

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению лабораторных работ
по дисциплине
«СПЕЦГЛАВЫ АЛГЕБРЫ»
для студентов направления подготовки
44.03.05 - Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность (профиль):
«Информатика и математика»

Ставрополь, 2026

Содержание

Раздел 1. Евклидовы пространства

Раздел 2. Линейные операторы

Раздел 3. Квадратичные формы

ВВЕДЕНИЕ

Цель освоения дисциплины «**Спецглавы алгебры**» является формирование профессиональных компетенции будущего бакалавра по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) "Информатика и математика", путем освоения возможностей использования средств и методов алгебры для решения прикладных задач в педагогической сфере деятельности.

Основными задачами освоения дисциплины «**Спецглавы алгебры**» являются:

- формирование научного мировоззрения, понимания широты и универсальности методов алгебры, умения применять эти методы в решении прикладных задач;
- воспитание математической культуры, которая предполагает четкое осознание необходимости и важности математической подготовки для специалиста в области математического образования;
- ознакомление с основными объектами алгебры, а также их приложениями для решения различных задач, требующих применения логических средств;
- овладение современным математическим аппаратом алгебры для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач в образовательной области.

Дисциплина «**Спецглавы алгебры**» относится к дисциплинам обязательной части. Ее освоение осуществляется в 4 семестре.

В результате освоения дисциплины «**Спецглавы алгебры**» формируются профессиональные компетенции **ПК-1**, в соответствии с которыми студент должен:

Знать:

фундаментальные основы алгебры, способен на научной основе применять данные знания для построения и функционирования образовательного процесса в области преподавания математики.

Уметь:

использовать основные положения алгебры в будущей профессиональной деятельности.

Владеть:

методами линейной алгебры для осуществления учебной и проектной деятельности обучающихся.

РАЗДЕЛ 1. ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Учебные вопросы:

1. Скалярное произведение векторов. Определение и примеры евклидовых пространств.
2. Основные метрические понятия: норма вектора, угол и расстояние между векторами.
3. Ортогональные векторы. Ортогональные и ортонормированные базисы.
4. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
5. Изометрия евклидовых пространств.

В результате изучения данного раздела студент должен:

Знать:

основные положения теории евклидовых пространств.

Уметь:

использовать основные положения теории евклидовых пространств в будущей профессиональной деятельности.

Владеть:

навыками использования фундаментальных знаний в теории евклидовых пространств в профессиональной деятельности.

Примеры решения задач

Пример 1. Можно ли в пространстве R^2 скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ задать с помощью формул:

$$\text{А) } (x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1; \quad \text{Б) } (x, y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2$$

Вычислить скалярное произведение векторов $x = (1, 1)$ и $y = (2, -1)$ при каждом его задании в R^2 .

Решение

Говорят, что в линейном пространстве $L(R)$ определена операция **скалярного умножения векторов**, если любой паре векторов $a, b \in L$ поставлено в соответствие определенное действительное число (a, b) , называемое **скалярным произведением векторов a и b** , причем это соответствие удовлетворяет для любых $a, b, c \in L$ и любого действительного числа λ **аксиомам скалярного произведения**:

- 1) $(a, b) = (b, a)$ (коммутативность или симметричность).
- 2) $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$ (дистрибутивность).
- 3) $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$.
- 4) $(a, a) > 0$ при $a \neq \theta$ и $(a, a) = 0$ при $a = \theta$.

Пусть $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2) \in R^2$.

Проверим выполнение аксиом скалярного произведения в каждом случае.

А) $(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$

1) $(y, x) = y_1 x_2 + y_2 x_1 = (x, y)$ - аксиома 1) выполняется

2) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

$(x + y, z) = (x_1 + y_1)z_2 + (x_2 + y_2)z_1 = (x_1 z_2 + x_2 z_1) + (y_1 z_2 + y_2 z_1) = (x, z) + (y, z)$ - аксиома 2) выполняется

$$3) \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

$$(\lambda x, y) = \lambda x_1 y_2 + \lambda x_2 y_1 = \lambda(x_1 y_2 + x_2 y_1) = \lambda(x, y) \text{ - аксиома 3) выполняется}$$

4) $(x, x) = x_1 x_2 + x_2 x_1 = 2x_1 x_2$ - нельзя утверждать, что это выражение положительно для любого $x \neq \theta$. Например, если $x = (2, -1)$, то $(x, x) = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -2 < 0$ - аксиома 4) не выполняется!

Вывод: В пространстве R^2 скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ задать с помощью формулы $(x, y) = x_1 y_2 + x_2 y_1$ нельзя.

$$Б) (x, y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2$$

$$1) (y, x) = y_1 x_1 + 2y_2 x_2 = (x, y) \text{ - аксиома 1) выполняется}$$

$$2) x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$(x + y, z) = (x_1 + y_1)z_1 + 2(x_2 + y_2)z_2 = (x_1 z_1 + 2x_2 z_2) + (y_1 z_1 + 2y_2 z_2) = (x, z) + (y, z) \text{ - аксиома 2) выполняется}$$

$$3) \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

$$(\lambda x, y) = \lambda x_1 y_1 + 2\lambda x_2 y_2 = \lambda(x_1 y_1 + 2x_2 y_2) = \lambda(x, y) \text{ - аксиома 3) выполняется}$$

$$4) (x, x) = x_1 x_1 + 2x_2 x_2 = x_1^2 + 2x_2^2 > 0 \text{ для любого } x \neq \theta.$$

$$\text{Если } x = \theta = (0, 0), \text{ то } (x, x) = 0^2 + 2 \cdot 0^2 = 0 \text{ - аксиома 4) выполняется}$$

Вывод: В пространстве R^2 скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ можно задать с помощью формулы $(x, y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2$.

В этом случае для векторов $x = (1, 1)$ и $y = (2, -1)$ получим:
 $(x, y) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) = 0.$

Пример 2. Найти длину вектора $m = 3a - 4b$, если $a = (1, 0, 2, 3)$, $b = (1, 1, 1, 1)$ и скалярное произведение задается стандартной формулой.

Решение

1. Векторы m , a , b принадлежат пространству E^4 .

$$m = 3a - 4b = 3(1, 0, 2, 3) - 4(1, 1, 1, 1) = (3, 0, 6, 9) - (4, 4, 4, 4) = (-1, -4, 2, 5).$$

$$2. |m| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{46}.$$

Пример 3. В пространстве R^4 со скалярным произведением

$$(x, y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + 4x_4 y_4$$

Найти угол и расстояние между векторами $x = (1, 0, 1, 0)$ и $y = (0, 1, 0, 1)$.

Решение

1. Найдем угол между векторами с помощью формулы $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}$

Для векторов $x = (\underset{x_1}{1}, \underset{x_2}{0}, \underset{x_3}{1}, \underset{x_4}{0})$ и $y = (\underset{y_1}{0}, \underset{y_2}{1}, \underset{y_3}{0}, \underset{y_4}{1})$ найдем скалярное произведение по заданной формуле:

$$(x, y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + 4x_4 y_4 = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$

Найдем длины (нормы) векторов x и y :

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 0} = \sqrt{4} = 2$$

$$|y| = \sqrt{(y, y)} = \sqrt{0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 1} = \sqrt{6}$$

В результате получим $\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|} = \frac{0}{2 \cdot \sqrt{6}} = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$.

2. Найдем расстояние между векторами с помощью формулы $\rho(x, y) = |x - y|$

$$x - y = (1, 0, 1, 0) - (0, 1, 0, 1) = (1, -1, 1, -1)$$

$$\rho(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x - y, x - y)} = \sqrt{1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) \cdot (-1)} = \sqrt{10}.$$

Пример 4. Нормировать вектор $x = (3, 4, 5)$ пространства E^3 .

