

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Методические указания
к практическим занятиям
по дисциплине**

Дифференциальные уравнения
для студентов направления подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Ставрополь, 2026

Введение

При изучении теории «Дифференциальные уравнения» студенты сталкиваются со многими проблемами, особенно это касается решения дифференциальных уравнений. Иногда они затрудняются правильно определить вид дифференциального уравнения и его порядок, верно выбрать алгоритм решения. Достаточно много вопросов возникает у студентов при нахождении общего и частного решений дифференциального уравнения. Много ошибок допускается в решении при разделении переменных и при интегрировании функций. Студенты не всегда правильно делают математические преобразования, соблюдают последовательность в решении. В результате многие непонятные вопросы у студентов по решению дифференциальных уравнений остаются невыясненными.

Для того, чтобы студенты самостоятельно выполнили решение того или иного дифференциального уравнения, при этом выявили недочеты и исправили свои ошибки, необходима постоянная помощь преподавателя. Однако эта задача может быть решена самостоятельно студентами, если они в своей работе воспользуются методическими указаниями, составленными преподавателем в помощь студентам по данной теме. В данных методических указаниях подробно изложена методика решения различных дифференциальных уравнений, сформулированы алгоритмы решений со ссылками на теоретический материал.

Тема: ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Занятие 1. Основные определения и понятия

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение следующими компетенциями:

- умением понять поставленную задачу;
- пониманием корректности постановок задач;
- глубоким пониманием сути фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических исследований, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний;

Проверка теоретических знаний

1. Дать определение дифференциального уравнения.

(Дифференциальным уравнением называется уравнение, которое, кроме независимых переменных и неизвестных функций этих переменных, содержит производные неизвестных функций или их дифференциалы.)

2. Какое дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

(Если функции, входящие в дифференциальные уравнения, зависят от одной переменной, то такое уравнение называется *обыкновенным дифференциальным уравнением*.)

3. Как определяется порядок уравнения

(Наивысший порядок n производной неизвестной функции, входящей в уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения*.)

4. Дать определение решения уравнения.

(Всякая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, называется *решением этого уравнения*. Сама задача нахождения решения называется *задачей интегрирования дифференциального уравнения*.)

5. Какое уравнение называется уравнением первого порядка.

(Самыми простыми из дифференциальных уравнений являются уравнения *первого порядка* $T(x, y, y') = 0$, где функция $T(x, y, z)$ и её частные производные T_y и T_z непрерывны на области P точек (x, y, z) трехмерного пространства.)

6. В чем состоит основная задача теории дифференциальных уравнений.

(Разыскание всех решений. Эта задача, как правило, усложняется с ростом порядка дифференциального уравнения.)

7. Какое решение называется общим интегралом дифференциального уравнения.

(Общим интегралом дифференциального уравнения первого порядка называется связь, определенная видом $F(x, y, C) = 0$, обладающая следующим свойством: если продифференцировать его по x , считая, что $y = y(x)$, и исключить параметр C , то полученное дифференциальное уравнение эквивалентно исходному.)

8. Как задаются начальные условия для дифференциального уравнения первого порядка.

(Задание *начальных условий*, а именно: при заданном значении $x = x_0$ искомая функция y принимала заданное значение y_0 , $y|_{x=x_0} = y_0$.)

9. Как называется задача отыскания решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям

(Называется *задачей Коши*.)

10. Дать определение задачи Коши.

(Уравнение имеет бесконечное множество решений, т.к. $F(x, y, C)$ содержит произвольную постоянную. Но при задании *начальных условий*, мы получим определенное решение, проходящее через заданную точку. Для удовлетворения решения начальному условию достаточно определить произвольную постоянную C из равенства $F(x_0, y_0, C) = 0$, если это возможно.)

11. Как называется изображение решений уравнения на координатной плоскости.

(Решение уравнения называется *интегральной кривой дифференциального уравнения*).

12. Дать определение поля направлений.

(Через каждую точку $M \in B$ интегральной кривой проведем единичный вектор, лежащий на касательной, получим *поле направлений* на B .)

12. Дать определение изоклины.

(*Изоклиной* называется кривая, в каждой точке которой направления поля имеют одинаковый угловой коэффициент.)

13. Как определяется изоклина для уравнения $y' = f(x, y)$.

(Изоклина задается формулой $f(x, y) = k$, $k = \text{const}$.)

14. Сформулировать теорему существования и единственности решения при заданном начальном условии.

(Если в уравнении $y' = f(x, y)$, $f(x, y)$ непрерывна по совокупности своих переменных и имеет непрерывную частную производную по y в области B , то через каждую точку, принадлежащую B , проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения, удовлетворяющая задаче Коши.)

15. К каким последствиям может привести невыполнение условий теоремы.

(Если в окрестности точки $M(x_0, y_0)$ плоскости xOy условия теоремы не соблюдаются, то через точку M может проходить одна интегральная кривая или несколько, или бесконечное множество, а может и не существовать такой интегральной кривой.)

16. Какое решение называется особым.

(Решение дифференциального уравнения называется *особым*, если интегральная кривая обладает тем свойством, что через любую её точку проходит, кроме нее, еще другая интегральная кривая, касающаяся её.)

Практические задания

Пример 1. Возможно ли отыскание точного или приближенного решения для уравнения

$$y' = (-x^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Решение: Уравнение не может иметь решений, потому что правая часть его не существует при $x, y \in R$, $y \neq 0, x \neq 0$.

Пример 2. Сколько решений имеет уравнение $y' = \sqrt{-y^2}$.

Решение: Уравнение имеет единственное решение $y = 0$.

Пример 3. Исследовать уравнение $\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}$, выполняется ли для него теорема существования и единственности.

Решение: Функция $\sqrt[3]{y}$ определяет поле направлений на всей плоскости, но производная от правой части по y (равная $\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$) не существует при $y = 0$.

Условие теоремы о существовании непрерывной частной производной по y нарушается. Имеется две области $y > 0$ и $y < 0$, через каждую точку которых проходит только одна кривая $y = \pm \left(\frac{2}{3}x + C\right)^{\frac{3}{2}}$.

Через каждую точку $M(x_0, 0)$, кроме интегральной кривой, проходит еще

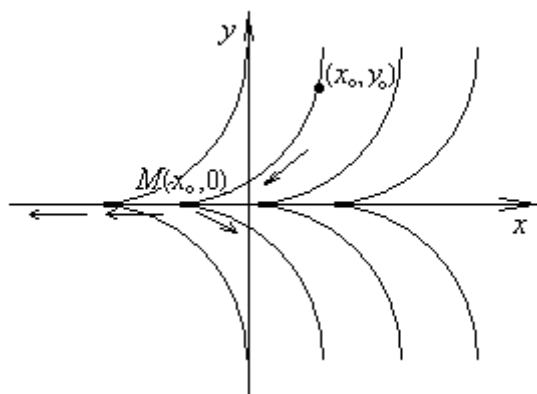


Рис. 1

решение $y = 0$ и единственность решения нарушается. В целом через каждую точку плоскости проходит бесчисленное множество интегральных кривых. Если взять какую-либо точку (x_0, y_0) в верхней полуплоскости (рис. 1), то через эту точку проходит единственная кривая, не пересекающаяся с остальными интегральными линиями. Но если спуститься по этой линии до оси OX , то представляется бесконечное множество возможностей продолжить ее: можно спуститься вниз по кривой или пройти по оси OX , а затем спуститься или подняться по любой другой интегральной кривой.

Пример 4. Исследовать уравнение $y' = \frac{ay}{x^2}$, где a - произвольная постоянная,

отличная от нуля. Выполняется ли для него теорема существования и единственности, изобразить схематично интегральные кривые.

Решение: Данное уравнение определяет поле направлений на всей плоскости, кроме прямой $x = 0$, где нарушается условие теоремы о непрерывности правой части уравнения.

Переменные разделяются $\frac{dy}{y} = a \frac{dx}{x^2}$, откуда после интегрирования

каждой части имеем: $\ln y - \ln C = -\frac{a}{x}$ или $y = Ce^{-\frac{a}{x}}$. Для данного уравнения

имеется две области, удовлетворяющие условию теоремы: $x > 0$ и $x < 0$. Через каждую точку плоскости, кроме $(0,0)$, проходит одна и только одна линия семейства рис. 2 ($a > 0$) и рис. 3

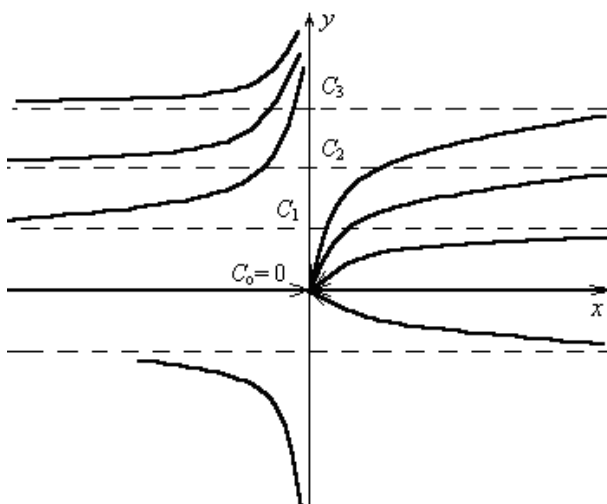


Рис. 2

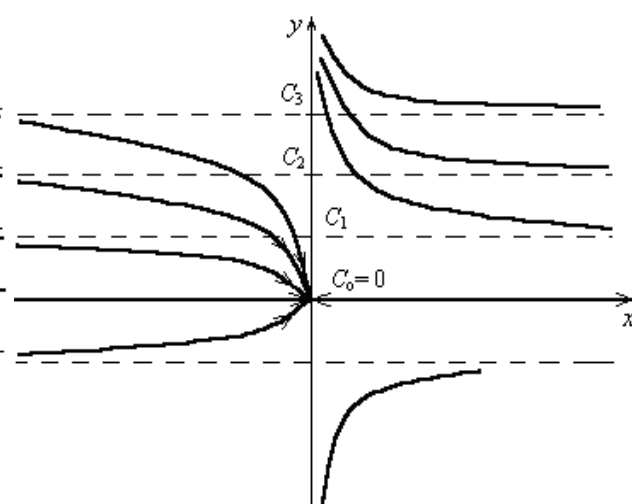


Рис. 3

($a < 0$). В точке $(0,0)$, где дифференциальное уравнение не определено, все линии семейства сходятся - *узловая точка* интегральных линий.

Задачи для репродуктивной работы

Самостоятельная работа по образцу предполагает решение задач на воспроизведение знаний, умений. Все данные для нахождения искомого, а также сам способ выполнения задания представлены в явном виде в самом задании или в соответствующем алгоритме решения (демонстрация решенных заданий)

Возможные формы отчетности: выполненные задания.

1. Построить поле направлений для дифференциальных уравнений:

а) $y' = 2\frac{y}{x}$;

2. Найти уравнение движения точки, падающей с высоты h без начальной скорости.

3. Найти уравнение движения точки, брошенной вверх со скоростью v . Через сколько времени точка достигнет наивысшего положения?

Задания для реконструктивной работы

Характерным признаком этих заданий является то, что в самом задании сообщается общая идея решения, а студенту необходимо развить ее в конкретный способ или способы применительно к условиям задачи. Студент соотносит задание с другими, уже известными ему. При этом главное – актуализация имеющихся знаний, умение отбирать и привлекать необходимые знания для решения задачи

Возможные формы отчетности: конспект выполненных заданий; доклад; реферат; отчет.

4. Построить поле направлений для дифференциальных уравнений:

а) $y' = x^2 - y^2$ (построить *изоклины* $y' = 0$, $y' = \pm 1$, ± 2). Провести интегральные кривые через точки $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.

б) $y' = x^2 + y^2$; в) $y' = x^3$; г) $(y')^2 + \frac{y^2 - a^2}{y^2} = 0$.

5. Найти дифференциальное уравнение софокусных эллипсов с заданным фокусным расстоянием $2c$.

Указание. Уравнение семейства $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$, где a - произвольный

параметр, дифференцируем по x , после сокращений имеем: $\frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{a^2 - c^2} = 0$.

Исключив из этих двух уравнений a^2 , получим искомое уравнение первого порядка.

Ответ: $xyu'^2 + y'(x^2 - y^2 - c^2) - xy = 0$.

Задания для эвристической работы

Такая работа предполагает создание нестандартных ситуаций, решение нетиповых задач. В ее основе – поиск, догадка, формулирование и реализация идеи решения. Однако поиск имеет частичный характер, необходимый лишь для выполнения какого-либо фрагмента общего задания

Возможные формы отчетности: создание математической модели, отчет по заданной форме; план; конспект; сценарий; продукт деятельности арт-технологий (рисунок); аналитический отчет по заданной форме

6*. Найти уравнение всех кругов на плоскости.

Указание. Дифференцируя трижды уравнение окружности $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ и исключая параметры a, b, r , получим искомое уравнение.

Ответ. $y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0$.

7*. Найти дифференциальное уравнение всех конических сечений.

Указание. Уравнение конических сечений имеет вид:

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad a_{ij} - \text{const}.$$

Ответ. $9y''^2y^{IV} - 45y''y'''y^{IV} + 40y'''^3 = 0$.

8*. Вывести дифференциальное уравнение конических сечений, у которых $a_{22} = 0$. Каково геометрическое семейство этих кривых? (Рассмотреть два случая $a_{12} = 0, a_{12} \neq 0$).

Ответ. $3y^{IV}y'' - 4y'''^3 = 0$. Если $a_{12} \neq 0$ кривые гиперболы с вертикальной асимптотой, $a_{12} = 0$ - параболы.

9. Доказать невыполнимость теоремы существования и единственности для уравнения $y' = y^2$.

Литература

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. 3-е изд., Изд. «Лань», 2008. 288 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости 3-е изд., стер. Изд. «Лань», 2008. 480 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., Изд. «Лань» стер 576 с.
4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям 8-е изд., Изд. «Лань», стер., 2009 432 с.
5. Матвеев П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных

уравнений 1-е издание. Изд. «Лань», 2008. 336 с.

6. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения 4-е изд., Изд. «Лань» 2009. 304 с.

7. Шампайн Л. Ф. Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием matlab. 1-е изд, Изд. «Лань», 2009. 304 с.

Занятие 2. Уравнения с разделяющимися переменными

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение следующими компетенциями:

1) в сфере научно-исследовательской деятельности:

- умением понять поставленную задачу;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний;

2) в сфере проектной и производственно-технологической деятельности:

- способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о научных и технологических достижениях в различных источниках;
- способностью формировать суждения о значении своей профессиональной деятельности;

Проверка теоретических знаний

1. Какой вид имеет уравнение с разделяющимися переменными.

(Уравнение $y' = g(x)h(y)$, где $h(y)$ отлична от нуля всюду на области B , $g(x)$ - определена и непрерывна в B называется *уравнением с разделяющимися переменными*.)

2. Как производится замена производной на дифференциалы.

$$\left(y' = \frac{dy}{dx} \right)$$

3. Разделите переменные в уравнении $y' = g(x)h(y)$.

(Деля обе части на $h(y)$ и умножая на dx , получим равенство двух дифференциалов $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$.)

4. Если в уравнении $g(x)$ разрывна в некоторой точке $x = \xi$ и обращается в бесконечность именно в этой точке, а во всех других точках заданной области непрерывна, то, какое решение будет в точке (ξ, y) .

(Общее решение соответствует каждой точке множества $B \setminus \{(\xi, y)\}$, а в точках (ξ, y) решение

определяется из перевернутого уравнения $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{g(x)h(y)} = 0$, т.е. $x = \xi$, и присоединяется к решению

уравнения, как частное).

5. В каком случае присоединенное решение оказывается особым.

(Если в каждой точке этого решения нарушается принцип единственности, то такое решение – особое, если единственность сохраняется во всех точках этого решения, то оно является частным.)

6. Сформулируйте теорему из курса математического анализа о равенстве дифференциалов.

(Если выполняется равенство дифференциалов, то их неопределенные интегралы отличаются лишь произвольным постоянным слагаемым)

7. Если уравнение записано в виде $P_1(x)H_1(y)dx + P_2(x)H_2(y)dy = 0$, то какая из переменных является функцией.

(Уравнение допускает выбор в качестве неизвестной функции как y , так и x)

8. Какие ограничения необходимо наложить на функции $P_1(x), H_1(y), P_2(x), H_2(y)$.

($H_1(y), P_2(x)$ - непрерывны и отличны от нуля всюду на области B , $P_1(x), H_2(y)$ - определены и непрерывны в B)

9. Проведите разделение переменных в этом уравнении.

(Общий интеграл уравнения имеет вид $\int \frac{P_1(x)dx}{P_2(x)} + \int \frac{H_2(y)dy}{H_1(y)} = C$.)

Практические задания

Пример 1. Решить уравнение

$$y' = (2x + 1)(y - 3).$$

Решение: Интегрируем его для $y \neq 3$

$$\frac{dy}{y-3} = (2x+1)dx.$$

Его решение представляет собой функцию

$$\ln |y-3| = \frac{1}{4}(2x+1)^2 + \ln C.$$

Прямая $y = 3$ - частное решение. С учетом проведенных рассуждений общее решение можно переписать в виде

Ответ: $y = Ce^{\frac{1}{4}(2x+1)^2} + 3, y = 3$.

Пример 2. Найти все решения уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Решение: При $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}$, правая часть определена и непрерывна, поэтому формула

$$y = \operatorname{tg} x + C$$

дает общее решение. Прямые $x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}$ является решением перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \cos^2 x \Big|_{x=\frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}} = 0,$$

причем частным решением и асимптотами общего решения исходного уравнения.

Ответ: $y = \operatorname{tg} x + C, x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}$.

Задачи для репродуктивной работы

Самостоятельная работа по образцу предполагает решение задач на воспроизведение знаний, умений. Все данные для нахождения искомого, а также сам способ выполнения задания представлены в явном виде в

самом задании или в соответствующем алгоритме решения (демонстрация решенных заданий)

Возможные формы отчетности: выполненные задания.

1. Решить уравнения

а) $yy' = \frac{1-2x}{y}$;

б) $y' = 2\sqrt{y} \ln x$;

в) $y' \operatorname{tg} x - y = 1$;

г) $y' = e^{-y} x$;

д) $y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}$;

е) $xy' = \frac{y}{\ln x}$;

2. Используя подходящую подстановку, привести уравнения к виду, допускающему разделение переменных, и решить его.

а) $y' = (x+y)^2$;

б) $(x+y)^2 y' = a^2$;

в) $y' = \frac{1-3x-3y}{1+x+y}$;

г) $y' = (x-y)^2 + 1$;

3. Найти решение уравнения $(1+y^2)dx - xydy = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $x_0 = 2, y_0 = 1$.

4. Найти решения уравнения $2\sqrt{y}dx = dy$, удовлетворяющее начальным условиям: $x_0 = 0, y_0 = 1$.

Задания для реконструктивной работы

Характерным признаком этих заданий является то, что в самом задании сообщается общая идея решения, а студенту необходимо развить ее в конкретный способ или способы применительно к условиям задачи. Студент соотносит задание с другими, уже известными ему. При этом главное – актуализация имеющихся знаний, умение отбирать и привлекать необходимые знания для решения задачи

Возможные формы отчетности: конспект выполненных заданий; доклад; реферат; отчет.

5. Решить уравнения

а) $\sec^2 x \operatorname{tg} y dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0$;

б) $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy + ydx = 0$;

в) $y \frac{dy}{dx} + x = 1$;

г) $y' = (2y+1) \operatorname{ctg} x$.

6. Используя подходящую подстановку, привести уравнения к виду, допускающему разделение переменных, и решить его.

а) $y' = \sin(x-y)$;

б) $y' = ax + by + c, a, b, c - \text{const}$;

в) $y' = (ax + by + c)^2, a, b, c - \text{const}$

г) $y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$;

7. Найти решение уравнения $(2x+1)dy + y^2 dx = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $x_0 = 4, y_0 = 1$.

8. Найти кривую, проходящую через точку $(2,0)$ и такую, что отрезок касательной между точкой касания и осью OY имеет постоянную длину, равную 2.

Задания для эвристической работы

Такая работа предполагает создание нестандартных ситуаций, решение нетиповых задач. В ее основе – поиск, догадка, формулирование и реализация идеи решения. Однако поиск имеет частичный характер, необходимый лишь для выполнения какого-либо фрагмента общего задания

Возможные формы отчетности: создание математической модели, отчет по заданной форме; план; конспект; сценарий; продукт деятельности арт-технологий (рисунок); аналитический отчет по заданной форме

9. Используя подходящую подстановку, привести уравнения к виду, допускающему разделение переменных, и решить его.

а)* $y(xy+1)dx + x(1-xy)dy = 0;$

б)* $(xy' - y)f(x) = y^2 - x^2;$

(сделать замену $xy + 1 = z$)

в)* $y' = \frac{y}{x} + x^\lambda f\left(\frac{y}{x}\right);$

г)* $y' + \frac{y}{x} = \varphi(x)f(xy).$

Задания для исследовательской (творческой) работы

В ходе ее выполнения проявляется самый высокий уровень самостоятельности и познавательной активности студента. Творческая работа требует глубокого проникновения в сущность изучаемого явления, поиска новых идей при решении проблем. В ходе выполнения творческого задания у студента формируются такие качества, как видение проблемы в знакомой ситуации, умение обнаруживать новые функции объекта, способность на основе нескольких известных найти новый способ решения задачи, гибкость мышления, готовность отказаться от ошибочного решения

Возможные формы отчетности: статья; создание и обработка математической модели, отчет по результатам исследования; проект.

10. Найти кривую, обладающую свойством: если через любую ее точку провести прямые, параллельные осям координат до встречи с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой на две части, отношение площадей которых равно m/n .

11. Сосуд представляет собой тело вращения. Определить его форму так, чтобы при истечении жидкости из отверстия в дне радиуса r уровень жидкости понижался равномерно.

12. Найти кривые, у которых длина подкасательной¹ постоянна и равна a .

13. Найти кривые, у которых длина поднормали² постоянна и равна p .

14*. Решить функциональное уравнение $f(x+y) = f(x)f(y)$.

Литература

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. 3-е изд., Изд. «Лань», 2008. 288 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости 3-е изд., стер. Изд. «Лань», 2008. 480 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., Изд. «Лань» стер 576 с.
4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям 8-е изд., Изд. «Лань», стер., 2009 432 с.

¹ Подкасательной называется отрезок проекции касательной на ось OX от точки касания с кривой до точки пересечения касательной с осью OX .

² Поднормалью кривой называется отрезок проекции нормали на ось OX от точки кривой, к которой проведена нормаль до точки пересечения нормали с осью OX .

5. Матвеев П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений 1-е издание. Изд. «Лань», 2008. 336 с.
6. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения 4-е изд., Изд. «Лань» 2009. 304 с.
7. Шампайн Л. Ф. Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием matlab. 1-е изд, Изд. «Лань», 2009. 304 с.

Занятие 3. Однородные уравнения

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение следующими *общекультурными компетенциями*:

- навыками межличностных отношений; готовностью к работе в команде;
- знаниями этических норм и использованием их в профессиональной деятельности;
- принятием различий и мультикультурности;
- способностью применять знания на практике;
- способностью приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии;
- фундаментальной подготовкой по основам профессиональных знаний и готовностью к использованию их в профессиональной деятельности;
- навыками работы с компьютером;
- способностью к анализу и синтезу;

профессиональными компетенциями:

1) в сфере научно-исследовательской деятельности:

- умением понять поставленную задачу;
- пониманием корректности постановок задач;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний;

3) в сфере проектной и производственно-технологической деятельности:

- способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников;
- знанием и следование в жизни кодексу профессиональной этики;
- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;
- пониманием сущности и значения информации в развитии современного общества; владение основными методами, способами и средствами получения и переработки информации.

Проверка теоретических знаний

1. Какая функция $f(x,y)$ называется *однородной степени n* .

(Если справедливо равенство $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, то функция называется *однородной*, где n – порядок однородности.)

2. Какое дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ называется *однородным*.

(Если его правая часть - однородная функция нулевого порядка.)

3. Как однородное уравнение можно преобразовать в уравнение с разделяющимися переменными.

(Сохраняя прежнюю независимую переменную x , введем новую искомую функцию $u = y/x$, откуда $y' = u + u'x$.)

4. В какое уравнение преобразуется исходное после предложенной замены.

(Исходное уравнение преобразуется в уравнение, допускающее разделение переменных

$$x \frac{du}{dx} = f(u) - u.)$$

5. Какое преобразование переменных сохраняет вид однородного уравнения.

(Если рассмотреть преобразование подобия плоскости с центром подобия в точке $(0,0)$: $x_1 = kx$, $y_1 = ky$. Это преобразование не изменит вид уравнения, а, следовательно, не меняет всей совокупности решений уравнения. Таким образом, все интегральные кривые однородного уравнения могут быть получены из одной кривой при помощи преобразования гомотетии с центром гомотетии в начале координат.)

6. Какой вид функции $f(x,y)$ в дифференциальных уравнениях $y' = f(x,y)$ допускает сведение к однородному.

(Функция вида $f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ допускает сведение к однородному уравнению.)

7. Какую подстановку необходимо выполнить, чтобы привести уравнение к однородному виду.

(Введение вместо x и y новых переменных ξ и η : $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$, где α и β - постоянные, приводит исходное уравнение к однородному)

8. Как определяются постоянные α , β .

(α , β определяются так, чтобы числитель и знаменатель преобразованного уравнения не содержал свободных членов.)

9. Всегда ли можно найти α и β .

(α и β определяются из линейной системы

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0, \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0. \end{cases}$$

Это возможно, если $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$.)

10. Если α и β найдены, то к какому виду преобразуется исходное уравнение.

(В этом случае уравнение преобразуется к однородному

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right).)$$

11. Что делать, если условие $ab_1 - ba_1 \neq 0$ не выполняется.

(В этом случае имеет место пропорциональность $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$, $a_1x + b_1y = \lambda(ax + by)$, поэтому надо ввести вместо y новую функцию u : $u = ax + by$, $u' = a + by'$.)

12. Какое уравнение получается после введения предложенной подстановки.

(Получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{1}{b}(u' - a) = f\left(\frac{u + c}{\lambda u + c_1}\right).$$

13. Существуют ли еще какие – либо подходы приведения неоднородных уравнений к однородному виду.

(Некоторые уравнения можно привести к однородным заменой $y = z^m$ (число m заранее неизвестно).)

14. Как определяется число m .

(Чтобы его найти, надо в уравнении сделать замену переменной $y = z^m$, $y' = mz^{m-1}z'$, и потребовать, чтобы все члены уравнения стали однородными.)

15. В каком случае определение m возможно.

(Это не всегда возможно, т.к. на одно число m составляется несколько уравнений, система переопределена, и ее решение не всегда существует.)

16. Какой вывод можно сделать, если определение m невозможно.

(Если же такого m найти нельзя, то уравнение не приводится к однородному.)

Практические задания

Пример 1. Найти кривые, у которых подкасательная равна сумме абсциссы и ординаты точки касания.

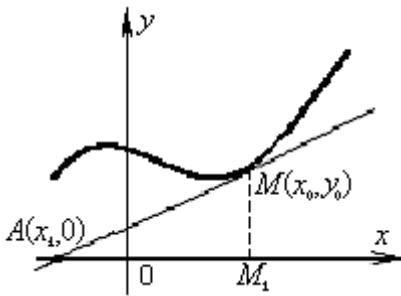


Рис. 1

Решение: По условию отрезок проекции касательной AM (где M имеет координаты $M(x_0, y_0)$) на ось OX равен AM_1 (рис. 1). Тогда

$$x_0 - x_1 = x_0 + y_0. \quad (1)$$

Точка $A(x_1, 0)$ удовлетворяет уравнению касательной к кривой $y'(x_0)(x - x_0) = y - y_0$, тогда $y'(x_0)(x_0 - x_1) = y_0$. С учетом формулы (1) и произвольности точки M , получаем дифференциальное уравнение

$$y \frac{dx}{dy} = x + y.$$

Полученное уравнение является однородным. Введя новую переменную

$z = \frac{x}{y}$, $\frac{dx}{dy} = z + \frac{dz}{dy}y$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$z + 1 = z + y \frac{dz}{dy}$, $dz = \frac{dy}{y}$. Интегрируя обе части равенства, получим $\ln Cy = z$.

Возвращаясь к прежней переменной, получим решение

$$y = Ce^{\frac{x}{y}}.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$y' = \frac{x+y+1}{x-y+1}.$$

Решение: Так как определитель правой части отличен от нуля, то чтобы свести уравнение к однородному, перенесем начало координат в точку с координатами (α, β) , то есть заменим $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$. Подставляя в исходное уравнение, получим

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + \eta + (\alpha + \beta + 1)}{\xi - \eta + (\alpha - \beta + 1)}. \quad (2)$$

Подбираем числа α и β так, чтобы

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 1 = 0, \\ \alpha - \beta + 1 = 0. \end{cases}$$

Это возможно, т.к. определитель системы отличен от нуля $\alpha = -1$, $\beta = 0$.

Пусть $u = \frac{\eta}{\xi}$ и $\frac{d\eta}{d\xi} = u + \xi \frac{du}{d\xi}$, тогда (2) примет вид

$$u + \xi \frac{du}{d\xi} = \frac{1+u}{1-u}.$$

Разделяя переменные $\frac{d\xi}{\xi} = \frac{1-u}{1+u^2} du$ и интегрируя, получим

$$\ln C\xi = \operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2).$$

С учетом вновь введенных переменных

$$\begin{cases} \xi = x+1, \\ \eta = y, \end{cases} \quad u = \frac{y}{x+1},$$

общее решение уравнения перепишем так:

$$C(x+1) = \exp\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x+1}\right) \left(1 + \frac{y^2}{(1+x)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Пример 3. Привести уравнение $2x^2 y' = y^3 + xy$ к однородному.

Решение: После замены $y = z^m$, $y' = mz^{m-1}z'$, получаем равенство вида:

$$2mx^2 z^{m-1} z' = z^{3m} + xz^m.$$

Чтобы все члены имели один и тот же вес необходимо выполнение равенства степеней всех членов, $2+m-1=3m=m+1$, это возможно при $m = \frac{1}{2}$,

следовательно замена имеет вид: $y = \sqrt{z}$, $y' = \frac{1}{2\sqrt{z}} z'$, и уравнение переходит

к однородному виду $\frac{x^2}{\sqrt{z}} z' = \sqrt{z^3} + x\sqrt{z}$ или $z' = \frac{z^2 + xz}{x^2}$.

Задачи для самостоятельной работы

1. Решить дифференциальные уравнения

$$a) (x+y)dx + (x-y)dy = 0;$$

$$б) x(2x^2 + y^2) + yy'(x^2 + 2y^2) = 0;$$

$$в) xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx;$$

$$з) (x^2 + y^2)dx = 2xydy;$$

$$д) (x+2y+1)dx + (3-2x)dy = 0;$$

$$е) (6x+y-1)dx + (4x+y-2)dy = 0;$$

$$ж) 2y' + x = 4\sqrt{y};$$

$$з) (12y-5x-8)y' - 5y + 2x + 3 = 0;$$

2. Найти решение уравнения $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $x_0 = 0, y_0 = 1$.

3. Найти кривые, у которых поднормаль равна сумме абсциссы и ординаты точки касания.

Задачи для домашней работы

1. Решить дифференциальные уравнения

$$a) (x^2 + xy + y^2)dx = x^2 dy;$$

$$б) y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x};$$

$$в) (x-2)dx + (y-2x+1)dy = 0;$$

$$з) (x-y+2)dx + (y-x+3)dy = 0;$$

$$д) x^3(y' - x) = y^2;$$

$$е) 2x^2y' - yx = y^3;$$

2. Найти кривую, все касательные к которой проходят через начало координат.

3. Найти кривую, у которой поднормаль равна разности радиус-вектора и абсциссы точки касания.

