поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее следующим свойствам, называемым *аксиомами метрики*:

- 1) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ – аксиома тождества;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ – аксиома симметрии;
- 3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$, где $x, y, z \in X$, – неравенство треугольника.

Определение 2. Множество X вместе с заданной на нем метрикой ρ , т.е. пару (X, ρ) называется *метрическим пространством*.

Неотрицательное число $\rho(x, y)$, т.е. значение метрики, называется *расстоянием* между точками x и y .

На любом непустом множестве X можно определить так называемую *тривиальную метрику*, если положить

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Поэтому любое непустое множество всегда можно превратить в метрическое пространство.

На одном и том же множестве, содержащем более одной точки, можно задать различные метрики. **Например**, если ρ – метрика, заданная на множестве X , и $k > 0$, то $k\rho$ также является метрикой на множестве X , отличной от метрики ρ .

Примеры: 1. Для евклидова пространства E^n метрика может быть задана формулой $\rho(M, N) = |\overrightarrow{MN}|$, где $M, N \in X$.

2. Для числовой прямой расстояние между точками x и y определяется формулой $\rho(x,y)=|x-y|$. Проверка выполнения аксиом метрики очевидна.

3. На множестве $C_{[a;b]}$ всех вещественных функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$, расстояние между функциями $f(x)$ и $g(x)$ можно определить формулой $\rho(f,g) = \max_{x \in [a;b]} |f(x) - g(x)|$.

Доказательство. Очевидно, в проверке нуждается только третья аксиома. Для любого $x \in [a;b]$

$$\begin{aligned} |f(x)-g(x)| &= |(f(x)-h(x))+(h(x)-g(x))| \leq |f(x)-h(x)|+|h(x)-g(x)| \leq \\ &\leq \max_{x \in [a;b]} |f(x)-h(x)| + \max_{x \in [a;b]} |h(x)-g(x)| = \rho(f,h) + \rho(h,g). \end{aligned}$$

Так как это неравенство выполняется для всех $x \in [a;b]$, то оно выполняется и для того $x \in [a;b]$, для которого достигается $\max_{x \in [a;b]} |f(x) - g(x)|$, поэтому $\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$. $\square$

Отметим, что для непрерывных функций правильнее писать, приведенная же формула верна для ограниченных функций.

4. Рассмотрим пространство l_p последовательностей $x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ таких, что $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$, где $p \geq 1$ (сходящихся с p -ой степенью). Так как

$$|x_n - y_n|^p \leq |x_n + y_n|^p \leq 2^p(|x_n|^p + |y_n|^p),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \leq 2^p \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n|^p + |y_n|^p) = \text{const} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right) < +\infty,$$

т.е. последовательность сходится, поэтому в качестве метрики такого пространства можно

рассматривать функцию $\rho(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Метрическое пространство (l_p, ρ) при $p=2$ называется *координатным гильбертовым пространством*.

5. Рассмотрим пространство L_p функций, суммируемых на отрезке $[a;b]$ с p -ой степенью: $f(x) \in L_p \Leftrightarrow \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$, $p \geq 1$. Тогда за расстояние между функциями

$f(x)$ и $g(x)$ можно принять функцию $\rho(x,y) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$.

Доказательство справедливости третьей аксиомы метрики основывается на неравенстве Минковского

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

справедливого при $p \geq 1$.

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство.

Определение 3. Открытым шаром $U(x_0, r)$ с центром в точке x_0 и радиусом r ($r > 0$) называется множество всех точек x из X , удовлетворяющих условию $\rho(x_0, x) < r$.

Определение 4. Множество всех точек $x \in X$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x_0, x) \leq r$, называется замкнутым шаром с центром в точке x_0 и радиусом r и обозначается $\bar{U}(x_0, r)$.

Определение 5. Множество всех точек $x \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x_0, x) = r$, называется окружностью с центром в точке x_0 и радиусом r и обозначается $S(x_0, r)$.

§2. Аксиомы топологического пространства

Определение 1. Покрытием множества A называется такое семейство множеств $\{U_\alpha\}$, что объединение элементов этого семейства содержит множество A : $A \subset \bigcup_{\alpha} U_\alpha$.

Замечание. В общем случае элементы покрытия могут как содержаться в покрываемом множестве, так и содержать элементы, не принадлежащие ему.

Примеры: 1. Черепица на крыше является покрытием крыши, если она не течет.

2. Если $A = \mathbb{R}$, то следующие семейства являются его покрытиями:

а) $\{U_\alpha\} = \{(n-1; n+1), n \in \mathbb{Z}\}$;

б) $\{U_\alpha\} = \{[n-1; n], n \in \mathbb{Z}\}$;

в) $\{U_\alpha\}$ – множество всех открытых интервалов. Забегая вперед, скажем, что это покрытие образует топологию числовой прямой, которая называется *естественной*.

3. Множество кругов на плоскости является покрытием плоскости, а также любой фигуры, лежащей в этой плоскости.

Определение 2. Подпокрытием покрытия $\{U_\alpha\}$ множества A называется такое подсемейство $\{U_\beta\} \subset \{U_\alpha\}$, которое само является покрытием множества A .

Примеры: 4. В случае примеров 1, 2а, 2б подпокрытий нет.

5. Если из множества всех открытых интервалов (пример 2в) выделить, например, семейство 2а, то это будет подпокрытие.

6. Семейство $\{U_\beta\} = \{\{a, b, m\}, \{b, c, m\}, \{c, d, m\}, \{a, k, m\}\}$ является покрытием множества $A = \{a, b, c, d, k\}$, причем элементы покрытия не содержатся в A ; покрытие $\{U_\beta\}$ подпокрытий не содержит.

Определение 3. Топологией T на множестве X называется такое покрытие этого множества, элементы которого являются подмножествами X и удовлетворяют следующим аксиомам:

1) $\emptyset \in T$ (пустое множество является элементом из T);

2) $X \in T$ (множество X – элемент из T);

3) $\bigcup_{\alpha} U_\alpha \in T$ (объединение любого числа элементов из T – элемент из T);

4) $\bigcap_{\alpha=1}^n U_\alpha \in T$ (пересечение конечного числа элементов из T – элемент из T).

Определение 4. Топологическим пространством называется пара (X, T) , где X – непустое множество с некоторой топологией T .

Определение 5. Элементы любой топологии называются *открытыми множествами* этой топологии, а элементы пространства X называются *точками* топологии.

С учетом данного определения аксиомы топологического пространства могут быть сформулированы следующим образом:

1) $\emptyset$ открыто;

2) множество X открыто;

3) объединение любого числа открытых множеств открыто;

4) пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

Определение топологического пространства можно дать, не прибегая к понятию «покрытие множества».

Пусть X – произвольное непустое множество и T – некоторое семейство подмножеств множества X , удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам топологического пространства):

1) $\emptyset$ и $X \in T$;

2) объединение любой совокупности множеств из T содержится в T ;

3) пересечение любой конечной совокупности множеств из T содержится в T ;

Пару $(X; T)$ называют *топологическим пространством* с топологией T ; семейство T - *топологией* либо *топологической структурой* этого топологического пространства.

Элементы семейства T называют *открытыми множествами* топологического пространства $(X; T)$ или T -*открытыми* множествами (всегда открыты $\emptyset$ и X).

Когда не может возникнуть недоразумений, разрешается писать и говорить: " X -топологическое пространство". Там, где это необходимо, будем пользоваться точными обозначениями (например, если речь идёт о двух различных топологиях на одном и том же множестве X).

Примеры: 7. Любое *метрическое пространство* является топологическим пространством. Открытые множества - содержащие вместе с каждой своей точкой некоторый шар положительного радиуса с центром в этой точке. Эту топологию называют топологией, *порождённой* (или *индуцированной*) метрикой.

Доказательство. Выполнение аксиом 1) и 2) очевидно. Проверим выполнение аксиомы 3).

Пусть $U_1, U_2, \dots, U_n \in T$ - открытые множества метрического пространства. Нужно показать, что $\bigcap_{i=1}^n U_i \in T$. Если $\bigcap_{i=1}^n U_i = \emptyset$, то аксиома 3) выполняется. Пусть существует точка $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. Обозначим $B(x, \varepsilon)$ открытый шар радиуса ε с центром в точке x . Так как $U_i \in T$, $i=1, \dots, n$, найдутся $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$: $B(x, \varepsilon_i) \subset U_i$. Пусть $\varepsilon = \min_i \varepsilon_i$, тогда $B(x, \varepsilon) \subset U_i \quad \forall i=1, \dots, n$, то есть $B(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$, поэтому $\bigcap_{i=1}^n U_i \in T$. $\square$

8. Частные случаи. R^n - n -мерное арифметическое пространство; A^n - n -мерное аффинное пространство; V^n - n -мерное векторное пространство; все с обычной евклидовой метрикой.

9. В пространстве R^n множество открытых параллелепипедов задаёт топологическое пространство с *естественной топологией*.

10. Семейство T состоит всего из двух множеств - пустого и всего не пустого множества X , то есть $T = \{\emptyset; X\}$. Выполнение аксиом топологического пространства очевидно. Такая топология называется *тривиальной* или *антидискретной*.

11. Двухточечное пространство. Множество X состоит из двух точек: $X = \{a, b\}$. Уже в этом случае на X можно задать несколько различных топологий, а именно: $T_0 = \{\emptyset; X\}$; $T_1 = \{\emptyset; X; \{a\}\}$; $T_2 = \{\emptyset; X; \{b\}\}$; $T_3 = \{\emptyset; X; \{a, b\}\}$. T_0 называют слипшимся двоеточием, T_3 - дискретным двоеточием. Выполнение аксиом топологического пространства проверяется без труда.

12. T состоит из всевозможных подмножеств множества X . Выполнение аксиом топологического пространства очевидно. Такая топология называется *дискретной* (название связано с тем, что каждая точка множества X - открытое множество).

Определение 6. Множество A называется *замкнутым* в топологическом пространстве (X, T) , если его дополнение $C_X A$ до множества X открыто в топологии этого пространства.

Замечание. Достаточно очевидно, что произвольное множество в топологическом пространстве может быть открытым, замкнутым, открыто-замкнутым и не открытым и не замкнутым. В частности, множества $\emptyset$ и X являются открыто-замкнутыми в любой топологии и в силу этого называются *тривиальными открыто-замкнутыми множествами*.

Характерным для дискретной топологии является то, что в этой топологии любое подмножество открыто - замкнуто.

Задачи. 1) Перечислите все топологии, которые можно задать на множестве X , состоящем из трёх различных точек: $X = \{a, b, c\}$.

2) *Топология Зарисского.* Пусть X - бесконечное множество. Подмножество $U \subset X$ отнесём к семейству подмножеств T , если дополнение U конечно; также отнесём к T $\emptyset$ и X . Доказать, что T - топология на X . Эта топология называется *топологией Зарисского*.

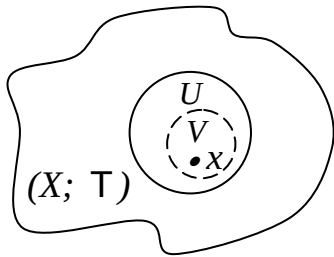
3) Покажите, что пересечение любого семейства топологий на X является топологией на X .

4) Покажите, что объединение двух топологий на X может не быть топологией на X (если в X больше двух точек).

§3. Фундаментальная система окрестностей

Рассмотрим некоторые способы задания топологии. Задача описания всех открытых множеств U , составляющих топологию T , за исключением некоторых простых случаев (см. примеры 2.10 - 2.12, задачу 2.2), довольно сложна. Поэтому обычно поступают следующим образом. Сначала задают какие-либо "элементарные" открытые множества, "кирпичики", затем с помощью некоторой стандартной процедуры из этих "кирпичиков" конструируют все остальные открытые множества. Принципиальную роль при этом играет понятие окрестности.