Решение

В нашем случае

$$x_0 = \frac{x}{|x|},$$

$$|x| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$x_0 = \frac{(3, 4, 5)}{5\sqrt{2}} = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{5}{5\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Пример 5. Найти нормированный вектор, ортогональный векторам $a_1 = (1, 2, 3)$ и $a_2 = (-3, 0, -1)$.

Решение

Векторы a_1 и a_2 принадлежат пространству E^3 .

Если в задаче ничего не сказано о формуле скалярного произведения, то она подразумевается стандартной: $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

1. Найдем вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$, ортогональный векторам a_1 и a_2 , исходя из условий:

$$\begin{cases} a_1 \perp x \\ a_2 \perp x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1, x) = 0 \\ (a_2, x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 + 0x_2 - 1x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{:2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Система имеет множество решений (это означает, что существует множество векторов x , ортогональных заданным двум векторам a_1 и a_2)

$n = 3$ число неизвестных

$r = 2$ число главных неизвестных

$n - r = 1$ число свободных неизвестных

Система примет вид:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Пусть x_1 и x_2 – главные неизвестные, x_3 – свободное неизвестное.

Выразим главные неизвестные через свободное неизвестное:
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{x_3}{3} \\ x_2 = -\frac{4x_3}{3} \end{cases}$$

Общее решение системы:
$$\left(-\frac{x_3}{3}, -\frac{4x_3}{3}, x_3 \right)$$

Пусть $x_3 = 3$, тогда получим частное решение $x = (-1, -4, 3)$ – искомый вектор.

Проверка:

$$(a_1, x) = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 3 = 0$$

$$(a_2, x) = -3 \cdot (-1) + 0 \cdot (-4) - 1 \cdot 3 = 0$$

2. Нормируем вектор x .

$$x_0 = \frac{x}{|x|}$$

$$|x| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{26}$$

$$x_0 = \frac{(-1, -4, 3)}{\sqrt{26}} = \left(\frac{-1}{\sqrt{26}}, \frac{-4}{\sqrt{26}}, \frac{3}{\sqrt{26}} \right)$$

Пример 6. Применяя процесс ортогонализации и нормирование векторов, ортонормировать систему векторов $a_1 = (1, 1, 0, 0)$, $a_2 = (1, 0, 1, 0)$, $a_3 = (1, 0, 0, 1)$, $a_4 = (0, 0, 0, 1)$, считая, что в пространстве E^4 задано стандартное скалярное произведение векторов.

Решение

1. $\underline{e_1 = a_1 = (1, 1, 0, 0)}$.

2. $e_2 = a_2 + \lambda_{21}e_1$, $\lambda_{21} = -\frac{(a_2, e_1)}{(e_1, e_1)}$

$$\left. \begin{aligned} (a_2, e_1) &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1 \\ (e_1, e_1) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2 \end{aligned} \right\} \lambda_{21} = -\frac{1}{2}$$

$$e_2 = (1, 0, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) = (1, 0, 1, 0) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right) \Rightarrow \underline{e_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0 \right)}$$

3. $e_3 = a_3 + \lambda_{31}e_1 + \lambda_{32}e_2$, $\lambda_{31} = -\frac{(a_3, e_1)}{(e_1, e_1)}$, $\lambda_{32} = -\frac{(a_3, e_2)}{(e_2, e_2)}$

$$\left. \begin{aligned} (a_3, e_1) &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 1 \\ (e_1, e_1) &= 2 \end{aligned} \right\} \lambda_{31} = -\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} (a_3, e_2) &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = \frac{1}{2} \\ (e_2, e_2) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \lambda_{32} = -\frac{1/2}{3/2} = -\frac{1}{3}$$

$$e_3 = (1, 0, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) \Rightarrow e_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right).$$

$$4. e_4 = a_4 + \lambda_{41}e_1 + \lambda_{42}e_2 + \lambda_{43}e_3, \lambda_{41} = -\frac{(a_4, e_1)}{(e_1, e_1)}, \lambda_{42} = -\frac{(a_4, e_2)}{(e_2, e_2)}, \lambda_{43} = -\frac{(a_4, e_3)}{(e_3, e_3)}$$

$$\left. \begin{aligned} (a_4, e_1) &= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0 \\ (e_1, e_1) &= 2 \end{aligned} \right\} \lambda_{41} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} (a_4, e_2) &= 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \\ (e_2, e_2) &= \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \lambda_{42} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} (a_4, e_3) &= 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \cdot 1 = 1 \\ (e_3, e_3) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 \cdot 1 = \frac{4}{3} \end{aligned} \right\} \lambda_{43} = -\frac{3}{4}$$

$$e_4 = (0, 0, 0, 1) + 0 + 0 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) \Rightarrow e_4 = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

5. Нормируем векторы e_1, e_2, e_3, e_4 .

$$e_1 = (1, 1, 0, 0), |e_1| = \sqrt{(e_1, e_1)} = \sqrt{2} \Rightarrow e'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$$

$$e_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right), |e_2| = \sqrt{(e_2, e_2)} = \sqrt{3/2} \Rightarrow e'_2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{3/2}}, -\frac{1}{2\sqrt{3/2}}, \frac{1}{\sqrt{3/2}}, 0\right) \Rightarrow$$

$$e'_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)$$

$$e_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right), |e_3| = \sqrt{(e_3, e_3)} = \sqrt{4/3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow e'_3 = \left(\frac{1}{3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}, -\frac{1}{3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}, \frac{1}{3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}, \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right) \Rightarrow$$

$$e'_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$e_4 = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), |e_4| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{1}{2} \Rightarrow e'_4 = \left(-\frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}}, \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}}, \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}}, \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}}\right) \Rightarrow$$

$$e'_4 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Пример 7. В евклидовом пространстве E^3 со скалярным произведением, определенным формулой $(x, y) = x_1y_1 + 5x_2y_2 + 6x_3y_3 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2$, построить какой-либо ортонормированный базис.

Решение

Искомый ортонормированный базис: $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$

Построим ортогональный базис $B = \{e_1, e_2, e_3\}$

1. Пусть $e_1 = (1, 0, 0)$ (выбирается произвольно)

2. Добавим к вектору e_1 вектор $e_2 = (x_1, x_2, x_3)$, исходя из условия $(e_1, e_2) = 0$:

$$(e_1, e_2) = 1 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \cdot 0 + 6 \cdot x_3 \cdot 0 + 2 \cdot x_1 \cdot 0 + 2 \cdot x_3 \cdot 1 + 3 \cdot x_2 \cdot 0 + 3 \cdot x_3 \cdot 0 = x_1 + 2x_3$$

$$(e_1, e_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 + 2x_3 = 0 \quad (n=3, r=1, n-r=2)$$

$$x_1 = -2x_3 \quad x_2, x_3 - \text{свободные неизвестные}$$

$$x_1 - \text{главное неизвестное}$$

Общее решение: $(-2x_3, x_2, x_3)$

Частное решение: $(-2, 0, 1)$

Таким образом, $e_2 = (-2, 0, 1)$

3. Добавим к векторам e_1 и e_2 вектор $e_3 = (x_1, x_2, x_3)$, исходя из условий $(e_1, e_3) = 0$ и $(e_2, e_3) = 0$:

$$(e_1, e_3) = x_1 + 2x_3 = 0$$

$$(e_2, e_3) = (-2) \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \cdot 0 + 6 \cdot x_3 \cdot 1 + 2 \cdot x_1 \cdot 1 + 2 \cdot x_3 \cdot (-2) + 3 \cdot x_2 \cdot 1 + 3 \cdot x_3 \cdot 0 = 3x_2 + 2x_3 = 0$$

Получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0, & n=3, r=2, n-r=1 \\ 3x_2 + 2x_3 = 0. & x_1, x_2 - \text{гл. неизвестные} \end{cases}$$

$$x_3 - \text{св. неизвестное}$$

$$x_1 = -2x_3, \quad x_2 = -\frac{2}{3}x_3$$

$$\text{Общее решение: } \left(-2x_3, -\frac{2}{3}x_3, x_3 \right)$$

Частное решение: $(-6, -2, 3)$

Таким образом, $e_3 = (-6, -2, 3)$

Ортогональный базис: $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (-2, 0, 1)$, $e_3 = (-6, -2, 3)$.