4. Найти кривые, у которых нормаль совпадает с радиус-вектором точки касания.

5. Определить кривые, у которых отрезок касательной от точки касания M до пересечения с осью OX равен отрезку оси OX , отсекаемому касательной от начала координат.

Задачи повышенной сложности

1. Решить дифференциальные уравнения

$$a) \frac{dy}{dx} = 2 \left(\frac{y+2}{x+y-1} \right)^2;$$

$$б) \frac{2}{3} xy y' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2.$$

2. Составить уравнение кривых, касательная к которым образует постоянный угол α с радиус-вектором из начала координат; проинтегрировать это уравнение, в интеграл ввести полярные координаты.

3*. Найти формулу зеркала, собирающего параллельные лучи в одну точку.

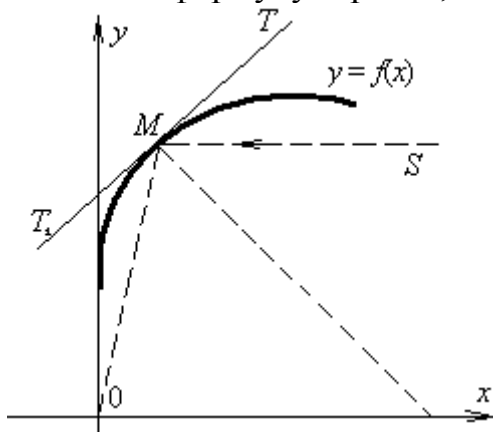


Рис. 2

Указание. Пусть лучи падают параллельно оси OX . Из соображений симметрии легко убедиться, что форма поверхности зеркала есть поверхность вращения. Пусть XOY - меридианная плоскость этой поверхности, в сечении находится искомая кривая $y = f(x)$. Уравнение можно получить, приравняв тангенсы углов SMT и T_1MO (рис. 2) (угол падения равен углу отражения), выраженный через x, y, y' .

- 4*. Найти кривую, для которой треугольник, образованный нормалью с осями координат, был бы равновелик треугольнику, образованному осью OX , касательной и нормалью.

Литература

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. 3-е изд., Изд. «Лань», 2008. 288 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости 3-е изд., стер. Изд. «Лань», 2008. 480 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., Изд. «Лань» стер 576 с.
4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям 8-е изд., Изд. «Лань», стер., 2009 432 с.
5. Матвеев П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений 1-е издание. Изд. «Лань», 2008. 336 с.
6. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения 4-е изд., Изд. «Лань» 2009. 304 с.
7. Шампайн Л. Ф. Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием matlab. 1-е изд, Изд. «Лань», 2009. 304 с.

Занятие 4. Линейные уравнения и уравнение Бернулли

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение следующими *общекультурными компетенциями*:

- навыками межличностных отношений; готовностью к работе в команде;
- знаниями этических норм и использованием их в профессиональной деятельности;
- принятием различий и мультикультурности;
- способностью применять знания на практике;
- способностью приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии;
- фундаментальной подготовкой по основам профессиональных знаний и готовностью к использованию их в профессиональной деятельности;
- навыками работы с компьютером;
- способностью к анализу и синтезу;

профессиональными компетенциями:

- 1) в сфере научно-исследовательской деятельности:
 - умением понять поставленную задачу;
 - пониманием корректности постановок задач;

- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
 - способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
 - умением публично представить собственные и известные научные результаты;
 - владением проблемно-задачной формой представления математических знаний;
- 4) в сфере проектной и производственно-технологической деятельности:
- способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников;
 - знанием и следование в жизни кодексу профессиональной этики;
 - способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;
 - пониманием сущности и значения информации в развитии современного общества; владение основными методами, способами и средствами получения и переработки информации.

Проверка теоретических знаний

1. Какое уравнение называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*.

(Уравнение вида $y' + P(x)y + Q(x) = 0$ называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*, где $P(x)y + Q(x)$ - удовлетворяет условию теоремы существования и единственности.)

2. В каком виде необходимо искать решение уравнения.

(Решение уравнения будем искать в виде произведения некоторых функций $y = u(x)v(x)$, где u и v отличны от нуля.)

3. К какому виду преобразуется уравнение после замены $y = u(x)v(x)$.

(После подстановки в уравнение значений y и y' , получим $u'v + u(v' + P(x)v) + Q(x) = 0$.)

4. Какое преимущество имеет полученное равенство по сравнению с исходным.

(В силу того, что в уравнении две неизвестные функции, а уравнение только одно, можно наложить дополнительное условие на одну из функций так, чтобы уравнение упростилось и свелось к уравнению с разделяющимися переменными.)

5. Какое дополнительное условие наложим.

(В силу произвольности выбора функций u и v , можно положить, что $v' + P(x)v = 0$, тогда уравнение примет вид $u'v + Q(x) = 0$.)

6. Чему равна функция v .

(Легко определяется функция v : $\frac{dv}{dx} = -P(x)v$, $\int \frac{dv}{v} = -\int P(x)dx$, $v = e^{-\int P(x)dx}$.)

7. Какое уравнение получится на функцию u .

(Подставив найденное решение для v во второе уравнение системы, получим уравнение с разделяющимися переменными $u'e^{-\int P(x)dx} + Q(x) = 0$.)

8. Каково решение этого уравнения в квадратурах.

(Решение имеет вид $u = C - \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx$.)

9. Записать общий вид решения для функции y .

(Найденные значения u и v дают окончательное решение:

$$y = e^{-\int P(x)dx} (C - \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx).$$

10. Каким свойством обладает семейство интегральных кривых линейного дифференциального уравнения.

(Из формулы общего решения следует, что решения имеют вид $y = \varphi_1(x)C + \varphi_2(x)$, т.е. y есть линейная функция произвольной постоянной. Если y_1, y_2, y - различные решения, тогда отношение

$$\frac{y_1 - y}{y - y_2} = \frac{C_1 - C}{C - C_2} = C_3,$$

есть величина постоянная в любой точке x .)

11. Каков геометрический смысл этого соотношения.

(Семейство интегральных кривых линейного уравнения делит в постоянном отношении отрезок ординаты между какими-либо двумя кривыми этого семейства.)

12. Записать общий вид уравнения Бернулли.

(Уравнение Бернулли имеет вид $y' + P(x)y + Q(x)y^m = 0$.)

13. Как можно свести уравнение Бернулли к линейному дифференциальному уравнению.

(Деление уравнения на y^m дает $y^{-m}y' + P(x)y^{1-m} + Q(x) = 0$. Введение вместо y новой искомой функции u вида $u = y^{1-m}$, $u' = (1-m)y^{-m}y'$ приводит к линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{1-m}u' + P(x)u + Q(x) = 0.$$

Практические задания

Пример 1. Решить уравнение

$$y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}.$$

Решение: Будем считать y - независимой переменной, а x - функцией, тогда

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y \ln y + y - x}{y}$$

преобразуется в линейное уравнение

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} - 2 \ln y = 1. \quad (1)$$

Положим $x = uv$, тогда (1) примет вид

$$\frac{du}{dy} v + \frac{dv}{dy} u + \frac{uv}{y} - 2 \ln y = 1. \quad (2)$$

Выбираем теперь функцию v так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{dv}{dy} + \frac{v}{y} = 0,$$

отсюда

$$\ln v = -\ln y \text{ или } v = \frac{1}{y}. \quad (3)$$

Оставшаяся часть уравнения (2) дает возможность найти функцию u , зная v (3),

$$\frac{1}{y} \frac{du}{dy} = 2 \ln y + 1.$$

Разделяя переменные и интегрируя каждую часть, получим

$$u = y^2 \ln y + C. \quad (4)$$

С учетом (3) и (4) решение уравнения представляет интегральную кривую вида

$$x = \frac{1}{y} (y^2 \ln y + C).$$

Пример 2. Найти кривую, касательная к которой в точке $(x_0, 2y_0)$ проходит через точку $(x_0^2, 2y_0^2)$.

Решение: Уравнение касательной в точке $(x_0, 2y_0)$ запишем в виде

$$y'(x_0)(x - x_0) = y - 2y_0. \quad (5)$$

По условию точка $(x_0^2, 2y_0^2)$ удовлетворяет уравнению касательной, тогда для всех таких точек равенство (5) дает дифференциальное уравнение

$$y'(x^2 - x) - 2y^2 + 2y = 0, \quad (6)$$

представляющее собой уравнение Бернулли ($m = 2$).

После деления (6) на y^2

$$y'y^{-2}(x^2 - x) - 2 + 2y^{-1} = 0,$$

вводим вместо y новую искомую функцию $z = y^{-1}$, $z' = -y'y^{-2}$, что приводит к линейному дифференциальному уравнению

$$z'(x - x^2) + 2z - 2 = 0.$$

Решив это линейное уравнение относительно величины z , найдем:

$$z = \frac{1}{x^2} (2x - 1 + C(x - 1)^2).$$

Учитывая, что $z = y^{-1}$, получаем

$$y = \frac{x^2}{2x - 1 + C(x - 1)^2}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Решить следующие дифференциальные уравнения:

a) $(1 + x^2)y' + xy = 1;$

б) $y' + y = xy^3;$

в) $y' + x^2y = x^2;$

г) $y' + y = x\sqrt{y};$

д) $y' - \frac{ny}{x+1} = e^x(x+1)^n;$

е) $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = xy + x^2y^2;$

2. Найти кривую, у которой площадь криволинейной трапеции с основанием $[a, x]$ равна $1/m$ -той части площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной крайней ординате.

3. Найти $y = y(x)$, удовлетворяющую уравнению $\int_0^x xy dx = x^2 + y$.

4. Найти кривые, у которых подкасательная равна удвоенной абсциссе точки касания.

Задачи для домашней работы

1. Решить следующие дифференциальные уравнения:

а) $y' = x + y$;

б) $dy + by dx = ax dy$;

в) $y' + \frac{y}{x+1} + x^2 = 0$;

г) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos x}$;

д) $dx + (x + y^2)dy = 0$;

е) $y' = x^3 y^3 - xy$

ж) $xy' + y = 3$;

з) $y' = 2xe^x y + y^3$.

2. Найти кривую, все касательные которой проходят через точку (a, b) .

3. Найти кривую, каждая касательная которой пересекает прямую $y = 1$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания.

4. На тело действует сила, пропорциональная времени. Кроме того, среда сопротивляется движению тела с силой, пропорциональной скорости. Найти закон движения тела.

5. Найти закон изменения силы тока в цепи с сопротивлением R и самоиндукцией L , если начальная сила тока I_0 , а электродвижущая сила меняется по закону $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$.

Задачи повышенной сложности

1. Решить следующие дифференциальные уравнения:

а) $y' = a \sin x + by$;

б) $y' = e^{2x} - e^x y$;

в) $xy' + 2y = x^5 y^2$;

г) $y' + y \cos x = \sin x \cos x$;

д) $\frac{dy}{dx} - \frac{ay}{x} = \frac{x+1}{x}$;

е) $xy' - \frac{y}{x+1} = x$.

Найти кривую, в каждой точке которой поднормаль есть среднее арифметическое квадратов координат этой точки.

Определить кривые, у которых отрезок, отсекаемый нормалью на оси

а) OX , равен y^2/x ; б) OY , равен x^2/y .

4*. Найти периодическое решение уравнения $y' = y \sin x + \sin 2x$.

5. В резервуаре объемом 100 л находится рассол, содержащий 10 кг соли. Вода втекает в резервуар со скоростью 3 л в минуту, смесь с той же скоростью перекачивается во второй резервуар той же емкости, первоначально наполненный чистой водой. Избыток жидкости из него выливается. Каково максимальное количество соли во втором резервуаре и когда оно достигается?

Литература

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. 3-е изд., Изд. «Лань», 2008. 288 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. 3-е изд., стер. Изд. «Лань», 2008. 480 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., Изд. «Лань» 576 с.
4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 8-е изд., Изд. «Лань», стер., 2009 432 с.
5. Матвеев П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. 1-е издание. Изд. «Лань», 2008. 336 с.
6. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. 4-е изд., Изд. «Лань» 2009. 304 с.
7. Шампайн Л. Ф. Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием matlab. 1-е изд, Изд. «Лань», 2009. 304 с.

Занятие 5. Уравнения в полных дифференциалах и интегрирующий множитель

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение следующими *общекультурными компетенциями*:

- навыками межличностных отношений; готовностью к работе в команде;
- знаниями этических норм и использованием их в профессиональной деятельности;
- принятием различий и мультикультурности;
- способностью применять знания на практике;
- способностью приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии;
- фундаментальной подготовкой по основам профессиональных знаний и готовностью к использованию их в профессиональной деятельности;
- навыками работы с компьютером;
- способностью к анализу и синтезу;

профессиональными компетенциями:

1) в сфере научно-исследовательской деятельности:

- умением понять поставленную задачу;
- пониманием корректности постановок задач;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний;

5) в сфере проектной и производственно-технологической деятельности:

- способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников;
- знанием и следование в жизни кодексу профессиональной этики;
- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;
- пониманием сущности и значения информации в развитии современного общества; владение основными методами, способами и средствами получения и переработки информации.

Проверка теоретических знаний

1. Дать определение полного дифференциала функции двух переменных.

(Существование полного дифференциала функции $u(x,y)$ обеспечивается наличием непрерывных частных производных, то есть $du(x,y) = u'_x(x,y)dx + u'_y(x,y)dy$.)

2. Каким свойством обладает вторая смешанная производная.

(Порядок выполнения дифференцирования не меняет смешанной производной $u_{xy}(x,y) = u_{yx}(x,y)$, т.е. можно сначала продифференцировать по x , а затем по y , или в обратном порядке.)

3. Какой вид имеет уравнение, которое может быть уравнением в полных дифференциалах.

(Уравнение имеет вид: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.)

4. Сформулировать теорему о необходимом и достаточном условии существования функции $u(x,y)$ удовлетворяющей равенству $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

(Теорема. Для существования функции $u(x,y)$, удовлетворяющей равенству $du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

в односвязной области B , необходимо и достаточно, чтобы в этой области было справедливо равенство $P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$.)

5. Какое условие необходимо проверить, чтобы уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ было уравнением в полных дифференциалах.

(Его левая часть должна быть полным дифференциалом некоторой функции, зависящий от двух переменных. Должно выполняться условие $P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$.)

6. На какой вопрос позволяет ответить теорема.

(Теорема позволяет по внешнему виду уравнения решить вопрос о существовании функции $u(x,y)$, дифференциал которой равен левой части уравнения $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.)

7. Если необходимое условие для уравнения выполняется, то, как связаны функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ с искомой функцией $u(x,y)$.

($P(x,y) = u'_x(x,y)$, $Q(x,y) = u'_y(x,y)$, общее решение дифференциального уравнения есть $u(x,y) = u(x_0, y_0) = C - const$.)

8. Как можно определить искомую функцию $u(x,y)$.

(Поскольку $u'_x(x,y) = P(x,y)$, то $u(x,y) = \int P(x,y)dx = F(x,y) + \phi(y)$, где $F(x,y)$ - первообразная функции $P(x,y)$ по переменной x , $\phi(y)$ - произвольная дифференцируемая функция аргумента y , играющая роль постоянной интегрирования.)

9. Почему прибавляется не произвольная постоянная, а функция $\varphi(y)$.

(Так как $P(x, y)$ - частная производная $u(x, y)$ по переменной x , то при ее получении из исходной функции $u(x, y)$ слагаемые, зависящие только от y не дадут никакого вклада в $P(x, y)$ (их производная по x равна нулю). Поэтому в восстановленной функции $u(x, y)$ необходимо учесть такую возможность, прибавляя функцию $\varphi(y)$.)

10. Как доопределить функцию $\varphi(y)$.

(Для определения функции $\varphi(y)$ можно воспользоваться тем, что должно выполняться равенство $u'_y(x, y) = F'_y(x, y) + \varphi'(y) = Q(x, y)$, т.е.

$$\varphi(y) = \int (Q(x, y) - F'_y(x, y)) dy + C, \quad C - \text{const.}$$

11. Если уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ не есть полный дифференциал, то как следует поступить.

(Можно найти такую функцию μ , умножив на которую, выражение становится уравнением в полных дифференциалах.)

12. Как называется такая функция.

(Функция μ называется *интегрирующим множителем*.)

13. Если μ - интегрирующий множитель, то для уравнения $\mu P(x, y)dx + \mu Q(x, y)dy = 0$, какое свойство должно выполняться.

(Выполняется свойство $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$.)

14. Из какого уравнения можно найти функцию μ .

(Уравнение

$$0 = P(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \quad (1)$$

- является уравнением в частных производных.)

Практические задания

Пример 1. Найдем интегральный множитель, зависящий только от одного аргумента x : $\mu = \mu(x)$.

Решение: Уравнение (1), определяющее вид интегрирующего множителя преобразуется в равенство

$$\mu (P'_y(x, y) - Q'_x(x, y)) = \mu'_x Q(x, y)$$

или

$$\frac{\mu'_x}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q}. \quad (2)$$

Левая часть равенства (2) не зависит от y , поэтому и правая часть также не должна зависеть от этого аргумента. При соблюдении этого условия из (2) находим:

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx, \quad \ln \mu = \int \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx, \quad \mu = e^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q} dx}.$$

Пример 2. Определим интегральный множитель в виде некоторой функции, зависящей от произведения xy , $\mu = \mu(xy)$.

Решение: В уравнении (1) μ представляет сложную функцию от xy , поэтому дифференцирование даст

$$P\mu'(xy)x - Q\mu'(xy)y + \mu(xy)(P'_y - Q'_x) = 0,$$

что приводит к равенству

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{yQ - xP}.$$

В полученном уравнении правая часть должна зависеть от произведения xy , т.к. интегрирование будет производиться по этой величине. Находим

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{yQ - xP} d(xy), \quad \ln \mu = \int \frac{P'_y - Q'_x}{yQ - xP} d(xy).$$

Пример 3. Решить уравнение

$$(xy - x^2)y' + y^2 - 3xy - 2x^2 = 0.$$

Решение: Перепишем уравнение в виде

$$(xy - x^2)dy + (y^2 - 3xy - 2x^2)dx = 0. \quad (3)$$

Проверим выполнимость теоремы, для этого найдем частные производные $(xy - x^2)'_x = y - 2x$ и $(y^2 - 3xy - 2x^2)'_y = 2y - 3x$. Равенство частных производных не выполняется, поэтому необходимо выбрать подходящий интегрирующий множитель, преобразующий уравнение в уравнение в полных дифференциалах. Для этого определим зависит ли правая часть выражения (2) от переменной y

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{2y - 3x - y + 2x}{xy - x^2} = \frac{1}{x}.$$

Применяя результат примера (1), получим интегрирующий множитель

$$\ln \mu = \int \frac{1}{x} dx = \ln x, \quad \mu = x.$$

Умножая (3) на полученный интегрирующий множитель, получим

$$(x^2y - x^3)dy + (xy^2 - 3x^2y - 2x^3)dx = 0. \quad (4)$$

Интегрирование первого или второго слагаемого дает возможность получить искомую функцию

$$\int (x^2y - x^3)dy = \frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y + \varphi(x). \quad (5)$$

Дифференцирование (5) по переменной x и приравнивание ко второму слагаемому равенства (4) позволяет определить функцию $\varphi(x)$.

$$\left(\frac{1}{2}x^2y^2 - x^3y + \varphi(x) \right)'_x = xy^2 - 3x^2y + \varphi'(x) = xy^2 - 3x^2y - 2x^3,$$

$$\varphi'(x) = -2x^3, \quad \varphi(x) = -2 \int x^3 dx = -\frac{1}{2}x^4 + C.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$\frac{1}{2}(x^2y^2 - x^4) - x^3y = C.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Проверить, будут ли приведенные ниже уравнения в полных дифференциалах, и решить их:

а) $(x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0$; б) $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$;

в) $ydy = (xdy + ydx)\sqrt{1+y^2}$; г) $(x \cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2y dy = 0$;

д) $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 7 = 0$; е) $xy' \cos y + \sin y = 0$;

ж) $\sqrt{a^2 + y^2} dx + \frac{xy + a^2 + 2y^2}{\sqrt{a^2 + y^2}} dy = 0$; з) $(6xy + x^2 + 3)y' + 3y^2 + 2xy + 2x = 0$

2. Найти условия, при которых дифференциальное уравнение имеет интегрирующий множитель, зависящий от переменной y .

3. Пользуясь результатом предыдущей задачи и формулой (2), проинтегрировать следующие уравнения:

а) $xy' + (\sin y - 3x^2 \cos y) \cos y = 0$; б) $(\ln y + 2x - 1)y' = 2y$;

в) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$;

Задачи для домашней работы

2. Проверить, будут ли приведенные ниже уравнения в полных дифференциалах, и решить их:

а) $\frac{y + \sin x \cos^2 xy}{\cos^2 xy} dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y \right) dy = 0$;

б) $(y \cos x + 2xy^2)dx + (\sin x - a \sin y + 2x^2y)dy = 0$;

в) $(3x^2y - 2x^3 + y^3)dx = (2y^3 - 3xy^2 - x^3)dy$;

г) $\sin(x+y)dx + x \cos(x+y)(dx+dy) = 0$.

4. Найти условия, при которых дифференциальное уравнение имеет интегрирующий множитель, независящий от переменной x .

5. Пользуясь результатом предыдущей задачи и формулой (2), проинтегрировать следующие уравнения:

а) $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$; б) $(7xy^3 + y - 5x)y' + y^4 - 5y = 0$;

в) $x(3y + 2x)y' + 3(y + x)^2 = 0$.

Задачи повышенной сложности

1.* Найти интегрирующий множитель вида $\mu(x^2 + y^2)$.

2.* Найти интегрирующий множитель уравнения Бернулли.

3.* Найти интегрирующий множитель уравнения вида

$$M(x+y)dx + N(x+y)dy = 0.$$

4.* Используя интегрирующий множитель вида $\mu(xy)$, решить уравнения:

а) $x(xy - 3)y' + xy^2 - y = 0$;

б) $(2x^2y + x)y' - x^2y^3 + 2xy^2 + y = 0$;

в) $xy^2 dx + (x^2y - x)dy = 0$;

г) $x(2y + x - 1)y' - y(y + 2x - 1) = 0$.

5.* Применить результат задачи 4 к интегрированию следующих уравнений:

а) $(y^2 + x^2 + x)y' - y = 0$;

б) $2y^3y' + xy^2 - x^3 = 0$.

6.* Если для уравнения вида $(M_1dx + N_1dy) + (M_2dx + N_2dy) = 0$ существуют интегрирующие множители, такие, что

$$\mu_1(M_1dx + N_1dy) = du_1, \quad \mu_2(M_2dx + N_2dy) = du_2$$

и можно подобрать функции $\varphi(u_1)$, $\psi(u_2)$ так, что

$$\mu_1\varphi(u_1) = \mu_2\psi(u_2),$$

тогда $\mu_1\varphi(u_1) = \mu_2\psi(u_2) = \mu$ - интегрирующий множитель исходного уравнения. Разделением уравнения на группы проинтегрировать уравнения:

$$а) \left(\frac{2}{y} + \frac{y}{x^3}\right)dx + \left(\frac{1}{xy} - \frac{2}{x^2}\right)dy = 0; \quad б) y(1+xy)dx + \left(\frac{1}{2}x^2y + y + 1\right)dy = 0.$$

Литература

8. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. 3-е изд., Изд. «Лань», 2008. 288 с.
9. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. 3-е изд., стер. Изд. «Лань», 2008. 480 с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., Изд. «Лань» 2009. 576 с.
11. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 8-е изд., Изд. «Лань», стер., 2009 432 с.
12. Матвеев П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. 1-е издание. Изд. «Лань», 2008. 336 с.
13. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. 4-е изд., Изд. «Лань» 2009. 304 с.
14. Шампайн Л. Ф., Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием matlab. 1-е изд., Изд. «Лань», 2009. 304 с.

Занятие 6. Дифференциальные уравнения, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение следующими *общекультурными компетенциями*:

- навыками межличностных отношений; готовностью к работе в команде;
- знаниями этических норм и использованием их в профессиональной деятельности;
- принятием различий и мультикультурности;
- способностью применять знания на практике;
- способностью приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии;
- фундаментальной подготовкой по основам профессиональных знаний и готовностью к использованию их в профессиональной деятельности;
- навыками работы с компьютером;
- способностью к анализу и синтезу;

профессиональными компетенциями:

1) в сфере научно-исследовательской деятельности:

- умением понять поставленную задачу;
- пониманием корректности постановок задач;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний;

6) в сфере проектной и производственно-технологической деятельности:

- способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников;
- знанием и следование в жизни кодексу профессиональной этики;
- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;
- пониманием сущности и значения информации в развитии современного общества; владение основными методами, способами и средствами получения и переработки информации.

Проверка теоретических знаний

1. Дать определение *изоклин* для уравнения, не разрешенные относительно производной $y' : \Phi(x, y, y') = 0$.

(Каждая линия $\Phi(x, y, C) = 0$ семейства есть геометрическое место точек плоскости, которым отвечает одно и то же направление касательной к интегральным кривым. Это семейство называется семейством *изоклин*, или семейством *линий равного уклона* поля направлений, определяемого исходным дифференциальным уравнением.)

2. В каком случае изоклины являются решением дифференциального уравнения?

(Если взять какую-нибудь изоклину, то в каждой ее точке дифференциальное уравнение дает одно и то же направление касательной, а именно, выбранное значение C . Для того, чтобы изоклина была решением, необходимо и достаточно, чтобы угловой коэффициент касательной к изоклине был во всех точках постоянным и равным C . Следовательно, изоклина должна быть прямой с угловым коэффициентом C , которая определяется дифференциальным уравнением в точках этой изоклины.)

3. Приведите пример уравнения, у которого изоклины являются решением.

(Примером уравнения не разрешенного относительно производной является уравнение Клеро $y = xy' + \varphi(y')$. Семейство изоклин этого уравнения есть прямые с угловым коэффициентом C : $y = xC + \varphi(C)$, где C - постоянная, которая заменила y' .)

4. Существуют ли у уравнения Клеро другие решения.

(Уравнение Клеро обладает еще частным решением.)

5. Какой осуществляется подход, чтобы найти другие решения уравнения Клеро.

(Вводится замена $y' = p(x)$.)

6. Опишите процедуру построения частного решения.

(После подстановки $y' = p(x)$, уравнение примет вид

$$y = xp + \varphi(p). \quad (1)$$

Возьмем дифференциалы от обеих частей равенства

$$dy = p dx + x dp + \varphi'(p) dp \quad \text{или} \quad p dx = p dx + x dp + \varphi'(p) dp, \quad (x + \varphi'(p)) dp = 0.$$

Приравнявая к нулю каждый сомножитель, получаем два решения: первое - $dp = 0$, что дает $p = C$, и тем самым получаем семейство изоклин; второе определяется равенством

$$x + \varphi'(p) = 0. \quad (2)$$

Система (1), (2) дает параметрическую запись второго решения (p - параметр)

$$\begin{cases} x = -\varphi'(p), \\ y = \varphi(p) - p\varphi'(p). \end{cases}$$

Полученное решение уравнения, не содержит произвольной постоянной, поэтому является частным решением.)

7. Дать определение *особого решения*.

(Решение уравнения называется *особым решением*, если через каждую его точку кроме этого решения проходит и другое решение, имеющее в этой точке ту же касательную, и отличное от него в любой окрестности этой точки.)

8. Дать определение *огibaющей семейства линий*.

(Гладкая кривая называется *огibaющей семейства линий*, если в каждой своей точке она касается кривой семейства и отлична от нее в любой окрестности этой точки, т.е. имеет в каждой своей точке касательную, общую с линией семейства, проходящей через эту же точку.)

9. В каком случае огibaющая есть особая интегральная кривая уравнения.

(По теореме: если семейство решений некоторого уравнения имеет огibaющую, то эта огibaющая есть особая интегральная кривая уравнения.)

10. Как найти огibaющую семейства решений $\Phi(x, y, C) = 0$.

(Чтобы найти огibaющую семейства решений $\Phi(x, y, C) = 0$ некоторого уравнения необходимо найти угловой коэффициент касательной к линии семейства. Если продифференцировать $\Phi(x, y, C) = 0$, принимая во внимание, что y есть функция от x , а C - постоянная

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

то угловой коэффициент касательной к интегральной кривой примет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial x} : \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial y}. \quad (3)$$

Так как каждая точка огibaющей удовлетворяет одной из кривых семейства, то ее вид можно считать совпадающим с формулой $\Phi(x, y, C) = 0$, считая только C не постоянной, а некоторой искомой функцией от x и y . Дифференциал от $\Phi(x, y, C) = 0$, с учетом сказанного выше, определим формулой

$$\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} dC = 0. \quad (4)$$

По определению угловой коэффициент касательной к огibaющей должен совпадать с (3). В силу этого первые два слагаемых уничтожаются, тогда третье слагаемое левой части (4) будет равно нулю

$$\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} dC = 0.$$

Так как C - функция от x и y , то $dC \neq 0$, а следовательно

$$\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0, \quad (5)$$

это уравнение определяет C как функцию переменных x, y . Подставляя найденное $C(x, y)$

из (5) в $\Phi(x, y, C) = 0$, получим уравнение огибающей.

Итак, уравнение огибающей семейства можно получить исключением C из системы двух уравнений:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \quad (6)$$

Полученный результат становится понятным, так как двигаясь по огибающей мы все время касаемся различных линий семейства, каждая из которых определяется своим значением C .)

11. Если для уравнения неизвестно семейство общего решения, можно ли тогда найти огибающую.

(Используя тот подход, что когда от самого уравнения мы переходили к семейству изоклин, т.е. полагали замену $y' = C$, в результате рассуждений пришли к необходимости решить систему (6). Выполним в (6) обратный переход, тогда огибающую для решений данного уравнения можно получить непосредственно из самого уравнения, решив систему:

$$\Phi(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial \Phi(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \quad (7)$$

12. Какое уравнение называется уравнением Лагранжа.

(Уравнением Лагранжа называется уравнение вида $y = x\varphi(y') + \psi(y')$, где функции $\varphi(y')$ и $\psi(y')$ непрерывно дифференцируемы.)

13. К какому классу уравнение относится уравнение Лагранжа.

(Уравнение первого порядка не разрешенное относительно производной)

14. Какой метод применяется для нахождения решения уравнения Лагранжа.

(Решение этого уравнения можно найти, используя подход, примененный к уравнению Клеро. Вводя новую независимую переменную $p = y'$.)

15. Сколько переменных будет в равенстве после введенной подстановки.

(После подстановки $y = x\varphi(p) + \psi(p)$ будет три переменные: x , y и p .)

16. Как избавиться от одной из переменных.

(Продифференцировать равенство и сделать замену $dy = p dx$, получим

$$p dx = \varphi(p) dx + x\varphi'(p) dp + \psi'(p) dp.)$$

17. К какому уравнению можно свести полученное уравнение.

(К линейному дифференциальному уравнению относительно функции x от аргумента p : $(\varphi(p) - p) \frac{dx}{dp} + \varphi'(p)x + \psi'(p) = 0$.)

18. Если линейное уравнение решено $x = f(p, C)$, то как запишется общее решение уравнения Лагранжа.

(Общее решение уравнения Лагранжа найдено в виде однопараметрического семейства кривых, записанное системой:

$$\begin{cases} x = f(p, C), \\ y = f(p, C)\varphi(p) + \psi(p), \end{cases}$$

p – параметр.)

Практические задания

Пример 1. Доказать, что частное решение уравнения Клеро есть огибающая для семейства изоклин.