Определение 1. Пусть $(X; T)$ - топологическое пространство. *Окрестностью* (T - окрестностью) точки $x \in X$ называется любое множество U , в котором лежит открытое множество V , содержащее точку x .



Примеры: 1. Если T - антидискретная топология на X , то для любой точки из X единственной окрестностью является все множество X .

2. Если T - дискретная топология на X , то для любой точки из X окрестностью является любое множество из X , содержащее эту точку.

Замечание 1. Окрестность не обязана быть открытым множеством, но каждое открытое множество является окрестностью каждой своей точки.

Семейство всех окрестностей точки x обозначим $T(x)$. Приведём некоторые необходимые нам свойства окрестностей.

Теорема 1. *Множество A открыто тогда и только тогда, когда оно является окрестностью каждой своей точки.*

Доказательство. Необходимость. Если A открыто, см. замечание 1.

Достаточность. Объединение U всех открытых подмножеств множества A является открытым множеством и $U \subset A$. Если A является окрестностью каждой своей точки x , то каждая точка $x \in A$ принадлежит некоторому открытому подмножеству множества A , откуда $A \subset U$, откуда $A = U$, то есть A - открыто. $\square$

Следствие. Множество открыто тогда и только тогда, когда оно является окрестностью каждой своей точки.

Теорема 2. *Пересечение конечного множества элементов из $T(x)$ принадлежит $T(x)$ и каждое множество, которое содержит элемент из $T(x)$, само входит в $T(x)$.*

Доказательство. Пусть $U, V \in T(x)$. Тогда существуют содержащие точку x открытые множества U_0, V_0 такие, что $U_0 \subset U$, $V_0 \subset V$. В силу этих включений будем иметь $x \in U_0 \cap V_0 \subset U \cap V$, откуда $U \cap V \in T(x)$. Случай произвольного конечного пересечения рассматривается с помощью индукции. Второе утверждение теоремы очевидно. $\square$

Определение 2. Произвольное семейство $v_x \subset T(x)$ называется *локальной базой* (топологии) в точке x , если для произвольной окрестности $U(x) \in T(x)$ найдётся окрестность $V \in v_x$: $V \subset U$.

Примеры: 3. Пусть X - метрическое пространство, точка $x \in X$. Семейство множеств $v_x = \{B(x, \varepsilon), \varepsilon > 0\}$ - локальная база в точке x ; семейство $v'_x = \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right), n \in N \right\}$ - также.

4. Пусть топология T дискретна. Тогда $v_x = \{x\}$ - локальная база в точке x .

5. Если T антидискретна, то единственной локальной базой в любой точке $x \in X$ является $v_x = \{X\}$.

Определение 3. В топологическом пространстве $(X; T)$ для произвольной точки $x \in X$ фиксируем некоторое семейство окрестностей этой точки $v_x = \{V_\alpha^x : \alpha \in A_x\} \subset T(x)$, где A_x - множество индексов, которыми занумерованы элементы семейства v_x . Объединив все эти семейства, получим семейство $v = \{V_\alpha^x : x \in X, \alpha \in A_x\}$.

Семейство v называется *базой окрестностей топологии T* или *фундаментальной системой окрестностей (ф.с.о.) топологии T* , если для $\forall x \in X$ семейство $v_x = \{V_\alpha^x | \alpha \in A_x\}$ - локальная база в точке x . Множества V_α^x в этом случае называют *элементарными окрестностями точки x* .

Примеры. 6. В метрическом пространстве X семейства множеств $v = \{B(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}, v' = \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right) : x \in X, n \in N \right\}$ - ф.с.о.

7. В дискретной топологии семейство $v = \{\{x\} : x \in X\}$ - ф.с.о.

8. В тривиальной топологии семейство $v = \{\{X\}\}$ - ф.с.о.

Само определение ф.с.о. требует предварительного задания некоторой топологии T . Однако часто топологию ещё только предстоит задать. Это удобно делать, объявив некоторое семейство множеств v фундаментальной системой (открытых) окрестностей (ф.с.о.) этой топологии (это те самые "кирпичики", из которых строится топология, см. выше). Здесь, однако, есть трудности - не всякое семейство множеств может служить ф.с.о. какой-либо топологии. Следующая теорема устанавливает условия, которым удовлетворяет ф.с.о.

Теорема 3. Пусть X - произвольное множество. Каждой точке $x \in X$ поставим в соответствие некоторое семейство подмножеств множества X : $v_x = \{V_\alpha^x | \alpha \in A_x\}$. Семейство $v = \bigcup_{x \in X} v_x$ является ф.с.о. для некоторой топологии T на X тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия (их часто называют аксиомами ф.с.о.):

1) для $\forall x \in X$ семейство v_x не пусто и для $\forall V_\alpha^x \in v_x$ имеем $x \in V_\alpha^x$;

2) для $\forall x \in X$ и $\forall V_\alpha^x, V_{\alpha'}^x \in v_x : \exists V_{\alpha''}^x \in v_x : V_{\alpha''}^x \subset V_\alpha^x \cap V_{\alpha'}^x$;

3) для $\forall x, y \in X, \forall V_\alpha^x$ такого, что $y \in V_\alpha^x \exists V_{\alpha'}^y \in v_y : V_{\alpha'}^y \subset V_\alpha^x$.

В случае, когда условия 1) - 3) выполняются, топология T определена однозначно.

Доказательство. Прямое утверждение непосредственно следует из определений ф.с.о. и локальной базы в точке.

Докажем обратное. Определим семейство T как семейство всех множеств $U \subset X$ таких, что для любой точки $x \in U \exists V_\alpha^x \subset v_x : V_\alpha^x \subset U$. Покажем, что T - некоторая топология на X . Выполнимость аксиом 1) и 2) топологического пространства очевидна. Проверим, выполняется ли аксиома 3). Пусть $U, U' \in T$. Рассмотрим произвольную точку $x \in U \cap U'$. В силу определения семейства T найдутся $V_\alpha^x \in v_x$ и $V_{\alpha'}^x \in v_x : V_\alpha^x \subset U, V_{\alpha'}^x \subset U'$. Но тогда по условию 3) теоремы существует $V_{\alpha''}^x \in v_x : V_{\alpha''}^x \subset V_\alpha^x \cap V_{\alpha'}^x$. Отсюда получаем

$V_{\alpha'}^x \subset U \cap U'$, то есть $U \cap U' \in T$.

Далее с помощью метода математической индукции получим, что пересечение любого конечного числа элементов из T есть снова элемент из T , то есть T - топология на X .

Покажем, что v - ф.с.о.о. для топологии T . Согласно условию 3) теоремы всякое множество V_{α}^x открыто и является окрестностью точки x . Ясно (из определения T), что для $\forall x \in X$ семейство v_x - локальная база в точке x .

Осталось доказать единственность топологии T . Пусть v - ф.с.о.о. для двух топологий - T и T' . Покажем, что $T = T'$. Проверим сначала включение $T \subset T'$. Пусть $U \in T$. По определению ф.с.о. для $\forall x \in U \exists V_{\alpha(x)}^x : V_{\alpha(x)}^x \subset U$. Имеем $U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subset \bigcup_{x \in U} V_{\alpha(x)}^x \subset U$,

откуда $U = \bigcup_{x \in U} V_{\alpha(x)}^x$. Поскольку $v \subset T'$, то согласно аксиоме 2) топологического пространства имеем $U \in T'$. Итак, $T \subset T'$.

Аналогично получаем включение $T' \subset T$. $\square$

Таким образом, семейство подмножеств $v = \{V_{\alpha}^x | x \in X, \alpha \in A_x\}$ множества X , удовлетворяющее условиям 1)-3) теоремы 3, есть ф.с.о.о. вполне определённой топологии T ; для задания топологии T достаточно задать её ф.с.о.о. v . О топологии T при этом говорят, что она порождена ф.с.о.о. v . Условия 1)-3) теоремы 3 часто называют "аксиомы ф.с.о.о.". Это связано с тем, что понятие топологического пространства можно строить, опираясь не на понятие открытого множества, а на понятие окрестности и свойства 1)-3).

Задачи. 1) *Прямая Зоргенфрея*. Рассмотрим множество действительных чисел $\mathbf{R}$. Элементарной открытой окрестностью V_{ε}^x точки $x \in \mathbf{R}$ назовём полуоткрытый интервал $[x, x + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$. Показать, что набор v всевозможных таких элементарных окрестностей удовлетворяет аксиомам ф.с.о.о. и определяет, таким образом, некоторую топологию T на $\mathbf{R}$. Топологическое пространство $(\mathbf{R}; T)$, где T - топология, порождённая ф.с.о.о. v , называется *прямой Зоргенфрея*.

2) *Топология бабочек*. На множестве $\mathbf{R}^2$ для произвольной точки $x = (x^1, x^2)$ определим элементарную открытую окрестность как множество вида $V_{\varepsilon}^x = \{x\} \cup \{(t, \eta) \in B^2(x, \varepsilon) | t \neq x^1\}$, где $\varepsilon > 0$, а $B^2(x, \varepsilon)$ - открытый круг радиуса ε с центром в точке x . Проверить, что эти множества удовлетворяют аксиомам ф.с.о.о. Топология на $\mathbf{R}^2$, которую они порождают, называется *топологией бабочек*.

3) *Плоскость Немыцкого*. Обозначим через $\mathbf{R}^2_+ = \{(x^1, x^2) \in \mathbf{R}^2 : x^2 \geq 0\}$ верхнюю замкнутую полуплоскость, а через $L = \{(x^1, x^2) \in \mathbf{R}^2 : x^2 = 0\}$ границу множества $\mathbf{R}^2_+$. Открытой элементарной окрестностью точки $x \in L$ назовём множество вида $V_{\varepsilon}^x = \{x\} \cup B^2((x^1, \varepsilon), \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, а элементарной окрестностью точки $x \in \mathbf{R}^2_+ \setminus L$ - множество вида $V_{\varepsilon}^x = B^2(x, \varepsilon)$, где $0 < \varepsilon \leq x^2$. Проверить, что эти множества удовлетворяют аксиомам ф.с.о.о. $\mathbf{R}^2$ с топологией, порождаемой этой ф.с.о.о., называется *плоскостью Немыцкого*.

§4. База и предбаза топологии

Для задания топологии используется также следующая конструкция, эквивалентная ф.с.о.о.

Определение 1. Семейство B подмножеств множества X называется базой топологии T в том и лишь в том случае, когда $B \subset T$ и для всякой точки $x \in X$ и любой её окрестности U найдётся $V \in B$: $x \in V \subset U$.

Замечание. База топологии - это ф.с.о.о., элементы которой не помечены индексами. Есть простая характеристика базы, которая часто принимается за её определение.

Лемма 1. Подсемейство B топологии T тогда и только тогда образует базу этой топологии, когда каждый элемент из T является объединением элементов из B .

Доказательство. Пусть $U \in T$, $x \in U$. По определению базы $\exists V_x \in B$: $x \in V_x \subset U$. Далее имеем $U \supset \bigcup_{x \in U} V_x \supset U$, откуда $U = \bigcup_{x \in U} V_x$, где $V_x \in B$.

Если же произвольный элемент из T является объединением множеств из $B \subset T$, то, очевидно, что B - база. $\square$

Любая топология является собственной базой.

Пример. Семейство всех открытых интервалов в естественной топологии числовой прямой является базой этой топологии.

Задача. 1) Используя теорему 3.3, доказать следующее утверждение. Семейство B множеств является базой некоторой топологии на множестве $X = \cup\{B: B \in B\}$ тогда и только тогда, когда для любых двух элементов U и V этого семейства и каждой точки x из $U \cap V$ существует такой элемент W в B , что $x \in W$ и $W \subset U \cap V$.