Нормируем векторы:

$$|e_i| = \sqrt{x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_3x_1 + 3x_2x_3 + 3x_3x_2} = \sqrt{x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3}$$

$$|e_1| = \sqrt{1+0+0+0+0} = 1$$

$$|e_2| = \sqrt{4+0+6+4 \cdot (-2) \cdot 1 + 6 \cdot 0 \cdot 1} = \sqrt{2}$$

$$|e_3| = \sqrt{36+5 \cdot 4+6 \cdot 9+4 \cdot (-6) \cdot 3 + 6 \cdot (-2) \cdot 3} = \sqrt{2}$$

Ортонормированный базис: $e'_1 = (1,0,0), e'_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), e'_3 = \left(-\frac{6}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

Задачи для самостоятельного решения

Евклидово пространство. Основные метрические понятия

1. Можно ли в пространстве R^2 скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ задать с помощью формул:

$$\text{а) } (x, y) = x_1 y_1 - 2x_2 y_2; \quad \text{б) } (x, y) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2.$$

Вычислить скалярное произведение векторов $x = (1,1)$ и $y = (-1,0)$, их нормы и угол между ними при каждом задании скалярного произведения в R^2 .

2. Найти нормированный вектор, ортогональный векторам

$$a_1 = (1,1,1,1), a_2 = (1,-1,-1,1), a_3 = (2,1,1,3).$$

Ортогональные и ортонормированные базисы

3. Считая, что векторы заданы своими координатами в ортонормированном базисе, с помощью процесса ортогонализации и нормирования ортонормировать систему векторов:

$$a_1 = (1,1,1,1), a_2 = (3,3,-1,-1), a_3 = (-2,0,6,8).$$

4. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на данную систему векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе:

$$a_1 = (1,2,1,3), a_2 = (4,1,1,1), a_3 = (3,1,1,0).$$

5. Считая векторы заданными координатами в ортонормированном базисе, проверить, что система векторов ортогональна и дополнить ее до ортогонального базиса пространства:

$$a_1 = (1,1,1,2), a_2 = (1,2,3,-3).$$

Список рекомендуемой литературы

Перечень основной литературы:

1. Ивлева, А. М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие / А. М. Ивлева, П. И. Прилуцкая, И. Д. Черных. - 5-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2019. - 183 с. - ISBN 978-5-7782-3868-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL:

<https://www.iprbookshop.ru/98793.html>

2. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2011. - 265 с. - ISBN 978-985-536-229-7. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28035.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Пономарёв, К. Н. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия и комплексные числа: учебное пособие / К. Н. Пономарёв, И. А. Сажин. - 2-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2022. - 127 с. - ISBN 978-5-7782-4735-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/126500.html>

2. Чеголин, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / А. П. Чеголин. - Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015.

- 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/68568.html>

3. Алания, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Алания, С. М. Гусейн-Заде, И. А. Дынников. - Москва: Логос, 2005. - 376 с. - ISBN 5-94010-375-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/9121.html>

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Бобылева, Т. Н. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие / Т. Н. Бобылева, Л. В. Кирьянова, Т. Н. Титова. - Москва: МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 144 с. - ISBN 978-5-7264-1909-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/80626.html>

2. Лебедева, Е. А. Практические занятия по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебно-методическое пособие / Е. А. Лебедева, О. Е. Рощенко, Т. И. Ерзина. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2013. - 130 с. — ISBN 978-5-7782-2275-5. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/45428.html>

РАЗДЕЛ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Учебные вопросы:

1. Линейные операторы и действия над ними
2. Определение, примеры и свойства линейных операторов.
3. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.
4. Ядро, образ, ранг и дефект линейного оператора.
5. Сумма линейных операторов и умножение оператора на число.
6. Произведение линейных операторов. Обратный оператор.
7. Спектральная теория линейных операторов
8. Инвариантные подпространства линейных пространств.
9. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Собственное подпространство.
10. Нахождение собственных векторов и собственных значений линейного оператора. Характеристический многочлен.
11. Линейный оператор простой структуры. Каноническое разложение матрицы линейного оператора.

В результате изучения данного раздела студент должен:

Знать:

основные положения теории линейных операторов.

Уметь:

использовать основные положения теории линейных операторов в будущей профессиональной деятельности.

Владеть:

навыками использования фундаментальных знаний в теории линейных операторов и в профессиональной деятельности.

Примеры решения задач

Пример 1. В трехмерном пространстве с базисом $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ оператор φ переводит вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $\varphi(x) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1)$. Показать, что оператор φ является линейным.

Решение

Проверим выполнение условий 1) и 2) определения линейного оператора.

Кроме вектора x возьмем еще один вектор $y = (y_1, y_2, y_3)$. Тогда

$$\varphi(y) = (y_1 + y_2, y_2 + y_3, y_3 + y_1).$$

1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

$$\begin{aligned}\varphi(x + y) &= ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3), (x_3 + y_3) + (x_1 + y_1)) = \\ &= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_2 + x_3 + y_2 + y_3, x_3 + x_1 + y_3 + y_1).\end{aligned}$$

$$\varphi(x) + \varphi(y) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_2 + x_3 + y_2 + y_3, x_3 + x_1 + y_3 + y_1).$$

Условие 1) выполняется.

2) $\varphi(\alpha x) = \alpha \varphi(x)$.

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3),$$

$$\varphi(\alpha x) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_2 + \alpha x_3, \alpha x_3 + \alpha x_1) = \alpha(x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1) = \alpha \varphi(x).$$

Условие 2) выполняется.

Вывод. Данный оператор φ является линейным.

Пример 2. Найти матрицу оператора $\varphi(x) = (x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3, x_3 + 4x_1)$ в базисе $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$.

Решение

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = (1 + 2 \cdot 0, 0 + 3 \cdot 0, 0 + 4 \cdot 1) = (1, 0, 4) \\ \varphi(e_2) = (0 + 2 \cdot 1, 1 + 3 \cdot 0, 0 + 4 \cdot 0) = (2, 1, 0) \\ \varphi(e_3) = (0 + 2 \cdot 0, 0 + 3 \cdot 1, 1 + 4 \cdot 0) = (0, 3, 1) \end{cases} \Rightarrow A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 3. Найти координаты вектора-образа $y = \varphi(x)$, если $x = (1, 0, 2, 0)$ и

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$Y = A_\varphi X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+0+0 \\ 2+0+2+0 \\ 2+0+6+0 \\ 0+0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = (1, 4, 8, 0)$$

Пример 4. Линейный оператор $y = \varphi(x)$ в базисе $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ имеет матрицу

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе $B' = \{e'_1 = e_1 + 2e_2 + e_3, e'_2 = 2e_1 + e_2 + 3e_3, e'_3 = e_1 + e_2 + e_3\}$.