Решение: Нетрудно проверить, что полученное решение

$$\begin{cases} x = -\varphi'(p), \\ y = \varphi(p) - p\varphi'(p). \end{cases}$$

уравнения Клеро является огибающей для однопараметрического семейства прямых $y = xC + \varphi(C)$. Прделаем процедуру, описанную в пункте 10:

1. Так как общее решение уравнения Клеро – прямые, то угловой коэффициент примет вид $\frac{dy}{dx} = C$, откуда $dy = Cdx$.
2. Найдем полный дифференциал семейства прямых: $y - xC - \varphi(C) = 0$, с учетом что C – функция: $-Cdx + dy - [x + \varphi'(C)]dC = 0$.
3. Подставим в полученное равенство $dy : x + \varphi'(C) = 0$ или $x = -\varphi'(C)$.
4. Выражаем C и подставляем в семейство интегральных прямых, т.е. исключаем C из системы

$$\begin{cases} x = -\varphi'(C), \\ y = \varphi(C) - C\varphi'(C). \end{cases}$$

По теореме это решение является также особым решением.

Пример 2. Найдем общее и особое решение уравнения

$$(y')^2 - yy' + e^x = 0.$$

Решение: Выразим в явном виде функцию y через x и y'

$$y = \frac{e^x}{y'} + y'.$$

Полагая $y' = p$, после подстановки в уравнение, получим $y = \frac{e^x}{p} + p$ и однократного дифференцирования, связь примет вид:

$$p = \frac{e^x}{p} - p' \frac{e^x}{p^2} + p'$$

или

$$\frac{1}{p} \left(e^x - p^2 \right) \left(1 - \frac{p'}{p} \right) = 0. \quad (8)$$

Общий интеграл получается из $\frac{p'}{p} = 1$, т.е.

$$Cy' = e^x \quad \text{или} \quad y = Ce^x + 1/C.$$

Особое решение дает другая скобка равенства (8) $p = \pm e^{\frac{1}{2}x}$, $y = \pm \left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x}} + \sqrt{e^x} \right)$

.

Ответ: $y = Ce^x + \frac{1}{C}$, $y = \pm 2\sqrt{e^x}$.

Пример 3. Найти огибающую семейства решений уравнения

$$y = xy' + (y')^2.$$

Решение: Огибающая семейства решений может быть найдена из системы уравнений (7). Для этого продифференцируем исходное уравнение по y'

$$x + 2y' = 0 \quad \text{или} \quad y' = -\frac{1}{2}x.$$

Подставляя в исходное уравнение найденное значение производной, получаем параболу

$$y = -x^2/4,$$

которая является решением системы (7), а следовательно огибающей для семейства решений.

Задачи для репродуктивной работы

Самостоятельная работа по образцу предполагает решение задач на воспроизведение знаний, умений. Все данные для нахождения искомого, а также сам способ выполнения задания представлены в явном виде в самом задании или в соответствующем алгоритме решения (демонстрация решенных заданий)

Возможные формы отчетности: выполненные задания.

1. Решить следующие дифференциальные уравнения:

а) $y\sqrt{1+(y')^2} = y';$

б) $x^3 + (y')^2 = x^2;$

в) $y = (y')^2 + 2(y')^3;$

г) $x = ay' + b(y')^2;$

д) $\sqrt{1+(y')^2} + y' = y;$

е) $x = y' \sin y';$

ж) $y = (y')^2 e^{y'};$

з) $y = x(y')^2 + 2y';$

и) $y = x(y')^2 + (y')^3;$

к) $y = xy' + \arcsin y';$

л) $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{(y')^2};$

м) $y = xy' - (y')^2 + y';$

н) $y = 2xy' + (y')^2;$

о) $y = (x-1)y' + 2(y')^2.$

Задания для реконструктивной работы

Характерным признаком этих заданий является то, что в самом задании сообщается общая идея решения, а студенту необходимо развить ее в конкретный способ или способы применительно к условиям задачи. Студент соотносит задание с другими, уже известными ему. При этом главное – актуализация имеющихся знаний, умение отбирать и привлекать необходимые знания для решения задачи

Возможные формы отчетности: конспект выполненных заданий; доклад; реферат; отчет.

2. Найти кривые, обладающие тем свойством, что длина кривой, отсчитываемая от некоторой начальной точки, численно равна площади криволинейной трапеции ограниченной ею.
3. Найти кривую, касательные к которой отсекают на осях координат отрезки, в сумме постоянно составляющие a .
4. Найти кривую, такую, что отрезок, отсекаемый касательной к ней на оси OY , равен обратной величине отрезка, отсекаемого той же касательной на оси OX .
5. Найти кривые, у которых отрезок нормали между осями сохраняет постоянную длину.
6. Найти кривую, у которой длина отрезка касательной между осями координат постоянна и равна a .
7. Найти общие и особые решения следующих уравнений

$$a) y^2(1+(y')^2) = a^2;$$

$$б) y^2(y' - 1) = (2 - y')^2.$$

8. Общее решение уравнения имеет вид

$$y - C^3x^2 + 2C^2x - C = 0.$$

Найти особое решение.

9. Для семейства кривых $y = C(x - C)^2$ найти огибающую кривую и особое решение уравнения.

Задания для эвристической работы

Такая работа предполагает создание нестандартных ситуаций, решение нетиповых задач. В ее основе – поиск, догадка, формулирование и реализация идеи решения. Однако поиск имеет частичный характер, необходимый лишь для выполнения какого-либо фрагмента общего задания

Возможные формы отчетности: создание математической модели, отчет по заданной форме; план; конспект; сценарий; продукт деятельности арт-технологий (рисунок); аналитический отчет по заданной форме

10*. Найти дифференциальное уравнение семейства парабол $y = x^2 - 2Cx$.

11*. Найти дифференциальное уравнение семейства кривых

$$y = Ce^{-x} + \cos x + \sin x.$$

12*. Выяснить, каким решением для дифференциального уравнения будет $y \equiv 0$: частным или особым

$$a) y' = \begin{cases} y \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0; \end{cases} \quad б) y' = \begin{cases} 3\sqrt[3]{y \sin \frac{1}{y}}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0; \end{cases} \quad в) y' = \begin{cases} 3\sqrt[3]{y \sin \frac{1}{y}}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Задания для исследовательской (творческой) работы

В ходе ее выполнения проявляется самый высокий уровень самостоятельности и познавательной активности студента. Творческая работа требует глубокого проникновения в сущность изучаемого явления, поиска новых идей при решении проблем. В ходе выполнения творческого задания у студента формируются такие качества, как видение проблемы в знакомой ситуации, умение обнаруживать новые функции объекта, способность на основе нескольких известных найти новый способ решения задачи, гибкость мышления, готовность отказаться от ошибочного решения

Возможные формы отчетности: статья; создание и обработка математической модели, отчет по результатам исследования; проект.

13. Ребенок, идущий по тротуару, везет за собой по мостовой тележку (см. рис. 1). Найти линию, по которой она движется (трактриса).

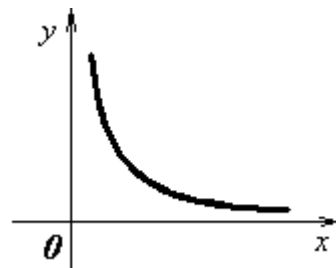
14. Найти линии, пересекающие кривые семейства под заданным углом:

$$a) x^2 + y^2 = a^2 \text{ под углом } \alpha;$$

$$б) x^2 + y^2 = 2ax \text{ под углом } 45^\circ;$$

$$в) x = \frac{a}{y} \text{ под углом } 45^\circ;$$

$$г) x - y = x^2 + a^2 \text{ под углом } 45^\circ.$$



Указание. Изогональными кривыми называются кривые, пересекающие все линии семейства под заданным углом α . Они находятся из уравнения $F\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0$, где $F(x, y, y') = 0$ - дифференциальное уравнение, $k = \operatorname{tg} \alpha$.

В случае, когда $\alpha = \frac{\pi}{2}$, изогональные траектории называются ортогональными и отыскиваются из уравнения $F(x, y, -(y')^{-1}) = 0$.

Литература

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. 3-е изд., Изд. «Лань», 2008. 288 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. 3-е изд., стер. Изд. «Лань», 2008. 480 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., Изд. «Лань» 2009. 576 с.
4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 8-е изд., Изд. «Лань», стер., 2009 432 с.
5. Матвеев П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. 1-е издание. Изд. «Лань», 2008. 336 с.
6. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. 4-е изд., Изд. «Лань» 2009. 304 с.
7. Шампайн Л. Ф. Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием matlab. 1-е изд, Изд. «Лань», 2009. 304 с.

Тема2: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Занятие 7-8. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также овладение следующими компетенциями
общекультурными

- навыками межличностных отношений; готовностью к работе в команде;
- знаниями этических норм и использованием их в профессиональной деятельности;
- принятием различий и мультикультурности;
- способностью применять знания на практике;
- способностью приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии;
- фундаментальной подготовкой по основам профессиональных знаний и готовностью к использованию их в профессиональной деятельности;
- навыками работы с компьютером;
- способностью к анализу и синтезу;

профессиональными:

1) в сфере научно-исследовательской деятельности:

- умением понять поставленную задачу;
- пониманием корректности постановок задач;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний;

7) в сфере проектной и производственно-технологической деятельности:

- способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников;
- знанием и следование в жизни кодексу профессиональной этики;
- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;
- пониманием сущности и значения информации в развитии современного общества; владение основными методами, способами и средствами получения и переработки информации.

Проверка теоретических знаний

1. Дать определение дифференциального уравнения n -го порядка, разрешенного относительно старшей производной.

(Уравнение n -го порядка называется разрешенным относительно старшей производной, если $y^{(n)}$ можно представить в виде $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$.)

2. Как задаются начальные условия для уравнения n -го порядка.

(Для уравнения n -го порядка определение начальных условий состоит в задании функции y и ее производных до $(n-1)$ -го порядка включительно при некотором заданном значении аргумента $x = x_0$: $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$, ..., $y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$.)

3. Сформулировать теорему существования и единственности решения для уравнения n -го порядка

(Если для уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ - однозначная, непрерывная в области B и имеет непрерывные частные производные по переменным $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, то уравнение имеет одно и только одно решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.)

4. Сколько параметров имеет семейство решений уравнения n -го порядка

(Семейство решений уравнения n -го порядка зависит от n произвольных постоянных, такое решение называется *общим интегралом* уравнения.)

5. Как построить решение удовлетворяющее заданным начальным условиям.

(Для получения частного решения уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, необходимо определить численные значения произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ в общем решении. Дифференцируя общее решение по x $n - 1$ раз и подставляя $x = x_0$ и условия

$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$, получим n уравнений. Разрешая полученную систему уравнений относительно неизвестных $C_1, C_2, \dots, C_n$, найдем их значения. Определенные таким образом числа в общем решении дают искомое частное решение.)

I. Уравнения высших порядков, допускающие разделение переменных

6. Как решается уравнение вида: $y^{(n)} = f(x)$, правая часть которого не зависит от $y, y', \dots, y^{(n-1)}$.

(Решение уравнения находится последовательным понижением порядка с помощью интегрирования, так

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

Продолжая подобную процедуру после n -го интегрирования получим искомое решение. В общем, виде имеем

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f(x) dx}_n,$$

где интегрирование повторяется n раз.)

7. Как решается уравнение $F(x, y^{(n)}) = 0$ в том случае, когда невозможно выразить в явном виде производную n -го порядка.

(Заменив исходное уравнение на эквивалентную параметрическую систему

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y^{(n)} = \psi(t), \end{cases} \quad \text{найдем дифференциалы} \quad \begin{cases} dx = \varphi'(t) dt, \\ dy^{(n-1)} = \psi(t) dx. \end{cases}$$

Из первого равенства системы dx подставим во второе, получим равенство двух дифференциалов $dy^{(n-1)} = \psi(t)\varphi'(t)dt$, откуда

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\varphi'(t) dt.$$

Аналогично $y^{(n-2)}$: $y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)} dx = \int \varphi'(t) dt \int \psi(t)\varphi'(t) dt$ и так далее, в результате имеем окончательное решение в виде n -кратной квадратуры

$$y = \underbrace{\int \varphi'(t) dt \dots \int \varphi'(t) dt \int \psi(t)\varphi'(t) dt}_n.$$

II. Уравнения не содержащие функции в явном виде.

8. Как понизить порядок уравнения, не содержащего функции y и ее нескольких первых последовательных производных $y', y'', \dots, y^{(k-1)}$, т.е. уравнение вида $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n-1)})$.

(Вводя новую функцию $z(x) = y^{(k)}$, понижаем порядок уравнения на k единиц: $z^{(n-k)} = f(x, z, z', \dots, z^{(n-k-1)})$.)

III. Уравнения не содержащие независимой переменной в явном виде.

9. Как понизить порядок уравнения, когда оно явно не зависит от x .

(Тогда за независимую переменную можно принять y , а за новую функцию принять $p(y) = y'$, где p – есть функция от y .)

10. Запишите, применяя правило дифференцирования сложной функции, как выразятся производные y по x второго и третьего порядка.

(Получим выражения

$$y'' = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p, \quad y''' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dp}{dy} p \right) = \frac{d^2 p}{dy^2} p^2 + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 p .)$$

11. Каков порядок уравнения будет после подстановки найденных производных.

(В новых переменных порядок уравнения будет $n-1$.)

IV. Уравнения, содержащие только две последовательные производные.

12. С помощью какой подстановки уравнение $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ сводится к уравнению первого порядка.

(Равенство можно свести к уравнению первого порядка с помощью замены $y^{(n-1)} = u(x)$, $y^{(n)} = u'(x)$.)

13. Если старшая производная может быть явно выражена через младшую производную $y^{(n)} = F(y^{(n-1)})$, то, к какому типу уравнения эта замена приводит.

(К уравнению с разделяющимися переменными $u' = F(u)$.)

14. Выполните разделение переменных и интегрирование в равенстве $u' = F(u)$.

(После разделения переменных можно перейти к интегрированию $\frac{du}{F(u)} = dx$,

$$\int \frac{du}{F(u)} = x + C_1 .)$$

15. Как поступить с равенством $F(u, u') = 0$ в случае, когда старшая производная не может быть выражена через младшую.

(Необходимо использовать эквивалентную параметрическую систему

$$\begin{cases} u = \varphi(t), \\ u' = \psi(t). \end{cases})$$

16. Выполните разделение переменных и интегрирование в полученной системе.

$$(\text{Найдем дифференциалы} \quad \begin{cases} du = \varphi'(t)dt, \\ du = \psi(t)dx \end{cases})$$

так как левые части равны, то можно выразить из последней системы дифференциал dx :

$$dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt, \quad x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C_1, \quad u = \varphi(t) .)$$

V. Уравнения, содержащие только две последовательные четные или нечетные производные.

17. С помощью какой подстановки уравнение $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ сводится к уравнению второго порядка.

(Исходное равенство сводится к уравнению второго порядка, используя подстановку $y^{(n-2)} = u(x)$, $y^{(n)} = u''(x)$, следовательно, получим $F(u, u'') = 0$.)

18. Что надо сделать в соотношении $u'' = F(u)$, чтобы получить равенство дифференциалов: в левой части от u' , в правой части от функции u .

(Умножим обе части на выражение $2u'$: $2u'u'' = 2u'F(u)$. Это позволит в левой части

выделить полную производную $\frac{d(u')^2}{dx} = 2F(u)\frac{du}{dx}$. Умножая обе части на dx переходим к равенству дифференциалов $d(u')^2 = 2F(u)du$ - уравнение с разделенными переменными, которое можно интегрировать.)

19. Как поступить с равенством $F(u, u'') = 0$ в случае, когда старшая производная не может быть выражена через младшую.

(В случае, когда старшая производная не может быть выражена через младшую необходимо использовать эквивалентную параметрическую систему

$$\begin{cases} u = \phi(t), \\ u''(x) = \psi(t). \end{cases}$$

20. Выполните преобразование полученной системы к равенству полных дифференциалов.

(Найдем дифференциал из первого равенства $du = \phi'(t)dt$, а во втором умножим обе части на выражение $2u'$: $2u'u''(x) = 2u'\psi(t)$ или $\frac{d(u')^2}{dx} = 2\psi(t)\frac{du}{dx}$ после сокращения на dx и замены $du = \phi'(t)dt$, получим равенство полных дифференциалов $d(u')^2 = 2\psi(t)\phi'(t)dt$.)

Занятие 9-10.

Некоторые виды уравнений высших порядков, допускающие понижение порядка

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также овладение следующими компетенциями
общекультурными

- навыками межличностных отношений; готовностью к работе в команде;
- знаниями этических норм и использованием их в профессиональной деятельности;
- принятием различий и мультикультурности;
- способностью применять знания на практике;
- способностью приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии;
- фундаментальной подготовкой по основам профессиональных знаний и готовностью к использованию их в профессиональной деятельности;
- навыками работы с компьютером;
- способностью к анализу и синтезу;

I. Однородные уравнения высших порядков.

21. Перечислите возможные виды однородностей уравнений высших порядков.

(Однородность относительно функцией $y, y', \dots, y^{(n)}$, однородность относительно всех переменных и дифференциалов: $x, dx, y, dy, d^2y, \dots, d^ny$ в обобщенном смысле.)

22. Как проверяется однородность относительно функцией $y, y', \dots, y^{(n)}$.

$$(\Phi(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^k \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}).)$$

23. Какая замена понижает порядок уравнения с такой однородностью.

(Такое уравнение допускает понижение порядка, если ввести новую функцию $u(x)$, а

$$y = e^{\int u dx} .)$$

24. Запишите, применяя правило дифференцирования сложной функции, как выразятся производные y по x первого, второго и третьего порядка через новую функцию u .

(Выражая производные через новую функцию

$$y' = e^{\int u dx} u, \quad y'' = e^{\int u dx} (u^2 + u'), \quad y''' = e^{\int u dx} (u^3 + 3uu' + u''), \dots$$

каждая производная определяется через выражение, имеющее производную на порядок ниже.)

25. Как используется однородность уравнения.

(Подставляя в уравнение найденные производные, получим, что все слагаемые умножаются на одну и ту же степень показательной функции $e^{\int u dx}$ (в силу однородности уравнения). Разделив на этот множитель, получим уравнение $(n - 1)$ -го порядка на функцию $u(x)$.)

26. Как проверяется однородность относительно всех переменных и дифференциалов: $x, dx, y, dy, d^2y, \dots, d^ny$ в обобщенном смысле.

(Уравнение является однородным относительно своих переменных в обобщенном смысле, если оно не меняется при замене:

$$x \rightarrow kx, \quad dx \rightarrow k dx, \quad y \rightarrow k^m y, \quad dy \rightarrow k^m dy, \dots, d^ny \rightarrow k^m d^ny,$$

где m – некоторая постоянная.)

27. Как определяется m . Всегда ли это возможно.

(Число m определяется специальным образом, так, чтобы все одночлены равенства, полученного после замены указанной выше, имели равные показатели степеней параметра k .

Такое значение m не всегда возможно найти, т.к. на одно число m составляется несколько равенств – их число зависит от количества слагаемых в уравнении. Составленная система переопределена, и ее решение не всегда существует.)

28. Какая замена используется для преобразования уравнения.

(После того как найдено m , необходимо выполнить замену переменных $x = e^{\xi}$, $y = u(\xi)e^{m\xi}$, где ξ - новая независимая переменная, $u(\xi)$ - новая неизвестная функция.)

29. Запишите, применяя правило дифференцирования, как выразятся дифференциалы dx, dy, d^2y через новую переменную ξ и функцию $u(\xi)$.

$$(dx = e^{\xi} d\xi, \quad dy = e^{m\xi} (u' + mu) d\xi, \quad d^2y = e^{m\xi} (u'' + [2m - 1]u' + m[m - 1]u) d\xi^2)$$

30. Как влияет однородность уравнения на вид равенства, полученного после сделанной подстановки.

(После сокращения на показательную функцию, полученное уравнение не будет содержать переменной ξ в явном виде и, следовательно, оно сводится к типу III.)

Практические задания

Пример 1. Заменить в формуле $y = \underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f(x) dx}_{n}$, n - кратное

интегрирование однократным по параметру.

Решение: Пусть необходимо решить задачу Коши с начальными данными: $x_0, y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, y''(x_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$.

Начнем с двукратного интегрирования, т.е. с определения $y^{(n-2)}$, для большей ясности переобозначим переменные в этих интегралах так

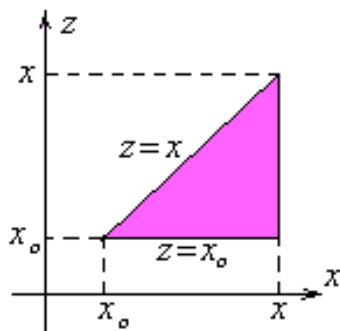


Рис. 1

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f(z) dz.$$

Теперь, рассматривая правую часть как двойной интеграл в плоскости XOY (рис. 1) поменяем порядок интегрирования. Сначала интегрирование выполняется вдоль направления OX от прямой $x=z$ до прямой x , а второй интеграл вдоль направления OZ от прямой $z=x_0$ до $z=x$

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x f(z) dz \int_z^x dx = \int_{x_0}^x (x-z) f(z) dz.$$

Далее понизив порядок уравнения до $n-3$, получим

$$y^{(n-3)} = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x (x-z) f(z) dz.$$

Интеграция выполняется на том же треугольнике плоскости XOZ , поэтому, изменив порядок интегрирования и пределы, находим

$$y^{(n-3)} = \int_{x_0}^x f(z) dz \int_z^x (x-z) dx = \int_{x_0}^x \frac{(x-z)^2}{2} \Big|_z^x f(z) dz = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-z)^2 f(z) dz.$$

Методом математической индукции можно доказать, что решение уравнения

находится по формуле Коши: $y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(z)(x-z)^{n-1} dz.$

Пример 2. Решить уравнение $y''' = \ln x$.

Решение: Общее решение можно записать в виде:

$$y = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x (x-z)^2 \ln z dz + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Выполнив интегрирование, найдем:

$$y = \frac{1}{6} \left(x^3 \ln z - 3x^2 z + \frac{3}{2} x z^2 - \frac{z^3}{3} - \frac{(x-z)^3}{3} \ln z \right) \Big|_{x_0}^x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

После подстановки верхнего и нижнего пределов и приведения подобных, имеем

$$y = \frac{1}{6} \left(x^3 \ln x - \frac{11}{6} x^3 \right) + Ax^2 + Bx + C,$$

где A, B, C - играют роль постоянных интегрирования.

Пример 3. Проинтегрировать уравнение $\frac{x}{y'''} = e^{y''}$.

Решение: Уравнение не разрешимо относительно y''' , поэтому представим данное уравнение в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = te^t, \\ y''' = t, \text{ где } t - \text{параметр.} \end{cases}$$

Используя $dx = (t+1)e^t dt$, $dy'' = t dx$, понизим порядок производной трижды, интегрируя получим

$$y = \int (t+1)e^t dt \int (t+1)e^t dt \int t(t+1)e^t dt = (4t^4 - 2t^3 + 7t + 1)e^{3t} + C_1 t^2 + C_2 t + C_3.$$

Общее решение будет записано в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = te^t, \\ y = (4t^4 - 2t^3 + 7t + 1)e^{3t} + C_1 t^2 + C_2 t + C_3. \end{cases}$$

Пример 4. Свести уравнение $xy''' = y'' - xy''$ к уравнению первого порядка и проинтегрировать.

Решение: Уравнение не содержит функции y, y' , поэтому можно выполнить замену $y'' = z(x)$, тогда $y''' = z'(x)$, и исходное уравнение примет вид $xz' = z - xz$. Разделяя переменные, получим

$$\int \frac{dz}{z} = \int \frac{1-x}{x} dx,$$

$$\ln z = \ln x - x + \ln C_1 \text{ или } z = C_1 x e^{-x}.$$

Возвращаясь к функции y получаем уравнение второго порядка типа **I**

$$y'' = C_1 x e^{-x}.$$

Выполняя понижение порядка дважды, найдем решение уравнения

$$y' = C_1 \int x e^{-x} dx = C_1 (1-x)e^{-x} + C_2,$$

$$y = C_1 \int (1-x)e^{-x} dx + C_2 \int dx = C_1 (x-2)e^{-x} + C_2 x + C_3.$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения $yy'' + (y')^2 = (y')^3$.

Решение: Уравнение не содержит переменной x в явном виде.

Введем новую функцию $p(y) = y'$, тогда по формулам выполним замену второй производной $y'' = p \frac{dp}{dy}$, и исходное уравнение примет вид:

$$yp \frac{dp}{dy} + p^2 = p^3.$$

Очевидно, что $p=0$ является решением, тогда (так как $p(y) = y'$) $y'=0$ и уравнению удовлетворяет тривиальное решение $y=C-\text{const}$. Теперь положим $p \neq 0$. Разделяя переменные и интегрируя каждую часть, имеем

$$\frac{dp}{p^2 - p} = \frac{dy}{y}, \quad C_1 y = \frac{p-1}{p} \text{ или } p = \frac{1}{1 - C_1 y}.$$

Возвращаясь к принятым обозначениям, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - C_1 y},$$

что позволяет найти общее решение уравнения в неявном виде

$$y + C_1 y^2 = x + C_2.$$

Пример 6. Решить уравнение $ay'' = -\sqrt{[(y')^2 + 1]^3}$, $a = \text{const}$.

Решение: Выполнив замену $y' = u(x)$, $y'' = u'(x)$ получим уравнение первого порядка $au' = -\sqrt{[u^2 + 1]^3}$, которое можно проинтегрировать $a \int \frac{du}{\sqrt{[u^2 + 1]^3}} = -\int dx$,

после замены: $u = \text{sh}t$, $du = \text{ch}t dt$, имеем $a \int \frac{\text{ch}t dt}{\text{ch}^3 t} = a \int \frac{dt}{\text{ch}^2 t} = a \text{th}t = C_1 - x$.

Тогда получим $u = \text{sh}t = \frac{\text{th}t}{\sqrt{\text{th}^2 t - 1}} = \frac{C_1 - x}{\sqrt{(C_1 - x)^2 - a^2}}$, следовательно

$y' = \frac{C_1 - x}{\sqrt{(C_1 - x)^2 - a^2}}$ в результате находим искомую функцию

$$y = \int \frac{C_1 - x}{\sqrt{(C_1 - x)^2 - a^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d[(C_1 - x)^2 - a^2]}{\sqrt{(C_1 - x)^2 - a^2}} = \sqrt{(C_1 - x)^2 - a^2} + C_2.$$

Пример 7. Проинтегрировать уравнение $a^2 y^{IV} = y''$, $a = \text{const}$.

Решение: Выполним процедуру пункта V a): $y'' = z(x)$, $y^{IV} = z''(x)$, что приводит к уравнению $a^2 z'' = z$, $2a^2 z'' z' = 2z' z$, выделим полные производные $a^2 [(z')^2]' = [z^2]'$ и проведем понижение порядка $a^2 (z')^2 = z^2 + C_1$ или $az' = \pm \sqrt{z^2 + C_1}$. После разделения переменных выполним интегрирование

$$a \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + C_1}} = \pm \int dx, \quad a \ln(z + \sqrt{z^2 + C_1}) = C_2 \pm x.$$

Вернемся к первоначальной функции

$$a \ln(y'' + \sqrt{(y'')^2 + C_1}) = C_2 \pm x.$$

Сведем уравнение к параметрической системе

$$\begin{cases} y'' = t, \\ C_2 \pm x = a \ln(t + \sqrt{t^2 + C_1}) \end{cases}$$

Из второго равенства найдем dx : $dx = \pm a \frac{1}{\sqrt{t^2 + C_1}} dt$ и подставим в первое

соотношение

$$\frac{dy'}{dx} = t, \quad dy' = \pm a \frac{t}{\sqrt{t^2 + C_1}} dt, \quad y' = \pm a \int \frac{t}{\sqrt{t^2 + C_1}} dt = \pm a \sqrt{t^2 + C_1} + C_3,$$

повторим процедуру еще раз

$$\frac{dy}{dx} = \pm a \sqrt{t^2 + C_1} + C_3, \quad dy = \pm a \frac{1}{\sqrt{t^2 + C_1}} (C_3 \pm a \sqrt{t^2 + C_1}) dt,$$

$$y = \pm aC_3 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + C_1}} + a^2 \int dt = a^2 t \pm aC_3 \ln(t + \sqrt{t^2 + C_1}) + C_4.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} y = a^2 t \pm aC_3 \ln(t + \sqrt{t^2 + C_1}) + C_4, \\ x = C_2 \pm a \ln(t + \sqrt{t^2 + C_1}). \end{cases}$$

Задачи для репродуктивной работы

Самостоятельная работа по образцу предполагает решение задач на воспроизведение знаний, умений. Все данные для нахождения искомого, а также сам способ выполнения задания представлены в явном виде в самом задании или в соответствующем алгоритме решения

Возможные формы отчетности: выполненные задания.

1. Решить уравнения:

а) $y'' = x \sin x$;

б) $y''' \sin^4 x = \sin 2x$;

в) $y''' = (y'')^2$;

г) $y''' = (y')^{-3}$;

д) $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$;

е) $xy'' + y' = 0$;

ж) $y'' = a - by$, $a, b - \text{const}$;

з) $xy'' + x(y')^2 - 3y'y = 0$;

и) $(3x - x^2)y'' + (6 - 4x)y' - 2y = 0$;

к) $2(y')^2 = (y - 1)y''$;

л) $x^2 y y'' = (y - xy')^2$;

м) $2xy'y'' = (y')^2 + 1$;

н) $x^2(1 - \ln x)y'' + xy' - y = 0$;

о) $xy'' + 2y' - xy = 0$.

2. Свести уравнения к уравнениям первого порядка и где возможно проинтегрировать:

а) $xyy'' + x(y')^2 = 3yy'$

б) $xy'' + y' = xy$

в) $x^2 y y'' + 1 = (1 - y)xy'$

г) $y'' + 2y(y')^2 = \left(2x + \frac{1}{x}\right)y'$

д) $y(2xy'' + y') = x(y')^2 + 1$

е) $yy' + 2x^2 y'' = x(y')^2$

ж) $x^2 y'' + y(y')^2 = 0$

з) $yy' + xy'' - x(y')^2 = x$

и) $yy' + xy'' - x(y')^2 = x^3$

к) $x^4[(y')^2 - 2yy''] = 4x^3 yy' + 1$

л) $x^2(2yy'' - (y')^2) = 1 - 2xyy'$

м) $x^2(yy'' - (y')^2) + xy' = (2xy' - 3y)\sqrt{x^3}$

н) $xy'' = y'(e^y - 1)$

о) $yy'' + (y')^2 = x$

п) $x^4 y'' = (y - xy')^3$

р) $yy'' = y'(2\sqrt{yy'} - y')$

3. Решить уравнения при данных начальных условиях:

а) $2y'' = 3y^2$, $x_0 = -2$, $y_0 = 1$, $y'_0 = -1$;

б) $y'' = 3x^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, $y'_0 = 1$;

в) $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 0$;

г) $y''y = x(y')^2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 2$

Занятие 11-12.

Некоторые виды уравнений высших порядков, допускающие понижение порядка

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также

овладение следующими компетенциями
общекультурными

- навыками межличностных отношений; готовностью к работе в команде;
- знаниями этических норм и использованием их в профессиональной деятельности;
- принятием различий и мультикультурности;
- способностью применять знания на практике;
- способностью приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии;
- фундаментальной подготовкой по основам профессиональных знаний и готовностью к использованию их в профессиональной деятельности;
- навыками работы с компьютером;
- способностью к анализу и синтезу;

Пример 1. Определить тип уравнения $y'' = 2y'x^{-1} - 2yx^{-2}$ и решить.