Определение 2. Семейство множеств S называется предбазой топологии T , если семейство всевозможных конечных пересечений элементов S образует базу топологии T .

Примечательно, что в роли предбазы некоторой топологии можно взять произвольное семейство множеств (в отличие от базы, для элементов которой должны выполняться некоторые условия, см. задачу 4).

Задача. 2) Используя результаты задачи 4, доказать следующее утверждение. Пусть S - произвольное непустое семейство подмножеств. Тогда семейство всевозможных конечных пересечений элементов из S образует базу некоторой топологии на множестве $X = \cup\{S: S \in S\}$.

§5. Сравнение топологий

Определение 1. Пусть T_1 и T_2 - некоторые топологии на множестве X . Если $T_1 \supset T_2$, то говорят, что T_1 сильнее T_2 или что T_2 слабее T_1 и пишут $T_1 \geq T_2$. Если при этом $T_1 \neq T_2$, то говорят, что T_1 существенно сильнее T_2 и пишут $T_1 > T_2$.

Может случиться так, что $T_1 \not\subset T_2$ и $T_2 \not\subset T_1$. В этом случае говорят, что топологии T_1 и T_2 несравнимы.

Примеры: 1. Топологии $T_1 = \{\emptyset; X; a\}$ и $T_2 = \{\emptyset; X; b\}$ из примера 2.11 - несравнимые топологии.

2. Антидискретная топология на X слабее любой топологии, заданной на том же множестве X .

3. Дискретная топология на X сильнее любой топологии, заданной на том же множестве X .

Теорема 1. Пусть топологии T_1 и T_2 на множестве X порождены некоторыми ф.с.о.о. $v_1 = \{V_\alpha^x \mid x \in X, \alpha \in A_x\}$ и $v_2 = \{W_\beta^x \mid x \in X, \beta \in B_x\}$ соответственно. Соотношение $T_1 \geq T_2$ имеет место тогда и только тогда, когда для $\forall x \in X, \forall W_\beta^x \in v_2$ $\exists V_\alpha^x \in v_1: V_\alpha^x \subset W_\beta^x$.

Доказательство. Пусть $T_1 \geq T_2$. Поскольку $T_1 \supset T_2 \supset v_2$, $\forall W_\beta^x \in v_2$ T_1 - открыто, откуда по определению ф.с.о. $\exists V_\alpha^x \in v_1: V_\alpha^x \subset W_\beta^x$.

Обратно. Покажем, что $T_1 \supset T_2$. Пусть $U \in T_2$. Для $\forall x \in U$ $\exists W_\beta^x \in v_2: W_\beta^x \subset U$. По условию $\exists V_\alpha^x: x \in V_\alpha^x \subset W_\beta^x \subset U$, откуда $U \in T_1$. $\square$

Следствие 1. Две ф.с.о.о. на множестве X v_1 и v_2 порождают одну и ту же топологию и называются в этом случае топологически эквивалентными (или просто эквива-

лентными) тогда и только тогда, когда для $\forall x \in X, \forall V_\alpha^x \in \nu_1$ и $\forall W_\beta^x \in \nu_2 \exists V_{\alpha'}^x$ и $W_{\beta'}^x \cdot V_{\alpha'}^x \subset W_\beta^x, W_{\beta'}^x \subset V_\alpha^x$.

Задачи. 1) Покажите, что топология прямой Зоргенфрея существенно сильнее естественной топологии вещественной прямой $\mathbf{R}$.

2) Покажите, что топология бабочек существенно сильнее естественной топологии плоскости $\mathbf{R}^2$.

3) Покажите, что топология плоскости Немыцкого существенно сильнее естественной топологии замкнутой полуплоскости $\mathbf{R}_+^2$ (то есть топологии, порождённой на $\mathbf{R}_+^2$ евклидовой метрикой).

§6. Метризуемость топологии

Определение 1. Пусть $(X; T)$ - топологическое пространство, ρ - некоторая метрика на X . Говорят, что топологическое пространство $(X; T)$ метризуемо метрикой ρ , если ρ порождает топологию T . Топологическое пространство называют метризуемым, если оно метризуемо некоторой метрикой.

Отметим, что метрика, метризирующая топологическое пространство (если она существует), вообще говоря, неединственная.

Определение 2. Метрики, заданные на одном и том же топологическом пространстве и порождающие одну и ту же топологию, называются топологически эквивалентными.

Замечание 1. Напомним, что метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X называются (метрически) эквивалентными, если существуют положительные константы C и C' такие, что для $\forall x, y \in X$ выполнено неравенство

$$C\rho_2(x, y) \leq \rho_1(x, y) \leq C'\rho_2(x, y). \quad (1)$$

Метрически эквивалентные метрики, очевидно, будут и топологически эквивалентными; обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема 1. Система всех открытых шаров метрического пространства образует базу некоторой топологии на множестве точек этого пространства.

Эта топология называется индуцированной метрикой.

Доказательство. Неравенство треугольника показывает, что если открытый шар с центром x_0 и радиусом r содержит точку x , то он содержит и открытый шар с центром x и радиусом $r - \rho(x_0, x)$. Следовательно, в любом метрическом пространстве пересечение двух открытых шаров содержит вместе с каждой своей точкой некоторый шар с центром в этой точке. Так как, кроме этого, открытые шары покрывают пространство, то они составляют базу некоторой топологии (по признаку базы).

Таким образом, метрическое пространство является топологическим. $\square$

Задачи. 1) На $\mathbf{R}^2$ рассмотрим метрику

$$\rho_1(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2}, \quad (2)$$

где $x = (x^1, x^2)$, $y = (y^1, y^2)$, и метрику

$$\rho_2(x, y) = \max\{|x^1 - y^1|, |x^2 - y^2|\}. \quad (3)$$

Доказать, что метрики (2) и (3) (метрически) эквивалентны на $\mathbf{R}^2$.

2) На интервале $(0; 1) \subset \mathbf{R}$ укажите две метрики, которые топологически эквивалентны, а метрически - нет.

3) Пусть X - произвольное непустое множество. Выпишите

а) метрику, метризирующую дискретную топологию на X ;

б) псевдометрику, порождающую тривиальную топологию на X .

4) Пусть X - метризуемое топологическое пространство.

а) Докажите, что X метризуемо одной единственной метрикой тогда и только тогда, когда X состоит из одной единственной точки.

б) Покажите, что если X содержит хотя бы две различные точки, то метрик, метризующих X , бесконечно много.

Замечание 2. Бывают неметризуемые топологические пространства (примеры будут приведены ниже).

§7. Аксиомы счётности

Как мы уже могли заметить, аксиомам топологического пространства удовлетворяют наряду с хорошо нам известными пространствами и весьма экзотические объекты. Дальнейшее обогащение теории топологических пространств и желание вычленить чисто "топологические" свойства (смысл этого термина будет уточнён впоследствии) классических пространств анализа заставляет добавлять к уже имеющимся трём аксиомам топологического пространства различные дополнительные аксиомы. В этом параграфе мы рассмотрим так называемые аксиомы счётности.

Определение 1. Говорят, что топологическое пространство $(X; T)$ удовлетворяет первой аксиоме счётности, если для любой точки $x \in X$ существует конечная или счётная локальная база в точке x .

Определение 2. Говорят, что топологическое пространство $(X; T)$ удовлетворяет второй аксиоме счётности, если топология T имеет конечную или счётную базу.

Часто пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счётности, называют "пространством со счётной базой".

Замечания. 1) Очевидно, пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счётности, удовлетворяет и первой. Обратное, вообще говоря, неверно (см. ниже пример 3).

2) В дальнейшем, для краткости, там, где невозможны недоразумения, мы под словами "счётное множество" будем понимать конечное или счётное множество.

Примеры: 1. Всякое метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счётности (см. пример 3.6).

2. $\mathbb{R}^2$ с естественной топологией (порождённой метрикой (2) §6) удовлетворяет второй аксиоме счётности. Счётная база - круги рациональных радиусов с центрами в точках с рациональными координатами.

3. Несчётное множество X с дискретной топологией удовлетворяет первой аксиоме счётности (см. пример 3.7). Вместе с тем у такого топологического пространства не может быть счётной базы, поскольку каждое одноточечное (открытое) множество должно содержать элемент базы.

Задачи. 1) Докажите, что прямая Зоргенфрея (см. задачу 3.1) удовлетворяет первой аксиоме счётности, но не имеет счётной базы.

2) Докажите, что плоскость Немыцкого (см. задачу 3.3) удовлетворяет первой аксиоме счётности, но не имеет счётной базы.

3) Докажите, что плоскость $\mathbb{R}^2$ с топологией бабочек (см. задачу 3.2) удовлетворяет первой аксиоме счётности, но не имеет счётной базы.

4) Докажите, что в пространстве X , удовлетворяющем первой аксиоме счётности, для каждой точки $x \in X$ из любой локальной базы V_x в этой точке можно выделить счётное подсемейство $V'_x \subset V_x$, которое само является локальной базой в x .

5) Докажите, что в пространстве со счётной базой из любой базы B можно выделить счётное подсемейство $B' \subset B$, которое само является базой.

§8. Подпространство топологического пространства

Определение 1. Пусть $(X; T)$ - топологическое пространство, $A \subset X$. На множестве A определим топологию $T_A = \{U \cap A : U \in T\}$. Эту топологию называют индуцированной на A , а топологическое пространство (A, T_A) - подпространством в пространстве $(X; T)$.

Замечание. Отметим, что любое подмножество $A \subset X$ обычно автоматически рассматривают как подпространство в X . Множество $U \in A$, $U \in T$, называют отпечатком или следом множества U на подпространстве A .

Теорема 1. Пусть $\nu = \{V_\gamma^x | x \in X, \gamma \in \Gamma_x\}$ - ф.с.о.о., а B - база топологии T . Тогда $\nu|_A = \{V_\gamma^a \cap A | a \in A, \gamma \in \Gamma_a\}$ - ф.с.о.о., а $B_A = \{V \cap A | V \in B\}$ - база индуцированной топологии.

Доказательство. Для $\forall a \in A$ и $\gamma \in \Gamma_a$ множество $V_\gamma^a \cap A$ - открытая окрестность точки a в индуцированной топологии. Зафиксируем произвольные $U \in T_A$ и $a \in U$. По определению индуцированной топологии $\exists \tilde{U} : U = \tilde{U} \cap A, U \in T$. Ясно, что $\tilde{U} \in T(a)$. В силу этого $\exists V_\gamma^a \in \nu | V_\gamma^a \in \tilde{U}$. Ясно, что $V_\gamma^a \cap A \subset \tilde{U} \cap A = U$. $\square$

Следствия. 1) Если (X, T) имеет счётную базу, то и всякое подпространство A имеет счётную базу.

2) Если (X, T) удовлетворяет первой аксиоме счётности, то и всякое подпространство A удовлетворяет первой аксиоме счётности.

3) Если (X, T) метризуемо метрикой ρ , то любое подпространство $A \subset X$ метризуемо индуцированной метрикой $\rho|_A$.

Доказательство. Следствия 1) и 2) очевидны. Докажем 3). Обозначим $B_A(a, \varepsilon) = B(a, \varepsilon) \cap A, \forall a \in A, \forall \varepsilon > 0$. $B_A(a, \varepsilon)$ - открытый шар в пространстве $(A, \rho|_A)$, а семейство этих шаров порождает топологию метрического пространства $(A, \rho|_A)$. В то же время, в силу теоремы 1, это семейство порождает индуцированную топологию T_A . $\square$

Замечание. Свойство топологического пространства называется наследственным, если оно сохраняется при переходе к любому его подпространству.

Таким образом, свойства пространства удовлетворять первой либо второй аксиоме счётности, быть метризуемым - наследственные.

Задачи. 1) Докажите, что на прямой

$$L = \{x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 / x^2 = 0\}$$

в плоскости Немыцкого (см. задачу 3.3) индуцируется дискретная топология.