Решение

1. Составим матрицу перехода от базиса B к базису B' : $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Найдем обратную матрицу $T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

3. Найдем $C_\varphi = T^{-1}A_\varphi T$:

$$C_\varphi = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $C_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Проверка:

$$\left. \begin{aligned} |A_\varphi| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \\ |C_\varphi| &= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \end{aligned} \right\} |A_\varphi| = |C_\varphi|$$

Пример 5. Найти образ, ранг, ядро и дефект линейного оператора φ пространства L , за-

данного в некотором базисе матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение

1. Образ линейного оператора φ – это линейная оболочка, натянутая на образы базисных векторов (столбцы матрицы A_φ).

Базис: $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Образ: $\varphi(L) = L(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, где

$$\varphi(e_1) = (1, 2, 1, 1)_B, \varphi(e_2) = (1, 3, 2, 0)_B, \varphi(e_3) = (0, 1, 1, -1)_B, \varphi(e_4) = (2, 1, -1, 5)_B.$$

2. Ранг линейного оператора φ : $r = \text{rang} A_\varphi$.

Найдем ранг матрицы A_φ оператора φ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\swarrow + \\ \swarrow + \\ \swarrow +}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang} A_\varphi = 2$$

Ранг: $\boxed{r=2}$.

3. Ядро линейного оператора φ : $\text{Ker} \varphi = \{x: x \in L \text{ и } \varphi(x) = \theta\}$ – множество решений матричного уравнения $A_\varphi X = O$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Найдем базис пространства решений полученной системы линейных однородных уравнений – фундаментальную систему решений (ФСР):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$r = 2$ – число главных неизвестных;

$n = 4$ – число неизвестных (размерность пространства L);

$n - r = 2$ – число свободных неизвестных (число решений в ФСР);

Пусть x_1, x_2 – главные неизвестные, тогда x_3, x_4 – свободные неизвестные.

Выразим главные неизвестные через свободные:

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_3 + 3x_4, & x_1 &= -x_2 - 2x_4 \\ & & x_1 &= -(-x_3 + 3x_4) - 2x_4 \\ & & x_1 &= x_3 - 5x_4 \end{aligned}$$

Общее решение: $(x_3 - 5x_4, -x_3 + 3x_4, x_3, x_4)$

	x_1	x_2	x_3	x_4
X_1	1	-1	1	0
X_2	-5	3	0	1

 $\Rightarrow \begin{aligned} X_1 &= (1, -1, 1, 0) \\ X_2 &= (-5, 3, 0, 1) \end{aligned}$

Полученная ФСР, состоящая из векторов X_1 и X_2 – базис ядра $\text{Ker}\varphi$.

Ядро: $\boxed{\text{Ker}\varphi = L(X_1, X_2)}$

4. Дефект линейного оператора φ : $\dim \text{Ker}\varphi$

В нашем случае $\boxed{\dim \text{Ker}\varphi = 2}$ – число векторов базиса ядра $\text{Ker}\varphi$.

Контроль: $n = r + \dim \text{Ker}\varphi \Leftrightarrow 4 = 2 + 2$ – верно.

Пример 6. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора φ , действующего в действительном линейном пространстве и имеющего в некотором базисе матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & 9 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

1. Первое действие можно опустить, так как оператор уже представлен своей матрицей в некотором базисе.

2. Составим характеристическое уравнение: $|A - \lambda E| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & -2 \\ 2 & 9-\lambda & 4 \\ -1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} & -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 45\lambda + 54 = 0 \\ & \lambda^3 - 12\lambda^2 + 45\lambda - 54 = 0 \\ & (\lambda - 3)^2(\lambda - 6) = 0 \end{aligned}$$

Характеристические корни: $\lambda_{1,2} = 3, \lambda_3 = 6$.

Так как рассматриваемый оператор действует в действительном линейном пространстве и все характеристические корни – действительные числа, то все они являются собственными значениями оператора φ .

Собственные значения: $\lambda_{1,2} = 3, \lambda_3 = 6$.

3. Найдем собственные векторы, отвечающие каждому из полученных собственных значений.

а) Пусть $x_{\lambda_{1,2}} = (x_1, x_2, x_3)$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_{1,2} = 3$.

$$(A - \lambda_{1,2}E)X = O$$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & -3 & -2 \\ 2 & 9-3 & 4 \\ -1 & -3 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0.$$

$n = 3$ – число неизвестных;

$r = 1$ – число главных неизвестных;

$n - r = 2$ – число свободных неизвестных (число решений в ФСР).

Пусть x_2, x_3 – свободные неизвестные, тогда x_1 – главное неизвестное.

Получим $x_1 = -3x_2 - 2x_3$.

Общее решение: $(-3x_2 - 2x_3, x_2, x_3)$.

Найдем ФСР:

	x_1	x_2	x_3
X_1	-3	1	0
X_2	-2	0	1

Тогда $x_{\lambda_{1,2}} = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1(-3, 1, 0) + c_2(-2, 0, 1)$, где числа c_1 и c_2 не равны нулю одновременно ($|c_1| + |c_2| \neq 0$).

б) Пусть $x_{\lambda_3} = (x_1, x_2, x_3)$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_3 = 6$.

$$(A - \lambda_3 E)X = O$$

$$\begin{pmatrix} 2-6 & -3 & -2 \\ 2 & 9-6 & 4 \\ -1 & -3 & 1-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 & -4 \\ \swarrow + \\ \swarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -9 & -18 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :(-3) \\ :(-9) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$n = 3$ – число неизвестных;

$r = 2$ – число главных неизвестных;

$n - r = 1$ – число свободных неизвестных (число решений в ФСР).

Пусть x_3 – свободное неизвестное, тогда x_1, x_2 – главные неизвестные.

$$\begin{aligned}x_2 &= -2x_3 & x_1 &= -3x_2 - 5x_3 \\x_1 &= x_3\end{aligned}$$

Общее решение: $(x_3, -2x_3, x_3)$.

ФСР состоит из одного вектора $X = (1, -2, 1)$.

Тогда $x_{\lambda_3} = cX = c(1, -2, 1)$, где $c \neq 0$.

Пример 7. Привести, если можно, действительные матрицы к диагональному виду и построить для них канонические разложения:

$$1) A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$1) A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение: $|A_1 - \lambda E| = 0$.

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -3 & 5-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(\lambda-2)^2(\lambda-1) = 0$$

Характеристические числа: $\lambda_1 = 2$ (алгебраическая кратность $k_1 = 2$),

$\lambda_2 = 1$ (алгебраическая кратность $k_2 = 1$).

Все эти числа действительные, поэтому являются собственными значениями матрицы A_1 .

При $\lambda_1 = 2$ получим

$$(A_1 - \lambda_1 E)X = O$$

$$\begin{pmatrix} -1-2 & 3 & -1 \\ -3 & 5-2 & -1 \\ -3 & 3 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0.$$

$n = 3$, $r = 1$, $n - r = 2 = l_1$ – геометрическая кратность значения $\lambda_1 = 2$ (число решений в ФСР).

Пусть x_1, x_2 – свободные неизвестные, а x_3 – главное неизвестное. Тогда $x_3 = 3x_2 - 3x_1$.

	x_1	x_2	x_3
X_1	1	0	-3
X_2	0	1	3

$$\Rightarrow X_1 = (1, 0, -3), X_2 = (0, 1, 3).$$

При $\lambda_2 = 1$ получим

$$(A_1 - \lambda_2 E)X = O$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$n = 3$, $r = 2$, $n - r = 1 = l_2$ – геометрическая кратность значения $\lambda_2 = 1$ (число решений в ФСР).