Решение: Уравнение представляет собой однородное уравнение по y, y', y'' и поэтому относится к случаю **VI**. Подстановка $y = e^{\int u dx}$, $y' = e^{\int u dx} u$, $y'' = e^{\int u dx} (u^2 + u')$ и сокращение левой и правой части уравнения на $e^{\int u dx}$ дает равенств

$$u^2 + u' = 2ux^{-1} - 2x^{-2}, \quad (1)$$

представляющее частный случай уравнения *Риккати*

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 + R(x) = 0. \quad (2)$$

Такое уравнение можно привести к линейному уравнению, если известно его какое-либо частное решение. Пусть y_1 - некоторое решение, тогда

$$y_1' + P(x)y_1 + Q(x)y_1^2 + R(x) = 0.$$

Введем новую искомую функцию $z(x)$, такую, что

$$y = y_1 + \frac{1}{z(x)}. \quad (3)$$

Подставляя в (2) и принимая во внимание, что y_1 - решение уравнения, получим для функции $z(x)$ линейное уравнение

$$z' - (P(x) + 2Q(x)y_1)z - Q(x) = 0.$$

В исследуемом равенстве (1) таким частным решением может служить функция $u_1 = 1/x$ (это легко проверить непосредственной подстановкой в равенство (1)). Используя вид подстановки (3) находим уравнение для $z(x)$

$$\frac{1}{z^2} - \frac{z'}{z^2} = 0 \quad \text{или} \quad z' = 1.$$

Интегрирование позволяет найти общий интеграл уравнения

$$z = x + C_1, \quad u = x^{-1} + (x + C_1)^{-1}, \quad \text{а} \quad y = e^{\int (x^{-1} + (x + C_1)^{-1}) dx}$$

или

$$y = C_2 x(x + C_1).$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$x^4 y'' - x^3 (y')^3 + 3x^2 y (y')^2 - (3xy^2 + 2x^3) y' + 2x^2 y + y^3 = 0.$$

Решение: Проверим однородность уравнения относительно всех переменных и дифференциалов, для этого распишем производные через дифференциалы

$$x^4 \frac{d^2 y}{dx^2} - x^3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + 3x^2 y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - (3xy^2 + 2x^3) \frac{dy}{dx} + 2x^2 y + y^3 = 0,$$

и выполним подстановку

$$x \rightarrow tx, y \rightarrow ty, dx \rightarrow tdx, dy \rightarrow tdy, d^2 y \rightarrow td^2 y, \dots, d^n y \rightarrow td^n y,$$

$$t^4 x^4 \frac{td^2 y}{t^2 dx^2} - t^3 x^3 \left(\frac{tdy}{tdx} \right)^3 + 3t^3 x^2 y \left(\frac{tdy}{tdx} \right)^2 - (3t^3 xy^2 + 2t^3 x^3) \frac{tdy}{tdx} + 2t^3 x^2 y + t^3 y^3 = 0.$$

Оказывается, каждый член имеет третий порядок относительно параметра t , следовательно, уравнение однородно относительно всех переменных и дифференциалов. Выполним замену переменных по формулам

$$x = e^\xi, y = u(\xi)e^\xi, \frac{dy}{dx} = u + u', \frac{d^2 y}{dx^2} = (u' + u'') \frac{d\xi}{dx} = (u' + u'')e^{-\xi}:$$

$$(u' + u'')e^{3\xi} - e^{3\xi} (u + u')^3 + 3ue^{3\xi} (u + u')^2 - (3u^2 e^{3\xi} + 2e^{3\xi})(u + u') + 2ue^{3\xi} + e^{3\xi} u^3 = 0,$$

после сокращения на $e^{3\xi} \neq 0$, раскрытия скобок и приведения подобных

$$u'' - (u')^3 - u' = 0.$$

Получаем уравнение второго порядка, не содержащее независимой переменной ξ и функции u , а, следовательно, можно разделить переменные и выполнить интегрирование

$$\frac{du'}{d\xi} = (u')^3 + u', \quad \int \frac{du'}{(u')^3 + u'} = \int d\xi,$$

разложим методом неопределенных коэффициентов подинтегральную функцию на сумму двух слагаемых

$$\frac{1}{(u')^3 + u'} = \frac{A}{u'} + \frac{Bu' + C}{(u')^2 + 1}, \quad A=1, \quad B=-1, \quad C=0,$$

выполним интегрирование

$$\int \left(\frac{1}{u'} - \frac{u'}{(u')^2 + 1} \right) du' = \ln|u'| - \frac{1}{2} \ln|(u')^2 + 1| = \xi + C_1, \quad C_1 - const.$$

Выразим u' : $\frac{u'}{\sqrt{(u')^2 + 1}} = C_1 e^\xi$ и выполним интегрирование, используя

параметрическую замену

$$\begin{cases} u' = q, \\ C_1 e^\xi = \frac{q}{\sqrt{q^2 + 1}}. \end{cases}$$

Выполнив дифференцирование второго равенства системы, найдем $d\xi$

$$C_1 e^\xi d\xi = \left(\frac{q}{\sqrt{q^2 + 1}} \right)' dq, \quad \frac{q}{\sqrt{q^2 + 1}} d\xi = \frac{q^2 + 1 - q^2}{\sqrt{(q^2 + 1)^3}} dq, \quad d\xi = \frac{1}{q(q^2 + 1)} dq,$$

и подставим в первое равенство системы

$$du = qd\xi = \frac{1}{q^2 + 1} dq, \text{ или после интегрирования } u = \int \frac{1}{q^2 + 1} dq = \arctg q + C_2,$$

в результате получим параметрическую запись функции

$$\begin{cases} u = \arctg q + C_2, & C_1, C_2 = \text{const}, \\ e^\xi = \frac{q}{C_1 \sqrt{q^2 + 1}}. \end{cases}$$

Вернемся к переменным $x, y, \ln x = \xi, \frac{y}{x} = u$, и получим решение исходного уравнения записанное в параметрическом виде

$$\begin{cases} y = \frac{q}{C_1 \sqrt{q^2 + 1}} [\arctg q + C_2], \\ x = \frac{q}{C_1 \sqrt{q^2 + 1}}. \end{cases}$$

Пример 3. Решить уравнение

$$x^4 \frac{d^2 y}{dx^2} - (x^3 + 2xy) \frac{dy}{dx} + 4y^2 = 0$$

Решение: Проверим, является ли дифференциальное уравнение однородным в обобщенном смысле

$$k^4 x^4 \frac{k^m d^2 y}{k^2 dx^2} - (k^3 x^3 + 2k^{1+m} xy) \frac{k^m dy}{k dx} + 4k^{2m} y^2 = 0,$$

т.е. должны выполняться равенства

$$4 + m - 2 = 3 + m - 1 = 2m,$$

это возможно если $m = 2$. Следовательно, в уравнении следует сделать

$$\text{замену } x = e^\xi, \quad y = u(\xi)e^{2\xi}, \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{du}{d\xi} + 2u \right) e^\xi, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 u}{d\xi^2} + 3 \frac{du}{d\xi} + 2u:$$

$$e^{4\xi} \left(\frac{d^2 u}{d\xi^2} + 3 \frac{du}{d\xi} + 2u - (1 + 2u) \left(\frac{du}{d\xi} + 2u \right) + 4u^2 \right) = 0.$$

После сокращения на $e^{4\xi} \neq 0$ и элементарных преобразований, запишем

$$u'' + 2u' - 2uu' = 0 \tag{4}$$

в этом уравнении отсутствует независимая переменная ξ , поэтому используя пункт **III**, проведем замену: u - новая независимая переменная, $u' = z(u)$ -

новая неизвестная функция, $u'' = z \frac{dz}{du}$, в результате уравнение (4)

понижается на порядок

$$z \frac{dz}{du} + 2z - 2uz = 0 \quad \text{или} \quad z \left(\frac{dz}{du} + 2 - 2u \right) = 0.$$

Имеем следующие решения:

1. $z = 0$, тогда $u(\xi) = C - \text{const}$, возвращаясь к старым переменным $y = Ce^{2\xi}$, $\xi = \ln x$, тогда окончательно имеем решение $y = Cx^2$.

2. $\frac{dz}{du} + 2 - 2u = 0$ после разделения переменных $\int dz = \int (2u - 2) du$ и

интегрирования получим $z = u^2 - 2u + C_1$ или $\frac{du}{d\xi} = u^2 - 2u + C_1$. Производя

еще раз разделение переменных и интегрирование

$$\int d\xi = \int \frac{du}{u^2 - 2u + C_1} = \int \frac{du}{(u-1)^2 + (C_1 - 1)},$$

$$\xi + C_2 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{C_1 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{u-1}{\sqrt{C_1 - 1}}, & \text{при } C_1 > 1, \\ \frac{1}{u-1}, & \text{при } C_1 = 1, \\ \frac{1}{2\sqrt{1-C_1}} \ln \frac{u-1-\sqrt{1-C_1}}{u-1+\sqrt{1-C_1}}, & \text{при } C_1 < 1 \end{cases}$$

Переход к переменным y и x $x = e^\xi$, $y = u(\xi)e^{2\xi}$ дает следующее решение

$$\ln x + C_2 = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{C_1 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{y - x^2}{x^2 \sqrt{C_1 - 1}}, & \text{при } C_1 > 1, \\ \frac{x^2}{y - x^2}, & \text{при } C_1 = 1, \\ \frac{1}{2\sqrt{1-C_1}} \ln \frac{y - x^2(1 + \sqrt{1-C_1})}{y - x^2(1 - \sqrt{1-C_1})}, & \text{при } C_1 < 1 \end{cases}$$

Пример 4. Проинтегрировать уравнение, выделив полные производные

$$y''y + 2y^2(y')^2 + (y')^2 = \frac{2yy'}{x}.$$

Решение: Легко заметить, что если разделить все члены на выражение $yy' \neq 0$, то каждое слагаемое будет представлять полную производную

$$\frac{y''}{y'} + 2yy' + \frac{y'}{y} = \frac{2}{x} \quad \text{или} \quad (\ln y')' + (y^2)' + (\ln y)' = 2(\ln x)'.$$

В результате интегрирования получим уравнение первого порядка

$$\ln y' + y^2 + \ln y + \ln C_1 = 2 \ln x \quad \text{или} \quad \ln \frac{C_1 yy'}{x^2} = -y^2.$$

Разрешая полученное равенство относительно производной, имеем

$$C_1 yy' = x^2 e^{-y^2}, \quad \frac{C_1}{2} (y^2)' = x^2 e^{-y^2}.$$

Полученное уравнение допускает разделение переменных и интегрирование

$$\frac{C_1}{2} \int e^{y^2} d(y^2) = \int x^2 dx, \quad \frac{C_1}{2} e^{y^2} = \frac{1}{3} x^3 + C_2.$$

Задания для реконструктивной работы

Характерным признаком этих заданий является то, что в самом задании сообщается общая идея решения, а студенту необходимо развить ее в конкретный способ или способы применительно к условиям задачи. Студент соотносит задание с другими, уже известными ему. При этом главное – актуализация

имеющихся знаний, умение отбирать и привлекать необходимые знания для решения задачи

Возможные формы отчетности: конспект выполненных заданий; доклад; реферат; отчет.

4. Из общего интеграла уравнения $yy'' + (y')^2 = 0$ выделите интегральную кривую, проходящую через точку $A(0;1)$ и касающуюся в этой точке прямой $x + y = 1$.
5. Найдите семейство кривых, у в любой точке отношение радиуса кривизны к длине отрезка нормали, заключенного между этой точкой кривой и осью абсцисс равно 2. $K = \lim_{MM' \rightarrow 0} \frac{\phi}{MM'}$
6. Найдите семейство кривых, у которых радиус кривизны равен длине нормали (радиус кривизны $R = \frac{1}{y''} \sqrt{1 + (y')^2}$).
7. Найти кривую, кривизна которой есть заданная функция абсциссы.
Указание. $\left(\frac{1}{R} = K\right)$.
8. Если тело не слишком быстро погружается в воду, то сопротивление воды можно считать пропорциональным скорости. Найдите закон движения тяжелой материальной точки, погружающейся в воду, если начальная скорость равна нулю.
9. Тяжелое тело скользит по наклонной плоскости. Найдите закон движения, если угол наклона плоскости к горизонтальной поверхности равен α , а коэффициент трения k , $v_0 = 0$.
10. Найти плоские кривые, радиус кривизны которых пропорционален кубу длины отрезка нормали.

Задания для эвристической работы

Такая работа предполагает создание нестандартных ситуаций, решение нетиповых задач. В ее основе – поиск, догадка, формулирование и реализация идеи решения. Однако поиск имеет частичный характер, необходимый лишь для выполнения какого-либо фрагмента общего задания

Возможные формы отчетности: создание математической модели, отчет по заданной форме; план; конспект; сценарий; продукт деятельности арт-технологий (рисунок); аналитический отчет по заданной форме

- 11*. Найти форму равновесия однородной нерастяжимой нити под действием ее веса ($Hy'' = S\sqrt{1 + (y')^2}$, где H - горизонтальное натяжение, S - вес единицы длины).
- 12*. На оси OX в положительном направлении движется с постоянной скоростью a точка P . На плоскости XOY движется точка M с постоянной скоростью v так, что вектор скорости всегда направлен в точку P . Найти траекторию точки M .
Указание. Дифференциальное уравнение описывающее это движение - уравнение линии погони:

$$y'' = \frac{a}{v} \frac{y'^2}{y} \sqrt{1 + y'^2}.$$

Ответ.
$$x = \frac{y_0}{2\left(1 + \frac{a}{v}\right)} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+\frac{a}{v}} - \frac{y_0}{2\left(1 - \frac{a}{v}\right)} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\frac{a}{v}} + C.$$

13. Тело падает с высоты h под действием силы тяжести. Сопротивление воздуха пропорционально (коэффициент пропорциональности равен k) скорости падения. Найти закон движения тела.

Задания для исследовательской работы

В ходе ее выполнения проявляется самый высокий уровень самостоятельности и познавательной активности студента. Творческая работа требует глубокого проникновения в сущность изучаемого явления, поиска новых идей при решении проблем. В ходе выполнения творческого задания у студента формируются такие качества, как видение проблемы в знакомой ситуации, умение обнаруживать новые функции объекта, способность на основе нескольких известных найти новый способ решения задачи, гибкость мышления, готовность отказаться от ошибочного решения

Возможные формы отчетности: статья; создание и обработка математической модели, отчет по результатам исследования; проект.

14. Сила, натягивающая пружину, пропорциональна увеличению ее длины и равна 1 кг, когда длина увеличивается на 1 см. К пружине подвешен груз весом 2 кг. Найти период колебательного движения, которое получит груз, если его слегка оттянуть книзу и затем отпустить.
15. Моторная лодка весом 300 кг движется прямолинейно с начальной скоростью 16 м/сек. Сопротивление воды пропорционально скорости движения и равно 10 кг при скорости 1 м/сек. Какое расстояние пройдет лодка, прежде чем ее скорость станет 8 м/сек, и в какое время пройдет оно это расстояние?
16. Снаряд вылетает из орудия со скоростью v_0 под углом 45° к горизонту. Масса снаряда равна m . Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости полета (коэффициент пропорциональности равен k). На какую высоту поднимется и какое расстояние пролетит снаряд по горизонтали за время t ?
17. Тело совершает 90 колебаний в минуту; амплитуда колебаний уменьшилась вдвое в течение 15 сек. Найти дифференциальное уравнение движения.
18. Найти закон прямолинейного движения, если известно, что работа действующей силы пропорциональна времени, протекшему с начала движения.

Литература

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. 3-е изд., Изд. «Лань», 2008. 288 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. 3-е

изд., стер. Изд. «Лань», 2008. 480 с.

3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., Изд. «Лань» 2009. 576 с.

4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 8-е изд., Изд. «Лань», стер., 2009 432 с.

5. Матвеев П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. 1-е издание. Изд. «Лань», 2008. 336 с.

6. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. 4-е изд., Изд. «Лань» 2009. 304 с.

7. Шампайн Л. Ф. Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием matlab. 1-е изд, Изд. «Лань», 2009. 304 с.

Тема 3. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Занятие 13-14. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Базис пространства решений. Метод вариации произвольных постоянных

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение следующими *общекультурными компетенциями*:

- навыками межличностных отношений; готовностью к работе в команде;
- знаниями этических норм и использованием их в профессиональной деятельности;
- способностью применять знания на практике;
- способностью к анализу и синтезу;

профессиональными компетенциями:

1) в сфере научно-исследовательской деятельности:

- умением понять поставленную задачу;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний;

8) в сфере проектной и производственно-технологической деятельности:

- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных и профессиональных позиций;
- пониманием сущности и значения информации в развитии

современного общества; владение основными методами.

Проверка теоретических знаний

1. Дать определение, какое уравнение называется *линейным дифференциальным уравнением n -го порядка*

(*Линейным дифференциальным уравнением n -го порядка* называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = f(x),$$

левая часть которого линейно зависит от $y, y', \dots, y^{(n)}$, а $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x), f(x)$ - непрерывные функции аргумента x .)

2. Если в линейном уравнении функция $f(x) \neq 0$, то, как в этом случае будет называться уравнение.

(Такое уравнение является *неоднородным*)

3. Если в линейном уравнении $f(x) \equiv 0$, то, как называться уравнение в этом случае.

(Уравнение является *однородным*)

4. Какое уравнение называется *приведенным*.

(Уравнение называется *приведенным*, если коэффициент, стоящий при старшей производной $y^{(n)}$, равен единице.)

5. Если уравнение не является приведенным

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = f(x),$$

то как его можно преобразовать к нужному виду.

(При условии, что в рассматриваемой области $p_0(x) \neq 0$, поделим все слагаемые уравнения на $p_0(x)$.)

В дальнейшем будем говорить только о приведенных уравнениях.

6. Дайте определение *линейного дифференциального оператора*.

(Оператор вида

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x)$$

называется *линейным дифференциальным оператором*.)

7. Какими свойствами обладает линейный оператор.

(Линейный оператор обладает следующими свойствами:

1. $L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)].$

2. $L[\lambda y_1(x)] = \lambda L[y_1(x)]$, где λ - произвольная постоянная.)

8. Как, используя символику линейного оператора, записать линейное дифференциальное уравнение.

(Линейное уравнение примет вид $L[y(x)] = f(x)$.)

9. Какие и сколько условий необходимо задать, чтобы была поставлена *задача Коши* для линейного уравнения.

(Для уравнения n -го порядка необходимо задать n условий вида:

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y_{10}, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_{(n-1)0}.) \quad (1)$$

10. В чем заключается решение *задачи Коши*

(*Задача Коши* ставится следующим образом: требуется найти решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям (1).)

11. Сформулируйте теорему существования и единственности для однородного линейного дифференциального уравнения.

(Теорема. Если в однородном уравнении

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = 0,$$

коэффициенты $p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ - непрерывные функции в некотором конечном замкнутом промежутке J и x_0 - любое значение из этого промежутка, то существует одно и только одно решение, удовлетворяющее начальным условиям (1), где $y_0, y_{10}, \dots, y_{(n-1)0}$ - любые заданные значения.)

12. Сформулируйте понятие базиса пространства векторов, даваемое в курсе геометрии.

(Под базисом пространства векторов понимают любую систему линейно независимых векторов такую, что любой вектор этого пространства можно представить в виде их линейной комбинации.)

13. Перефразируйте понятие базиса для векторов в понятие базиса для системы решений уравнения.

(Под базисом пространства решений уравнения будем понимать любую систему линейно независимых решений этого уравнения такую, что любое частное решение уравнения можно представить в виде их линейной комбинации.)

14. Как определяется размерность пространства.

(Число линейно независимых векторов в базисе определяет размерность пространства.)

15. В каком случае два пространства имеют одну и ту же размерность.

(Два пространства имеют равные размерности, если существует взаимно однозначное соответствие между элементами этих пространств, т.е. пространства изоморфны.)

16. Сформулируйте теорему о размерности пространства решений для линейного однородного уравнения.

(Теорема. Если коэффициенты приведенного однородного линейного дифференциального уравнения $L[y] = 0$ непрерывны на промежутке I , где L - линейный дифференциальный оператор порядка n , то размерность пространства решений этого уравнения равна n .)

17. Какой принцип лежит в основе доказательства этой теоремы.

(Доказательство основано на изоморфизме между пространством n -мерных кортежей R^n и пространством всех решений однородного уравнения S_L .)

18. Если известна система n линейно независимых решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ уравнения $L[y(x)] = 0$, то, как можно записать все решения этого уравнения.

(Все решения можно записать в виде: $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$)

19. Какая система решений называется фундаментальной.

(Система n линейно независимых решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ уравнения называется фундаментальной.)

20. Если известно некоторое частное решение однородного дифференциального уравнения - $y_1(x)$, то с помощью какой подстановки можно понизить порядок уравнения.

(Сделаем замену переменных $y = y_1(x)z$, где z - новая неизвестная функция.)

21. После использования такой подстановки, какой вид примет однородное уравнение.

(Тогда однородное уравнение примет вид:

$$\sum_{i=0}^n C_i^n y_1^{(i)} z^{(n-i)} + p_1(x) \sum_{i=1}^{n-1} C_i^{n-1} y_1^{(i)} z^{(n-1-i)} + \dots + p_n(x) y_1 z = 0,$$

где C_i^n - число сочетаний из n элементов по i . Группируя слагаемые, содержащие $z, z', z'', \dots, z^{(n)}$, получим:

$$y_1(x) z^{(n)} + b_1(x) z^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x) z' + (y_1^{(n)}(x) + p_1(x) y_1^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y_1) z = 0, \quad (2)$$

где $b_i(x)$ - функции, полученные в результате приведения подобных членов.)

22. Какое преимущество имеет полученное уравнение (2).

(Последнее слагаемое (2) равно нулю, так как выражение в скобках есть ни что иное, как само однородное уравнение, в которое подставлена функция $y_1(x)$ - решение однородного уравнения. В результате уравнение (2) примет вид

$$y_1(x) z^{(n)} + b_1(x) z^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x) z' = 0.) \quad (3)$$

23. Можно ли понизить порядок уравнения (3).

(Так как уравнение не содержит функции z в явном виде, то уравнение можно понизить. Обозначая $z' = u$, получим линейное однородное уравнение $(n-1)$ -го порядка для функции u :

$$y_1(x) u^{(n-1)} + b_1(x) u^{(n-2)} + \dots + b_{n-1}(x) u = 0.)$$

24. Нарушается ли линейность уравнения после проведенной операции.

(После проведенных преобразований линейность уравнения сохраняется.)

25. Какие еще имеются возможности понизить порядок линейного уравнения.

(Так как линейное однородное уравнение принадлежит классу уравнений высших порядков однородных относительно функций $u^{(n-1)}, u^{(n-2)}, \dots, u', u$, то такое уравнение допускает понижение на один порядок.)

26. Какую подстановку следует использовать, чтобы понизить порядок однородного уравнения.

(При введении подстановки $u(x) = e^{\int v(x) dx}$, $v(x)$ - новая неизвестная функция, порядок однородного уравнения понижается)

27. Какая имеется связь между решениями линейного неоднородного уравнения $L[y(x)] = f(x)$ с соответствующим однородным уравнением $L[y(x)] = 0$.

(Теорема. Общее решение неоднородного уравнения $L[y(x)] = f(x)$ равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения $L[y(x)] = 0$ и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.)

28. Зная n линейно независимых решений однородного уравнения $L[y(x)] = 0$, как можно найти частное решение неоднородного уравнения $L[y(x)] = f(x)$.

(Способ нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения по его фундаментальной системе решений называется методом вариации произвольных постоянных Лагранжа.)

(Пусть $y_1, y_2, \dots, y_n$ - некоторые решения однородного уравнения, его общее решение выражается по формуле $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$. Будем искать частное решение неоднородного уравнения в том же виде, только считая, C_i не постоянными, а некоторыми искомыми функциями от x $C_i = \varphi_i(x)$:

$$u = \varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2 + \dots + \varphi_n(x)y_n.) \quad (4)$$

30. Как можно найти эти неизвестные функции.

(Частное решение содержит n неизвестных функций, для их определения необходимо иметь систему из n уравнений. Такую систему можно легко получить, подставляя (4) в уравнение $L[y(x)] = f(x)$.)

31. Какое преимущество мы получаем при такой подстановке.

(Мы получаем *одно* равенство, содержащее n неизвестных функций, следовательно можно наложить $n - 1$ дополнительное условие, так чтобы полученное уравнение упростилось.)

32. Какие дополнительные условия следует наложить.

(Наложим следующие $n - 1$ дополнительное условие

$$\phi_1'(x)y_1 + \phi_2'(x)y_2 + \dots + \phi_n'(x)y_n = 0,$$

$$\varphi_1'(x)y_1' + \varphi_2'(x)y_2' + \dots + \varphi_n'(x)y_n' = 0,$$

.....

$$\varphi_1'(x)y_1^{(n-2)} + \varphi_2'(x)y_2^{(n-2)} + \dots + \varphi_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0.)$$

33. В результате таких дополнительных связей, к какому виду сведется само приведенное уравнение

$$(\phi_1'(x)y_1^{(n-1)} + \phi_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + \phi_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x).)$$

34. В результате объединения дополнительных условий и преобразованного уравнения, сколько уравнений получилось, и какой вид имеет система.

(Получено n уравнений, которые имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1'(x)y_1 + \varphi_2'(x)y_2 + \dots + \varphi_n'(x)y_n = 0, \\ \varphi_1'(x)y'_1 + \varphi_2'(x)y'_2 + \dots + \varphi_n'(x)y'_n = 0, \\ \\ \varphi_1'(x)y_1^{(n-2)} + \varphi_2'(x)y_2^{(n-2)} + \dots + \varphi_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ \varphi_1'(x)y_1^{(n-1)} + \varphi_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots + \varphi_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{array} \right. \quad (5)$$

35. К какому виду можно отнести полученную систему.

(Система неоднородных линейных алгебраических уравнений относительно $\varphi'_i(x)$.)

36. В каком случае такая система имеет единственное решение.

(Если определитель матрицы, составленный из коэффициентов системы, отличен от нуля.)

37. Что представляет собой определитель коэффициентов для системы (5).

(Это определитель Вронского, составленный для функций $y_1, y_2, \dots, y_n$.)

39. Какое значение принимает этот определитель Вронского.

(Всегда отличен от нуля, так как решения $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно независимые.)

40. Какая имеется связь между решениями линейного неоднородного уравнения $L[y(x)] = f(x)$ с соответствующим однородным уравнением $L[y(x)] = 0$.

(Теорема. Разность любых двух решений неоднородного уравнения $L[y(x)] = f(x)$ есть решение однородного уравнения $L[y(x)] = 0$.)

Практические задания

Пример 1. Зная частное решение $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ уравнения $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, найти общее решение.

Решение: Воспользуемся подстановкой $y = \frac{\sin x}{x}z$. Найдя производные, подставим в условие, тогда получим

$$\frac{\sin x}{x}z'' + \frac{2\cos x}{x}z' + \left[\left(\frac{\sin x}{x} \right)'' + \frac{2}{x} \left(\frac{\sin x}{x} \right)' + \frac{\sin x}{x} \right] z = 0$$

или

$$\frac{\sin x}{x}z'' + \frac{2\cos x}{x}z' = 0.$$

Пусть $z' = u$, уравнение, связывающее переменную u , является уравнением с разделяющимися переменными, т.е.

$$\frac{du}{u} = -\frac{2\cos x}{\sin x}dx.$$

Интегрированием находим функцию $u = \frac{1}{\sin^2 x}$, позволяющую найти

$$z = -\operatorname{ctgx}.$$

Второе частное решение будет иметь вид $y_2 = \frac{-\cos x}{x}$. Общее решение уравнения примет вид

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}.$$

Пример 2. Найти методом вариации постоянных общее решение уравнения

$$y''' - \frac{y''}{x} + y' - \frac{y}{x} = 2x^2,$$

если известна фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего данному уравнению: $y = x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$.

Решение: Функция в правой части непрерывна на всей числовой оси. Общее решение исследуемого уравнения состоит из решения однородного уравнения, которое имеет вид: $C_1x + C_2 \sin x + C_3 \cos x$, и частного решения, которое будем искать в виде: $u = \varphi_1(x)x + \varphi_2(x)\sin x + \varphi_3(x)\cos x$, где $\varphi_1(x)$,

$\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ - неизвестные функции. Для определения этих функций используем систему (5), составив ее, имеем

$$\begin{cases} \varphi_1'(x)x + \varphi_2'(x)\sin x + \varphi_3'(x)\cos x = 0, \\ \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x)\cos x - \varphi_3'(x)\sin x = 0, \\ -\varphi_2'(x)\sin x - \varphi_3'(x)\cos x = 2x^2. \end{cases}$$

Решая систему относительно неизвестных, получим:

$$\varphi_1'(x) = 2x, \quad \varphi_2'(x) = -2x^2 \sin x - 2x \cos x, \quad \varphi_3'(x) = 2x \sin x - 2x^2 \cos x.$$

Проинтегрировав, найдем:

$$\varphi_1(x) = x^2, \quad \varphi_2(x) = 2x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x,$$

$$\varphi_3(x) = -2x^2 \sin x - 6x \cos x + 6 \sin x.$$

Значит частное решение данного уравнения после приведения подобных примет вид:

$$u = x^3 - 6x,$$

а общее решение можно записать следующим образом

$$y = C_1 x + C_2 \sin x + C_3 \cos x + x^3 - 6x.$$

Задачи для репродуктивной работы

Самостоятельная работа по образцу предполагает решение задач на воспроизведение знаний, умений. Все данные для нахождения искомого, а также сам способ выполнения задания представлены в явном виде в самом задании или в соответствующем алгоритме решения (демонстрация решенных заданий)

Возможные формы отчетности: выполненные задания.

- Дано линейное однородное уравнение $y''' - y''x \sin x + y' \sin x = 0$. Какие из функций являются решениями этого уравнения
а) e^x ; б) C – постоянная; в) x^2 .
- Дано линейное однородное уравнение $y''' - y'' = 0$. Какие из функций $y_1 = e^x$, $y_2 = 3e^{2x}$, $y_3 = \sin 4x$, $y_4 = e^{-2x}$, $y_5 = 7x - 10$ принадлежат пространству решений этого уравнения.
- Решить однородное дифференциальное уравнение, зная частные решения:
а) $y'' - y' \operatorname{ctg} 2x + 2y = 0$, если $y_1 = \cos 2x$;
б) $y'' - \frac{2}{\sin^2 x} y = 0$, если $y_1 = \operatorname{ctg} x$.

Задания для реконструктивной работы

Характерным признаком этих заданий является то, что в самом задании сообщается общая идея решения, а студенту необходимо развить ее в конкретный способ или способы применительно к условиям задачи. Студент соотносит задание с другими, уже известными ему. При этом главное – актуализация имеющихся знаний, умение отбирать и привлекать необходимые знания для решения задачи

Возможные формы отчетности: конспект выполненных заданий; доклад; реферат; отчет.

4. Решить однородное дифференциальное уравнение, зная частные решения:

а) $y''' - \frac{y''}{x} + y' - \frac{y}{x} = 0$, если $y_1 = x$, $y_2 = \sin x$;

б) $y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0$, если $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$;

в) $(x-1)y''' - xy'' + y' = 0$, если $y_1 = e^x$, $y_2 = C - \text{const}$;

г) $y''' - y''x \sin x + y' \sin x = 0$, если $y_1 = x^2$, $y_2 = C - \text{const}$;

д) $(x^2 - 2x + 3)y''' - (x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y = 0$, зная его частные решения:
 $y_1 = e^x$, $y_2 = x$;

е) $x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0$, зная его частные решения $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = x$;

ж) $xy''' - y'' - xy' + y = 0$, $y_1 = e^x$, $y_2 = x$.

5. Решить неоднородное уравнение

$$(2x - x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2,$$

если оно имеет частные решения $y_1 = 1$, $y_2 = x$. Найти общее решение.

6. Решить уравнение

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3,$$

зная частное решение $y_1 = x$, соответствующего однородного уравнения.

7. Решить уравнение

$$xy'' - y' = x^2.$$

8. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \frac{xy'}{1-x} - \frac{y}{1-x} = x-1,$$

зная, что одно частное решение однородного уравнения есть $y = e^x$.

9. Найти общее решение

$$y'' + \frac{1}{x^2 \ln x} y = e^x \left(\frac{2}{x} + \ln x \right),$$

если частное решение однородного уравнения есть $y = \ln x$.