2) Докажите, что на любой вертикальной прямой в $\mathbb{R}^2$ топология бабочек (см. задачу 3.2) индуцирует дискретную топологию.

3) Докажите, что если прямая $L \subset \mathbb{R}^2$ не вертикальна, то её естественная топология (то есть топология, порождённая евклидовой метрикой) совпадает с топологией, индуцированной топологией бабочек.

§9. Взаимное расположение точек и множеств в топологическом пространстве.

Определение 1. Точка x называется внутренней точкой множества A , если у нее существует окрестность, целиком принадлежащая множеству A . Множество всех внутренних точек называется внутренностью множества A и обозначается $\overset{\circ}{A}$ или $\text{int } A$ ($\text{Int } A$).

Определение 2. Точка x называется точкой прикосновения множества A , если любая окрестность точки x пересекается с множеством A . Множество всех точек прикосновения множества называется замыканием этого множества и обозначается $\bar{A}$.

Определение 3. Подмножество A топологического пространства (X, T) называется

замкнутым, если его дополнение $X \setminus A$ открыто.

Дополнение к дополнению A есть снова A , следовательно, множество открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.

Примеры: 1. Всё пространство X и $\emptyset$ замкнуты в любой топологии (в тривиальной топологии это единственные замкнутые множества).

2. В дискретной топологии произвольное множество открыто и замкнуто одновременно.

3. Замкнутый интервал $[a, b] \subset \mathbf{R}$ замкнут в естественной топологии прямой.

4. Замкнутый шар метрического пространства замкнут в топологии, порождённой метрикой.

Замечание. В силу формул де Моргана

$$X \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_{\gamma} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (X \setminus U_{\gamma}), \quad X \setminus \bigcap_{\gamma \in \Gamma} U_{\gamma} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (X \setminus U_{\gamma}) \quad (4)$$

пересечение произвольного семейства замкнутых множеств и объединение конечного семейства замкнутых множеств замкнуты.

Теорема 1. Множество открыто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей внутренностью.

Теорема 2. Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием.

Задача 1. Доказать следующее утверждение.

Пусть F - семейство множеств; объединение конечного и пересечение любого подсемейства F снова принадлежит F . Пусть множество $X = \bigcup \{F : F \in F\} \in F$. Тогда F есть в точности семейство замкнутых подмножеств множества X относительно топологии, образованной дополнениями к элементам F .

Определение 4. Точка x называется *точкой накопления* или *предельной точкой* множества A , если любая ее окрестность содержит хотя бы одну точку множества A , отличную от точки x .

Замечание. Предельная точка может не принадлежать множеству A .

Примеры: 5. Рассмотрим $(a; b) \subset \mathbf{R}$, где прямая снабжена естественной топологией. Любая точка $x \in (a; b)$ предельная для интервала $(a; b)$.

6. Обозначим $Q(\subset \mathbf{R})$ множество всех рациональных чисел числовой прямой $\mathbf{R}$ с естественной топологией. Любое действительное число является предельной точкой множества Q .

7. В топологическом пространстве с тривиальной топологией, в котором больше одной точки, любая точка x является предельной для любого подмножества, содержащего точки, отличные от x . Действительно, единственной окрестностью любой точки является всё пространство, содержащее любое своё подмножество.

8. В пространстве с дискретной топологией никакое множество не имеет предельных точек, так как каждое одноточечное множество - окрестность своей единственной точки, не содержащая никаких других точек.

9. Если подмножество A топологического пространства содержит изолированную точку x , то есть точку, у которой есть окрестность, не содержащая других точек множества A , то x не является предельной точкой множества A . Предыдущий пример - это тот случай, когда у любого подмножества все точки - изолированные.

Определение 5. Точка x называется *граничной точкой* множества A , если любая ее окрестность пересекается как с множеством A , так и с его дополнением. Множество всех граничных точек множества A называется его *границей* и обозначается $\text{bond}(A)$, или $b(A)$, или $gr(A)$.

Другими словами, граничная точка - это точка прикосновения одновременно для множества A и для его дополнения $C_X A$.

Примеры: 10. Если X - антидискретное пространство, то $\partial A = X$ для $\forall A \neq \emptyset, X$.

11. Если X - дискретное пространство, то $\partial A = \emptyset$ для любого множества $A \subset X$.

12. Если $\mathbf{R}$ - действительная прямая с естественной топологией, то $\partial \mathbf{Q} = \partial \mathbf{J} = \mathbf{R}$. Заметим, что это пример, когда граница есть множество более обширное, чем исходное.

Теорема 3. Множество всех точек из A , не являющихся предельными для $X \setminus A$, есть в точности $\overset{\circ}{A}$.

Примеры: 13. Если X - антидискретное пространство, то $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, если только $A \neq X$.

14. Если X - дискретное пространство, то $A = \overset{\circ}{A} = \bar{A}$ для $\forall A \subset X$.

15. Если $\mathbf{R}$ - действительная прямая с естественной топологией, то $\overset{\circ}{\mathbf{Q}} = \emptyset$.

Задачи. 2) Доказать следующие формулы:

а) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)} = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$;

б) $X \setminus \partial A = \overset{\circ}{A} \cup (X \setminus \bar{A})$;

в) $\bar{A} = A \cup \partial A$;

г) $\overset{\circ}{A} = A \setminus \partial A$.

3) Докажите следующие утверждения:

а) множество A замкнуто тогда и только тогда, когда $\partial A \subset A$;

б) множество A открыто тогда и только тогда, когда $A \cap \partial A = \emptyset$.

Пример 16. Рассмотрим евклидову плоскость. В качестве топологии рассмотрим множество всех открытых кругов этой плоскости. На плоскости возьмем фигуру, изображенную на рис. 1а: заполненный ромб с «хвостом» из последовательности точек, лежащих

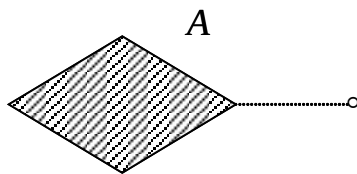
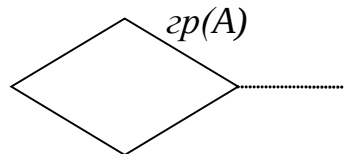
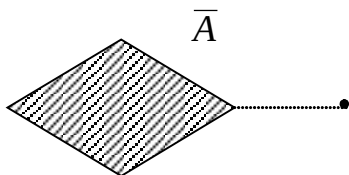
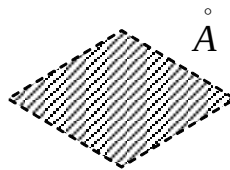


Рис. 1а



на продолжении диагонали ромба так, что расстояние между n -ой и $(n+1)$ -ой точками в два раза меньше расстояния между $(n-1)$ -ой и n -ой точками. Пусть A - множество всех точек описанной фигуры. Тогда см. рис.

Определение 6. Точка x называется внешней точкой множества A , если существует окрестность точки x не пересекающаяся с A .

Теорема 4. Подмножество топологического пространства замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Доказательство. Необходимость. Если подмножество A топологического пространства X замкнуто, то множество $X \setminus A$ - открыто и всякая точка $x \in X \setminus A$ принадлежит $X \setminus A$ вместе с некоторой своей окрестностью, то есть в $X \setminus A$ нет предельных точек множества A . Таким образом, все предельные точки множества A принадлежат A .

Достаточность. Если A содержит все свои предельные точки, то в $X \setminus A$ их нет. Следовательно, всякая точка из $X \setminus A$ содержится в $X \setminus A$ вместе с некоторой своей окрестностью $\Rightarrow X \setminus A$ открыто $\Rightarrow A$ замкнуто. $\square$

Следствие 1. Если к множеству A присоединить все его предельные точки, то получится замкнутое множество.

Определение 1. Замыкание (T - замыкание) подмножества A топологического пространства (X, T) есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A . Обозначается замыкание $\overline{A}$, иногда $[A]$.

$\overline{A}$ замкнуто как пересечение замкнутых множеств. Из определения ясно, что $\overline{A}$ - наименьшее замкнутое множество, содержащее A , то есть A замкнуто тогда и только тогда, когда $A = \overline{A}$.

Определение 2. Операцию перехода от A к $\overline{A}$ называют *оператором замыкания* (замыканием множества A).

Теорема 1. Замыкание произвольного множества есть объединение этого множества и множества его предельных точек.

Доказательство. Каждая предельная точка множества A есть предельная точка любого множества, содержащего A , поэтому эта точка принадлежит $\overline{A}$. С другой стороны, объединение A и его предельных точек замкнуто (см. следствие 1), поэтому содержит $\overline{A}$. $\square$

Примеры: 1. Замыкание интервала $(a;b) \subset \mathbf{R}$, где прямая $\mathbf{R}$ снабжена естественной топологией, это $[a,b]$.

2. Замыкание множества Q есть $\mathbf{R}$ (в естественной топологии).

3. В пространстве с тривиальной топологией замыкание одноточечного множества есть всё пространство.

Свойства операции замыкания

Теорема 2.

- 1) $A \subset \overline{A}$;
- 2) если $A \subset B$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$ (монотонность оператора замыкания);
- 3) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ (идемпотентность оператора замыкания);
- 4) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right)} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$ (конечная аддитивность оператора замыкания);
- 5) $\overline{\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right)} \supset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{A_\gamma}$;
- 6) $\overline{\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right)} \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \overline{A_\gamma}$.

Замечание. Включение в свойствах 5) и 6), вообще говоря, нельзя заменить равенством, причём в 6) - даже для случая двух пересекающихся множеств.

Контрпримеры. Для 5). На прямой $\mathbf{R}$ с естественной топологией замыкание объединения рациональных чисел $\overline{\bigcup_{x \in Q} \{x\}} = \mathbf{R}$, а объединение замыканий одноточечных мно-

жеств, каждое из которых - рациональное число $\bigcup_{x \in Q} \overline{\{x\}} = Q \subset \mathbf{R}$, но не совпадает с $\mathbf{R}$.

Для 6). Обозначим $J \subset \mathbf{R}$ множество иррациональных чисел. Тогда $\emptyset = \overline{(Q \cap J)} \neq \overline{Q} \cap \overline{J} = \mathbf{R} \cap \mathbf{R} = \mathbf{R}$.

Доказательство теоремы 2. 1) - очевидно. $\square$

2) Если $A \subset B$, то $A \subset B \subset \overline{B}$, то есть $\overline{B}$ - замкнутое множество, содержащее A , в

связи с чем $\overline{A} \subset \overline{B}$. $\square$

3) Замыкание замкнутого множества равно ему же. $\square$

4) $\overline{A \cup B}$ - замкнутое множество, содержащее и A и B , поэтому $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ и $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, откуда $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. С другой стороны, $\overline{A \cup B}$ - замкнутое множество, содержащее $A \cup B \Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Для объединения конечного числа множеств - по индукции. $\square$

5) $\overline{\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right)}$ - замкнутое множество, содержащее каждое A_γ , а следовательно, и каждое $\overline{A_\gamma}$, откуда получаем 5). $\square$

6) Для произвольного $\gamma_0 \in \Gamma$ имеем $\overline{\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \right)} \subset \overline{A_{\gamma_0}}$, откуда получаем 6). $\square$

Задачи. 1) Покажите, что на прямой Зоргенфрея любое множество вида $[a, b]$ одновременно открыто и замкнуто.

2) Приведите пример открытого единичного шара $B(a, 1) = \{x : \rho(a, x) < 1\}$ в метрическом пространстве (M, ρ) , замыкание которого $\overline{B(a, 1)}$ не совпадает с замкнутым шаром $B^*(a, 1) = \{x : \rho(a, x) \leq 1\}$.