Пусть x_2 – свободное неизвестное, а x_1 и x_3 – главные неизвестные.

Получим $x_1 = x_2$ и $x_3 = x_2$.

ФСР состоит из одного вектора $X_3 = (1, 1, 1)$.

Из решений X_1, X_2, X_3 , как из столбцов, составим невырожденную матрицу T 3-го порядка:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вывод. Матрица A_1 приводится к диагональному виду $\Lambda = T^{-1}A_1T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и имеет

каноническое разложение $A_1 = T\Lambda T^{-1} = T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}.$

$$2) A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$$

Характеристическое уравнение: $|A_2 - \lambda E| = 0$.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 3 \\ -1 & 8-\lambda & 6 \\ 2 & -14 & -10-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda+1)^2 = 0$$

Характеристические числа: $\lambda_1 = 0$ (алгебраическая кратность $k_1 = 1$),

$\lambda_2 = -1$ (алгебраическая кратность $k_2 = 2$).

Все эти числа действительные, поэтому являются собственными значениями матрицы A_2 .

При $\lambda_1 = 0$ получим

$$(A_2 - \lambda_1 E)X = O$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8-0 & 6 \\ 2 & -14 & -10-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 - 14x_2 - 10x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \begin{pmatrix} 1 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 8x_2 - 6x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$n = 3, r = 2, n - r = 1 = l_1$ – геометрическая кратность значения $\lambda_1 = 0$ (число решений в ФСР).

Пусть x_3 – свободное неизвестное, тогда x_1 и x_2 – главные неизвестные. Из системы находим

$$x_2 = -x_3, \quad x_1 = 8x_2 + 6x_3 \Rightarrow x_1 = -2x_3.$$

ФСР состоит из одного вектора $\mathbf{X}_1 = (-2, -1, 1)$.

При $\lambda_2 = -1$ получим

$$(A_2 - \lambda_2 E)X = O$$

$$\begin{pmatrix} 0-(1) & 3 & 3 \\ -1 & 8-(-1) & 6 \\ 2 & -14 & -10-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 - 14x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 12 & 9 \\ 0 & -20 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$n = 3, r = 2, n - r = 1 = l_2$ – геометрическая кратность значения $\lambda_2 = 1$ (видим: $l_2 \neq k_2$).

Пусть x_3 – свободное неизвестное, тогда x_1 и x_2 – главные неизвестные. Из системы находим

$$x_2 = -\frac{3}{4}x_3, \quad x_1 = -3x_2 - 3x_3 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{4}x_3.$$

ФСР состоит из одного вектора $\mathbf{X}_2 = (-3, -3, 4)$.

Решений $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ недостаточно для конструирования невырожденной квадратной матрицы Т 3-го порядка.

Вывод. Матрица A_2 не приводится к диагональному виду и не имеет канонического разложения.

Задачи для самостоятельного решения

Линейный оператор

1. Оператор φ переводит вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $\varphi(x)$. В каких случаях оператор φ является линейным? В случае линейности оператора указать его матрицу в том же базисе, в каком заданы координаты векторов x и $\varphi(x)$:

а) $\varphi(x) = (x_1 + 1, x_2 + 2, x_3 + 3)$; б) $\varphi(x) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_2 - 2x_3, -3x_3 + 2x_1)$.

2. Найти образ вектора $a_1 = (1, 0, -1)$ и прообраз вектора $a_2 = (0, 1, 0)$, если оператор φ задан в

базисе B матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Найти матрицу оператора φ пространства R^3 в базисе $B = \{e_1 = (2, 1, -1), e_2 = (1, 0, 2), e_3 = (1, -1, 1)\}$, если

$$\varphi(x) = (\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \text{ и } x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

4. Линейный оператор φ переводит векторы $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (4, 3, -2)$, $a_3 = (-5, -4, -1)$ соответственно в векторы $b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 0, 1)$, $b_3 = (0, -1, 1)$. Найти матрицу оператора φ в том же базисе, в каком заданы координаты всех векторов.

Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.

Ядро, образ, ранг и дефект линейного оператора

5. Линейный оператор φ в базисе $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ имеет матрицу A_φ . Найти его матрицу в базисе $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

а) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e'_1 = 2e_1 + e_2 - e_3$, $e'_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3$, $e'_3 = 3e_1 + e_3$.

б) $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $e_1 = (0, 1, 0)$, $e_2 = (1, 0, 0)$, $e'_3 = (0, 0, 1)$,
 $e'_1 = (1, 3, 2)$, $e'_2 = (1, -2, -1)$, $e'_3 = (0, 1, 1)$.

6. Найти образ, ядро, ранг и дефект линейного оператора φ пространства L , заданного в

некотором базисе $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & -2 & 24 \\ -3 & -4 & 3 & -19 \end{pmatrix}$.

Действия над линейными операторами

7. Пусть оператор φ в базисе $B = \{e_1 = (-3, 7), e_2 = (-1, 2)\}$ имеет матрицу $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а

оператор ψ в базисе $B' = \{e'_1 = (6, -7), e'_2 = (-5, 5)\}$ имеет матрицу $C_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Найти матрицы суммы $\varphi + \psi$ и произведения $\varphi\psi$ в базисе B и в базисе B' .

Спектральная теория линейных операторов

8. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора φ , действующего в действительном линейном пространстве и имеющего в некотором базисе матрицу A :

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

9. Выяснить, является ли оператор φ оператором простой структуры. Если да, то найти базис из собственных векторов оператора, записать диагональную матрицу и каноническое разложение:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Список рекомендуемой литературы

Перечень основной литературы:

1. Ивлева, А. М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие / А. М. Ивлева, П. И. Прилуцкая, И. Д. Черных. - 5-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2019. - 183 с. - ISBN 978-5-7782-3868-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/98793.html>

2. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2011. - 265 с. - ISBN 978-985-536-229-7. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28035.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Пономарёв, К. Н. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия и комплексные числа: учебное пособие / К. Н. Пономарёв, И. А. Сажин. - 2-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2022. - 127 с. - ISBN 978-5-7782-4735-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/126500.html>

2. Чеголин, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / А. П. Чеголин. - Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/68568.html>

3. Алания, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Алания, С. М. Гусейн-Заде, И. А. Дынников. - Москва: Логос, 2005. - 376 с. - ISBN 5-94010-375-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/9121.html>

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Бобылева, Т. Н. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие / Т. Н. Бобылева, Л. В. Кирьянова, Т. Н. Титова. - Москва: МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 144 с. - ISBN 978-5-7264-1909-1. - Текст: элек-

тронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/80626.html>

2. Лебедева, Е. А. Практические занятия по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебно-методическое пособие / Е. А. Лебедева, О. Е. Рощенко, Т. И. Ерзина. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2013. - 130 с. — ISBN 978-5-7782-2275-5. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/45428.html>

РАЗДЕЛ 3. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Учебные вопросы:

1. Линейные и билинейные формы. Матрица билинейной формы.
2. Квадратичная форма.
3. Преобразование квадратичной формы при линейном преобразовании переменных.
4. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.
5. Методы Лагранжа и Якоби.
6. Закон инерции.
7. Классификация квадратичных форм.
8. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

В результате изучения данного раздела студент должен:

Знать:

основные положения теории квадратичных форм.

Уметь:

использовать основные положения теории квадратичных форм в будущей профессиональной деятельности.

Владеть:

навыками использования фундаментальных знаний в теории квадратичных форм в профессиональной деятельности.