Задания для эвристической работы

Такая работа предполагает создание нестандартных ситуаций, решение нетиповых задач. В ее основе – поиск, догадка, формулирование и реализация идеи решения. Однако поиск имеет частичный характер, необходимый лишь для выполнения какого-либо фрагмента общего задания

Возможные формы отчетности: создание математической модели, отчет по заданной форме; план; конспект; сценарий; продукт деятельности арт-технологий (рисунок); аналитический отчет по заданной форме

10. Найти общее решение уравнений:

а) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = x$, зная частные решения $y_1 = x$, $y_2 = x^2$;

б) $xy''' - y'' + xy' - y = 1$, частное решение $y_1 = x$;

в) $(1-x^2)y''' - xy'' + y' = 3x$, частное решение $y = x^2$;

2) $y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = a, a - \text{const}$, частные решения $y_1 = x^3, y_2 = x^2$.

11. Проинтегрировать уравнение, допускающее понижение порядка

$$x^2 y''' + xy'' - y' = 3x^2.$$

12*. Какая подстановка приводит сразу к уравнению $(n-2)$ -го порядка, если известны два частных решения y_1 и y_2 линейного уравнения n -го порядка.

13*. Найти общее решение уравнения Стокса $x^2(x-1)^2 y'' + \beta y = 0$, $\beta - \text{const}$, если известно, что оно имеет частное решение вида $y = x^m(x-1)^n$, где $m, n - \text{const}$.

Задания для исследовательской (творческой) работы

В ходе ее выполнения проявляется самый высокий уровень самостоятельности и познавательной активности студента. Творческая работа требует глубокого проникновения в сущность изучаемого явления, поиска новых идей при решении проблем. В ходе выполнения творческого задания у студента формируются такие качества, как видение проблемы в знакомой ситуации, умение обнаруживать новые функции объекта, способность на основе нескольких известных найти новый способ решения задачи, гибкость мышления, готовность отказаться от ошибочного решения

Возможные формы отчетности: статья; создание и обработка математической модели, отчет по результатам исследования; проект.

14*. Найти общее решение уравнения $(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$, если известно, что оно имеет два линейно независимых решения в виде полиномов

Указание: если y_1 и y_2 - решение, то подстановка $y = y_1 \int z dx$, дает линейное уравнение второго порядка, имеющее решение $z = (y_2/y_1)'$.

15*. Уравнение Чебышева $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, n > 0, n \in \mathbb{N}$ имеет частное решение в виде полинома n -ой степени $T_n = \cos n \arccos x$. Найти общее решение при $n = 1$.

16*. Уравнение Лягера $xy'' + (1-x)y' + ny = 0, n > 0, n \in \mathbb{N}$ имеет частное решение в виде полинома n -ой степени $L_n = e^x (x^n e^{-x})^{(n)}$. Найти общее решение при $n = 1$.

17*. Найти общее решение уравнения

$$(x^2 + 2)y''' - 2xy'' + (x^2 + 2)y' - 2xy = x^4 + 12.$$

Указание: уравнения $y''' + y' = 0$, $y'' + y = 0$ имеют два общих решения.

18*. Оценить сверху и снизу количество нулей любого (не нулевого) решения уравнения $y'' + xy = 0$ на отрезке $-25 \leq x \leq 25$.

19*. Пусть $|f(x)| \leq \frac{C}{x^{1+\alpha}}$, где $\alpha > 0$. Доказать, что уравнение $y'' + (1+f(x))y = 0$ имеет два таких решения, что при $x \rightarrow +\infty$

$$y_1(x) = \cos x + \Theta\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad y_2(x) = \sin x + \Theta\left(\frac{1}{x^\alpha}\right).$$

Указание. Перенести $f(x)$ в правую часть, принять за новую функцию $F(x)$ и применить метод вариации постоянных. В полученном интеграле один из пределов положить равным ∞ . Применить метод последовательных приближений, взяв за нулевое приближение $y = \cos x$ (или $y = \sin x$).

20*. Пусть $|f(x)| \leq \frac{C}{x^{1+\alpha}}$. Доказать, что уравнение $y'' - (1 - f(x))y = 0$ имеет

два таких решения, что при $x \rightarrow +\infty$

$$y_1(x) = e^x \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right), \quad y_2(x) = e^{-x} \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right).$$

Литература

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. 3-е изд., Изд. «Лань», 2008. 288 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. 3-е изд., стер. Изд. «Лань», 2008. 480 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., Изд. «Лань» 2009. 576 с.
4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 8-е изд., Изд. «Лань», стер., 2009 432 с.
5. Матвеев П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. 1-е издание. Изд. «Лань», 2008. 336 с.
6. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. 4-е изд., Изд. «Лань» 2009. 304 с.
7. Шампайн Л. Ф. Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием matlab. 1-е изд., Изд. «Лань», 2009. 304 с.

Занятие 15-16. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение следующими *общекультурными компетенциями*:

- навыками межличностных отношений; готовностью к работе в команде;
- знаниями этических норм и использованием их в профессиональной деятельности;
- способностью применять знания на практике;
- способностью к анализу и синтезу;

профессиональными компетенциями:

1) в сфере научно-исследовательской деятельности:

- умением понять поставленную задачу;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и

прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;

- умением публично представить собственные и известные научные результаты;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний;

9) в сфере проектной и производственно-технологической деятельности:

- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных и профессиональных позиций;
- пониманием сущности и значения информации в развитии современного общества; владение основными методами.

Проверка теоретических знаний

1. Дать определение оператора.

(Оператором называется всякий закон, согласно которому любому элементу $f(x)$ из множества всех непрерывных функций сопоставляется определенный элемент $\varphi(x)$ из того же множества.)

2. Приведите примеры операторов.

(Любая функция является оператором, так как число переходит в число. Геометрические преобразования плоскости, переводящие точки плоскости в точки этой же плоскости: симметрия,

поворот, гомотетия. Примером оператора может служить оператор дифференцирования $D = \frac{d}{dx}$

, который каждой функции $f(x)$, дифференцируемой на промежутке (α, β) , ставит в соответствие ее производную: $D[f] = f'(x)$.)

3. Дать определение линейного дифференциального оператора.

(Операторы вида

$$L = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n,$$

где $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ - некоторые числа, называются линейными дифференциальными многочленами.)

4. Дать определение характеристического многочлена.

(Многочлен построенный из дифференциального оператора $L = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \dots + a_n$

формальной заменой операции дифференцирования $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$ на соответствующую степень параметра r^k

$$p(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n,$$

в котором переменная r принимает числовые значения, называется характеристическим многочленом).

5. Сформулируйте теорему о разложении многочлена на множители.

(Теорема. Любой многочлен $p(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n$ можно представить в виде произведения

$$p(r) = a_0 (r - r_1)^{k_1} (r - r_2)^{k_2} \dots (r - r_m)^{k_m},$$

где $r_1, \dots, r_m$ - корни этого многочлена, среди которых могут быть и комплексные, а $k_1, \dots, k_m$ - кратность этих корней, где $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ - совпадает со степенью многочлена.)

6. Можно ли разложить дифференциальный оператор на множители.

(Дифференциальный многочлен также можно разложить на множители используя его связь с характеристическим многочленом)

$$L = a_0 (D - r_1)^{k_1} (D - r_2)^{k_2} \dots (D - r_m)^{k_m},$$

где $r_1, \dots, r_m$ - корни характеристического многочлена, а $k_1, \dots, k_m$ - кратность этих корней, причем $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ - совпадает с порядком линейного оператора.)

7. Дать определение квазимногочлена.

(Функция вида $\sum_i P_i(x) e^{\alpha_i x}$, где α_i - постоянные (могут быть и комплексными), а $P_i(x)$ -

многочлен степени i , называется квазимногочленом.)

8. Сформулируйте теорему о действии оператора $(D - r)^k$ на квазимногочлен.

(Теорема 1. Если $P_s(x) e^{\alpha x}$ - квазимногочлен степени s и $\alpha \neq r$, то $(D - r)^k [P_s(x) e^{\alpha x}] = Q_s(x) e^{\alpha x}$, где $Q_s(x)$ тоже многочлен степени s .

Теорема 2. Если $P_s(x) e^{rx}$ - квазимногочлен степени s , то

$$(D - r)^k [P_s(x) e^{rx}] = \begin{cases} Q_{s-k}(x) e^{rx}, & k \leq s, \\ 0, & k > s. \end{cases},$$

где $Q_{s-k}(x)$ - многочлен степени $s-k$.)

9. Каким методом доказываются эти теоремы.

(Методом математической индукции легко доказываются эти теоремы.)

10. Запишите результат действия линейного оператора на показательную функцию e^{rx} .

(Применение оператора L к функции e^{rx} дает

$$L[e^{rx}] = (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_n) e^{rx} = p(r) e^{rx}.)$$

11. В каком случае показательная функция e^{rx} является решением уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0.$$

(Показательная функция e^{rx} является решением уравнения, когда число r есть корень характеристического уравнения.)

12. Сформулируйте теорему о построении решения линейного дифференциального уравнения в случае, когда характеристический многочлен не имеет кратных корней.

(Теорема. Если характеристический многочлен линейного дифференциального уравнения не имеет кратных корней и $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ - его корни, то

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения. При любых постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$

- функция $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}$ - является общим решением этого уравнения).

13. Если характеристическое уравнение с действительными коэффициентами имеет комплексные корни, то какие они между собой.

(Так как мы рассматриваем уравнения с действительными коэффициентами, то такие корни комплексно сопряжены.)

14. Как запишутся функции соответствующие комплексно сопряженным корням $\mu + i\eta$, $\mu - i\eta$.

(Решения соответственно будут иметь вид $e^{(\mu + i\eta)x}$, $e^{(\mu - i\eta)x}$.)

15. Как преобразовать решение к виду, не содержащему комплексных чисел.

(По формуле Эйлера сумму решений преобразуем к выражению

$$C_k e^{(\mu+i\eta)x} + C_m e^{(\mu-i\eta)x} = e^{\mu x} ((C_k + C_m) \cos \eta x + (C_k - C_m) i \sin \eta x).$$

В силу произвольности постоянных C_k, C_m , решение можно переписать в виде $e^{\mu x} (E_1 \cos \eta x + E_2 \sin \eta x)$, где введены новые постоянные $C_k + C_m = E_1$, $(C_k - C_m)i = E_2$.)

16. Сформулируйте теорему о фундаментальной системе решений линейного дифференциального уравнения, когда его характеристическое уравнение имеет кратные корни.

(Теорема. Если r - корень характеристического многочлена имеет кратность k , тогда квазимногочлены вида: $y_1 = e^{rx}$, $y_2 = x e^{rx}$, ..., $y_k = x^{k-1} e^{rx}$ являются решениями однородного дифференциального уравнения.)

17. На основании какого утверждения можно говорить о том, что квазимногочлен может быть решением однородного дифференциального уравнения.

(При действии оператора $(D-r)^k$ на квазимногочлен $P_s(x)e^{rx}$ степени s и $k > s$, получаем $(D-r)^k [P_s(x)e^{rx}] = 0$.)

18. Сформулируйте общую теорему о фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения.

(Теорема. Пусть линейное однородное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами имеет $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ - множество всех попарно различных корней соответствующего характеристического многочлена, причем k_j - кратность j -го корня λ_j , $j = 1, \dots, m$, где $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, тогда система функций вида:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = x e^{\lambda_1 x}, \dots, y_{k_1} = x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x},$$

$$y_{k_1+1} = e^{\lambda_2 x}, y_{k_1+2} = x e^{\lambda_2 x}, \dots, y_{k_1+k_2} = x^{k_2-1} e^{\lambda_2 x},$$

.....

$$y_{k_1+k_2+\dots+k_{m-1}+1} = e^{\lambda_m x}, y_{k_1+k_2+\dots+k_{m-1}+2} = x e^{\lambda_m x}, \dots, y_n = x^{k_m-1} e^{\lambda_m x}$$

представляет собой фундаментальную систему решений, так, что при любых постоянных

$C_1, C_2, \dots, C_n$ функция $y = \sum_{i=1}^n C_i y_i$ является общим решением этого уравнения.)

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 8y''' + 16y'' + 16y' = 0.$$

Решение: Соответствующее характеристическое уравнение примет вид

$$r^5 + 4r^4 + 8r^3 + 16r^2 + 16r = 0,$$

оно имеет корни $r_1 = 0, r_2 = r_3 = -2, r_4 = 2i, r_5 = -2i$. Общий интеграл однородного уравнения определяется суммой

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + C_3 x e^{-2x} + C_4 \sin 2x + C_5 \cos 2x.$$

Задачи для репродуктивной работы

Самостоятельная работа по образцу предполагает решение задач на воспроизведение знаний, умений. Все данные для нахождения искомого, а также сам способ выполнения задания представлены в явном виде в самом задании или в соответствующем алгоритме решения (демонстрация решенных заданий)

Возможные формы отчетности: выполненные задания.

1. Решить следующие однородные линейные дифференциальные уравнения:

- | | |
|------------------------------------|--|
| а) $y''' - 13y'' + 12y' = 0$; | б) $y^{VII} + 3y^{VI} + 3y^V + y^{IV} = 0$; |
| в) $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$; | г) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$; |
| д) $y^{IV} - 6y'' + 9y = 0$; | е) $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$; |
| ж) $y''' - 8y = 0$; | з) $y^{IV} + 16y = 0$; |
| и) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$; | к) $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$; |
| л) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$; | м) $a^3 y''' - y = 0$; |
| н) $y^{IV} - 16y = 0$; | о) $y^{IV} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$. |

Задания для реконструктивной работы

Характерным признаком этих заданий является то, что в самом задании сообщается общая идея решения, а студенту необходимо развить ее в конкретный способ или способы применительно к условиям задачи. Студент соотносит задание с другими, уже известными ему. При этом главное – актуализация имеющихся знаний, умение отбирать и привлекать необходимые знания для решения задачи

Возможные формы отчетности: конспект выполненных заданий; доклад; реферат; отчет.

2. Показать, что уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x),$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ – постоянные, сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами заменой независимого переменного $x = e^t$ при $x > 0$ и $x = -e^t$ при $x < 0$.

3. Используя результат задания (2), решить следующие уравнения Эйлера:

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------|
| а) $x^2 y'' - 2y = 0$; | б) $x^2 y'' + xy' + y = 0$; |
| в) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$; | г) $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$; |
| д) $x^2 y'' + 2xy' - (n+1)ny = 0$; | е) $x^3 y''' - 3xy' + 3y = 0$; |

Задания для эвристической работы

Такая работа предполагает создание нестандартных ситуаций, решение нетиповых задач. В ее основе – поиск, догадка, формулирование и реализация идеи решения. Однако поиск имеет частичный характер, необходимый лишь для выполнения какого-либо фрагмента общего задания

Возможные формы отчетности: создание математической модели, отчет по заданной форме; план; конспект; сценарий; продукт деятельности арт-технологий (рисунок); аналитический отчет по заданной форме

4. Делая замену переменной $x = \cos \varphi$, найти фундаментальную систему решений уравнения

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0.$$

5. Составить линейные однородные дифференциальные уравнения, зная их характеристическое уравнение:

а) $9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$;

в) $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$;

д) $2\lambda^2 - 3\lambda - 5 = 0$;

б) $\lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$;

е) $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$;

е) $\lambda^3 = 0$.

Задания для исследовательской (творческой) работы

В ходе ее выполнения проявляется самый высокий уровень самостоятельности и познавательной активности студента. Творческая работа требует глубокого проникновения в сущность изучаемого явления, поиска новых идей при решении проблем. В ходе выполнения творческого задания у студента формируется такие качества, как видение проблемы в знакомой ситуации, умение обнаруживать новые функции объекта, способность на основе нескольких известных найти новый способ решения задачи, гибкость мышления, готовность отказаться от ошибочного решения

Возможные формы отчетности: статья; создание и обработка математической модели, отчет по результатам исследования; проект.

6*. Доказать, что уравнение Бесселя $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$, при $n = \frac{1}{2}$ интегрируется в элементарных функциях.

Указание: сделать замену искомой функции $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$.

7*. При каких значениях p и q все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$

а) стремятся к нулю при всех $x \geq 0$;

б) ограничены при всех $x \geq 0$;

в) периодические функции от x .

8. При каких значениях k все решения уравнения $y'' + 2y' + k^2 y = 0$ представляют собой затухающие гармонические колебания.

9. При каком значении h все ненулевые решения уравнения $y'' + 2hy' + y = 0$ представляют собой затухающие гармонические колебания.

Литература

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. 3-е изд., Изд. «Лань», 2008. 288 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости 3-е изд., стер. Изд. «Лань», 2008. 480 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., Изд. «Лань» стер 576 с.
4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям 8-е изд., Изд. «Лань», стер., 2009 432 с.
5. Матвеев П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений 1-е издание. Изд. «Лань», 2008. 336 с.
6. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения 4-е изд., Изд. «Лань» 2009. 304 с.
7. Шампайн Л. Ф. Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием matlab. 1-е изд, Изд.

«Лань», 2009. 304 с.

Занятие 17-18. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение следующими *общекультурными компетенциями*:

- навыками межличностных отношений; готовностью к работе в команде;
- знаниями этических норм и использованием их в профессиональной деятельности;
- способностью применять знания на практике;
- способностью к анализу и синтезу;

профессиональными компетенциями:

1) в сфере научно-исследовательской деятельности:

- умением понять поставленную задачу;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний;

10) в сфере проектной и производственно-технологической деятельности:

- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных и профессиональных позиций;
- пониманием сущности и значения информации в развитии современного общества; владение основными методами.

Проверка теоретических знаний

1. Как запишется соответствующее линейное однородное уравнение для линейного неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$, где $f(x)$ - заданная функция.

(Однородное уравнение имеет вид: $L[y] = 0$.)

2. Как связаны решения $L[y] = f(x)$ и $L[y] = 0$.

(Решение уравнения $L[y] = f(x)$ определяется как сумма общего интеграла соответствующего однородного уравнения $L[y] = 0$ и некоторого частного решения.)

3. Какой универсальный метод построения частного решения на основании фундаментальной системы решений однородного уравнения вы знаете.

(Частное решение уравнения вида $L[y] = f(x)$ можно найти, используя метод вариаций произвольных постоянных.)

4. Дайте понятие квазимногочлена.

(Функция вида $\sum_i P_i(x)e^{\alpha_i x}$, где α_i - постоянные (могут быть и комплексными), а $P_i(x)$ - многочлен степени i , называется *квазимногочленом*.)

5. Запишите формулы Эйлера, связывающие показательную и тригонометрические функции.

$$(e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x, \quad \frac{1}{2}(e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}) = \cos \alpha x, \quad \frac{1}{2i}(e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}) = \sin \alpha x)$$

6. Приведите примеры квазимногочленов.

(Квазимногочлены: любая постоянная, $ax^k + bx^{k-1} + \dots + c$, $\sin \beta x$, $\cos \beta x$, $e^{\alpha x}$, $(ax^k + bx^{k-1} + \dots + c)e^{\alpha x}$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$, $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $(ax^k + bx^{k-1} + \dots + c) \sin \beta x$, $(ax^k + bx^{k-1} + \dots + c) \cos \beta x$, $(ax^k + bx^{k-1} + \dots + c)e^{\alpha x} \sin \beta x$, $(ax^k + bx^{k-1} + \dots + c)e^{\alpha x} \cos \beta x$ и их любые линейные комбинации.)

7. Какой вид имеют общие решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

(Всякое решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами представляет квазимногочлен.)

8. Верно ли обратное.

(Можно доказать и, обратное, каждый квазимногочлен является решением некоторого линейного однородного уравнения. Следует также отметить, что решение является аддитивной функцией, т.е. каждое слагаемое квазимногочлена есть решение линейного однородного уравнения)

9. Если необходимо решить линейное уравнение, имеющее неоднородность в виде квазимногочлена, т.е. $L[y] = P_s(x)e^{\lambda x}$, s - степень многочлена, то какой вид частного решения следует ожидать.

(Решение такого уравнения следует искать среди квазимногочленов.)

10. Как называется метод поиска решений линейных неоднородных уравнений среди квазимногочленов.

(Метод неопределенных коэффициентов.)

11. Как определить вид частного решения методом неопределенных коэффициентов для уравнения $L[y] = P_s(x)e^{\lambda x}$, где s - степень многочлена.

(1) Если λ - не является корнем соответствующего характеристического однородного уравнения, то частное решение следует искать в виде

$$\tilde{y} = g_s(x)e^{\lambda x}, \quad (1)$$

2) Если λ - корень кратности k характеристического уравнения, составленного для соответствующего линейного однородного уравнения, то частное решение уравнения представим в форме

$$\tilde{y} = x^k g_s(x)e^{\lambda x}, \quad (2)$$

где $g_s(x)$ - многочлен той же степени, что и $P_s(x)$, но с произвольными коэффициентами.)

12. Как определяются коэффициенты многочлена $g_s(x)$.

(Неизвестные коэффициенты многочлена $g_s(x)$ можно получить, подставив решение $\tilde{y}$ вида (1) или (2) непосредственно в уравнение $L[y] = P_s(x)e^{\lambda x}$. Путем приравнивания коэффициентов при одинаковых членах в правой и левой частях, получим систему линейных уравнений для этих коэффициентов. Полученная система имеет треугольную матрицу и всегда разрешима.)

Практические задания

ТАБЛИЦА КВАЗИМНОГОЧЛЕНОВ

Вид квазимногочлена	Стандартная запись	Степень многочлен а	λ
C - константа	Ce^{0x}	$s = 0$	$\lambda = 0$

$ax^k + bx^{k-1} + \dots + c$	$(ax^k + bx^{k-1} + \dots + c)e^{0x}$	$s = k$	$\lambda = 0$
$Ce^{\alpha x}, C - \text{const}$	$Ce^{\alpha x}$	$s = 0$	$\lambda = \alpha$
$C \sin \beta x, C \cos \beta x$	$C(e^{i\beta x} \pm e^{-i\beta x})$	$s = 0$	$\lambda = \pm i\beta$
$(ax^k + bx^{k-1} + \dots + c)e^{\alpha x}$	$(ax^k + bx^{k-1} + \dots + c)e^{\alpha x}$	$s = k$	$\lambda = \alpha$
$Ce^{\alpha x} \sin \beta x, Ce^{\alpha x} \cos \beta x$	$C(e^{(\alpha+i\beta)x} \pm e^{(\alpha-i\beta)x})$	$s = 0$	$\lambda = \alpha \pm i\beta$
$(ax^k + bx^{k-1} + \dots + c) \sin \beta x,$ $(ax^k + bx^{k-1} + \dots + c) \cos \beta x$	$(ax^k + bx^{k-1} + \dots + c)(e^{i\beta x} \pm e^{-i\beta x})$	$s = k$	$\lambda = \pm i\beta$
$(ax^k + bx^{k-1} + \dots + c)e^{\alpha x} \sin \beta x$, $(ax^k + bx^{k-1} + \dots + c)e^{\alpha x} \cos \beta x$	$(ax^k + bx^{k-1} + \dots + c)(e^{(\alpha+i\beta)x} \pm e^{(\alpha-i\beta)x})$	$s = k$	$\lambda = \alpha \pm i\beta$

Пример 1. Решить линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' - 2y = xe^{-x}. \quad (3)$$

Решение. Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y = 0$. Характеристический многочлен $r^2 - 2$ однородного уравнения имеет следующие корни:

$$r_1 = \sqrt{2}, r_2 = -\sqrt{2}.$$

Согласно теореме о фундаментальном решении однородного уравнения, общее решение уравнения имеет вид

$$\tilde{y} = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x}. \quad (4)$$

Для нахождения частного решения, с правой частью в виде квазимногочлена xe^{-x} , воспользуемся таблицей и формулами (1), (2). Частное решение следует искать в виде (1), где $\lambda = -1$, так как -1 не является корнем характеристического уравнения, а степень многочлена правой части исследуемого уравнения $s = 1$, поэтому частное решение будем искать в виде

$$\tilde{y} = (Ax + B)e^{-x},$$

A, B - неизвестные постоянные коэффициенты. Подставляя $\tilde{y}, \tilde{y}''$ в уравнение (3) и приравнявая коэффициенты при равных степенях переменной x , получим систему

$$\begin{cases} -2A - B = 0, \\ -A = 1. \end{cases}$$

Найдя $A = -1, B = 2$, частное решение примет вид

$$\tilde{y} = (2 - x)e^{-x}. \quad (5)$$

Сумма найденных решений (4) и (5) дает общее решение данного уравнения

$$y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x} + (2 - x)e^{-x}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 8y = e^{2x} \sin 2x.$$

Решение. Правая часть уравнения с помощью формул Эйлера легко приводится к квазимногочлену

$$e^{2x} \sin 2x = \frac{1}{2i} (e^{2(1+i)x} - e^{2(1-i)x}).$$

Характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 8 = 0$ имеет корни $r_{1,2} = 2 \pm 2i$.
Общий интеграл однородного дифференциального уравнения определяется формулой

$$\tilde{y} = c_1 e^{2(1+i)x} + c_2 e^{2(1-i)x} = (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x) e^{2x}.$$

Так как правая часть данного уравнения представляет собой сумму двух квазимногочленов, то для нахождения частного решения достаточно найти частные решения z_1 и z_2 уравнений

$$z'' - 4z' + 8z = \frac{1}{2i} e^{2(1+i)x}, \quad (6)$$

$$z'' - 4z' + 8z = -\frac{1}{2i} e^{2(1-i)x} \quad (7)$$

соответственно.

Согласно схеме частное решение уравнения (6) нужно искать в виде

$$z_1 = x A e^{2(1+i)x},$$

так как $\lambda = 2+2i$ является корнем характеристического уравнения кратности $k=1$, A - постоянная - многочлен нулевой степени ($s=0$).

Подставляя z_1 в уравнение (6), получим $A = -1/8$. Таким образом,

$$z_1 = -\frac{1}{8} x e^{2(1+i)x}.$$

Точно так же находим решение уравнения (7)

$$z_2 = -\frac{1}{8} x e^{2(1-i)x}.$$

Частное решение заданного уравнения определим как сумму найденных решений

$$\tilde{y} = z_1 + z_2 = -\frac{1}{8} x (e^{2(1+i)x} + e^{2(1-i)x}) = -\frac{1}{4} x e^{2x} \cos 2x.$$

Искомое решение будет иметь следующий вид

$$y = (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x) e^{2x} - \frac{1}{4} x e^{2x} \cos 2x.$$

Задачи для репродуктивной работы

Самостоятельная работа по образцу предполагает решение задач на воспроизведение знаний, умений. Все данные для нахождения искомого, а также сам способ выполнения задания представлены в явном виде в самом задании или в соответствующем алгоритме решения (демонстрация решенных заданий)

Возможные формы отчетности: выполненные задания.

2. Решить следующие неоднородные дифференциальные уравнения:

а) $y'' - 5y' + 6y = x$;

б) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{3x}$;

в) $y'' + y = \cos x$;	з) $y'' + 4y = 8\sin 2x$;
д) $y'' + y = e^{-x} + 2$;	е) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x} + e^{-x} \cos x$;
ж) $y''' + y = 2xe^x(x^3 + 6x^2 + 18x + 12)$;	з) $y'' + y = 24\sin^4(x)$;
и) $y'' + 2y' + y = x^2e^{-x} \cos x$;	к) $y'' + y = x^n$;
л) $y''' - 7y'' + 6y = x^2$;	м) $y^{IV} + 2y'' + y = \sin x$;
н) $y''' - y'' - 4y' + 4y = x^2 - 8$;	о) $2y'' + 5y' = \cos^2 x$;
п) $y'' - y = \frac{e^x}{1 + e^x}$;	р) $y'' - y = \frac{1}{2 + e^x}$.

Задания для реконструктивной работы

Характерным признаком этих заданий является то, что в самом задании сообщается общая идея решения, а студенту необходимо развить ее в конкретный способ или способы применительно к условиям задачи.

Студент соотносит задание с другими, уже известными ему. При этом главное – актуализация имеющихся знаний, умение отбирать и привлекать необходимые знания для решения задачи

Возможные формы отчетности: конспект выполненных заданий; доклад; реферат; отчет.

3. Определить вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения, если известны корни его характеристического уравнения и правая часть $f(x)$:

а) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, f(x) = ax^2 + bx + c$;

б) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, f(x) = \sin x + \cos x$;

в) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, f(x) = e^{-x}(ax + b)$;

г) $\lambda_1 = -ki, \lambda_2 = ki, f(x) = A \sin kx + B \cos kx$.

4. Методом вариации постоянных решить уравнения Эйлера:

а) $xy'' + 2y' = 10x$;	б) $x^2y'' - 6y = 12 \ln x$;
в) $x^3y'' + 3x^2y' + xy = 6 \ln x$;	г) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 4x$;
д) $x^2y'' + xy' + y = x$;	е) $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^5$;
ж) $(1+x)^2y'' + (1+x)y' + y = 4 \cos \ln(1+x)$;	з) $x^2y'' - 2y = x^2 + x^{-1}$;
и) $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 3x$;	к) $x^2y'' - xy' + 2y = x \ln x$.

Задания для эвристической работы

Такая работа предполагает создание нестандартных ситуаций, решение нетиповых задач. В ее основе – поиск, догадка, формулирование и реализация идеи решения. Однако поиск имеет частичный характер, необходимый лишь для выполнения какого-либо фрагмента общего задания

Возможные формы отчетности: создание математической модели, отчет по заданной форме; план; конспект; сценарий; продукт деятельности арт-технологий (рисунок); аналитический отчет по заданной форме

5. Уравнение свободных упругих колебаний при наличии сопротивления имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2n \frac{dy}{dx} + a^2 y = f(x), \quad n > 0.$$

Определить когда колебания являются затухающими.

6. Уравнение упругих колебаний без сопротивления при наличии возмущающей периодической силы имеет вид

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a^2 x = p \sin \omega t, \quad (a, p, \omega - \text{const}).$$

Указание: рассмотреть два случая, когда $\omega \neq a$ и когда $\omega = a$ (явление резонанса).

7. Уравнение колебаний при наличии сопротивления и возмущающей силы записывается так

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + a^2 x = p \sin \omega t, \quad (a, p, \omega - \text{const}).$$

Рассмотреть явление резонанса при наличии сопротивления.

- 7*. Найти периодическое решение уравнения

$$y'' - y = V(x), \quad \text{где } V(x) = \begin{cases} 1, & \text{для } 2\pi k < x < (2k+1)\pi, \\ -1, & \text{для } (2k-1)\pi < x < 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Указание: использовать представление функции $V(x)$ в виде тригонометрического ряда Фурье

$$V(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} + \dots \right).$$

Литература

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. 3-е изд., Изд. «Лань», 2008. 288 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости 3-е изд., стер. Изд. «Лань», 2008. 480 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., Изд. «Лань» стер 576 с.
4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям 8-е изд., Изд. «Лань», стер., 2009 432 с.
5. Матвеев П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений 1-е издание. Изд. «Лань», 2008. 336 с.
6. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения 4-е изд., Изд. «Лань» 2009. 304 с.
7. Шампайн Л. Ф. Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием matlab. 1-е изд, Изд. «Лань», 2009. 304 с.

Тема5: СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Занятие5 . Системы дифференциальных уравнений общего вида

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение следующими компетенциями:

1) в сфере научно-исследовательской деятельности:

- умением понять поставленную задачу;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний;

11) в сфере проектной и производственно-технологической деятельности:

- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных и профессиональных позиций;
- пониманием сущности и значения информации в развитии современного общества; владение основными методами.

Проверка теоретических знаний

1. Дать определение системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

(Система уравнений первого порядка вида

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\&\dots\dots\dots \\y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\end{aligned}\tag{1}$$

называется системой нелинейных дифференциальных уравнений.)

2. Какой вид системы называется *нормальной формой Коши*.

(Система n уравнений 1-го порядка, разрешенная относительно производных, с n независимыми функциями, имеющая вид (1) и называется *нормальной формой Коши*.)