3) Может ли шар большего радиуса метрического пространства (M, ρ) оказаться строго внутри шара меньшего радиуса?

4) Докажите, что разность открытого и замкнутого множеств открыта.

§11. Некоторые свойства пространств со счётной базой

В этом параграфе собраны свойства пространств, удовлетворяющих второй аксиоме счётности, необходимые нам в дальнейшем.

Теорема 1. Пусть A - несчётное подмножество топологического пространства со счётной базой. Тогда в A существует точка, предельная для A .

Доказательство. Предположим, что ни одна точка множества A не является предельной для A и пусть B - какая-нибудь счётная база рассматриваемого пространства. Для каждой точки $x \in A$ найдётся открытая окрестность этой точки $U_x \in B : U_x \cap A = \{x\}$. Этим устанавливается взаимнооднозначное соответствие между точками из A и элементами некоторого подсемейства семейства $B \Rightarrow A$ счётно. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

1. Плотные множества. Сепарабельность

Определение 1. Множество $A \subset X$ называется (всюду) *плотным* в X , если $\overline{A} = X$.

Множество $A \subset B \subset X$ называется (всюду) *плотным* в множестве B , если $\overline{A} = B$ в индуцированной топологии (B, T_B) .

Определение 2. Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если оно содержит хотя бы одно счётное *всюду плотное* множество, т.е. такое множество, замыкание которого совпадает со всем топологическим пространством.

Теорема 1. Пространство со счётной базой сепарабельно.

Доказательство. Выберем по одной точке из каждого элемента базы, получим счётное множество $A \subset X$. Утверждается, что $\overline{A} = X$. Действительно, множество $X \setminus \overline{A}$

открыто и не пересекается с $A \Rightarrow$ оно не содержит ни одного элемента базы $\Rightarrow X \setminus \bar{A} = \emptyset$. $\square$

Лемма 1. Множество $A \subset X$ всюду плотно тогда и только тогда, когда для любого непустого открытого множества $U \subset X$ $U \cap A \neq \emptyset$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $x \in X$ и произвольную её окрестность $U \in \mathcal{T}(x)$. По условию $U \cap A \neq \emptyset$, то есть точка x - предельная точка для A , откуда $\bar{A} = X$. $\square$

Замечание. Сепарабельное пространство не обязательно обладает счётной базой.

Пример 1 (сепарабельного пространства без счётной базы).

Рассмотрим несчётное множество X с топологией Зарисского (см. задачу 2.2). В таком топологическом пространстве каждое бесконечное подмножество плотно в силу леммы 1, то есть X сепарабельно. Покажем, что X не удовлетворяет второй аксиоме счётности. Предположим противное и пусть B - счётная база топологии $\mathcal{T}$. Пересечение всех открытых множеств, содержащих точку x есть одноточечное множество $\{x\} \Rightarrow$ пересечение элементов базы B , содержащих точку x , есть $\{x\}$. Но дополнение этого счётного пересечения в силу формул де Моргана (4) есть счётное объединение конечных множеств, то есть счётно. Получили, что множество $X \setminus \{x\}$ - счётное множество. Получили противоречие. $\square$

Вместе с тем имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. Если топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ сепарабельно и метризуемо, то оно имеет счётную базу.

Доказательство. Пусть $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ - некоторое счётное всюду плотное множество, а метрика ρ порождает топологию $\mathcal{T}$. Рассмотрим счётное множество открытых шаров $\{B(a_n, r), n = 1, 2, \dots\}$, где $r \in \mathbb{Q}_+$ - всевозможные положительные рациональные числа. Покажем, что это база топологии $\mathcal{T}$. Пусть $U \in \mathcal{T}$, $x \in U$. Тогда $\exists \varepsilon > 0: B(x, \varepsilon) \subset U$. Возьмём $r \in \mathbb{Q}_+$, $0 < r < \varepsilon/2$. Поскольку A всюду плотно, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ и $\exists a_n \in B(x, r) \cap A$. Рассмотрим шар $B(a_n, r)$. Ясно, что $x \in B(a_n, r)$. Покажем, что $B(a_n, r) \subset B(x, \varepsilon)$. Пусть $y \in B(a_n, r)$; покажем, что $y \in B(x, \varepsilon)$. В силу неравенства треугольника

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, a_n) + \rho(a_n, y) < r + r = \varepsilon,$$

следовательно, $y \in B(x, \varepsilon)$. Отсюда получаем, что $x \in B(a_n, r) \subset U$, то есть набор шаров $B(a_n, r)$ - счётная база топологии $\mathcal{T}$. $\square$

Замечание 2. В силу теоремы 3 пример 1 есть пример неметризуемого топологического пространства.

С понятием плотного множества тесно связано следующее понятие.

Определение 3. Множество $A \subset X$ называется *нигде не плотным* в X , если $\overset{\circ}{(\bar{A})} = \emptyset$.

Теорема 4. Множество $A \subset X$ *нигде не плотно* тогда и только тогда, когда в любом непустом открытом множестве U можно указать непустое открытое подмножество $V \subset U$ такое, что $V \cap A = \emptyset$.

Доказательство. Необходимость. Поскольку $\overset{\circ}{(\bar{A})} = \emptyset$, для любого открытого множества U имеем $U \not\subset \bar{A}$. Обозначим $V = U \setminus \bar{A}$. Это множество не пусто в силу предыдущего замечания, открыто (см. задачу 8.5), $V \subset U$ и $V \cap A = \emptyset$.

Достаточность. Предположим противное, то есть что мы имеем $(\overset{\circ}{\bar{A}}) \neq \emptyset$. Обозначим $U = (\overset{\circ}{\bar{A}})$ и рассмотрим произвольное непустое открытое множество $V \subset U$. Ясно, что $V \subset \bar{A}$, откуда имеем $V \cap A \neq \emptyset$. Получили противоречие. $\square$

Теорема 5. Множество $A \subset X$ нигде не плотно тогда и только тогда, когда всюду плотно множество $X \setminus \bar{A}$.

Доказательство. Равенство $(\overset{\circ}{\bar{A}}) = \emptyset$ эквивалентно тому, что для любого непустого открытого множества имеем $U \not\subset \bar{A}$, то есть $U \cap (X \setminus \bar{A}) \neq \emptyset$. В силу леммы 1 это эквивалентно плотности $X \setminus \bar{A}$. $\square$

2. Линделёфовы пространства

Теорема 6. (Линделёфа) В произвольном открытом покрытии топологического пространства со счётной базой есть счётное подпокрытие.

Доказательство. Обозначим $U \subset T$ - открытое покрытие топологического пространства (X, T) , B - некоторую счётную базу топологии T . Так как каждый элемент семейства U есть объединение элементов базы B (см. лемму 3.1), то существует подсемейство $B' \subset B$, также покрывающее X , каждый элемент которого содержится в некотором элементе семейства U . Для каждого элемента из B' зафиксируем содержащий его элемент из U . В итоге получим счётное подпокрытие покрытия U . $\square$

Определение 4. Топологическое пространство называется *лиindelёфовым (финально-компактным)* если каждое его открытое покрытие содержит счётное подпокрытие.

Задачи. 1) Докажите, что прямая Зоргенфрея сепарабельна.

2) Докажите, что прямая Зоргенфрея не метризуема.

3) Докажите, что плоскость Немыцкого сепарабельна.

4) Докажите, что плоскость Немыцкого не метризуема.

5) Докажите сепарабельность плоскости с топологией бабочек.

6) Докажите, что сепарабельность не является наследственным свойством.

7) Пусть $A \subset X$ всюду плотно в X . Покажите, что для любого открытого множества U множество $A \cap U$ всюду плотно в U .

8) Пусть $A \subset X$ нигде не плотно в X . Покажите, что для любого открытого множества U множество $A \cap U$ нигде не плотно в U .

9) Докажите, что если $A \subset B \subset X$, A всюду плотно в B и B всюду плотно в X , то A всюду плотно в X .

10) Докажите, что если пространство X метризуемо и сепарабельно, то любое его подпространство сепарабельно.

3. Аксиомы отделимости и отвечающие им пространства

Аксиомы отделимости представляют собой дополнительные ограничения, которые часто накладываются на топологические пространства для того, чтобы приблизить их свойства к привычным свойствам n -мерных арифметических пространств.

Аксиома T_0 – аксиома Колмогорова: для любых его двух различных точек x, y , по крайней мере, у одной есть окрестность, не содержащая второй точки.

Можно дать следующие эквивалентные формулировки:

любое одноточечное множество замкнуто;

любое конечное множество замкнуто.

Топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме T_0 , называется T_0 -пространством.

Аксиома T_1 : для любых двух различных точек x и y существует окрестность точки x , не содержащая точки y , и окрестность точки y , не содержащая точки x .

Пространства, удовлетворяющие аксиоме T_1 , называются T_1 -пространствами.

При этом замкнутые множества в T_1 -пространствах могут быть определены как множества, содержащие все свои предельные точки.

Аксиома T_2 или хаусдорфова аксиома отделимости: любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности.

Пространство, удовлетворяющее аксиоме, называется T_2 -пространством (или *хаусдорфовым*, или *отделимым*).

Аксиома T_3 : у любой точки и любого не содержащего ее замкнутого множества есть непересекающиеся окрестности.

Аксиома T_4 : у любых двух непересекающихся замкнутых множеств есть непересекающиеся окрестности.

Определение 5. Топологическое пространство, удовлетворяющее аксиомам T_1 и T_3 , называется *регулярным*, а аксиомам T_1 и T_4 – *нормальным*.

Задача. Привести примеры пространств, удовлетворяющих сформулированным аксиомам, а также примеры пространств, не удовлетворяющих им. Дать определения рассмотренных в этом пункте пространств в «чистом» виде, без использования ссылок на соответствующие аксиомы.

Можно показать, что из аксиомы T_1 следует аксиома T_2 , но из T_1 не следует ни T_3 , ни T_4 .

Топологическое пространство, не удовлетворяющее аксиоме T_1 , не достаточно хорошо устроено с точки зрения классического анализа. Одноточечное множество может быть в нем незамкнуто, а конечное множество может иметь предельные точки.

В хаусдорфовых пространствах с первой аксиомой счетности естественным образом определяются понятия сходимости последовательности и ее предела, после чего дается определение операций над множествами и понятие непрерывного отображения, которые совпадают с соответствующими определениями для метрических пространств.

4. Компактность, связность

Определение 6. Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если оно содержит хотя бы одно счетное *всюду плотное* множество, т.е. такое множество, замыкание которого совпадает со всем топологическим пространством.

Определение 7. Топологическое пространство называется *компактным*, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

Определение 8. Топологическое пространство называется *локально компактным*, если любая его точка имеет компактную окрестность.

Примеры: 2. Евклидово пространство E^n не компактно, но локально компактно.

3. Сфера в E^n компактна.

Теорема 7. Топологическое пространство со счетной базой сепарабельно.

Теорема 8. Для любого T_1 -пространства (X, τ) следующие условия равносильны:

1. (X, τ) регулярно и имеет счетную базу;
2. (X, τ) метризуемо и сепарабельно;

Теорема 9 (Гейне – Бореля – Лебега). Каждое открытое покрытие произвольного замкнутого ограниченного подмножества пространства вещественных чисел является компактным подпространством.

Следствие. Замкнутое ограниченное подмножество n -мерного евклидова пространства компактно.

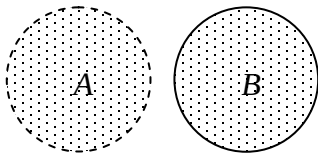


Рис. 1

Определение 9. Два множества A и B в топологическом пространстве (X, τ) называются *отделенными*, если $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = \emptyset$.

Примеры: 4. На следующих рисунках 1 и 2 множества A и B отделены.