Примеры решения задач

Пример 1. Записать квадратичную форму, соответствующую данной билинейной форме

$$A(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_2 + 5x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1.$$

Решение

$$A(x, x) = x_1x_1 - 2x_2x_2 + 5x_3x_3 + x_1x_2 + x_2x_1 = x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2.$$

Пример 2. Найти матрицу и ранг квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_3$. Записать матричное представление данной формы.

Решение

Матрица квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Ранг квадратичной формы: $r = r(A) = 2 < \dim L = 3 \Rightarrow$ квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3)$ является вырожденной.

Матричное представление: $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$

Пример 3. Квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$

преобразовать к новым переменным y_1, y_2, y_3 , где
$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \\ x_2 = y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ x_3 = y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Решение

1. Составим матрицу квадратичной формы f : $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Линейное преобразование переменных имеет вид $X = PY$, где $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Найдем матрицу квадратичной формы f в новом базисе по формуле $B = P^T A P$, где

$$P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Запишем вид квадратичной формы f в новом базисе: $f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2$.

Пример 4. Методом Лагранжа привести к каноническому виду квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_3^2$ и указать невырожденное линейное преобразование переменных, осуществляющее такое преобразование квадратичной формы.

Решение

1. Коэффициент при x_1^2 отличен от нуля ($a_{11} = 1$). Сгруппируем все члены квадратичной формы, содержащие x_1 , и выделим полный квадрат:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + 3x_3^2 = (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2) - 2x_2x_3 - x_2^2 - x_3^2 + 3x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 - x_2^2 + 2x_3^2 = \begin{bmatrix} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= y_1^2 - (y_2^2 + 2y_2y_3) + 2y_3^2 = y_1^2 - (y_2^2 + 2y_2y_3 + y_3^2) + y_3^2 + 2y_3^2 = y_1^2 - (y_2 + y_3)^2 + 3y_3^2 = \begin{bmatrix} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_3 \end{bmatrix} = z_1^2 - z_2^2 + 3z_3^2.$$

$f(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 - z_2^2 + 3z_3^2$ – канонический вид квадратичной формы

2. Найдем линейное преобразование переменных, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

$$\text{1-е преобразование: } \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{2-е преобразование: } \begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 - z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases} \Rightarrow P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Результирующее преобразование:

$$P = P_1 \cdot P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 - z_2, \\ x_2 = z_2 - z_3, \\ x_3 = z_3. \end{cases}$$

Столбцы матрицы P результирующего преобразования переменных образуют **канонический базис** квадратичной формы:

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (-1, 1, 0), e_3 = (0, -1, 1).$$

3. Проверка: $\Lambda = P^T A P$.

$$\text{В нашем случае: } \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \Lambda.$$

Пример 5. Методом Якоби привести к каноническому виду квадратичную форму

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_3^2$ и указать канонический базис, если первоначальный базис стандартный.

Решение

1. Составим матрицу квадратичной формы и найдем ее главные миноры:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \Delta_1 = 1 \neq 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \Delta_3 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Так как все главные миноры матрицы квадратичной формы отличны от нуля, то ее можно привести к каноническому виду методом Якоби.

2. Запишем канонический вид квадратичной формы:

$$f(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2 = \frac{1}{1} y_1^2 + \frac{1}{-1} y_2^2 + \frac{-1}{-3} y_3^2,$$

$$f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 + \frac{1}{3} y_3^2.$$

3. Найдем канонический базис $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ квадратичной формы.

Первоначальный базис (стандартный): $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

Запишем симметричную билинейную форму $A(x,y)$, полярную к заданной квадратичной форме:

$$A(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_1 + 3x_3y_3.$$

1) $e'_1 = \alpha_{11}e_1 = \alpha_{11}(1,0,0) = (\alpha_{11}, 0, 0)$.

Найдем α_{11} из условия $A(e'_1, e_1) = 1$:

$$A(e'_1, e_1) = \alpha_{11} \cdot 1 + \alpha_{11} \cdot 0 + \alpha_{11} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0 = \alpha_{11} = 1 \Rightarrow \alpha_{11} = 1 \Rightarrow e'_1 = (1, 0, 0).$$

2) $e'_2 = \alpha_{21}e_1 + \alpha_{22}e_2 = \alpha_{21}(1,0,0) + \alpha_{22}(0,1,0) = (\alpha_{21}, \alpha_{22}, 0)$.

Найдем числа α_{21} и α_{22} из условий:
$$\begin{cases} A(e'_2, e_1) = 0, \\ A(e'_2, e_2) = 1. \end{cases}$$

$$A(e'_2, e_1) = \alpha_{21} \cdot 1 + \alpha_{21} \cdot 0 + \alpha_{21} \cdot 0 + \alpha_{22} \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0 = \alpha_{21} + \alpha_{22} = 0,$$

$$A(e'_2, e_2) = \alpha_{21} \cdot 0 + \alpha_{21} \cdot 1 + \alpha_{21} \cdot 0 + \alpha_{22} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 0 = \alpha_{21} = 1,$$

$$\begin{cases} \alpha_{21} + \alpha_{22} = 0, \\ \alpha_{21} = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{21} = 1 \\ \alpha_{22} = -1 \end{cases} \Rightarrow e'_2 = (1, -1, 0).$$

3) $e'_3 = \alpha_{31}e_1 + \alpha_{32}e_2 + \alpha_{33}e_3 = \alpha_{31}(1,0,0) + \alpha_{32}(0,1,0) + \alpha_{33}(0,0,1) = (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33})$.

Найдем числа α_{31} , α_{32} , α_{33} из условий:
$$\begin{cases} A(e'_3, e_1) = 0, \\ A(e'_3, e_2) = 0, \\ A(e'_3, e_3) = 1 \end{cases}$$

$$A(e'_3, e_1) = \alpha_{31} \cdot 1 + \alpha_{31} \cdot 0 + \alpha_{31} \cdot 0 + \alpha_{32} \cdot 1 + \alpha_{33} \cdot 1 + 3 \cdot \alpha_{33} \cdot 0 = \alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33} = 0,$$

$$A(e'_3, e_2) = \alpha_{31} \cdot 0 + \alpha_{31} \cdot 1 + \alpha_{31} \cdot 0 + \alpha_{32} \cdot 0 + \alpha_{33} \cdot 0 + 3 \cdot \alpha_{33} \cdot 0 = \alpha_{31} = 0,$$

$$A(e'_3, e_3) = \alpha_{31} \cdot 0 + \alpha_{31} \cdot 0 + \alpha_{31} \cdot 1 + \alpha_{32} \cdot 0 + \alpha_{33} \cdot 0 + 3 \cdot \alpha_{33} \cdot 1 = \alpha_{31} + 3\alpha_{33} = 1,$$

$$\begin{cases} \alpha_{31} + \alpha_{32} + \alpha_{33} = 0, \\ \alpha_{31} = 0, \\ \alpha_{31} + 3\alpha_{33} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{31} = 0 \\ \alpha_{32} = -\frac{1}{3} \\ \alpha_{33} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow e'_3 = \left(0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Канонический базис:
$$\boxed{e'_1 = (1, 0, 0), e'_2 = (1, -1, 0), e'_3 = \left(0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$$

4. Матрица соответствующего преобразования состоит из столбцов координат векторов $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = -y_2 - \frac{1}{3}y_3, \\ x_3 = \frac{1}{3}y_3. \end{cases}$$

5. Проверка осуществляется аналогично по формуле $\Lambda = P^T A P$, где $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Пример 6. Привести к нормальному виду квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_1^2 - x_2^2 + 6x_3^2.$$

Решение

Выполним невырожденное линейное преобразование переменных:
$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = \sqrt{6}x_3. \end{cases}$$

Получим **нормальный вид** квадратичной формы: $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Записать в матричном виде квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$$

и найти ее полярную билинейную форму.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа. Записать соответствующее преобразование переменных. Определить положительные и отрицательные индексы инерции, ранг и сигнатуру квадратичной формы:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

3. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Якоби и найти канонический базис, если первоначальный базис стандартный:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3.$$

4. Найти все значения параметра a , при которых квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

является положительно определенной.