3. дайте определение решения системы.

(*Решением системы* называется совокупность n функций $y_i = \varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

таких, что при подстановке их в систему уравнения обращаются в тождества относительно переменной x , причем функции $\varphi_i(x)$ непрерывны и имеют непрерывные производные.)

4. Как связаны между собой уравнения n - го порядка и системы.

(Имеется тесная связь между уравнением высших порядков $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ и системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для перехода от уравнения к системе необходимо ввести новые неизвестные функции независимого переменного x такие, что

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \dots, \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

Тогда уравнение $y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ эквивалентно нормальной форме Коши вида

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ \dots\dots\dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = F(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}). \end{cases}$$

5. Как связаны решения системы и уравнения n -го порядка.

(Если $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ есть решение системы, то решением исходного уравнения будет $y_1(x)$.)

6. Существует ли обратная связь между системами и уравнениями n -го порядка.

(Можно показать и обратную связь. Нормальная система n уравнений первого порядка путем исключения неизвестных может быть сведена к одному уравнению n -го порядка).

7. Всегда ли осуществим переход от системы к одному уравнению n -го порядка.

(Нет не всегда. Это возможно, если уравнения системы (1) разрешимы относительно переменных $y_2, y_3, \dots, y_n$. Выражая из одного уравнения y_2 , подставим полученное значение во все остальные. Полученная система $(n - 1)$ -го уравнения не содержит y_2 , но уже в некоторых равенствах содержит производные второго порядка. Поступая аналогично с y_3 , получим систему $(n - 2)$ уравнений, не содержащую y_3 , и содержащую третьи производные. Продолжая эту процедуру $(n - 1)$ раз, получим уравнение от первой функции y_1 . Это уравнение будет n -го порядка $\Phi(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}, y_1^{(n)}) = 0$.)

8. Как отыскать решения системы, если решение построенного уравнения n -го порядка найдено.

(Из самого способа получения уравнения n -го порядка следует, что если $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ представляют решение системы (1), тогда y_1 удовлетворяет уравнению $\Phi(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}, y_1^{(n)}) = 0$. Обратно, если мы имеем решение $y_1(x)$ полученного уравнения n -го

порядка, то, дифференцируя эту функцию вычислим $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$. Подставляя эти значения, как известные функции от x , в систему и разрешая ее относительно $y_2, y_3, \dots, y_n$, получим неизвестные выражения $y_2, y_3, \dots, y_n$, как функции от x .)

9. Дайте определение задачи Коши для системы уравнений.

(Под *задачей Коши* понимают отыскание такого частного решения системы, которое удовлетворяет заданным n начальным условиям, определенным соотношениями:

$$y_1|_{x=x_0} = y_1^0, y_2|_{x=x_0} = y_2^0, \dots, y_n|_{x=x_0} = y_n^0.$$

10. Сформулируйте теорему, когда решение задачи Коши единственное.

(Теорема. Если функции $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i=1, 2, \dots$, системы (1) непрерывны в области B , то есть в окрестности заданного начального условия и удовлетворяют условию Липшица по аргументам $y_1, y_2, \dots, y_n$, то система имеет единственное решение, удовлетворяющее этим условиям.)

11. В чем заключается условие Липшица.

(Условие Липшица для функций $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ по переменным $y_1, y_2, \dots, y_n$: если для всех x и любых двух различных точек $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n) \neq (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$ области B , существует такое число K , что выполняется неравенство

$$K \sum_{i=1}^n |\tilde{y}_i - y_i^*| \geq |f_m(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n) - f_m(x, y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)|,$$

$m=1,2,...,n$, где B - любое замкнутое ограниченное пространство переменных $(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ в окрестности заданного начального условия $(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$:
 $B = \{(x, y_1, y_2, ..., y_n) : |x - x_0| \leq a, |y_i - y_i^0| \leq b_i, i = 1, ..., n\}$, число K называется постоянной Липшица.)

12. Можно ли в теореме заменить условие Липшица.

(В формулировке теоремы требование выполнения условия Липшица в любом замкнутом ограниченной области можно заменить более сильным условием – непрерывность частных производных функций $f_i(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ по переменным $y_1, y_2, ..., y_n$ на заданном множестве.)

13. Дать понятие интегрируемых комбинаций.

(Пусть для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и заданных начальных условий $x = x_0, y_i(x_0) = y_i^0, i = 1, ..., n$ найдено частное решение

$$y_1 = \varphi_1(x, x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0), y_2 = \varphi_2(x, x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0), ..., y_n = \varphi_n(x, x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0),$$

из которого выражены постоянные

$$y_1^0 = \psi_1(x, x_0, y_1, y_2, ..., y_n), y_2^0 = \psi_2(x, x_0, y_1, y_2, ..., y_n), ..., y_n^0 = \psi_n(x, x_0, y_1, y_2, ..., y_n).$$

Это означает, что общая система решений может быть разрешена (однозначно) относительно произвольных постоянных, причем правые части допускают непрерывные частные производные по $x, y_1, ..., y_n$. Такая запись решений в неявном виде относительно $y_1, ..., y_n$ называется интегрируемой комбинацией.)

12. Дать определение первого интеграла (закона сохранения) системы.

(Первым интегралом системы называется соотношение, тождественно не равное постоянному, содержащее в левой части независимую переменную и искомые функции, и принимающее постоянное значение, если вместо искомым функций поставить какое-нибудь решение системы.)

13. Дать понятие общего интеграла системы

(Общим интегралом системы называется n соотношений

$$C_1 = \phi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), C_2 = \phi_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), ..., C_n = \phi_n(x, y_1, y_2, ..., y_n),$$

где каждое из равенств системы является первым интегралом этой системы.)

14. Когда система считается проинтегрированной.

(Для того чтобы система была проинтегрирована, необходимо чтобы было найдено общее решение или построено n линейно независимых законов сохранения.)

15. Если $C = \phi(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ - первый интеграл, то какому уравнению в частных производных он удовлетворяет.

(Дифференцируя обе части тождества $C = \phi(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ по x , получим

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + ... + \frac{\partial \phi}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dx} = 0.$$

Используя систему (1), заменим $\frac{dy_i}{dx}$ ($i = 1, ..., n$) соответствующими функциями

$f_i(x, y_1, ..., y_n)$, тогда получим уравнение в частных производных

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + f_1(x, y_1, ..., y_n) \frac{\partial \phi}{\partial y_1} + ... + f_n(x, y_1, ..., y_n) \frac{\partial \phi}{\partial y_n} = 0.)$$

16. Какой вид записи системы называется симметричным.

$$\left(\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, ..., y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, ..., y_n)} = ... = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, ..., y_n)} = \frac{dx}{1} \right) \quad (2)$$

17. Для системы, записанной в симметричной форме, какому условию будет удовлетворять первый интеграл $C = \chi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$.

(Вдоль интегральной кривой системы функция $C = \chi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ сохраняет постоянное значение, поэтому ее полный дифференциал, взятый вдоль этой кривой, равен нулю

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} dx + \frac{\partial \chi}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \chi}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial \chi}{\partial y_n} dy_n = 0.$$

В силу уравнений (2) dy_i пропорционально значениям функций $f_i(x, y_2, \dots, y_n)$, следовательно, вдоль любой интегральной кривой имеем:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} + f_1 \frac{\partial \chi}{\partial y_1} + f_2 \frac{\partial \chi}{\partial y_2} + \dots + f_n \frac{\partial \chi}{\partial y_n} = 0.$$

Практические задания

Пример 1. Решить систему уравнений

$$y' = \frac{z}{x}, \quad z' = \frac{(y-z)^2 + xz}{x^2}.$$

Решение. Исключим z из данных уравнений, из первого уравнения имеем $z = y'x$, $z' = y''x + y'$. Подставляя найденные выражения во второе равенство, получим $y''x + y' = \frac{(y - y'x)^2 + y'x^2}{x^2}$, после упрощения

$$y''x^3 = (y - y'x)^2$$

Данная система уравнений привилась к одному уравнению второго порядка. Это уравнение может быть решено понижением порядка. Порядок уравнения понижается, если оно является однородным относительно своих переменных в обобщенном смысле, т.е. уравнение не меняется от замены:

$$x \rightarrow kx, \quad dx \rightarrow kdx, \quad y \rightarrow ky, \quad dy \rightarrow kdy, \dots, d^n y \rightarrow kd^n y,$$

чтобы узнать, будет ли уравнение однородным, необходимо представить его

в виде $\frac{d^2 y}{dx^2} x^3 = y^2 - 2y \frac{dy}{dx} x + \left(\frac{dy}{dx} x \right)^2$, должны выполняться равенства

$1+3-2=2=2+1-1$, что очевидно. Выполним замену переменных

$$x = e^\xi, \quad y = u(\xi)e^\xi,$$

где ξ - новая независимая переменная, $u(\xi)$ - новая неизвестная функция

$$(u'' + u')e^{2\xi} = u^2 e^{2\xi} - 2u(u' + u)e^{2\xi} + (u' + u)^2 e^{2\xi}.$$

В результате этих преобразований полученное уравнение

$$u'' + u' = (u')^2$$

не содержит переменной ξ и u , следовательно, свелось к уравнению первого порядка $w' + w = w^2$, $u' = w$, следовательно имеем решение

$$\ln \frac{w-1}{w} - \ln C = \xi, \quad \frac{w-1}{w} = Ce^\xi, \quad w = \frac{1}{1 - Ce^\xi},$$

$$u' = \frac{1}{1 - C_1 e^\xi}, \quad u = \int \frac{d(e^\xi)}{(1 - C_1 e^\xi)e^\xi} = \ln \frac{e^\xi}{1 - C_1 e^\xi} + C_2$$

$$x = e^\xi, \quad y = u(\xi)e^\xi = \left(\ln \frac{e^\xi}{1 - C_1 e^\xi} + C_2 \right) e^\xi = \left(\ln \frac{x}{1 - C_1 x} + C_2 \right) x$$

Теперь определяем функцию $z = y'x = \frac{x}{1-C_1x} + \left(\ln \frac{x}{1-C_1x} + C_2 \right) x$

В результате имеем следующее решение

$$y = \left(\ln \frac{x}{1-C_1x} + C_2 \right) x, \quad z = \frac{x}{1-C_1x} + \left(\ln \frac{x}{1-C_1x} + C_2 \right) x.$$

Пример 2. Решить задачу Коши: $y_1(0)=1, \quad y_2(0)=-1, \quad y_3(0)=-1,$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + x, \\ y_2' = y_3 - 1, \\ y_3' = (y_2 + x)^{-3}. \end{cases}$$

Решение. Выражаем из первого уравнения y_2 и дифференцируем его по x

$$y_2 = y_1' - x, \quad y_2' = y_1'' - 1,$$

подставляя полученные выражения имеем

$$\begin{cases} y_1'' = y_3, \\ y_3' = (y_1')^{-3}. \end{cases}$$

Дифференцируя первое уравнение

$$y_1''' = y_3',$$

находим

$$y_1''' = (y_1')^{-3}.$$

Далее решаем уравнение третьего порядка не содержащего переменную x в явном виде и допускающее понижение порядка, так как уравнение не содержит y_1 . Его решение имеет вид

$$y_1 = \frac{1}{2C_1\sqrt{C_1}} \ln \left| C_1x + C_2 + \sqrt{(C_1x + C_2)^2 + 1} \right| + \frac{C_1x + C_2}{2C_1\sqrt{C_1}} \sqrt{(C_1x + C_2)^2 + 1} + C_3.$$

Так как $y_2 = y_1' - x$, а $y_3 = y_1''$, то

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \sqrt{(C_1x + C_2)^2 + 1} - x,$$

$$y_3 = \frac{\sqrt{C_1}(C_1x + C_2)}{\sqrt{(C_1x + C_2)^2 + 1}}.$$

Перейдем к решению задачи Коши, тогда

$$y_1(0) = \frac{1}{2C_1\sqrt{C_1}} \ln \left| C_2 + \sqrt{C_2^2 + 1} \right| + \frac{C_2}{2C_1\sqrt{C_1}} \sqrt{C_2^2 + 1} + C_3 = 1,$$

$$y_2(0) = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \sqrt{C_2^2 + 1} = -1,$$

$$y_3(0) = \frac{\sqrt{C_1}C_2}{\sqrt{C_2^2 + 1}} = -1,$$

из последнего равенства определим $\sqrt{C_1} = -\frac{1}{C_2} \sqrt{C_2^2 + 1}$ $C_1 = 1 + \frac{1}{C_2^2}$, и

подставим в остальные $C_3 = 1 + \frac{C_2^3}{2C_1 \sqrt{(1+C_2^2)^3}} \ln |C_2 + \sqrt{C_2^2 + 1}| + \frac{C_2^4}{2C_1(1+C_2^2)}$, тогда

получим следующие значения $C_2 = 1$, $C_1 = 2$ ($\sqrt{C_1} = -\sqrt{2}$), $C_3 = \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln |1 + \sqrt{2}| + \frac{9}{8}$. В

результате частное решение имеет вид

$$y_1 = \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln |1 + \sqrt{2}| + \frac{9}{8} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln |2x+1 + \sqrt{(2x+1)^2 + 1}| - \frac{2x+1}{4} \sqrt{2x^2 + 2x+1},$$

$$y_2 = -\sqrt{2x^2 + 2x+1} - x, \quad y_3 = -\frac{2x+1}{\sqrt{2x^2 + 2x+1}}.$$

Пример 3. Найти первые интегралы системы

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{y+x}.$$

Решение. Будем считать, что x, y, z – функции параметра t , тогда систему представим в виде

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{y+x} = dt.$$

Используя этот вид, интегрируемую комбинацию получим, используя разности дифференциалов

$$dx - dy = (y - x)dt, \quad dx - dz = (z - x)dt.$$

Их частное дает выражение не зависящее от t

$$\frac{dx - dy}{dx - dz} = \frac{y - x}{z - x} \quad \text{или} \quad \frac{y - x}{z - x} = C_1 \text{ - первый интеграл.}$$

Далее, найдем сумму дифференциалов

$$dx + dy + dz = 2(x + y + z)dt.$$

поэтому

$$\frac{dx + dy + dz}{x + y + z} = -2 \frac{dx - dy}{x - y}, \quad \frac{d(x + y + z)}{x + y + z} = -2 \frac{d(x - y)}{x - y},$$

что дает еще один первый интеграл $\ln(x + y + z) = \ln C_2 - 2 \ln(x - y)$ или избавляясь от логарифма, запишем

$$(x + y + z)(x - y)^2 = C_2.$$

Задача интегрирования завершена, так как эти два интеграла являются линейно независимыми и полностью определяют решение системы.

Ответ: $y - x = C_1(z - x)$, $(x + y + z)(x - y)^2 = C_2$.

Задачи для репродуктивной СРС

Самостоятельная работа по образцу предполагает решение задач на воспроизведение знаний, умений. Все данные для нахождения искомого, а также сам способ выполнения задания представлены в явном виде в самом задании или в соответствующем алгоритме решения (демонстрация решенных заданий)

Возможные формы отчетности: выполненные задания.

1. Привести к нормальной форме Коши следующие системы дифференциальных уравнений:

$$a) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - y = 0, \\ t^3 \frac{dy}{dt} - 2x = 0. \end{cases}$$

$$б) \frac{d^2x}{dt^2} + p(t) \frac{dx}{dt} + q(t)x = 0.$$

2. Проверить, являются ли данные системы функций решениями заданных систем дифференциальных уравнений:

$$a) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -2tx_1^2, \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2 + t}{t}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{t^2}, \\ x_2 = t \ln t; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = e^{t-x_1}, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2e^{x_1}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = 2e^t; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{y^2}{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^t; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{z-1}{z}, \\ \frac{dz}{dx} = y-x, \end{cases} \quad \begin{cases} y = x + e^x, \\ z = e^{-x}. \end{cases}$$

3. Привести следующие системы к одному уравнению высшего порядка и таким образом найти их общее решение:

$$a) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}y;$$

$$б) \frac{dy}{dx} = e^{x-y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{2x-z^2};$$

$$в) \frac{dy}{dx} = \frac{z^2}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y^2}{z};$$

$$г) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{y};$$

$$д) \begin{cases} xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}, \\ z' = \frac{y+z}{z^2 - x}; \end{cases}$$

$$е) \begin{cases} y' = \frac{2x}{1+x^2}y, \\ z' = -\frac{1}{x}z + y + x; \end{cases}$$

$$и) \begin{cases} y' = (z + e^y) / (z + e^x), \\ z' = (z^2 - e^{x+y}) / (z + e^x); \end{cases}$$

$$к) \begin{cases} y'' = y^2 + z, \\ z' = -2yy' + y. \end{cases}$$

Задания для реконструктивной работы

Характерным признаком этих заданий является то, что в самом задании сообщается общая идея решения, а студенту необходимо развить ее в конкретный способ или способы применительно к условиям задачи.

Студент соотносит задание с другими, уже известными ему. При этом главное – актуализация имеющихся знаний, умение отбирать и привлекать необходимые знания для решения задачи

Возможные формы отчетности: конспект выполненных заданий; доклад; реферат; отчет.

4. Решить следующие нелинейные системы наиболее подходящим способом.

$$a) y' = \frac{x}{z}, \quad z' = -\frac{x}{y};$$

$$б) y' = \frac{y^2}{z-x}, \quad z' = y+1;$$

$$в) y' = \frac{z}{x}, \quad z' = \frac{z(y+2z-1)}{x(y-1)};$$

$$г) y' = y^2z, \quad z' = \frac{z}{x} - yz^2;$$

$$д) 2zy' = y^2 - z^2 + 1, \quad z' = y + z;$$

$$е) \frac{dx}{2y-z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$\text{жс)} \quad \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{y+x}$$

$$3) \quad \frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{yx\sqrt{z^2+1}}$$

$$\text{и)} \quad \frac{dx}{x+y^2+z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$\text{к)} \quad \frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy}{(z-y)z} = \frac{dz}{y(y-z)}$$

$$\text{л)} \quad -\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy-2z^2} = \frac{dz}{zx}$$

$$\text{м)} \quad \frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2-xz}$$

5. Проверить, являются ли функции $\varphi = C$ первыми интегралами систем:

$$\text{а)} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x^2-t}{y}, \quad \frac{dy}{dt} = -x, \quad C_1 = t^2 + 2xy, \quad C_2 = x^2 - ty.$$

$$\text{б)} \quad \dot{x} = xy, \quad \dot{y} = x^2 + y^2, \quad C_1 = x \ln y - x^2 y, \quad C_2 = \frac{y^2}{x^2} - 2 \ln x.$$

$$\text{в)} \quad \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{u} = -\frac{du}{z}, \quad C = zy - ux.$$

6. Проверить, являются ли данные функции ψ первыми интегралами заданных систем дифференциальных уравнений:

$$\text{а)} \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1^2}{x_2}, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 - x_1, \end{cases} \quad \psi = x_1 x_2 e^{-t}; \quad \text{б)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{e^{-x}}{t}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{t} e^{-y}, \end{cases} \quad \psi = (1+x)e^{-x} - e^{-y};$$

$$\text{в)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y+t}{x+y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x-t}{x+y}; \end{cases} \quad \psi_1 = x+y-t, \quad \psi_2 = x+y+t.$$

Задания для эвристической работы

Такая работа предполагает создание нестандартных ситуаций, решение нетиповых задач. В ее основе – поиск, догадка, формулирование и реализация идеи решения. Однако поиск имеет частичный характер, необходимый лишь для выполнения какого-либо фрагмента общего задания

Возможные формы отчетности: создание математической модели, отчет по заданной форме; план; конспект; сценарий; продукт деятельности арт-технологий (рисунок); аналитический отчет по заданной форме

7. Для следующих систем дифференциальных уравнений проверить, образуют ли данные пары функций системы независимых первых интегралов:

$$\text{а)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{t-y}{y-x}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x-t}{y-x}; \end{cases} \quad x+y+t = C_1, \quad x^2+y^2+t^2 = C_2. \quad \text{б)} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{t+y}{x+y}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{t+x}{x+y}; \end{cases} \quad \frac{x-y}{t-x} = C_1, \quad \frac{t-x}{t-y} = C_2.$$

8. Проверить, являются ли независимыми первые интегралы

$$\frac{x+y}{z+x} = C_1, \quad \frac{z-y}{y+x} = C_2$$

системы

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

9. Доказать, что система $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ имеет первый интеграл $C = x^2 + y^2$.

10. Найти независимые первые интегралы системы уравнений:

а) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z};$

б) $\frac{dx}{\cos y} = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dz}{\cos x \cos y};$

в) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x+y};$

г) $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0};$

д) $\frac{dx}{z(x+z)} = \frac{dy}{-y(y+z)} = \frac{dz}{0};$

е) $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{-26y-z}.$

Указание. Чтобы найти интегрируемую комбинацию, в некоторых случаях, можно воспользоваться свойством равных дробей:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = t,$$

то при любых $k_1, k_2, \dots, k_n$ имеем

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n} = t.$$

11. Доказать, пользуясь теоремой Коши, существование и единственность решения, удовлетворяющее начальным условиям:

а) $\begin{cases} y' = x + y - z^2, \\ z' = yz + 1; \end{cases} \quad |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1, y = 0, z = 0, \text{ при } x = 0;$

б) $\begin{cases} y' = y^2 + z^2 - x^2, \\ z' = y + \frac{x-1}{x-2}, \end{cases} \quad y = 1, z = 1, \text{ при } x = 1;$

в) $\begin{cases} y' = yz, \\ z' = -z^2 + z/x, \end{cases} \quad y = 1, z = 2, \text{ при } x = 1;$

г) $\begin{cases} y' = -z, \\ z' = z^2 / y, \end{cases} \quad y = 1, z = -1/2 \text{ при } x = 1.$

Задания для исследовательской (творческой) работы

В ходе ее выполнения проявляется самый высокий уровень самостоятельности и познавательной активности студента. Творческая работа требует глубокого проникновения в сущность изучаемого явления, поиска новых идей при решении проблем. В ходе выполнения творческого задания у студента формируются такие качества, как видение проблемы в знакомой ситуации, умение обнаруживать новые функции объекта, способность на основе нескольких известных найти новый способ решения задачи, гибкость мышления, готовность отказаться от ошибочного решения

Возможные формы отчетности: статья; создание и обработка математической модели, отчет по результатам исследования; проект.

12*. Предварительно доказав, что искомое решение существует и единственно, проинтегрировать системы уравнений:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} y - xy' = y^2, \\ z' = \frac{2xz}{x^2 - z^2}; \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} y' = (x - y)\operatorname{tg} x + 1, \\ \left(\frac{1}{z} - x\right)z' = y + z; \end{array} \right. \\
 \text{в)} \left\{ \begin{array}{l} y'' - z = 0, \\ x^3 z' - 2y = 0; \end{array} \right. & \text{г)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dy} = 1 + \sqrt{z - x - y}, \\ \frac{dx}{dz} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{z - x - y}. \end{array} \right.
 \end{array}$$

13. Найти общее решение (общий интеграл) системы:

$$\text{a)} \quad \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y - x}.$$

Ответ. $(y - x)z = C_1, \quad (y - x)e^{\frac{x}{z(y-x)}} = C_2.$

$$\text{б)} \quad \frac{dx}{x(y^2 - z^2)} = -\frac{dy}{y(x^2 + z^2)} = \frac{dz}{z(y^2 + x^2)}.$$

Ответ. $x^{-1}yz = C_1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$

$$\text{в)} \quad \frac{dx}{x(y + x)} = \frac{dy}{-y(x + y)} = \frac{dz}{(x - y)(2y + 2x + z)}.$$

Ответ. $xy = C_1, \quad \frac{z}{x + y} - 2\ln(x + y) = C_2.$

$$\text{г)} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x - y}{z - t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{x - y}{z - t}, \quad \frac{dz}{dt} = x - y + 1.$$

Ответ. $x - y = C_1, \quad z - (x - y + 1) = C_2.$

$$\text{д)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - z^2}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{2xz}{x^2 - y^2 - z^2}. \end{array} \right.$$

Ответ. $C_1 = z^{-1}y, \quad C_2 = z^{-1}(x^2 + y^2 + z^2).$

Литература

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. 3-е изд., Изд. «Лань», 2008. 288 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости 3-е изд., стер. Изд. «Лань», 2008. 480 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., Изд. «Лань» стер 576 с.
4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям 8-е изд., Изд. «Лань», стер., 2009 432 с.
5. Матвеев П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений 1-е издание. Изд. «Лань», 2008. 336 с.

2. Как записать систему (1) в векторно-матричном виде.

(Для более краткой записи введем векторно-матричные обозначения. Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов системы (1)

$$A(x) = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) & \dots & p_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(x) & p_{n2}(x) & \dots & p_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

и искомые функции в виде вектор - столбца $Y(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, тогда систему уравнений

(1) можно записать так: $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$.

3. Сформулируйте теорему, когда решение задачи Коши для системы уравнений единственное.

(Теорема. Если для системы $\{y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), i=1, 2, \dots, n\}$, функции $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ - непрерывны в области B (то есть в окрестности заданного начального условия: $y_1|_{x=x_0} = y_1^0, y_2|_{x=x_0} = y_2^0, \dots, y_n|_{x=x_0} = y_n^0$) и удовлетворяют условию Липшица по аргументам $y_1, y_2, \dots, y_n$, то система имеет единственное решение, удовлетворяющее этим условиям.)

4. Как изменится формулировка этой теоремы для линейной однородной системы.

(Теорема. Если для системы (1) функции $p_{ik}(x)$ - непрерывны на интервале (a, b) , следовательно, через каждую точку $(x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$ проходит одна и только одна интегральная линия).

5. Почему условие Липшица в теореме можно опустить.

(Правые части системы (1) имеют линейный вид по переменным y_i , а следовательно, будет выполняться более строгое условие (ограниченность частных производных правых частей системы по y_i), чем условие Липшица. Очевидно, что дифференцируемость по y_k всегда выполняема $\frac{\partial}{\partial y_k}(p_{i1}(x)y_1 + p_{i2}(x)y_2 + \dots + p_{in}(x)y_n) = p_{ik}(x)$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, а ограниченность

производных будет непосредственно следовать из непрерывности коэффициентов $p_{ik}(x)$, и поэтому условие Липшица удовлетворяются на любом (a, b) , лежащем внутри $[\alpha, \beta]$.)

6. Если свести линейную систему к одному уравнению n -го порядка, то какой тип дифференциальных уравнений мы получим.

(Так как в системе имеются только линейные связи, а дифференцирование уравнений и исключение неизвестных не нарушают линейности, поэтому систему можно свести к решению одного линейного дифференциального уравнения n -го порядка.)

7. Какую размерность имеет система решений линейного дифференциального уравнения n -го порядка.

(Пространство решений линейного дифференциального уравнения n -го порядка изоморфно отображается на R^n . Поэтому фундаментальная система решений уравнения имеет n -мерный базис и всякое решение уравнения является линейной комбинацией фундаментальной системы.)

8. Какую размерность имеет совокупность решений линейной системы дифференциальных уравнений первого порядка.

(Так как система (1) эквивалентна линейному уравнению n -го порядка и имеет место обратный переход, тогда совокупность всех решений системы так же имеет n -мерный базис.)

9. Сформулируйте теорему о свойствах решений системы $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$, при

условии, что существует $A > 0$, $A - \text{const}$: $\|A(x)\| \leq A$, где $\|A(x)\|$ означает норму матрицы $A(x)$: $\|A(x)\| = \sup_{|Y| \leq 1} |AY|$.

Иначе говоря, рост функций $|Y(x)|$ ограничен экспонентой для любых $x, x_0 \in [\alpha, \beta]$.)

10. Очевидно, что $Y(x) = 0$ есть решение однородной системы дифференциальных уравнений (1), то какое следствие можно сформулировать.

(Следствие. Решение $Y(x)$ однородной системы с непрерывной матрицей $A(x)$ тождественно равно нулю, если оно равно нулю в какой-либо точке отрезка $[\alpha, \beta]$.)

(Теорема. Если определитель Вронского $W(x)$ для системы функций, равен нулю, то и $y_1, y_2, \dots, y_n$ — линейно зависимы.)

(Теорема. Если определитель Вронского $W(x)$ для системы функций, отличен от нуля в одной точке $x = x_0$, то функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ — линейно независимы.)

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (y_{11}(x), y_{12}(x), \dots, y_{1n}(x)), \\ y_2(x) &= (y_{21}(x), y_{22}(x), \dots, y_{2n}(x)), \\ &\vdots \\ y_n(x) &= (y_{n1}(x), y_{n2}(x), \dots, y_{nn}(x)). \end{aligned} \tag{2}$$
$$W(x) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

(Совокупность решений (2) системы (1) называется *фундаментальной*, если определитель Вронского (3) неравен нулю хотя бы в одной точке интервала (a, b) .)

(Общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений есть линейная комбинация с произвольными коэффициентами из решений, составляющих фундаментальную систему)

16. Сделайте вывод о пространстве решений системы линейных уравнений первого порядка.

(Вывод. Совокупность решений системы (1) образует n -мерное линейное пространство. Фундаментальная система решений - это базис в этом пространстве.)

17. Какая связь существует между определителем Вронского, составленным для фундаментальной системы решений и коэффициентами линейной однородной системы (1).

(Теорема. Детерминант Вронского для фундаментальной системы решений линейной однородной дифференциальной системы уравнений (1) удовлетворяет формуле

$$W(x) = W_0 \exp \int_{x_0}^x (p_{11}(t) + p_{22}(t) + \dots + p_{nn}(t)) dt, \text{ где } x_0 \in [\alpha, \beta].)$$

18. Может ли определитель Вронского обращаться в нуль.

(Из связи детерминанта Вронского с коэффициентами системы видно, что если определитель Вронского обращается в нуль хотя бы в одной точке интервала (a, b) , то он тождественно равен нулю.)

19. Дать определение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений.

(Система вида

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \dots + p_{1n}(x)y_n + h_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} &= p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \dots + p_{2n}(x)y_n + h_2(x), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \dots + p_{nn}(x)y_n + h_n(x) \end{aligned} \quad (4)$$

где $p_{ik}(x)$, $h_k(x)$, $i, k = 1, 2, \dots, n$ - заданные непрерывные на интервале (α, β) функции или постоянные числа, называется *линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений первого порядка*.)

20. Как записывается система (4) в матричном виде.

(Ее векторная запись имеет вид: $\frac{dY}{dx} = A(x)Y + H(x)$, где $H(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x))^T$ (T - транспонирование).)

21. Как связаны решения неоднородной системы $\frac{dY}{dx} = A(x)Y + H(x)$ и соответствующей ей однородной системы $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$.

(Теорема. Всякое решение неоднородной линейной системы (4) можно представить в виде

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^n C_k y_{ik}(x) + \varphi_i(x),$$

($i = 1, 2, \dots, n$), где $y_{ik}(x)$ образуют фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы, C_k - некоторые однозначно определяемые для этого решения постоянные, $\varphi_i(x)$ - частные решения неоднородной системы (4).

22. Какой метод применяется для отыскания частного решения.

(Для отыскания частного решения, как и в случае одного линейного уравнения, применяется метод вариации постоянных.)

23. В чем заключается метод вариации постоянных.

(Будем рассматривать решение соответствующей однородной системы $\frac{dY}{dx} = A(x)Y$

определенных нами общих решений. Тогда определитель Вронского $W(x_0)$ отличен от нуля в точке $x_0 \in (a, b)$, следовательно, по определению найденная система решений является фундаментальной.