5. В естественной топологии числовой прямой отрезки $[2,4]$ и $[5,6]$ отделены, интервалы $(1,2)$ и $(2,3)$ отделены, множества $(1,3)$ и $[3,4)$ не отделены.

Определение 10. Топологическое пространство называется *связным*, если его невозможно представить в виде объединения двух непустых отделенных подмножеств.

Теорема 10. Пространство связно тогда и только тогда, когда оно содержит только тривиальные открыто-замкнутые множества.

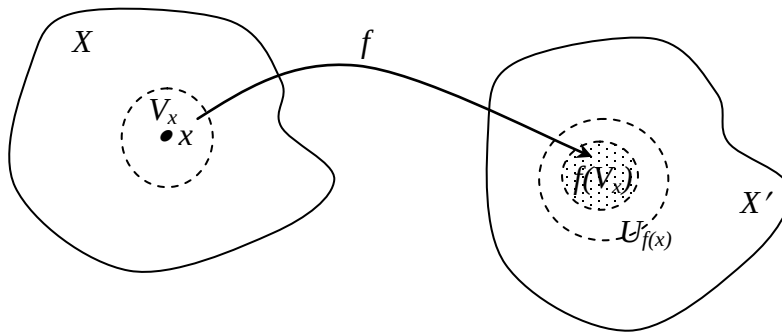
Примеры: 6. Антидискретное пространство связно.

7. Дискретное пространство, содержащее более чем одну точку, несвязно.

8. Отрезок $[0;1]$ числовой прямой – связное топологическое пространство, интервал $(0;1)$ связан, числовая прямая связна.

§12. Непрерывные отображения

Определение 1. Отображение f топологического пространства (X, τ) в другое (X', τ') называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если для любой окрестности $U_{f(x)}$ точки $f(x)$ найдется такая окрестность $V_x \in \tau$ точки x , что ее образ целиком лежит в $U_{f(x)}$, т.е. $f(V_x) \subset U_{f(x)}$.



Определение 2. Отображение $f: (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$ называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке пространства X .

Задачи. 1) Показать, что в определении 1 можно

говорить не о произвольных окрестностях U и V , а лишь об окрестностях, принадлежащих некоторым базам топологий τ и τ' .

2) Показать, что в определении 1 можно говорить не о произвольных окрестностях U и V , а лишь об окрестностях, принадлежащих некоторым предбазам топологий τ и τ' .

Определение. Отображение $f: (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$ называется *открытым*, если прообраз каждого открытого множества открыт.

Теорема 1. Отображение $f: (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно открыто.

Доказательство.

1. Пусть f непрерывно. Возьмем некоторое открытое множество $V \in \tau'$ и найдем его полный прообраз $U \subset X$. Для каждой точки $x \in U$ очевидно $f(x) \in V$, так как V открыто, то оно является окрестностью каждой своей точки $f(x)$. Из определения непрерывного отображения следует, что у точки x найдется окрестность U_x , целиком лежащая в U такая, что $f(U_x) \subset V$. Рассмотрим множество $\bigcup_x U_x$ для $x \in U$. Очевидно, оно открыто и совпадает с U .

Следовательно, отображение f является открытым.

2. Пусть отображение f открыто и x - произвольная точка пространства X . Выберем произвольную окрестность V точки $f(x)$, тогда ее полный прообраз $U \subset X$ является открытым и окрестностью точки x , причем $f(U) = V \subset V$ т.е. выполняются все требования опреде-

ления непрерывности отображения в точке x . Так как точка x выбрана произвольно, то отображение f непрерывно. $\square$

Следствие. Отображение непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества замкнут.

Примеры: 1. Тожественное преобразование является непрерывным отображением.

2. Любое движение, любое подобие является непрерывным отображением.

Для доказательства достаточно показать, что в рассматриваемых случаях каждое открытое множество можно представить в виде объединения элементов базы (открытых шаров или открытых параллелепипедов).

3. Инверсия не является непрерывным отображением.

Некоторые свойства непрерывных отображений

Теорема 2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ - некоторое отображение. Справедливы следующие утверждения:

1) f непрерывно (обозначается $f \in C(X, Y)$) тогда и только тогда, когда непрерывна сюръекция $X \rightarrow f(X)$;

2) если f непрерывно, то для любого $A \subset X$ непрерывно сужение $f|_A: A \rightarrow Y$;

3) пусть $\{U_\beta\}_{\beta \in B} \subset T$ и $X = \bigcup_{\beta \in B} U_\beta$, где B - множество индексов; если все сужения $f|_{U_\beta}$ непрерывны, то f непрерывно;

4) пусть $\{F_1, \dots, F_n\}$ - замкнутые в X множества и $X = \bigcup_{i=1}^n F_i$; если все сужения $f|_{F_i}$ непрерывны, то f непрерывно.

Доказательство. 1) Мы имеем $f^{-1}(V) = f^{-1}(V \cap f(V))$ для $\forall V \in T'$. Таким образом, для $\forall V \in T'$ $f^{-1}(V \cap f(X))$ - прообраз открытого множества на $f(X)$ открыт $\Leftrightarrow$ открыто $f^{-1}(V)$. $\square$

2) Очевидно соотношение $(f|_A)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$. Из него получаем, что множество $f|_A^{-1}(V)$ открыто в индуцированной на A топологии, если открыто множество $f^{-1}(V)$. $\square$

3) Пусть множество V открыто в Y . Имеем соотношение:

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= X \cap f^{-1}(V) = \left(\bigcup_{\beta \in B} U_\beta \right) \cap f^{-1}(V) = \\ &= \bigcup_{\beta \in B} (U_\beta \cap f^{-1}(V)) = \bigcup_{\beta \in B} (f|_{U_\beta})^{-1}(V) \end{aligned}$$

Отсюда очевидно, что если множества $(f|_{U_\beta})^{-1}(V)$ открыты, то открыто $f^{-1}(V)$. $\square$

4) Доказательство аналогично 3). $\square$

Теорема 3. Пусть (X, T) , (Y, T') , (Z, T'') - топологические пространства, $f \in C(X, Y)$, $g \in C(Y, Z)$. Тогда $g \circ f \in C(X, Z)$.

Доказательство. По теореме 1 для $\forall W \in T''$ $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)) \in T$. $\square$

Определение 2. Отображение одного топологического пространства в другое называется *гомеоморфизмом*, если оно биективно (взаимно однозначно) и непрерывно в обе стороны.

Если существует гомеоморфизм между X и Y , то пространства X и Y называются го-

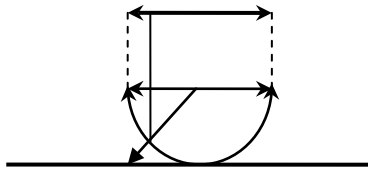
гомеоморфными; обозначаем это так: $X \approx Y$.

Понятие гомеоморфизма является одним из основных в топологии. Можно сказать, что в топологии изучаются свойства топологических пространств с точностью до гомеоморфизма, то есть гомеоморфные пространства считаются неразличимыми (легко видеть, что отношение гомеоморфности есть отношение эквивалентности).

Пример. $y=ax+b$ гомеоморфизм $R \rightarrow R$ или $R \rightarrow \{(x;y) \in R^2 \text{ (числовой прямой в график функции)}\}$.

Определение. Два пространства (X, τ) и (X', τ') называются *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм $f: (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$.

Примеры: 1. Интервал гомеоморфен прямой.



2. Открытый круг гомеоморфен плоскости.

3. n -мерное евклидово пространство гомеоморфно n -мерным аффинному и арифметическому пространствам.

Замечание. Отношение гомеоморфизма на множестве всех топологических пространств является отношением эквивалентности.

Из определения гомеоморфизма следует, что он сохраняет открытые множества, т.е. открытые множества являются его инвариантами. Более того, гомеоморфизм устанавливает взаимно однозначное соответствие не только между точками топологических пространств, но и между элементами их топологий. Поэтому два гомеоморфных пространства эквивалентны с топологической точки зрения, т.е. имеют одинаковые свойства.

Задача 3. Покажите, что биективное непрерывное отображение не обязательно гомеоморфизм.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине «**Дифференциальная геометрия и топология**»
для студентов направления подготовки

02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
направленность (профиль)

«Анализ данных и искусственный интеллект»

Самостоятельная работа как важнейшая форма учебного процесса

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования - "подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности".

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. Они включают в себя:

- изучение и систематизацию официальных государственных документов - законов, постановлений, указов, нормативно-инструкционных и справочных материалов с использованием информационно-поисковых систем "Консультант-плюс", "Гарант", глобальной сети "Интернет";
- изучение учебной, научной и методической литературы, материалов периодических изданий с привлечением электронных средств официальной, статистической, периодической и научной информации;
- подготовку докладов и рефератов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ;
- участие в работе студенческих конференций, комплексных научных исследованиях.

Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.

Цели и основные задачи СРС

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой специалиста и бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

Виды самостоятельной работы

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы – аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации, содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.):

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателей являются:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание рефератов;
- подготовка к семинарам и лабораторным работам, их оформление;
- составление аннотированного списка статей из соответствующих журналов по отраслям знаний (педагогических, психологических, методических и др.);

- подготовка рецензий на статью, пособие;
- выполнение микроисследований;
- подготовка практических разработок;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;
- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов.

(В зависимости от особенностей факультета перечисленные виды работ могут быть расширены, заменены на специфические).

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

- текущие консультации;
- коллоквиум как форма контроля освоения теоретического содержания дисциплин: (в часы консультаций, предусмотренных учебным планом);
- прием и разбор домашних заданий (в часы практических занятий);
- прием и защита лабораторных работ (во время проведения л/р);
- выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин (руководство, консультирование и защита курсовых работ (в часы, предусмотренные учебным планом);
- выполнение учебно-исследовательской работы (руководство, консультирование и защита УИРС);
- прохождение и оформление результатов практик (руководство и оценка уровня сформированности профессиональных умений и навыков);
- выполнение выпускной квалификационной работы (руководство, консультирование и защита выпускных квалификационных работ) и др.

Организация СРС

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Организацию самостоятельной работы студентов обеспечивают: факультет, кафедра, учебный и методический отделы, преподаватель, библиотека, ТСО, ИВТ, издательство и др.

Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Выполняя самостоятельную работу под контролем преподавателя студент должен:

- освоить минимум содержания, выносимый на самостоятельную работу студентов и предложенный преподавателем в соответствии с ФГОС ВО по данной дисциплине.
- планировать самостоятельную работу в соответствии с графиком самостоятельной работы, предложенным преподавателем.
- самостоятельную работу студент должен осуществлять в организационных формах, предусмотренных учебным планом и рабочей программой преподавателя.
- выполнять самостоятельную работу и отчитываться по ее результатам в соответствии с графиком представления результатов, видами и сроками отчетности по самостоятельной работе студентов.

студент может:

сверх предложенного преподавателем (при обосновании и согласовании с ним) и минимума обязательного содержания, определяемого ФГОС ВО по данной дисциплине:

- самостоятельно определять уровень (глубину) проработки содержания материала;
- предлагать дополнительные темы и вопросы для самостоятельной проработки;
- в рамках общего графика выполнения самостоятельной работы предлагать обоснованный индивидуальный график выполнения и отчетности по результатам самостоятельной работы;
- предлагать свои варианты организационных форм самостоятельной работы;
- использовать для самостоятельной работы методические пособия, учебные пособия, разработки сверх предложенного преподавателем перечня;
- использовать не только контроль, но и самоконтроль результатов самостоятельной работы в соответствии с методами самоконтроля, предложенными преподавателем или выбранными самостоятельно.

Самостоятельная работа студентов должна оказывать важное влияние на формирование личности будущего специалиста, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет внеаудиторную работу по личному индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, времени и других условий.