Список рекомендуемой литературы

Перечень основной литературы:

1. Ивлева, А. М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие / А. М. Ивлева, П. И. Прилуцкая, И. Д. Черных. - 5-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2019. - 183 с. - ISBN 978-5-7782-3868-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/98793.html>

2. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2011. - 265 с. - ISBN 978-985-536-229-7. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28035.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Пономарёв, К. Н. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия и комплексные числа: учебное пособие / К. Н. Пономарёв, И. А. Сажин. - 2-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2022. - 127 с. - ISBN 978-5-7782-4735-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/126500.html>
2. Чеголин, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / А. П. Чеголин. - Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/68568.html>
3. Алания, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Алания, С. М. Гусейн-Заде, И. А. Дынников. - Москва: Логос, 2005. - 376 с. - ISBN 5-94010-375-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/9121.html>

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Бобылева, Т. Н. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие / Т. Н. Бобылева, Л. В. Кирьянова, Т. Н. Титова. - Москва: МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 144 с. - ISBN 978-5-7264-1909-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/80626.html>
2. Лебедева, Е. А. Практические занятия по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебно-методическое пособие / Е. А. Лебедева, О. Е. Рощенко, Т. И. Ерзина. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2013. - 130 с. — ISBN 978-5-7782-2275-5. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/45428.html>

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине

«СПЕЦГЛАВЫ АЛГЕБРЫ»

для студентов направления подготовки

44.03.05 - Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность (профиль):

«Информатика и математика»

Ставрополь, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Общая характеристика самостоятельной работы обучающегося при изучении дисциплины «Спецглавы алгебры»

План – график выполнения самостоятельной работы

Контрольные точки и виды отчетности по ним

Методические рекомендации по изучению теоретического материал

Методические указания по видам работ, предусмотренных рабочей программой дисциплины

Список рекомендуемой литературы

ВВЕДЕНИЕ

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студента).

Самостоятельная работа студента является важным видом учебной и научной деятельности студента. Федеральным государственным образовательным стандартом предусматривается значительный объем времени из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу. В связи с этим, обучение включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому самостоятельная работа должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования – подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности.

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

Самостоятельная работа студента предполагает, прежде всего, его научно-исследовательскую и практическую деятельность, поскольку именно эти виды учебной работы в первую очередь готовят к самостоятельному выполнению профессиональных задач. Конечной целью самостоятельной работы является организация самостоятельной познавательной деятельности, формирование умения самостоятельно анализировать информацию, выделять главное и второстепенное.

Основными формами самостоятельной работы студентов по дисциплине **«Спецглавы алгебры»** является подготовка к практическим занятиям.

В результате освоения дисциплины **« Спецглавы алгебры»** формируются профессиональные компетенции ПК-1, в соответствии с которыми студент должен:

Знать:

фундаментальные основы алгебры, способен на научной основе применять данные знания для построения и функционирования образовательного процесса в области преподавания математики.

Уметь:

использовать основные положения алгебры в будущей профессиональной деятельности.

Владеть:

методами линейной алгебры для осуществления учебной и проектной деятельности обучающихся.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ «СПЕЦГЛАВЫ АЛГЕБРЫ»

Самостоятельная работа проводится в виде подготовки к практическим занятиям, выполнения домашних заданий по темам дисциплины «**Спецглавы алгебры**». Основной целью этих видов самостоятельной работы является улучшение профессиональной подготовки бакалавров высшей квалификации, направленное на формирование действенной системы фундаментальных и профессиональных знаний, умений и навыков, которые они могли бы свободно и самостоятельно применять в практической деятельности.

Цели самостоятельной работы:

- научить студента осмысленно и самостоятельно работать сначала с учебным материалом, затем с научной информацией, заложить основы самоорганизации и самовоспитания с тем, чтобы привить умение в дальнейшем непрерывно повышать свою квалификацию.
- закрепление, расширение и углубление знаний, умений и навыков, полученных студентами на аудиторных занятиях под руководством преподавателей;
- изучение студентами дополнительных материалов по изучаемым дисциплинам и умение выбирать необходимый материал из различных источников; воспитание у студентов самостоятельности, организованности, самодисциплины, творческой активности, потребности развития познавательных способностей и упорства в достижении поставленных целей.

Предлагаемый подход к освоению материала усиливает мотивацию к аудиторной и внеаудиторной активности, что обеспечивает необходимый уровень знаний по изучаемым дисциплинам и позволяет повысить готовность студентов к сдаче экзаменов.

Приступая к изучению учебной дисциплины «**Спецглавы алгебры**», студенты должны ознакомиться с учебной программой, учебной, научной и методической литературой, имеющейся в библиотеке, получить в библиотеке рекомендованные учебники и учебно-методические пособия, завести новую тетрадь для конспектирования лекций и работы с первоисточниками.

В ходе лекционных занятий вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

В ходе подготовки к практическим занятиям изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой, новыми публикациями в периодических изданиях: журналах, газетах и т.д. При этом учесть рекомендации преподавателя и требования учебной программы. Дорабатывать свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой. После подведения итогов практического занятия устранить недостатки, отмеченные преподавателем.

В ходе организации самостоятельной работы **решаются следующие задачи:**

- углублять и расширять их профессиональные знания;
- формировать у них интерес к учебно-познавательной деятельности;
- развивать у бакалавров самостоятельность, активность, ответственность;
- развивать познавательные способности специалистов.

Учебный процесс в высшем учебном заведении в значительной степени строится на самостоятельной работе студентов, без которой трудно в полной мере овладеть сложным программным материалом и научиться, в дальнейшем, постоянно совершенствовать приобретенные знания и умения.

Самостоятельная работа является внеаудиторной и предназначена для самостоятельного ознакомления студента с определенными разделами дисциплины **«Спецглавы алгебры»** по рекомендованным преподавателем материалам и подготовки к выполнению индивидуальных заданий.

ПЛАН – ГРАФИК ВЫПОЛНЕНИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вид деятельности студентов	Итоговый продукт самостоятельной работы	Средства и технологии оценки	Примерные сроки выполнения
4 семестр			
Изучение лекционного материала, рекомендуемой литературы, подготовка к практическим занятиям	Конспект	Собеседование	5 неделя
Изучение лекционного материала, рекомендуемой литературы, подготовка к практическим занятиям	Конспект	Собеседование	11 неделя
Изучение лекционного материала, рекомендуемой литературы, подготовка к практическим занятиям	Конспект	Собеседование	15 неделя

КОНТРОЛЬНЫЕ ТОЧКИ И ВИДЫ ОТЧЕТНОСТИ ПО НИМ

Подготовка к написанию студентом индивидуальных домашних заданий (ИДЗ) осуществляется на **практических занятиях**. Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что решение задач проводится по вычитанному на лекциях материалу и связано, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка. После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации. Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Как уже отмечалось, самостоятельная работа по изучению теоретического материала (а также самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях) – это важнейшее условие формирования у себя научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

- Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, – советует студенту и молодому ученому Г. Селье, – запомните только, где это можно отыскать».
- Сам такой перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и дипломных работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).
- Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и дипломных работ это позволит очень сэкономить время).
- Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть.
- При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время...
- Естественно, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).
- Если книга – Ваша собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора (это очень хороший совет, позволяющий экономить время и быстро находить «избранные» места в самых разных книгах).
- Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать), и это может занять немалое время (у кого-то – до нескольких недель и даже месяцев); опыт показывает, что после этого студент каким-то «чудом» начинает буквально заглатывать книги и чуть ли не видеть «сквозь обложку», стоящая это работа или нет...
- «Либо читайте, либо перелистывайте материал, но не пытайтесь читать быстро... Если текст меня интересует, то чтение, размышление и даже фантазирование по этому поводу сливаются в единый процесс, в то время как вынужденное скорочтение не только не способствует качеству чтения, но и не приносит чувства удовлетворения, которое мы получаем, размышляя о прочитанном», – советует Г. Селье (Селье, 1987. – С. 325-326).
- Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи. В этом случае студент (или молодой ученый) будет как бы искать аргументы «за» или «против» интересующей его идеи, и одновременно он будет как бы общаться с авторами этих книг по поводу своих идей и размышлений... Проблема лишь в том, как найти «свою» идею...