Пример 2. Найти линейную однородную систему уравнений, допускающую следующую систему фундаментальных решений:

$$\begin{aligned} y_{11} &= x \cos x, & y_{21} &= x \sin x, \\ y_{12} &= -e^x \sin x, & y_{22} &= e^x \cos x. \end{aligned}$$

Решение. Задача построения системы линейных уравнений, имеющей заданную систему решений $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}$ ($i=1, 2, \dots, n$) может быть решена, используя свойство линейной зависимости решений системы. Если к фундаментальной системе решений добавить еще одно решение системы ($y_1, y_2, \dots, y_n$) и, так как любое решение можно выразить через этот базис, то система из $(n+1)$ -го решения становится линейно зависимой тогда, используя определитель Вронского, получим следующие формулы:

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_i}{dx} & \frac{dy_{i1}}{dx} & \frac{dy_{i2}}{dx} & \dots & \frac{dy_{in}}{dx} \\ y_1 & y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_2 & y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} = 0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Искомые уравнения для заданной системы фундаментальных решений будут иметь вид

$$\begin{vmatrix} y_1' & \cos x - x \sin x & -e^x (\sin x + \cos x) \\ y_1 & x \cos x & -e^x \sin x \\ y_2 & x \sin x & e^x \cos x \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} y_2' & \sin x + x \cos x & e^x (\cos x - \sin x) \\ y_1 & x \cos x & -e^x \sin x \\ y_2 & x \sin x & e^x \cos x \end{vmatrix} = 0$$

или, раскрывая определители и деля на e^x , получим искомую систему

$$\begin{cases} xy_1' = (x \sin^2 x + \cos^2 x) y_1 - (x + (x-1) \sin x \cos x) y_2, \\ xy_2' = (\sin^2 x + x \cos^2 x) y_2 - ((x-1) \sin x \cos x - x) y_1. \end{cases}$$

Пример 3. Зная фундаментальную систему решений системы уравнений

$$2y_1' = -\left(\frac{1}{x} + 1\right)y_1 + e^{-x}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)y_2 + 2x,$$

$$2y_2' = -(x-1)e^x y_1 + \left(\frac{1}{x} + 1\right)y_2 + 2,$$

$$y_1(x) = C_1 e^{-x} - C_2 \frac{1}{x},$$

$$y_2(x) = C_1 x + C_2 e^x,$$

найти общее решение неоднородной системы.

Решение. Найдем частное решение методом вариации произвольных постоянных. Для применения метода вариации произвольных постоянных приведем систему к стандартному виду

$$y_1' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+1\right)y_1 + e^{-x}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)y_2 + x,$$

$$y_2' = -\frac{1}{2}(x-1)e^x y_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+1\right)y_2 + 1.$$

Предположим, что C_1 и C_2 - некоторые функции, запишем линейную систему уравнений (6), используя заданную систему решений

$$C_1' e^{-x} - C_2' \frac{1}{x} = x,$$

$$C_1' x + C_2' e^x = 1.$$

Разрешаем систему относительно C_1' и C_2' , а затем интегрируем полученные выражения:

$$C_1' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + x e^x\right),$$

$$C_1 = \frac{1}{2}(\ln |x| + (x-1)e^x),$$

$$C_2' = \frac{1}{2}(e^{-x} - x^2),$$

$$C_2 = -\frac{1}{2}\left(e^{-x} + \frac{x^3}{3}\right).$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в выражения для y_1 и y_2 , получим частное решение заданной неоднородной системы. Общее решение найдем как сумму решения однородной системы и найденного частного решения, т.е.

$$y_1(x) = C_1 e^{-x} - C_2 \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{3} + x - 1 + e^{-x}\left(\ln |x| + \frac{1}{x}\right)\right),$$

$$y_2(x) = C_1 x + C_2 e^x + \frac{1}{2}\left(e^x\left(x^2 - x - \frac{x^3}{3}\right) - 1 + x \ln |x|\right).$$

Задачи для репродуктивной работы

Самостоятельная работа по образцу предполагает решение задач на воспроизведение знаний, умений. Все данные для нахождения искомого, а также сам способ выполнения задания представлены в явном виде в самом задании или в соответствующем алгоритме решения (демонстрация решенных заданий)

Возможные формы отчетности: выполненные задания.

1. Показать, что система функций

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, \\ x_2(t) = 2C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{3t} \end{cases}$$

является общим решением системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 - x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 - 4x_1. \end{cases}$$

Найти частное решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям $x_1(0)=0, x_2(0)=-4$.

2. Найти линейную однородную систему, имеющую следующую фундаментальную систему решений:

$$\begin{aligned} \text{а) } y_{11} &= x, & y_{12} &= x^2, & \text{б) } y_{11} &= e^x \cos x, & y_{12} &= e^x \sin x, \\ y_{21} &= -e^x x^{-2}, & y_{22} &= e^x x^{-1}; & y_{21} &= -\sin x, & y_{22} &= \cos x. \end{aligned}$$

3. Зная фундаментальную систему решений системы уравнений найти общее решение:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{dy}{dx} + \frac{2z}{x^2} &= 1, \quad \frac{dz}{dx} + y = x, \\ y_1 &= -2x, \quad y_2 = -\frac{1}{x^2}, \quad z_1 = x^2, \quad z_2 = -\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } y = -2C_1x - C_2 \frac{1}{x^2} + \frac{x}{3}, \quad z = C_1x^2 - C_2 \frac{1}{x} + \frac{x^2}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } t \frac{dx}{dt} - x - 3y &= t, \quad t \frac{dy}{dt} - x + y = 0, \\ x_1 &= t^2, \quad x_2 = t^{-2}, \quad y_1 = \frac{1}{3}t^2, \quad y_2 = -t^{-2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } x = C_1t^2 + C_2t^{-2} - \frac{2}{3}t, \quad y = \frac{1}{3}C_1t^2 - C_2t^{-2} - \frac{1}{3}t.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \frac{dx}{dt} + \frac{6x - y - 3z}{t} &= 0, \quad \frac{dy}{dt} + \frac{23x - 6y - 9z}{t} = 0, \quad \frac{dz}{dt} + \frac{x + y - 2z}{t} = \frac{1}{t}, \\ x_1 &= t, \quad x_2 = t^2, \quad x_3 = t^{-1}, \quad y_1 = t, \quad y_2 = -t^2, \quad y_3 = 2t^{-1}, \quad z_1 = 2t, \quad z_2 = 3t^2, \quad z_3 = t^{-1}. \quad \text{г) } \\ \frac{dy}{dt} + z &= \cos t, \quad \frac{dz}{dt} + y = 1, \\ y_1 &= \cos t, \quad y_2 = \sin t, \quad z_1 = -\sin t, \quad z_2 = \cos t. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{t}{2} \cos t + 1, \quad z = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - \frac{t}{2} \sin t - \frac{1}{2} \cos t.$$

Задания для реконструктивной работы

Характерным признаком этих заданий является то, что в самом задании сообщается общая идея решения, а студенту необходимо развить ее в конкретный способ или способы применительно к условиям задачи. Студент соотносит задание с другими, уже известными ему. При этом главное – актуализация имеющихся знаний, умение отбирать и привлекать необходимые знания для решения задачи

Возможные формы отчетности: конспект выполненных заданий; доклад; реферат; отчет.

4. Найти общее решение системы:

$$\text{а) } \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x^2}z = 0, \quad \frac{dz}{dx} = -y;$$

$$б) t \frac{dx}{dt} - x - 3y = 0, t \frac{dy}{dt} - x + y = 0;$$

$$в) t \frac{dx}{dt} + 6x - y - 3z = 0, t \frac{dy}{dt} + 23x - 6y - 9z = 0, t \frac{dz}{dt} + x + y - 2z = 0.$$

5. Найдите решение системы

$$\begin{cases} xy'_1 = y_1 - 2y_2, \\ xy'_2 = y_1 - 2y_2. \end{cases}$$

Доказать, что решение, определяемое начальными данными существует тогда и только тогда, когда $y_1^0 = 2y_2^0$ и оно единственно.

6. Найдите все решения системы

$$\begin{cases} xy'_1 = 2y_1 - y_2, \\ xy'_2 = 2y_1 - y_2. \end{cases}$$

Покажите, что если $x_0 \neq 0$, то решение существует и единственно на всей оси, если $x_0 = 0$, то решение существует, только при $2y_1^0 = y_2^0$, причем оно не единственно. Покажите, что для любых двух линейно независимых решений определитель Вронского равен Cx , $C \neq 0$. Как согласовать этот результат (определитель Вронского равен нулю в одной точке) с выводами вопросов 17, 18.

7. Найти фундаментальную систему решений и определитель Вронского для системы уравнений

$$y'_i = \sum_{j=1}^n a_j(x)y_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

где все функции $a_j(x)$ непрерывны на интервале (a, b) .

Задания для эвристической работы

Такая работа предполагает создание нестандартных ситуаций, решение нетиповых задач. В ее основе – поиск, догадка, формулирование и реализация идеи решения. Однако поиск имеет частичный характер, необходимый лишь для выполнения какого-либо фрагмента общего задания.

Возможные формы отчетности: создание математической модели, отчет по заданной форме; план; конспект; сценарий; продукт деятельности арт-технологий (рисунок); аналитический отчет по заданной форме

1. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений:

$$а) \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2} y, \\ \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x} z + y; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} y' = y + z, \\ z' = \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} - 1\right)y + \left(\frac{2}{x} - 1\right)z; \end{cases}$$

$$в*) \begin{cases} y'' - z = 0, \\ x^3 z' - 2y = 0; \end{cases}$$

$$г*) \begin{cases} y'' = y' + z, \\ z' = \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} - 1\right)y' - \left(\frac{1}{x} + 1\right)z - \frac{2}{x^3}y; \end{cases}$$

- 9.* Пусть столбцами матрицы $Y(x)$ служат какие либо n решений системы (1). Докажите, что такая матрица удовлетворяет матричному уравнению

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y.$$

При этом $\det Y(x) \equiv 0$ либо $\det Y(x) \neq 0$ (т.е. $Y(x)$ - фундаментальная матрица системы (1)). Если $\det Y(x) \neq 0$, то общее решение системы (1) имеет вид $Y(x)C$, где C - произвольный постоянный вектор; решение системы (1) при начальном условии $y_i(x_0) = y_i^0$ примет вид:
 $Y(x)[Y(x_0)]^{-1}y_i^0, \quad i = 1, \dots, n.$

Задания для исследовательской (творческой) работы

В ходе ее выполнения проявляется самый высокий уровень самостоятельности и познавательной активности студента. Творческая работа требует глубокого проникновения в сущность изучаемого явления, поиска новых идей при решении проблем. В ходе выполнения творческого задания у студента формируются такие качества, как видение проблемы в знакомой ситуации, умение обнаруживать новые функции объекта, способность на основе нескольких известных найти новый способ решения задачи, гибкость мышления, готовность отказаться от ошибочного решения

Возможные формы отчетности: статья; создание и обработка математической модели, отчет по результатам исследования; проект.

- 10*. Пусть имеем m решений однородной линейной системы (1), причем $m < n$. Докажите, что эту систему решений можно расширить (добавлением новых функций) до фундаментальной системы решений тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленный из этих решений равен m в каждой точке интервала (a, b) .

- 11*. Докажите, что если все $p_{ij}(x)$ и $h_i(x)$ в (4) разлагаются в ряды Маклорена с радиусом сходимости, не меньшем $R > 0$, то и всякое решение разлагается в ряд Маклорена с радиусом сходимости, не меньшем R .

Указание. Для всех $p_{ij}(x)$ и $h_i(x)$ выберите одну и ту же мажорирующую функцию.

Литература

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. 3-е изд., Изд. «Лань», 2008. 288 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости 3-е изд., стер. Изд. «Лань», 2008. 480 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., Изд. «Лань» стер 576 с.
4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям 8-е изд., Изд. «Лань», стер., 2009 432 с.
5. Матвеев П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений 1-е издание. Изд. «Лань», 2008. 336 с.
6. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения 4-е изд., Изд. «Лань» 2009. 304 с.
7. Шампайн Л. Ф. Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием matlab. 1-е изд, Изд.

«Лань», 2009. 304 с.

Занятие 7. Системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение следующими *общекультурными компетенциями*:

- навыками межличностных отношений; готовностью к работе в команде;
- знаниями этических норм и использованием их в профессиональной деятельности;
- способностью применять знания на практике;
- способностью к анализу и синтезу;

профессиональными компетенциями:

1) в сфере научно-исследовательской деятельности:

- умением понять поставленную задачу;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний;

13) в сфере проектной и производственно-технологической деятельности:

- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных и профессиональных позиций;
- пониманием сущности и значения информации в развитии современного общества; владение основными методами.

Проверка теоретических знаний

1. Дать определение системы линейных однородных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

(Система линейных однородных уравнений первого порядка, записанная в векторном виде

$$Y' = AY \quad (1)$$

с вектор-столбцом $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ и невырожденной постоянной матрицей $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, называется линейной однородной системой уравнений с постоянными коэффициентами.)

2. Если рассматривать уравнение (1), как обыкновенное уравнение первого порядка ($n = 1$), то какой вид имеет его решение с начальным условием $Y(x_0) = Y_0$.

(Его решение дается экспонентой $Y(x) = e^{A(x-x_0)} Y_0$.)

3. Нельзя ли использовать известное решение уравнения первого порядка для построения интегральных функций однородных систем.

(В общем случае, когда $n \neq 1$, решение можно найти по той же формуле, необходимо только знать, что понимается под экспонентой матрицы. Экспонентой e^A матрицы A называется равномерно сходящийся ряд

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots, \quad (2)$$

где E - единичная диагональная матрица.)

4. Для какой матрицы A члены ряда (2) вычисляются наиболее просто.

(Вычисление e^A легче выполнить, если A - диагональная матрица.)

5. Какие сведения из курса алгебры позволяют привести матрицу A к диагональному виду или к почти диагональной форме.

(С помощью элементарных преобразований любая невырожденная матрица переходит в эквивалентную матрицу и может быть приведена к жордановой канонической форме.)

6. Если имеется некоторое преобразование B , которое связывает две эквивалентные матрицы A, A^* , то с помощью каких равенств осуществляется переход от одной матрицы к другой.

(Переход от невырожденной матрицы A к виду A^* : $B: A \xrightarrow{B} A^*$ можно осуществить с помощью равенства $BAB^{-1} = A^*$, где B - обратимая матрица преобразования. Очевидно, такое преобразование обратимо с той же матрицей преобразования: $A^* \xrightarrow{B} A, A = B^{-1}A^*B$.)

7. Единственно ли такое преобразование, связывающее две эквивалентные матрицы.

(Таких преобразований существует бесконечное множество, но все матрицы преобразования подобны между собой).

8. Как называется базис в котором матрица A будет иметь жорданов канонический вид.

(Базис, в котором матрица A имеет канонический вид называется *собственным базисом*.)

9. В каком случае матрица A в собственном базисе (A^*) имеет диагональный вид.

(Если матрица A имеет n - различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то A^* - диагональна.)

10. Как можно определить собственные значения матрицы A .

(Собственные значения матрицы A можно определить, как корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, где E - единичная диагональная матрица, λ - произвольный параметр.)

11. Если A^* имеет диагональный вид, тогда какой вид имеет экспонента такой матрицы e^{A^*x} .

(Экспонента такой матрицы e^{A^*x} также диагональна, с диагональными элементами $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$.)

12. Какой канонический вид имеет матрица A , если ее собственные значения кратны.

(В этом случае жорданова каноническая форма не имеет диагонального вида, а получается, как сумма диагональной матрицы, с собственными числами на диагонали, и нильпотентной клетки.)

13. Дайте определение *нильпотентной* матрицы.

(Матрица Δ называется *нильпотентной*, если в ней имеется только одна неглавная диагональ отличная от нуля и, следовательно, некоторая ее степень равна нулю. Вообще, нильпотентная клетка имеет все элементы на диагонали и ниже равные нулю

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.)$$

14. Как определяется степень Δ^m нильпотентной матрицы.

(Если Δ - нильпотентная матрица, то Δ^m , $m=1,2,\dots,k$ получается из исходной матрицы с помощью сдвига на $m-1$ диагональ вверх (количество ненулевых элементов также уменьшается на $m-1$), т.е. Δ^m имеет вид

$$\Delta^m = \begin{pmatrix} 0 & \underbrace{0 \dots 0}_{m-1} 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{0 \dots 0}_{m-1} 1 & \dots \\ & & \underbrace{0 \dots 0}_{m-1} 1 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}.)$$

15. Как запишется ряд для e^Δ .

(Ряд для e^Δ обрывается, то есть сводится к конечной сумме $e^\Delta = E + \Delta + \frac{\Delta^2}{2!} + \dots + \frac{\Delta^k}{k!}$,

где k - количество единиц на диагонали первоначальной клетки Δ .)

16. Если матрица A имеет собственное число λ кратности n , то как можно записать ее жорданову каноническую форму.

(Каноническая форма может быть представлена в виде матрицы: $A^* = \lambda E + \Delta$, где E - единичная матрица n - го порядка, Δ - нильпотентная матрица n -го порядка.)

17. Как запишется ряд для e^{A^*x} .

$$(e^{A^*x} = e^{(\lambda E + \Delta)x} = e^{\lambda Ex} e^{\Delta x} = e^{\lambda x} E e^{\Delta x} = e^{\lambda x} e^{\Delta x}, \text{ где } e^{\Delta x} = E + \Delta x + \frac{\Delta^2 x^2}{2!} + \dots + \frac{\Delta^{n-1} x^{n-1}}{(n-1)!}.)$$

18. Какой вид имеет матрица e^{A^*x} , если $A^* = \lambda E + \Delta$.

$$e^{\lambda x} e^{\Delta x} = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x & \dots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & x & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & x \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Практические задания

Пример 1. Найти частное решение системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2, \\ y_2' = 2y_2, \\ y_3' = -2y_1 - 2y_2 - y_3, \end{cases}$$

удовлетворяющее задачи Коши: $y_1|_{t=0}=1$, $y_2|_{t=0}=3$, $y_3|_{t=0}=-2$.

Решение. В векторном виде система примет вид

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} Y, \quad Y = (y_1, y_2, y_3)^T.$$

Представим матрицу системы в жордановом каноническом виде. Для этого необходимо найти собственные числа матрицы A , используя уравнение на собственные значения $\det(A - \lambda E) = 0$,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда корни уравнения имеют вид: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$. Так как собственные числа различны, то A в собственном базисе диагональна и имеет вид

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

тогда матрица $e^{A(t-t_0)}$ в собственном базисе будет в виде

$$Y^* = e^{A^*(t-t_0)} = \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(t-t_0)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t_0-t} \end{pmatrix}.$$

Выражая собственный базис через исходный необходимо решить уравнение $AB = BA^*$, где B – матрица преобразований, приводящая матрицу A к канонической жордановой форме. Нахождение матрицы B неоднозначно и возможно при условии, что матрица A – невырожденная. Выберем B такую, что $\det B \neq 0$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

В исходном базисе матрицу $Y = e^{A(t-t_0)}$ можно выразить из равенства $YB = BY^*$

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(t-t_0)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t_0-t} \end{pmatrix},$$

$$Y = e^{A(t-t_0)} = \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & 2e^{2(t-t_0)} - 2e^{t-t_0} & 0 \\ 0 & e^{2(t-t_0)} & 0 \\ e^{t_0-t} - e^{t-t_0} & -2e^{2(t-t_0)} + 2e^{t-t_0} & e^{t_0-t} \end{pmatrix}.$$

Решение исходной системы запишем в векторном виде $Y(t) = e^{A(t-t_0)}Y_0$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t-t_0} & 2e^{2(t-t_0)} - 2e^{t-t_0} & 0 \\ 0 & e^{2(t-t_0)} & 0 \\ e^{t_0-t} - e^{t-t_0} & -2e^{2(t-t_0)} + 2e^{t-t_0} & e^{t_0-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ y_{03} \end{pmatrix}$$

или, после перемножения

$$y_1 = y_{01}e^{t-t_0} + y_{02}(2e^{2(t-t_0)} - 2e^{t-t_0}),$$

$$y_2 = y_{02}e^{2(t-t_0)},$$

$$y_3 = y_{01}(e^{t_0-t} - e^{t-t_0}) + y_{02}(2e^{t-t_0} - 2e^{2(t-t_0)}) + y_{03}e^{t_0-t}.$$

Найдем решение задачи Коши, для этого подставим заданные условия $y_1|_{t=0}=1, y_2|_{t=0}=3, y_3|_{t=0}=-2$, тогда частное решение примет вид

$$y_1 = 3e^{2t} - 5e^t, \quad y_2 = 3e^{2t}, \quad y_3 = 5e^t - 6e^{2t} - e^{-t}.$$

Если задача Коши не задана, то для записи общего решения введем обозначения постоянных $C_1 = (y_{01} - 2y_{02})e^{-t_0}, \quad C_2 = y_{02}e^{-2t_0},$

$C_3 = (y_{01} + y_{03})e^{t_0}$, тогда общее решение примет вид

$$y_1 = C_1e^t + 2C_2e^{2t}, \quad y_2 = C_2e^{2t}, \quad y_3 = C_3e^{-t} - C_1e^t - 2C_2e^{2t}.$$

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = 13y_1 + 16y_2 + 16y_3, \\ y_2' = -5y_1 - 7y_2 - 6y_3, \\ y_3' = -6y_1 - 8y_2 - 7y_3, \end{cases}$$

Решение. Система имеет следующее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & 16 & 16 \\ -5 & -7-\lambda & -6 \\ -6 & -8 & -7-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

корни которого $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Таким образом λ_1 - простой корень, а значение 1 - корень второй кратности. Жорданова каноническая форма

рассматриваемой системы не является чисто диагональной, а представляет матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Экспонента полученной матрицы определяется по формуле (201), и примет вид

$$\begin{pmatrix} e^{-3x} & 0 & 0 \\ 0 & e^x & xe^x \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}. \quad (202)$$

Корень $\lambda_1 = -3$ является однократным, поэтому частные решения соответствующие этому корню представим в виде $y_1 = k_1 e^{-3x}$, $y_2 = k_2 e^{-3x}$, $y_3 = k_3 e^{-3x}$, и найдем соотношения между коэффициентами исходя из системы

$$\begin{aligned} -3k_1 &= 13k_1 + 16k_2 + 16k_3, \\ -3k_2 &= -5k_1 - 7k_2 - 6k_3, \\ -3k_3 &= -6k_1 - 8k_2 - 7k_3, \end{aligned}$$

которая эквивалентна двум уравнениям

$$\begin{cases} k_1 = -k_2 - k_3, \\ k_2 - k_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} k_1 = -2k_3, \\ k_2 = k_3, \end{cases} \quad k_1 : k_2 : k_3 = -2 : 1 : 1,$$

следовательно $y_1 = -2C_1 e^{-3x}$, $y_2 = C_1 e^{-3x}$, $y_3 = C_1 e^{-3x}$.

Корень $\lambda_2 = 1$ двукратный, поэтому функции xe^x , e^x связаны и решения будем искать в виде линейной комбинации этих функций: $y_1 = (a_1 + a_2 x)e^x$, $y_2 = (b_1 + b_2 x)e^x$, $y_3 = (c_1 + c_2 x)e^x$. Найдем соотношения между коэффициентами из системы

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2) + a_2 x &= 13(a_1 + a_2 x) + 16(b_1 + b_2 x) + 16(c_1 + c_2 x), \\ (b_1 + b_2) + b_2 x &= -5(a_1 + a_2 x) - 7(b_1 + b_2 x) - 6(c_1 + c_2 x), \\ (c_1 + c_2) + c_2 x &= -6(a_1 + a_2 x) - 8(b_1 + b_2 x) - 7(c_1 + c_2 x), \end{aligned}$$

приравнявая коэффициенты при x и без x имеем

$$\begin{aligned} 0 &= 3a_2 + 4b_2 + 4c_2, & a_2 &= 12a_1 + 16b_1 + 16c_1, \\ 5a_2 &= -8b_2 - 6c_2, & b_2 &= -5a_1 - 8b_1 - 6c_1, \\ & & c_2 &= -6a_1 - 8b_1 - 8c_1, \end{aligned}$$

тогда

$$c_2 = 2b_2, \quad a_2 = -4b_2, \quad a_1 = -2b_1 - c_1, \quad b_2 = 2b_1 - c_1,$$

в этом случае осталось два произвольных параметра $b_1 = C_3$, $c_1 = C_2$, следовательно:

$$y_1 = -([2C_3 + C_2] + [8C_3 - 4C_2]x)e^x, \quad y_2 = (C_3 + [2C_3 - C_2]x)e^x, \quad y_3 = (C_2 + [4C_3 - 2C_2]x)e^x.$$

В силу линейности системы можно объединить оба частных решения, тогда получим общее решение системы

$$\begin{aligned}y_1 &= -2C_1e^{-3x} - ([2C_3 + C_2] + [8C_3 - 4C_2]x)e^x, \\y_2 &= C_1e^{-3x} + (C_3 + [2C_3 - C_2]x)e^x, \\y_3 &= C_1e^{-3x} + (C_2 + [4C_3 - 2C_2]x)e^x.\end{aligned}$$

Пример 3. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 6y_2, \\ y_2' = -3y_1 - 5y_2, \\ y_3' = -3y_1 - 6y_2 + y_3. \end{cases}$$

Решение. Определитель, составленный из коэффициентов правой части системы

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

следовательно, система неособенная. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

и найдем его корни: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Как показывают алгебраические исследования, при построении Жордановой канонической формы $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ являются не кратными, а повторяющимися корнями, поэтому матрица A^* имеет диагональный вид:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда фундаментальная система решений состоит только из двух функций: e^x , e^{-2x} . Представляя решения в виде $y_1 = a_1e^{-2x} + b_1e^x$, $y_2 = a_2e^{-2x} + b_2e^x$, $y_3 = a_3e^{-2x} + b_3e^x$, получим следующую связь: $a_1 : a_2 : a_3 = -1 : 1 : 1$, $b_1 : b_2 = -2 : 1$, b_3 – произвольный параметр. Общее решение примет вид:

$$y_1 = -C_1e^{-2x} - 2C_2e^x, \quad y_2 = C_1e^{-2x} + C_2e^x, \quad y_3 = C_1e^{-2x} + C_3e^x.$$

Задачи для репродуктивной работы

Самостоятельная работа по образцу предполагает решение задач на воспроизведение знаний, умений. Все данные для нахождения искомого, а также сам способ выполнения задания представлены в явном виде в самом задании или в соответствующем алгоритме решения (демонстрация решенных заданий)

Возможные формы отчетности: выполненные задания.

1. Решить следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll}
a) \begin{cases} y_1' = 4y_1 + 6y_2, \\ y_2' = -3y_1 - 5y_2, \\ y_3' = -3y_1 + y_3; \end{cases} & б) \begin{cases} y_1' = 3y_1 + 8y_3, \\ y_2' = 3y_1 - y_2 + 6y_3, \\ y_3' = -2y_1 - 5y_3; \end{cases} \\
в) \begin{cases} y_1' = -4y_1 + 2y_2 + 10y_3, \\ y_2' = -4y_1 + 3y_2 + 7y_3, \\ y_3' = -3y_1 + y_2 + 7y_3; \end{cases} & г) \begin{cases} y_1' = 7y_1 - 12y_2 - 2y_3, \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2, \\ y_3' = -2y_1 - 2y_3; \end{cases} \\
д) \begin{cases} y_1' = -2y_1 + 8y_2 + 6y_3, \\ y_2' = -4y_1 + 10y_2 + 6y_3, \\ y_3' = 4y_1 - 8y_2 - 4y_3; \end{cases} & е) \begin{cases} y_1' = 3y_2 + 3y_3, \\ y_2' = -y_1 + 8y_2 + 6y_3, \\ y_3' = 2y_1 - 14y_2 - 10y_3; \end{cases} \\
ж) \begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 + y_3, \\ y_2' = -5y_1 + 21y_2 + 17y_3, \\ y_3' = 6y_1 - 26y_2 - 21y_3; \end{cases} & з) \begin{cases} y_1' = 8y_1 + 30y_2 - 14y_3, \\ y_2' = -5y_1 - 19y_2 + 9y_3, \\ y_3' = -6y_1 - 23y_2 + 11y_3; \end{cases} \\
и) \begin{cases} y_1' = 4y_1 + 5y_2 - 2y_3, \\ y_2' = -2y_1 - 2y_2 + y_3, \\ y_3' = -y_1 - y_2 + y_3; \end{cases} & к) \begin{cases} y_1' = 3y_1 + 7y_2 - 3y_3, \\ y_2' = -2y_1 - 5y_2 + 2y_3, \\ y_3' = -4y_1 - 10y_2 + 3y_3; \end{cases} \\
л) \begin{cases} y_1' = 9y_1 + 22y_2 - 6y_3, \\ y_2' = -y_1 - 4y_2 + y_3, \\ y_3' = 8y_1 + 16y_2 - 5y_3; \end{cases} & м) \begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + 2y_3, \\ y_2' = 3y_1 - 3y_2 + 6y_3, \\ y_3' = 2y_1 - 2y_2 + 4y_3; \end{cases} \\
н) \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - y_3, \\ y_2' = -3y_1 - 3y_2 + 3y_3, \\ y_3' = -2y_1 - 2y_2 + 2y_3; \end{cases} & о) \begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2, \\ y_2' = -4y_1 - y_2, \\ y_3' = 7y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4, \\ y_4' = -17y_1 - 6y_2 - y_3; \end{cases}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
n) \begin{cases} y_1' = -3y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1; \\
p) \begin{cases} y_1' = -7y_1 + y_2, \\ y_2' = -2y_1 - 5y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = 2; \\
c) \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2; \\
m) \begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2, \\ y_2' = 3y_1 + y_2, \end{cases} \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1.
\end{array}$$

Задания для реконструктивной работы

Характерным признаком этих заданий является то, что в самом задании сообщается общая идея решения, а студенту необходимо развить ее в конкретный способ или способы применительно к условиям задачи. Студент соотносит задание с другими, уже известными ему. При этом главное – актуализация имеющихся знаний, умение отбирать и привлекать необходимые знания для решения задачи

Возможные формы отчетности: конспект выполненных заданий; доклад; реферат; отчет.

2. При каких условиях однородная линейная система двух уравнений с постоянными коэффициентами приводится к одному однородному линейному уравнению второго порядка.
3. Доказать, что однородная линейная система двух уравнений

$$\begin{cases} y' = a_{11}y + a_{12}z, \\ z' = a_{21}y + a_{22}z, \end{cases}$$

в случае простого элементарного делителя $(\lambda - \lambda_1)^2$ матрицы коэффициентов имеет фундаментальную систему решений вида $y_1 = C_1 e^{\lambda_1 x}$, $z_1 = C_2 e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = (C_1 x + a) e^{\lambda_1 x}$, $z_2 = C_2 x e^{\lambda_1 x}$.

Найти фундаментальную систему решений такого вида для системы

$$\begin{cases} y' = -y + z, \\ z' = -y - 3z. \end{cases}$$

Задания для эвристической работы

Такая работа предполагает создание нестандартных ситуаций, решение нетиповых задач. В ее основе – поиск, догадка, формулирование и реализация идеи решения. Однако поиск имеет частичный характер, необходимый лишь для выполнения какого-либо фрагмента общего задания.

Возможные формы отчетности: создание математической модели, отчет по заданной форме; план; конспект; сценарий; продукт деятельности арт-технологий (рисунок); аналитический отчет по заданной форме

4. С помощью замены независимой переменной привести систему к системам с постоянными коэффициентами и проинтегрировать их:

$$\text{а) } \begin{cases} 2\sqrt{x}y' = 2y - z, \\ 2\sqrt{x}z' = y + 2z; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 y' = -y - 2z, \\ x^2 z' = 3y + 4z. \end{cases}$$

- 5*. Найти четвертые приближения для системы

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = y, \end{cases}$$

при начальных данных: $y = 1$, $z = 0$, при $x = 0$.

Литература

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. 3-е изд., Изд. «Лань», 2008. 288 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости 3-е изд., стер. Изд. «Лань», 2008. 480 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., Изд. «Лань» стер 576 с.
4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным

- дифференциальным уравнениям 8-е изд., Изд. «Лань», стер., 2009 432 с.
5. Матвеев П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений 1-е издание. Изд. «Лань», 2008. 336 с.
 6. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения 4-е изд., Изд. «Лань» 2009. 304 с.
 7. Шампайн Л. Ф. Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием matlab. 1-е изд, Изд. «Лань», 2009. 304 с.