Общие рекомендации по организации самостоятельной работы

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:
 - а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;
 - б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.
 3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.
 4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.
 5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.
 6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,
 7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.
- Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

Работоспособность - способность человека к труду с высокой степенью напряженности в течение определенного времени. Различают внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организация рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться информацией;
- величина умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н. Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;
- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп работы;
- привычная последовательность и систематичность деятельности;
- правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменой дела. В течение дня работоспособность изменяется. Наиболее плодотворным является *утреннее время (с 8 до 14 часов)*, причем максимальная работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем *послеобеденное* - (с 16 до 19 часов) и *вечернее* (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1-1,5 часа нужны перерывы по 10 - 15 мин, через 3 - 4 часа работы отдых должен быть продолжительным - около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда.

Физически здоровый молодой человек, обладающий хорошей подготовкой и нормальными способностями, должен, будучи студентом, отдавать *учению 9-10 часов в день* (из них 6 часов в вузе и 3 - 4 часа дома). Любой предмет нельзя изучить за несколько дней перед экзаменом. Если студент в году работает систематически, то он быстро все вспомнит, восстановит забытое. Если же подготовка шла аврально, то у студента не будет даже общего представления о предмете, он забудет все сданное.

Следует взять за правило: *учиться ежедневно, начиная с первого дня семестра.*

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы - это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напо-

следок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

Самостоятельная работа студента - необходимое звено становления исследователя и специалиста

Прогресс науки и техники, информационных технологий приводит к значительному увеличению научной информации, что предъявляет более высокие требования не только к моральным, нравственным свойствам человека, но и в особенности, постоянно возрастающие требования в области образования – обновление, модернизация общих и профессиональных знаний, умений специалиста.

Всякое образование должно выступать как динамический процесс, присущий человеку и продолжающийся всю его жизнь. Овладение научной мыслью и языком науки является необходимой составляющей в самоорганизации будущего специалиста исследователя. Под этим понимается не столько накопление знаний, сколько овладение научно обоснованными способами их приобретения. В этом, вообще говоря, состоит основная задача вуза.

Специфика вузовского учебного процесса, в организации которого самостоятельной работе студента отводятся все больше места, состоит в том, что он является как будто бы последним и самым адекватным звеном для реализации этой задачи. Ибо во время учебы в вузе происходит выработка стиля, навыков учебной (познавательной) деятельности, рациональный характер которых будет способствовать постоянному обновлению знаний высококвалифицированного выпускника вуза.

Однако до этого пути существуют определенные трудности, в частности, переход студента от синтетического процесса обучения в средней школе, к аналитическому в высшей. Это связано как с новым содержанием обучения (расширение общего образования и углубление профессиональной подготовки), так и с новыми, неизвестными до сих пор формами: обучения (лекции, семинары, лабораторные занятия и т.д.). Студент получает не только знания, предусмотренные программой и учебными пособиями, но он также должен познакомиться со способами приобретения знаний так, чтобы суметь оценить, что мы знаем, откуда мы это знаем и как этого знания мы достигли. Ко всему этому приходят через собственную самостоятельную работу.

Это и потому, что самостоятельно приобретенные знания являются более оперативными, они становятся личной собственностью, а также мотивом поведения, развивают интеллектуальные черты, внимание, наблюдательность, критичность, умение оценивать. Роль преподавателя в основном заключается в руководстве накопления знаний (по отношению к первокурсникам), а в последующие годы учебы, на старших курсах, в совместном установлении проблем и заботе о самостоятельных поисках студента, а также контро-

лирования за их деятельностью. Отметим, что нельзя ограничиваться только приобретением знаний предусмотренных программой изучаемой дисциплины, надо постоянно углублять полученные знания, сосредотачивая их на какой-нибудь узкой определенной области, соответствующей интересам студента. Углубленное изучение всех предметов, предусмотренных программой, на практике является возможным, и хорошая организация работы позволяет экономить время, что создает условия для глубокого, систематического, заинтересованного изучения самостоятельно выбранной студентом темы.

Конечно, все советы, примеры, рекомендации в этой области, даваемые преподавателем, или определенными публикациями, или другими источниками, не гарантируют никакого успеха без проявления собственной активности в этом деле, т.е. они не дают готовых рецептов, а должны способствовать анализу собственной работы, ее целей, организации в соответствии с индивидуальными особенностями. Учитывая личные возможности, существующие условия жизни и работы, навыки, на основе этих рекомендаций, возможно, выработать индивидуально обоснованную совокупность методов, способов, найти свой стиль или усовершенствовать его, чтобы изучив определенный материал, иметь время оценить его значимость, пригодность и возможности его применения, чтобы, в конечном счете, обеспечить успешность своей учебы с будущей профессиональной деятельности

Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы

С первых же сентябрьских дней на студента обрушивается громадный объем информации, которую необходимо усвоить. Нужный материал содержится не только в лекциях (запомнить его – это только малая часть задачи), но и в учебниках, книгах, статьях. Порой возникает необходимость привлекать информационные ресурсы Интернет. Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности. Вчерашнему школьнику сделать это бывает весьма непросто: если в школе ежедневный контроль со стороны учителя заставлял постоянно и систематически готовиться к занятиям, то в вузе вопрос об уровне знаний вплотную встает перед студентом только в период сессии. Такая ситуация оборачивается для некоторых соблазном весь семестр посвятить свободному времяпрепровождению («когда будет нужно – выучу!»), а когда приходит пора экзаменов, материала, подлежащего усвоению, оказывается так много, что никакая память не способна с ним справиться в оставшийся промежуток времени.

Работа с книгой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь

строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Различают два вида чтения; первичное и вторичное. *Первичное* - это внимательное, неторопливое чтение, при котором можно остановиться на трудных местах. После него не должно остаться ни одного непонятого слова. Содержание не всегда может быть понятно после первичного чтения.

Задача *вторичного* чтения - полное усвоение смысла целого (по счету это чтение может быть и не вторым, а третьим или четвертым).

Правила самостоятельной работы с литературой

Как уже отмечалось, самостоятельная работа с учебниками и книгами (а также самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях) – это важнейшее условие формирования у себя научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

- Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, – советует студенту и молодому ученому Г. Селье, – запомните только, где это можно отыскать» (Селье, 1987. С. 325).

- Сам такой перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и дипломных работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).

- Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и дипломных работ это позволит очень сэкономить время).

- Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть.

- При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время...

- Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).

- Если книга – Ваша собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора (это очень хороший совет, позволяющий экономить время и быстро находить «избранные» места в самых разных книгах).

- Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнако-

мое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать), и это может занять немалое время (у кого-то – до нескольких недель и даже месяцев); опыт показывает, что после этого студент каким-то «чудом» начинает буквально заглатывать книги и чуть ли не видеть «сквозь обложку», стоящая это работа или нет...

• «Либо читайте, либо перелистывайте материал, но не пытайтесь читать быстро... Если текст меня интересует, то чтение, размышление и даже фантазирование по этому поводу сливаются в единый процесс, в то время как вынужденное скорочтение не только не способствует качеству чтения, но и не приносит чувства удовлетворения, которое мы получаем, размышляя о прочитанном», – советует Г. Селье (Селье, 1987. – С. 325-326).

• Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи. В этом случае студент (или молодой ученый) будет как бы искать аргументы «за» или «против» интересующей его идеи, и одновременно он будет как бы общаться с авторами этих книг по поводу своих идей и размышлений... Проблема лишь в том, как найти «свою» идею...

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют **четыре основные установки в чтении научного текста**:

1. информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)
2. усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)
3. аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)
4. творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких **видов чтения**:

1. библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
2. просмотровое – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
3. ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;
4. изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;
5. аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получе-

ния и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;
2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;
3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;
4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;
5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;
2. Выделите главное, составьте план;
3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;
4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.
5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

Практические занятия

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях

студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

Подготовка к экзаменам и зачетам

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин завершается экзаменом. Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

Экзаменационная сессия - это серия экзаменов, установленных учебным планом. Между экзаменами интервал 3-4 дня. Не следует думать, что 3-4 дня достаточно для успешной подготовки к экзаменам.

В эти 3-4 дня нужно систематизировать уже имеющиеся знания. На консультации перед экзаменом студентов познакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

Требования к организации подготовки к экзаменам те же, что и при занятиях в течение семестра, но соблюдаться они должны более строго. Во-первых, очень важно соблюдение режима дня; сон не менее 8 часов в сутки, занятия заканчиваются не позднее, чем за 2-3 часа до сна. Оптимальное время занятий, особенно по математике - утренние и дневные часы. В перерывах между занятиями рекомендуются прогулки на свежем воздухе, неустойчивые занятия спортом. Во-вторых, наличие хороших собственных конспектов лекций. Даже в том случае, если была пропущена какая-либо лекция, необходимо во время ее восстановить (переписать ее на кафедре), обдумать, снять возникшие вопросы для того, чтобы запоминание материала было осознанным. В-третьих, при подготовке к экзаменам у студента должен быть хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Здесь можно эффективно использовать листы опорных сигналов.

Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Правила подготовки к зачетам и экзаменам:

- Лучше сразу сориентироваться во всем материале и обязательно расположить весь материал согласно экзаменационным вопросам (или вопросам, обсуждаемым на семинарах), эта работа может занять много времени, но все остальное – это уже технические детали (главное – это ориентировка в материале!).
- Сама подготовка связана не только с «запоминанием». Подготовка также предполагает и переосмысление материала, и даже рассмотрение альтернативных идей.
- Готовить «шпаргалки» полезно, но пользоваться ими рискованно. Главный смысл подготовки «шпаргалок» – это систематизация и оптимизация знаний по данному предмету, что само по себе прекрасно – это очень сложная и важная для студента работа, более сложная и важная, чем простое поглощение массы учебной информации. Если студент самостоятельно подготовил такие «шпаргалки», то, скорее всего, он и экзамены сдавать будет более уверенно, так как у него уже сформирована общая ориентировка в сложном материале.
- Как это ни парадоксально, но использование «шпаргалок» часто позволяет отвечающему студенту лучше демонстрировать свои познания (точнее – ориентировку в знаниях, что намного важнее знания «запомненного» и «тут же забытого» после сдачи экзамена).
- Сначала студент должен продемонстрировать, что он «усвоил» все, что требуется по программе обучения (или по программе данного преподавателя), и лишь после этого он вправе высказать иные, желательно аргументированные точки зрения.

ФОРМА ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ (ЗАЧЕТ, ЭКЗАМЕН)

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Дифференциальная геометрия и топология» является зачет с оценкой в 7 семестре, экзамен – в 8 семестре.

Вопросы для самоконтроля (7 семестр)

1. Векторная функция скалярного аргумента.

2. Понятие линии, различные определения линии.
3. Уравнения линии.
4. Гладкие (регулярные) кривые.
5. Касательная и нормальная плоскость к кривой.
6. Длина кривой. Естественная параметризация.
7. Кривизна кривой. Репер Френе.
8. Кручение линии.
9. Формулы Френе. Натуральные уравнения кривой.
10. Базисные векторы репера Френе. Кривизна и кручение произвольной параметризации.
11. Понятие поверхности.
12. Различные уравнения поверхности.
13. Гладкие поверхности.
14. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
15. Первая квадратичная форма поверхности и ее практическое применение.
16. Вторая квадратичная форма поверхности и ее практическое применение.
17. Индикатриса кривизны.
18. Главные направления и главные кривизны, гауссова и средняя кривизны поверхности.
19. Теоремы Гаусса и Гаусса-Боне.
20. Реализация «в малом» неевклидовых геометрий на поверхностях.