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные све-

дения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют четыре основные установки в чтении научного текста:

1. **информационно-поисковый** (задача – найти, выделить искомую информацию)
2. **усваивающая** (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)
3. **аналитико-критическая** (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)
4. **творческая** (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких видов чтения:

1. **библиографическое** – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;
2. **просмотровое** – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;
3. **ознакомительное** – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;
4. **изучающее** – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;
5. **аналитико-критическое и творческое чтение** – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВИДАМ РАБОТ, ПРЕДУСМОТРЕННЫХ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Предполагается, что отдельные вопросы тем дисциплины изучаются студентами самостоятельно. Знания указанных вопросов проверяется наличием конспектов и собеседованием. Ниже приведены вопросы для собеседования по всем темам дисциплины «**Спецглавы алгебры**». Ответы на теоретические вопросы в рамках каждого практического занятия (собеседование) показывают умения и навыки студентов анализировать теоретический материал и готовность к применению теоретических знаний в практической деятельности.

Данное оценочное мероприятие проводится на каждом практическом занятии на основании материалов и знаний, полученных на лекциях, а также при изучении основной и дополнительной литературы.

При подготовке к ответу студенту предоставляется право пользования материалами лекций, основной и дополнительной литературы, а также интернет-ресурсов.

При проверке задания оцениваются:

- правильность ответов;
- чёткое знание терминологии;
- умение грамотно, четко и последовательно излагать материал;
- использование дополнительной литературы при подготовке;
- умение анализировать теоретический материал и сопоставлять его с практикой;
- умение приводить конкретные примеры.

В процессе самостоятельного изучения отдельных вопросов тем дисциплины рекомендуется работа с литературой, перечень которой приведен в конце методических указаний.

Вопросы для собеседования

Собеседование №1

Линейные и евклидовы пространства

Базовый уровень

1. Скалярное произведение векторов и его свойства.
2. Определение и примеры евклидовых пространств.
3. Неравенство Коши-Буняковского.
4. Основные метрические понятия: норма вектора, угол и расстояние между векторами.
5. Ортогональные и ортонормированные базисы.
6. Примеры и свойства ортонормированных базисов.
7. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Повышенный уровень

1. Изометрия евклидовых пространств.

Собеседование №2

Линейные операторы Квадратичные формы

Базовый уровень

1. Определение, примеры и свойства линейных операторов.
2. Матрица линейного оператора.
3. Ядро, образ, ранг и дефект линейного оператора.

4. Сумма линейных операторов
5. Умножение оператора на число.
6. Произведение линейных операторов.
7. Обратный оператор.
8. Инвариантные подпространства линейных пространств.
9. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
10. Собственное подпространство.
11. Нахождение собственных векторов и собственных значений линейного оператора.
12. Характеристический многочлен.
13. Линейные и билинейные формы.
14. Квадратичные формы.
15. Преобразование квадратичной формы при линейном преобразовании переменных.
16. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.
17. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Якоби.
18. Закон инерции квадратичных форм.
19. Классификация квадратичных форм.

Повышенный уровень

1. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к другому базису.
2. Линейный оператор простой структуры.
3. Каноническое разложение матрицы линейного оператора.
4. Квадратичные формы в евклидовых пространствах.

Критерии оценивания компетенций

Оценка **«отлично»** выставляется студенту, если студент показал глубокое, прочное и аргументированное освоение учебного материала по теме, при этом поставленные вопросы (включая вопросы повышенного уровня) раскрыты последовательно, четко и логически стройно, в полном исчерпывающем объеме. Основные категории, понятия и определения темы сформулированы правильно и при ответе не допущено ошибок.

Оценка **«хорошо»** выставляется студенту, если студент показал твердое знание базового учебного материала по теме, при этом поставленные вопросы раскрыты грамотно и по существу, в достаточно полном объеме. Основные категории, понятия и определения темы сформулированы правильно, но при ответе допущены отдельные неточности или одна ошибка.

Оценка **«удовлетворительно»** выставляется студенту, если студент показал знание только базовой части темы, при этом поставленные вопросы раскрыты с нарушением логической последовательности или не в полном объеме. В ходе ответа были допущены неточные формулировки основных определений, понятий и теорем заданной темы, а также ошибки (не более двух) или ряд незначительных неточностей, не исказивших существенно суть ответа.

Оценка **«неудовлетворительно»** выставляется студенту, если студент не знает значительной части вопросов темы, допускает существенные ошибки (более двух) и существенно искажает суть излагаемого материала. Оценка неудовлетворительно выставляется также, если студент отказался проходить собеседование.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Перечень основной литературы:

1. Ивлева, А. М. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие / А. М. Ивлева, П. И. Прилуцкая, И. Д. Черных. - 5-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2019. - 183 с. - ISBN 978-5-7782-3868-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/98793.html>
2. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи: учебное пособие / А. А. Гусак. - Минск: ТетраСистемс, 2011. - 265 с. - ISBN 978-985-536-229-7. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28035.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Пономарёв, К. Н. Линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия и комплексные числа: учебное пособие / К. Н. Пономарёв, И. А. Сажин. - 2-е изд. - Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2022. - 127 с. - ISBN 978-5-7782-4735-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/126500.html>
2. Чеголин, А. П. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие / А. П. Чеголин. - Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. - 149 с. - ISBN 978-5-9275-1728-2. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/68568.html>
3. Алания, Л. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Л. А. Алания, С. М. Гусейн-Заде, И. А. Дынников. - Москва: Логос, 2005. - 376 с. - ISBN 5-94010-375-8. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/9121.html>

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Бобылева, Т. Н. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие / Т. Н. Бобылева, Л. В. Кирьянова, Т. Н. Титова. - Москва: МИСИ-МГСУ, Ай Пи Эр Медиа, ЭБС АСВ, 2018. - 144 с. - ISBN 978-5-7264-1909-1. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/80626.html>
2. Лебедева, Е. А. Практические занятия по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебно-методическое пособие / Е. А. Лебедева, О. Е. Рощенко, Т. И. Ерзина. — Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2013. - 130 с. — ISBN 978-5-7782-2275-5. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/45428.html>

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

<http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.

<http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.

<http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.

<http://www.mathedu.ru/> Электронная библиотека по математике и вопросам ее преподавания. Включает [популярные книги и пособия](#), [методические руководства](#), [учебники](#), [журналы](#), [исторические работы](#), [авторефераты](#), [диафильмы](#).

<http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.

<http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).

<http://www.mccme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.