Вопросы к экзамену (8 семестр)

1. Понятие топологической структуры.
2. Покрывание, подпокрытие, топология. Примеры.
3. Различные определения топологического пространства. Примеры.
4. Сравнение топологий.
5. Взаимное расположение точек и множеств в топологическом пространстве.
6. Теоремы об открытых и замкнутых множествах.
7. База топологии. Пространство со счетной базой, примеры. Предбаза топологии.
8. Метрическое пространство. Определение и примеры.
9. Связь метрических и топологических пространств.
10. Подпространство топологического пространства.
11. Некоторые свойства топологических пространств.
12. Открытые и непрерывные отображения топологических пространств. Связь между ними. Примеры.
13. Гомеоморфизм, примеры. Компактность. Отделимость. Связность.
14. Сепарабельные пространства. Плотные множества.
15. Определение n -мерной карты, атласа пространства, n -мерного топологического многообразия. Примеры.
16. Определение гладкого многообразия, примеры.
17. Локально евклидово пространство, свойства. Другое определение топологического многообразия, примеры.
18. Замкнутые и открытые многообразия. Примеры. Свойства многообразий.
19. Гладкие отображения.
20. Диффеоморфизм.
21. Гладкая поверхность как многообразие.
22. Матричные группы.
23. Проективная плоскость и проективное пространство.
24. Многообразие с краем.
25. Риманова метрика.

26. Касательный вектор, касательное пространство к многообразию.
 27. Векторные поля на многообразии.

ПРИМЕРНАЯ ТЕМАТИКА ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Типовой вариант самостоятельной работы по теме «Параметрические уравнения линии. Касательная к линии. Длина дуги. Естественная параметризация»

1. По неподвижной окружности с внутренней ее стороны катиться без скольжения вторая окружность, радиус которой в 4 раза меньше радиуса неподвижной окружности. На катящейся окружности зафиксирована некоторая точка M . Траектория этой точки называется *астроидой*. Найти уравнение астроиды и сделать чертеж.
2. Вычислить длину дуги кривой, заключенной между точками $M_1 (t=0)$, $M_2 (t=1)$, если $\vec{r}(t) = \left\langle \frac{a}{2}(e^t + e^{-t}), \frac{a}{2}(e^t - e^{-t}), at + c \right\rangle$.
3. Найти точку пересечения касательной к кривой $\vec{r}(t) = \langle 1+t, -t^2, 1+t^3 \rangle$ в точке $t=1$ с плоскостью XOY .

Типовой вариант самостоятельной работы по теме «Метод подвижного репера. Формулы Френе. Кривизна и кручение. Сопровождающий трехгранник линии и его применение для изучения свойств линии»

1. Найти координаты вектора канонического репера, кривизну и кручение линии $\vec{r}(t) = \langle 6t, 3t^2, t^3 \rangle$ при $t=1$. Написать уравнения ребер и граней сопровождающего трехгранника.
2. Составить натуральные уравнения линии $\vec{r}(t) = \left\langle at, a\sqrt{2} \ln t, \frac{a}{t} \right\rangle$.

Типовой вариант самостоятельной работы по теме «Определение поверхности. Параметризация поверхности. Линии на поверхности. Касательная плоскость и нормаль»

1. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $xy^2 + z^3 = 12$ в точке $M(1, 2, 2)$.
2. Найти касательную плоскость к поверхности $\vec{r}(u, v) = \langle u^3, v^3, u + v \rangle$, проходящую через прямую $x + y - 1 = 0, z = 0$.
3. Показать, что объем тетраэдра, образованного пересечением координатных плоскостей и касательной плоскости к поверхности $\vec{r}(u, v) = \left\langle u^3, v^3, \frac{a^3}{uv} \right\rangle$, не зависит от выбора точки касания.

Типовой вариант самостоятельной работы по теме

«Первая и вторая квадратичные формы поверхности. Длина дуги, величина угла, площадь замкнутой области»

1. Вычислить первую квадратичную форму сферы.
2. Найти угол между кривыми $\gamma: v=u+1$, $\gamma': v=3-u$ на поверхности $\vec{r}(u, v) = \langle u \cdot \cos v, u \cdot \sin v, u^2 \rangle$.
3. На поверхности $\vec{r}(u, v) = \langle u^2 + v^2, u^2 - v^2, uv \rangle$ вычислить длину дуги линии $v=au$ между точками ее пересечения с линиями $u=1$, $u=2$.
4. Найти площадь треугольника, образованного пересечением линий $u=-av, u=av, v=1$ на поверхности и первой квадратичной формой: $ds^2 = (du)^2 + (u^2 + a^2)(dv)^2$.

**Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Индикатриса кривизны. Главные направления и кривизны. Нормальная средняя и полная кривизны. Геодезическая кривизна»**

1. Найти вторую квадратичную форму линии $\vec{r}(u, v) = \langle u^2 + v^2, u^2 - v^2, uv \rangle$ в точке $M(2, 1)$.
2. Найти вторую квадратичную форму катеноида.
3. Найти главные кривизны поверхности
$$\begin{cases} x = \cos v - (u + v) \sin v \\ y = \sin v + (u + v) \cos v \\ z = u + 2v \end{cases}$$

**Типовой вариант самостоятельной работы по теме
«Топологические пространства и их свойства»**

1. Является ли множество R^2 метрическим пространством, если под расстоянием между точками $X(x_1, x_2)$ и $Y(y_1, y_2)$ понимать $\rho(X, Y) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$?
2. Найти $\overset{\circ}{A}, A', \bar{A}, \text{ и } p.A$, если $A = (0; 1) \cup (1; 2)$.
3. Пусть $X = \{a, b, c\}$. Образуется ли семейство T топологию на X , если $T = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b, f\}, \{c, d\}\}$?

Типовой вариант контрольной работы №1

Задание 1. В точке $M(x = 1)$ для кривой $y = \frac{x^2}{2}$, $z = \frac{x^3}{6}$

- а) составить уравнение касательной и уравнение нормальной плоскости;
- б) вычислить кривизну и кручение.

Задание 2. Найти длину дуги астроида $x = R \cos^3 \frac{t}{4}$, $y = R \sin^3 \frac{t}{4}$.

Задание 3. Найти эволюту эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

Задание 4. Составить натуральные уравнения линии $x = at$, $y = a\sqrt{2} \ln t$, $z = \frac{a}{t}$.

Задание 5. Составить уравнение касательной в точке $(0;0;1)$ к кривой, заданной уравнениями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = x.$$

Задание 6. Поверхность задана уравнением $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k}$, точка M_0 лежит на ней. Найти:

- уравнение касательной плоскости;
- уравнение нормали;
- 1-ю квадратичную форму;
- 2-ю квадратичную форму;
- главные, полную и среднюю кривизны;
- составить уравнение индикатрисы Дюпена и определить тип точки M_0 .

Типовой вариант контрольной работы №2

Задание 1. Плоскость R^2 разбита на два множества A и B таких, что $R^2 = A \cup B$, A – открытый круг с центром в точке Z и радиусом r , $B = C_{R^2} A$. Отображение f таково, что осуществляет поворот A вокруг точки Z на 90° , а B оставляет неподвижным. Является ли отображение f непрерывным?

Задание 2. Приведите пример топологического пространства, не удовлетворяющего первой аксиоме счетности, но имеющего счетную базу.

Задание 3. Приведите пример, иллюстрирующий понятие «точка прикосновения множества» и поясните.

Задание 4. Приведите нетривиальный пример компактного пространства и поясните его.

Задание 5. Доказать эквивалентность следующих определений бутылки Клейна:

- прямоугольник, стороны которого склеены по схеме $aba^{-1}b^{-1}$;
- два листа Мебиуса, склеенных по краю.

Задание 6. Какие из следующих свойств являются топологическим? Для каждого не топологического свойства привести два топологически эквивалентных множества: одно, обладающее этим свойством, а другое – нет.

- X – ограниченное множество;
- X – выпуклое множество.

Задание 7. Подходящей склейкой получить окружность из отрезка.

Вопросы к коллоквиуму №1

- Векторная функция скалярного аргумента.
- Понятие линии, различные определения линии.
- Уравнения линии.
- Гладкие (регулярные) кривые.
- Касательная и нормальная плоскость к кривой.
- Длина кривой.
- Естественная параметризация.
- Кривизна кривой.
- Репер Френе.

10. Кручение линии.
11. Формулы Френе.
12. Натуральные уравнения кривой.
13. Базисные векторы репера Френе.
14. Кривизна и кручение произвольной параметризации.
15. Понятие поверхности.
16. Различные уравнения поверхности.
17. Гладкие поверхности.
18. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
19. Первая квадратичная форма поверхности и ее практическое применение.
20. Вторая квадратичная форма поверхности и ее практическое применение.
21. Индикатриса кривизны.
22. Главные направления и главные кривизны.
23. Гауссова и средняя кривизны поверхности.
24. Теоремы Гаусса и Гаусса-Боне.
25. Реализация «в малом» неевклидовых геометрий на поверхностях.

Вопросы к коллоквиуму №2

1. Понятие топологической структуры.
2. Покрывание, подпокрывание, топология. Примеры.
3. Различные определения топологического пространства. Примеры.
4. Сравнение топологий.
5. Взаимное расположение точек и множеств в топологическом пространстве.
6. Теоремы об открытых и замкнутых множествах.
7. База топологии.
8. Пространство со счетной базой, примеры.
9. Предбаза топологии.
10. Метрическое пространство. Определение и примеры.
11. Связь метрических и топологических пространств.
12. Подпространство топологического пространства.
13. Некоторые свойства топологических пространств.
14. Открытые и непрерывные отображения топологических пространств. Связь между ними. Примеры.
15. Гомеоморфизм, примеры.
16. Компактность.
17. Отделимость.
18. Связность.
19. Сепарабельные пространства.
20. Плотные множества.
21. Определение n -мерной карты, атласа пространства, n -мерного топологического многообразия. Примеры.
22. Определение гладкого многообразия, примеры.
23. Локально евклидово пространство, свойства.
24. Другое определение топологического многообразия, примеры.
25. Замкнутые и открытые многообразия. Примеры.
26. Свойства многообразий.
27. Гладкие отображения.
28. Диффеоморфизм.
29. Гладкая поверхность как многообразие.
30. Матричные группы.
31. Проективная плоскость и проективное пространство.

32. Многообразие с краем.
33. Риманова метрика.
34. Касательный вектор, касательное пространство к многообразию.
35. Векторные поля на многообразии.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Перечень основной литературы:

1. Манфредо П. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей Электронный ресурс / П. Манфредо; пер. Н. Г. Перлова. - Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. - Москва, Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2013. - 608 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-4344-0150-0

2. Игнаточкина Л.А. Топология для бакалавров математики: учебное пособие / Игнаточкина Л.А. - Москва: Прометей, 2016. - 88 с. - ISBN 978-5-9907453-1-5. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/58207.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Нагребецкая Ю.В. Дифференциальная геометрия: практикум / Нагребецкая Ю.В., Перминова О.Е. - Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2017. - 72 с. - ISBN 978-5-7996-2062-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/107033.html>

2. Тензорный анализ и дифференциальная геометрия: учебное пособие / И.В. Киреев [и др.]. - Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2017. - 102 с. - ISBN 978-5-7638-3622-6. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/84148.html>

3. Игнатьев Ю. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве: IV семестр / Ю. Игнатьев; Казанский федеральный университет; Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского. - Казань: Казанский университет, 2013. - 203 с. : ил., табл., схем. - <http://biblioclub.ru/>, экземпляров неограничено

4. Элементы топологии и дифференциальной геометрии Электронный ресурс: Учебное пособие / сост. А. В. Ушаков. - Москва: Московский городской педагогический университет, 2010. - 144 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 2227-8397

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

<http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

<http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

<http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.

<http://www.mathedu.ru/> Электронная библиотека по математике и вопросам ее преподавания. Включает [популярные книги и пособия](#), [методические руководства](#), [учебники](#), [журналы](#), [исторические работы](#), [авторефераты](#), [диафильмы](#).

<http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным

математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.

<http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).

<http://www.mccme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.