Занятие 8. Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение следующими *общекультурными компетенциями*:

- навыками межличностных отношений; готовностью к работе в команде;
- знаниями этических норм и использованием их в профессиональной деятельности;
- способностью применять знания на практике;
- способностью к анализу и синтезу;

профессиональными компетенциями:

1) в сфере научно-исследовательской деятельности:

- умением понять поставленную задачу;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний;

14) в сфере проектной и производственно-технологической деятельности:

- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных и профессиональных позиций;
- пониманием сущности и значения информации в развитии современного общества; владение основными методами.

Проверка теоретических знаний

1. Дать определение *системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами*.

(Система уравнений вида

где a_{ij} - постоянные числа, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ - заданная на интервале (α, β) непрерывные функции, называется системой линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.)

(Неоднородную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно записать в виде $\frac{dY}{dx} = AY + F(x)$, где $Y(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))^T$ - неизвестная

3. Сформулируйте теорему об общем решении неоднородной линейной системы.

(Частное решение можно искать несколькими способами: матричным методом, методом вариации произвольных постоянных и методом неопределенных коэффициентов.)

(Этот способ наиболее приемлем когда матрица A не имеет кратных собственных значений, при этом система в собственном базисе распадается на n независимых линейных уравнений 1-го порядка, интегрирование которых выполняется очень просто.)

(Используя теоремы линейной алгебры, с помощью преобразующей матрицы B , можно привести систему к следующему виду

где $A \xrightarrow{B} A^*$, $Y \xrightarrow{B} Z$, $F \xrightarrow{B} H$, матрица A^* , векторы Z и H - элементы в собственном базисе.)

(С помощью этого же невырожденного преобразования можно полученное решение Z преобразовать к искомому решению Y : $BZ = Y$.)

II. Метод вариации произвольных постоянных

8. Когда предпочтительней применять метод вариации произвольных постоянных.

(Метод *вариации произвольных постоянных* (метод Лагранжа) является универсальным методом и применяется, когда функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ не являются квазимногочленами. Этот подход лучше использовать, когда матрица A имеет кратные собственные значения и система не распадается на независимые уравнения.)

9. На чем основан метод вариации произвольных постоянных.

(Только найдя общее решение однородной системы $\frac{dY}{dx} = AY$, можно перейти к отысканию частного решения неоднородной системы $\frac{dY}{dx} = AY + F(x)$.)

III. Метод неопределенных коэффициентов

10. Когда предпочтительней применять метод неопределенных коэффициентов.

(Если в системе функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ - являются квазимногочленами или приводимы к виду $f_i(x) = \sum_j P_{ij}^{s_j}(x)e^{\mu_j x}$, $i=1, 2, \dots, n$, где s_j - порядок (степень) многочлена, то решение неоднородной системы можно искать методом неопределенных коэффициентов.)

11. Опишите основную идею метода неопределенных коэффициентов.

(Пусть все функции $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ приведены к виду $f_i(x) = \sum_j P_{ij}^{s_j}(x)e^{\mu_j x}$, $i=1, 2, \dots, n$ и уравнение на собственные значения с матрицей A :

$\det(A - \lambda E) = 0$ имеет корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ с соответствующими кратностями $k_1, k_2, \dots, k_m$, $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$. Возможны две ситуации:

А). Ни одно λ_j ($j=1, \dots, m$) не совпадает ни с одним μ_i , $\lambda_j \neq \mu_i$ ($j=1, \dots, m$; $i=1, 2, \dots, n$), тогда решения будем искать в виде линейной комбинации квазимногочленов того же порядка, что и функции $\sum_j P_{ij}^{s_j}(x)e^{\mu_j x}$, но с неизвестными коэффициентами

$$\tilde{y}_i = Q_{i1}^{s_1}(x)e^{\mu_1 x} + Q_{i2}^{s_2}(x)e^{\mu_2 x} + \dots + Q_{in}^{s_n}(x)e^{\mu_n x}, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

где многочлены $Q_{ij}^{s_j}(x)e^{\mu_j x}$ имеют тот же порядок s_j , что и $P_{ij}^{s_j}(x)e^{\mu_j x}$ при соответствующих μ_j .

Б). Если λ_j совпадает с каким-либо μ_p , тогда у соответствующего квазимногочлена следует повысить порядок на k_j - порядок кратности собственного значения λ_j , т.е. частное решение следует искать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i = & Q_{i1}^{s_1}(x)e^{\mu_1 x} + \dots + Q_{i(p-1)}^{s_{p-1}}(x)e^{\mu_{p-1} x} + Q_{ip}^{s_p+k_j}(x)e^{\lambda_j x} + \\ & + Q_{i(p+1)}^{s_{p+1}}(x)e^{\mu_{p+1} x} + \dots + Q_{in}^{s_n}(x)e^{\mu_n x}, \quad \lambda_j = \mu_p, \quad i=1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

12. Как определяются неизвестные коэффициенты в $Q_{ij}^{s_j}(x)e^{\mu_j x}$.

(Неизвестные коэффициенты многочленов $Q_{ij}^{s_j}(x)$ можно получить, подставив решение в исходную систему $\frac{dY}{dx} = AY + F(x)$. Путем приравнивания коэффициентов при одинаковых

членах в правой и левой частях соотношения $\frac{dY}{dx} = AY + F(x)$, получим систему линейных уравнений для этих коэффициентов.)

Практические задания

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 7y_2 - 3y_3 + \sin 2x, \\ y_2' = -2y_1 - 5y_2 + 2y_3 - x, \\ y_3' = -4y_1 - 10y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

Решение. Для системы матрица A в каноническом жордановом виде имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = A^*.$$

Используя уравнение $BA^* = AB$, получим матрицу перехода B (одну из невырожденных матриц, так как подобных матриц существует бесконечное множество) из собственного базиса, где матрица имеет диагональный вид, в исходный базис с матрицей A

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -1+2i & -1-2i \\ 1 & 1-i & 1+i \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для сведения заданной системы к виду (206) преобразуем $F(x)$ с помощью равенства $BH(x) = F(x)$,

$$\begin{pmatrix} -2 & -1+2i & -1-2i \\ 1 & 1-i & 1+i \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ h_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin 2x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4x - 2\sin 2x \\ \frac{1}{2}((1+i)\sin 2x + (2+3i)x) \\ \frac{1}{2}((1-i)\sin 2x + (2-3i)x) \end{pmatrix} = H(x).$$

Однородное уравнение с диагональной матрицей A^* имеет вид распадающихся уравнений первого порядка

$$z_1' = z_1 - 4x - 2\sin 2x,$$

$$z_2' = iz_2 + \frac{1}{2}((1+i)\sin 2x + (2+3i)x),$$

$$z_3' = -iz_3 + \frac{1}{2}((1-i)\sin 2x + (2-3i)x).$$

Интегрируя каждое, получаем

$$z_1 = C_1 e^x + 4(x+1) + \frac{2}{5}(2 \cos 2x + \sin 2x),$$

$$z_2 = C_2 e^{ix} + \frac{1}{2}(2+3i)(1+ix) - \frac{1}{6}(1+i)(2 \cos 2x + i \sin 2x),$$

$$z_3 = C_3 e^{-ix} + \frac{1}{2}(2-3i)(1-ix) + \frac{1}{6}(1-i)(i \sin 2x - 2 \cos 2x), \quad C_1, C_2, C_3 - \text{const.}$$

Используя формулу связи $BZ = Y$, перейдем к исходному базису

$$\begin{pmatrix} -2 & -1+2i & -1-2i \\ 1 & 1-i & 1+i \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^x + 4(x+1) + \frac{2}{5}(2 \cos 2x + \sin 2x) \\ C_2 e^{ix} + \frac{1}{2}(2+3i)(1+ix) - \frac{1}{6}(1+i)(2 \cos 2x + i \sin 2x) \\ C_3 e^{-ix} + \frac{1}{2}(2-3i)(1-ix) + \frac{1}{6}(1-i)(i \sin 2x - 2 \cos 2x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

тогда решение системы выглядит так:

$$y_1 = -2C_1 e^x + (2N - M) \cos x - (N + 2M) \sin x - 16 - 9x + \frac{2}{5} \cos 2x - \frac{7}{15} \sin 2x,$$

$$y_2 = C_1 e^x + (M - N) \cos x + (N + M) \sin x + 9 + 3x + \frac{2}{5} \sin 2x - \frac{8}{15} \cos 2x,$$

$$y_3 = C_1 e^x + 2M \cos x + 2N \sin x + 8 - 2x + \frac{16}{15} \sin 2x - \frac{8}{15} \cos 2x,$$

где для преобразований показательной функции с мнимым показателем были использованы формулы Эйлера и введены обозначения $C_2 + C_3 = M$, $i(C_2 - C_3) = N$.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 + 5y_2 - 2y_3 + e^{2t}, \\ y_2' = -2y_1 - 2y_2 + y_3 + t, \\ y_3' = -y_1 - y_2 + y_3. \end{cases}$$

Решение. Сначала решаем однородную систему. Характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. После дополнительных алгебраических исследований получаем, что в данном случае корень трехкратный, следовательно, решения лучше искать как линейную комбинацию функций, образующих матрицу e^{A^*t} , т.е. $e^t, te^t, \frac{t^2}{2}e^t$.

Представляя решение однородного уравнения в виде

$$y_1 = k_{11}e^t + k_{12}te^t + \frac{k_{13}}{2}t^2e^t,$$

$$y_2 = k_{21}e^t + k_{22}te^t + \frac{k_{23}}{2}t^2e^t,$$

$$y_3 = k_{31}e^t + k_{32}te^t + \frac{k_{33}}{2}t^2e^t,$$

в исходную однородную систему получим, что условие на коэффициенты примет вид

$$k_{13} : k_{23} : k_{33} = -1 : 1 : 1, \quad k_{22} = k_{13} + k_{32}, \quad k_{12} = -2k_{13} - k_{32},$$

$$k_{11} = -2k_{32} - k_{31} + k_{13}, \quad k_{21} = k_{32} + k_{31} - k_{13},$$

полагая $k_{13} = C_3$, $k_{32} = C_2$, $k_{31} = C_1$ - произвольными постоянными, находим следующий вид общего решения однородной системы уравнений

$$y_1 = -e^t \left(C_1 + C_2[2+t] + C_3 \left[2t + \frac{t^2}{2} - 1 \right] \right),$$

$$y_2 = e^t \left(C_1 + C_2[1+t] + C_3 \left[t + \frac{t^2}{2} - 1 \right] \right),$$

$$y_3 = e^t \left(C_1 + C_2t + C_3 \frac{t^2}{2} \right).$$

Для нахождения частного решения неоднородной системы воспользуемся методом вариации произвольных постоянных Лагранжа. Будем считать $C_1 = C_1(x)$, $C_2 = C_2(x)$, $C_3 = C_3(x)$ функциями от x . Тогда после подстановки в исходную систему уравнений получим

$$-e^t \left(C_1' + C_2'[2+t] + C_3' \left[2t + \frac{t^2}{2} - 1 \right] \right) = e^{2t},$$

$$e^t \left(C_1' + C_2'[1+t] + C_3' \left[t + \frac{t^2}{2} - 1 \right] \right) = t,$$

$$e^t \left(C_1' + C_2't + C_3' \frac{t^2}{2} \right) = 0.$$

или после элементарных преобразований

$$C_3' = -e^t - 2te^{-t},$$

$$C_2' + C_3'[t-1] = te^{-t},$$

$$C_1' + C_2't + C_3' \frac{t^2}{2} = 0.$$

Найдем неизвестные функции

$$C_3 = -e^t + 2(t+1)e^{-t}, \quad C_2 = -(2t^2 + 3t + 3)e^{-t} + (t-2)e^t,$$

$$C_1 = (t^3 + 2t^2 + 4t + 4)e^{-t} + 2e^t(t-1) - e^t \frac{1}{2}t^2.$$

Подставляя найденные функции в общее решение однородной системы, получим частное решение

$$\tilde{y}_1 = 5e^{2t} + 3t + 4, \quad \tilde{y}_2 = -3e^{2t} - 2t - 1, \quad \tilde{y}_3 = t + 4 - 2e^{2t}.$$

Складывая общее решение однородной системы и его частное решение, отвечающее неоднородной части, получим общее решение неоднородной системы

$$y_1 = -e^t \left(C_1 + C_2[2+t] + C_3 \left[2t + \frac{t^2}{2} - 1 \right] \right) + 3t + 4 + 5e^{2t},$$

$$y_2 = e^t \left(C_1 + C_2[1+t] + C_3 \left[t + \frac{t^2}{2} - 1 \right] \right) - 2t - 1 - 3e^{2t},$$

$$y_3 = e^t \left(C_1 + C_2 t + C_3 \frac{t^2}{2} \right) + t + 4 - 2e^{2t}.$$

Пример 3. Решить систему

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 - e^t, \\ y_2' = 2y_2 + 4y_3, \\ y_3' = y_1 - y_3 + t. \end{cases}$$

Решение. Уравнение на собственные значения $\det(A - \lambda E) = 0$ имеет следующие собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$.

Корень $\lambda_3 = 3$ является однократным, поэтому частное решение однородной системы соответствующие этому корню представимо в виде $y_1 = k_1 e^{3t}$, $y_2 = k_2 e^{3t}$, $y_3 = k_3 e^{3t}$, найдем соотношения между коэффициентами, исходя из системы

$$3k_1 = 2k_1 + k_2,$$

$$3k_2 = 2k_2 + 4k_3,$$

$$3k_3 = k_1 - k_3,$$

которая эквивалентна двум уравнениям

$$k_1 = 4k_3, \quad k_2 = 4k_3, \quad k_1 : k_2 : k_3 = 4 : 4 : 1,$$

следовательно $y_1 = 4C_3 e^{3t}$, $y_2 = 4C_3 e^{3t}$, $y_3 = C_3 e^{3t}$.

Корень $\lambda_{1,2} = 0$ двукратный, поэтому функции t , 1 связаны, и решения будем искать в виде линейной комбинации этих функций: $y_1 = a_1 + a_2 t$, $y_2 = b_1 + b_2 t$, $y_3 = c_1 + c_2 t$. Найдем соотношения между коэффициентами из системы

$$\begin{aligned}a_2 &= 2(a_1 + a_2 t) + b_1 + b_2 t, \\b_2 &= 2(b_1 + b_2 t) + 4(c_1 + c_2 t), \\c_2 &= a_1 + a_2 t - c_1 - c_2 t,\end{aligned}$$

приравнивая коэффициенты при t и без t , имеем

$$a_2 : b_2 : c_2 = 1 : -2 : 1, \quad b_1 = a_2 - 2a_1, \quad c_1 = a_1 - a_2,$$

в этом случае осталось два произвольных параметра $a_1 = C_1$, $a_2 = C_2$, тогда

$$y_1 = C_1 + C_2 t, \quad y_2 = C_2 - 2C_1 - 2C_2 t, \quad y_3 = C_1 - C_2 + C_2 t.$$

В результате свойства суперпозиции найденных частных решений общее решение однородной системы примет вид

$$y_1 = C_1 + C_2 t + 4C_3 e^{3t}, \quad y_2 = C_2 - 2C_1 - 2C_2 t + 4C_3 e^{3t}, \quad y_3 = C_1 - C_2 + C_2 t + C_3 e^{3t}.$$

Перейдем к конструированию решения соответствующего неоднородной части. Определим функции $f_i(t)$: $f_1(t) = -e^t$ - квазимногочлен нулевого порядка и $\mu_1 = 1$; $f_2(t) = 0$; $f_3(t) = t$ - квазимногочлен первого порядка и $\mu_3 = 0$. Сравнивая μ_i с λ_j имеем совпадение $\mu_3 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Нуль двукратный корень, поэтому в решении квазимногочлену соответствующему третьей функции необходимо повысить порядок на две единицы, т.е. многочлен должен быть третьего порядка с произвольными коэффициентами.

Замечание 1. Все $\tilde{y}_i$ содержат полный набор квазимногочленов $Q_{ij}^{s_j}(x)e^{\mu_j x}$, но с разными коэффициентами.

Замечание 2. Квазимногочлен степень, которого надо повысить не следует записывать в виде $x^{k_j} Q_{ip}^{s_p}(x)e^{\lambda_j x}$, необходимо использовать полный вид многочлена более высокой степени $Q_{ip}^{s_p+k_j}(x)e^{\lambda_j x}$.

Замечание 3. Если совпадают несколько $\lambda_j = \mu_p$ с различными j и p , то изменение степеней надо выполнить в соответствующих квазимногочленах на соответствующий порядок кратности собственных значений.

С учетом замечаний общий вид частного решения имеет следующее представление

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= \alpha_1 e^t + \alpha_2 t^3 + \alpha_3 t^2 + \alpha_4 t + \alpha_5, \quad \tilde{y}_2 = \beta_1 e^t + \beta_2 t^3 + \beta_3 t^2 + \beta_4 t + \beta_5, \\ \tilde{y}_3 &= \gamma_1 e^t + \gamma_2 t^3 + \gamma_3 t^2 + \gamma_4 t + \gamma_5,\end{aligned}$$

где $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j (j=1, 2, \dots, 5)$ - неизвестные постоянные.

Для определения введенных параметров подставим эти функции в исходную систему и распишем ее по степеням независимой переменной t

$$e^t : \begin{cases} \alpha_1 = 2\alpha_1 + \beta_1 - 1, \\ \beta_1 = 2\beta_1 + 4\gamma_1, \\ \gamma_1 = \alpha_1 - \gamma_1, \end{cases} \quad t^3 : \begin{cases} 0 = 2\alpha_2 + \beta_2, \\ 0 = \beta_2 + 2\gamma_2, \\ 0 = \alpha_2 - \gamma_2, \end{cases} \quad t^2 : \begin{cases} 3\alpha_2 = 2\alpha_3 + \beta_3, \\ 3\beta_2 = 2\beta_3 + 4\gamma_3, \\ 3\gamma_2 = \alpha_3 - \gamma_3, \end{cases}$$

$$t : \begin{cases} 2\alpha_3 = 2\alpha_4 + \beta_4, \\ 2\beta_3 = 2\beta_4 + 4\gamma_4, \\ 2\gamma_3 = \alpha_4 - \gamma_4 + 1, \end{cases} \quad t^0 : \begin{cases} \alpha_4 = 2\alpha_5 + \beta_5, \\ \beta_4 = 2\beta_5 + 4\gamma_5, \\ \gamma_4 = \alpha_5 - \gamma_5, \end{cases}$$

решая системы получим следующие значения постоянных

$$\gamma_1 = -\frac{1}{2}, \quad \beta_1 = 2, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = -\frac{2}{9}, \quad \beta_2 = \frac{4}{9}, \quad \alpha_3 = -\frac{2}{9}, \quad \beta_3 = -\frac{2}{9},$$

$$\alpha_4 = -\frac{1}{9} + \gamma_4, \quad \beta_4 = -\frac{2}{9} - 2\gamma_4, \quad \gamma_2 = -\frac{2}{9}, \quad \gamma_3 = \frac{4}{9}, \quad \gamma_5 = \alpha_5 - \gamma_4, \quad \beta_5 = \gamma_4 - \frac{1}{9} - 2\alpha_5.$$

Среди полученных значений два параметра γ_4, α_5 остались произвольными, это связано с тем, что многочлены вида $at+b$ входят в общее решение однородной системы, где коэффициенты имеют произвольные параметры C_1, C_2 , поэтому здесь можно положить $\gamma_4 = \alpha_5 = 0$, получим следующее частное решение

$$\tilde{y}_1 = -e^t - \frac{2}{9}t^3 - \frac{2}{9}t^2 - \frac{1}{9}t, \quad \tilde{y}_2 = 2e^t + \frac{4}{9}t^3 - \frac{2}{9}t^2 - \frac{2}{9}t - \frac{1}{9}, \quad \tilde{y}_3 = -\frac{1}{2}e^t - \frac{2}{9}t^3 + \frac{4}{9}t^2.$$

Замечание 4. При совпадении $\lambda_j = \mu_p$ рациональной не искать общего решения однородной системы соответствующего корню λ_j , а сразу приступать к нахождению частного решения, учитывая вид квазимногочлена $P_{ip}^{s_j}(x)e^{\mu_p x}$, ($\lambda_j = \mu_p$) и кратность k_j корня λ_j .

В результате проведенных вычислений, объединяя общее решение однородной системы и частное решение неоднородной системы, получим

$$y_1 = C_1 + C_2 t + 4C_3 e^{3t} - e^t - \frac{2}{9}t^3 - \frac{2}{9}t^2 - \frac{1}{9}t,$$

$$y_2 = C_2 - 2C_1 - 2C_2 t + 4C_3 e^{3t} + 2e^t + \frac{4}{9}t^3 - \frac{2}{9}t^2 - \frac{2}{9}t - \frac{1}{9},$$

$$y_3 = C_1 - C_2 + C_2 t + C_3 e^{3t} - \frac{1}{2}e^t - \frac{2}{9}t^3 + \frac{4}{9}t^2.$$

Задачи для репродуктивной работы

Самостоятельная работа по образцу предполагает решение задач на воспроизведение знаний, умений. Все данные для нахождения искомого, а также сам способ выполнения задания представлены в явном виде в самом задании или в соответствующем алгоритме решения (демонстрация решенных заданий)

Возможные формы отчетности: выполненные задания.

1. Решить неоднородные системы уравнений:

$$a) \begin{cases} y'_1 = y_1 - 3y_2 + e^x, \\ y'_2 = 3y_1 + y_2 + e^{2x}; \end{cases} \quad б) \begin{cases} y'_1 = y_1 - 3y_2 + 1, \\ y'_2 = 3y_1 + y_2 + t; \end{cases}$$

$$е) \begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_1 + 2 \sin t; \end{cases} \quad з) \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 + t^2, \\ y_2' = 3y_1 + y_2 + \sin t; \end{cases}$$

$$д) \frac{dx}{dt} + x + y = t^2, \quad \frac{dy}{dt} + z + y = 2t, \quad \frac{dz}{dt} + z = t;$$

$$е) \frac{dx}{dt} + 5x + y = 7e^t - 27, \quad \frac{dy}{dt} = 2x - 3y - 3e^t + 12;$$

$$ж) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dz}{dx} - 2z = e^{2x}, \quad \frac{dz}{dx} + 2 \frac{dy}{dx} - 3y = 0;$$

$$з) \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = x - e^t + e^{-t};$$

$$и) \frac{dx}{dt} = e^t - 5x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 3y + e^{2t}.$$

2. Найти частное решение указанного вида методом неопределенных коэффициентов и построить общее решение:

$$а) \begin{cases} y' = -y + z - 2e^{-x}, \\ z' = -6y + 4z - 4e^{-x}; \end{cases} \quad y_1 = ae^{-x}, \quad z_1 = be^{-x};$$

$$б) \begin{cases} y' = 2y + z - 4, \\ z' = y + 2z + 3x - 6; \end{cases} \quad y_1 = ax + b, \quad z_1 = cx + d;$$

$$в) \begin{cases} y' = 2y - z - \sin x, \\ z' = 3y - 2z - \cos x; \end{cases} \quad y_1 = a \cos x + b \sin x, \quad z_1 = c \cos x + d \sin x.$$

Задания для реконструктивной работы

Характерным признаком этих заданий является то, что в самом задании сообщается общая идея решения, а студенту необходимо развить ее в конкретный способ или способы применительно к условиям задачи.

Студент соотносит задание с другими, уже известными ему. При этом главное – актуализация имеющихся знаний, умение отбирать и привлекать необходимые знания для решения задачи

Возможные формы отчетности: конспект выполненных заданий; доклад; реферат; отчет.

3. Решить неоднородные системы уравнений:

$$а*) \frac{dy}{dx} + \frac{2z}{x^2} = 1, \quad \frac{dz}{dx} + y = x;$$

$$б*) t \frac{dx}{dt} - x - 3y = t, \quad t \frac{dy}{dt} - x + y = 0,$$

Указание. В примерах со звездочкой сделать замену независимого переменного, чтобы привести систему к системе с постоянными коэффициентами.

4. Решить системы методом вариации постоянных:

$$а) \begin{cases} x' = x - y + \frac{1}{\cos t}, \\ y' = 2x - y; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x' = 2y - x, \\ y' = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 2x - y + 15e^t \sqrt{t}; \end{cases}$$

$$з) \begin{cases} x' = y + tg^2 t - 1, \\ y' = -x + tgt; \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} x' = -4x - 2y + \frac{2}{e^t - 1}, \\ y' = 6x + 3y - \frac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

Литература

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. 3-е изд., Изд. «Лань», 2008. 288 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости 3-е изд., стер. Изд. «Лань», 2008. 480 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., Изд. «Лань» стер 576 с.
4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям 8-е изд., Изд. «Лань», стер., 2009 432 с.
5. Матвеев П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений 1-е издание. Изд. «Лань», 2008. 336 с.
6. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения 4-е изд., Изд. «Лань» 2009. 304 с.
7. Шампайн Л. Ф. Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием matlab. 1-е изд, Изд. «Лань», 2009. 304 с.

Тема: ТЕОРИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Занятие 9. Понятие устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение следующими *общекультурными компетенциями*:

- навыками межличностных отношений; готовностью к работе в команде;
- знаниями этических норм и использованием их в профессиональной деятельности;
- принятием различий и мультикультурности;
- способностью применять знания на практике;
- способностью приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии;
- фундаментальной подготовкой по основам профессиональных знаний и готовностью к использованию их в профессиональной деятельности;
- навыками работы с компьютером;
- способностью к анализу и синтезу;

профессиональными компетенциями:

1) в сфере научно-исследовательской деятельности:

- умением понять поставленную задачу;

- пониманием корректности постановок задач;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний;

15) в сфере проектной и производственно-технологической деятельности:

- способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников;
- знанием и следование в жизни кодексу профессиональной этики;
- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;
- пониманием сущности и значения информации в развитии современного общества; владение основными методами, способами и средствами получения и переработки информации.

Проверка теоретических знаний

1. Какие проблемы решает теория устойчивости.

(Во многих задачах важно не конкретное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, а поведение решений при изменении аргумента и начальных условий. Теория устойчивости решает важные задачи, связанные с тем, что для некоторых реальных процессов найти точное решение или весьма сложно или практически невозможно, но при незначительных изменениях некоторых параметров решение, оказывается, найти возможно. Можно ли использовать такое решение для исходной задачи и насколько близко оно будет описывать поведение реального объекта - на этот вопрос дает ответ теория устойчивости.)

2. Какие условия в задачах теории устойчивости являются основополагающими.

(Единственность решения и непрерывная зависимость от параметров или начальных данных)

3. Какая теорема в теории дифференциальных уравнений дает выполнение этих требований.

(Теорема существования и единственности решения.)

4. В чем суть этой теоремы.

(Теорема доказывает, что решение задачи Коши для системы $\frac{dY}{dx} = F(x, Y)$ существует и единственно и непрерывно зависит от начальных условий, если правая часть удовлетворяет условиям теоремы.)

5. Какой смысл в математическом анализе имеет понятие непрерывности для функций.

(Функция - непрерывна, если бесконечно малому изменению аргумента соответствует бесконечно малое изменение функции.)

6. К чему приводит отсутствие выполнения условия непрерывной зависимости.

(Если сколь угодно малые изменения начальных данных способны сильно изменить решение, то решение системы уравнений даже приближенно не может описывать явление, так как

изменение начальных данных может возникнуть в результате неточного их определения. Поэтому важно знать условия, при которых малые изменения условий влекут малые изменения решений.)

7. Сформулируйте понятие непрерывной зависимости решения системы от начальных условий.

(Решение системы $Y = \Phi(x, x_0, Y_0)$ - непрерывно зависит от начальных условий $Y(x_0) = Y_0$, если бесконечно малому изменению начальных условий $|Y_1(x_0) - Y_0(x_0)| \rightarrow 0$ соответствует бесконечно малое изменение функции $|\Phi(x, x_0, Y_1) - \Phi(x, x_0, Y_0)| \rightarrow 0$.)

8. Дайте определение устойчивости решения по Ляпунову.

(Пусть $Y = \Phi(x, x_0, Y_0)$ - решение системы $\frac{dY}{dx} = F(x, Y)$, удовлетворяющее задачи Коши с начальными условиями $Y(x_0) = Y_0$. Решение называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$, существует $\delta(\varepsilon) > 0$ (δ не зависит от x), что для любого начального условия $Y(x_0) = Y_1$, удовлетворяющего неравенству $|Y_1 - Y_0| < \delta$, решение $Y = \Phi(x, x_0, Y_1)$, соответствующее начальному условию с вектором Y_1 , определенное при всех $x \geq x_0$, удовлетворяет неравенству $|\Phi(x, x_0, Y_1) - \Phi(x, x_0, Y_0)| < \varepsilon$.)

9. Дайте определение асимптотической устойчивости решения.

(Пусть $Y = \Phi(x, x_0, Y_0)$ - решение системы $Y' = F(x, Y)$, удовлетворяющее задачи Коши с начальными условиями $Y(x_0) = Y_0$. Решение называется асимптотически устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$, существует $\delta(\varepsilon) > 0$ (δ не зависит от x), что для любого начального условия $Y(x_0) = Y_1$, удовлетворяющего неравенству $|Y_1 - Y_0| < \delta$, решение $Y = \Phi(x, x_0, Y_1)$, соответствующее начальному условию с вектором Y_1 , определенное при всех $x_0 < x \rightarrow \infty$, удовлетворяет равенству $\lim_{x \rightarrow \infty} |\Phi(x, x_0, Y_1) - \Phi(x, x_0, Y_0)| = 0$.)

10. Какое решение называется тривиальным.

(Решение тождественно равно нулю называется тривиальным.)

11. Какой физический смысл имеет тривиальное решение.

(Тривиальное решение в физике называется положением равновесия системы или точкой покоя. Это решение обладает тем свойством, что точка в действительности не движется при изменении независимой переменной x , а стоит на месте.)

12. Какое условие для уравнения $\frac{dY}{dx} = F(x, Y)$ должно выполняться, чтобы оно имело тривиальное решение.

(Уравнение имеет решение тождественно равно нулю, если при этом для любого x выполняется равенство $F(x, 0) = 0$.)

13. Можно ли свести исследование системы $Y' = F(x, Y)$ с ненулевыми заданными условиями $Y(x_0) = Y_0$, к задаче Коши с нулевыми начальными условиями.

(Это можно сделать, если решение системы $Y = \Phi(x, x_0, Y_0)$ - найдено.)

14. Как выполняется преобразование системы, чтобы исследование системы на устойчивость с условиями $Y(x_0) = Y_0$, свести к рассмотрению задачи Коши с нулевыми условиями.

(Исследование устойчивости решения $Y = \Phi(x, x_0, Y_0)$ системы $Y' = F(x, Y)$ можно свести к исследованию устойчивости тривиального решения. Это легко сделать введением новой неизвестной вектор-функции $Z(x) = Y(x) - \Phi(x, x_0, Y_0)$.)

1. В любой δ - окрестности начала координат существует точка $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, в которой $V(y_1, y_2, \dots, y_n) > 0$ (и, следовательно, имеется область в которой $V(y_1, y_2, \dots, y_n) > \alpha > 0$);

2. Для всех $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, удовлетворяющих первому условию, существует $\beta > 0$ такое, что в некоторой ε - окрестности начала координат для всех $x \geq 0$ имеет место

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial y_i} f_i(x, y_1, \dots, y_n) \geq \beta,$$

тогда точка покоя $y_i \equiv 0$ неустойчива.)

Практические задания

Пример 1. Определить, является ли тривиальное решение $y \equiv 0$ уравнения $y' = ky$, $k = \text{const}$

- устойчивым.

Решение. Пусть (x_0, y_0) - некоторые начальные условия, такие, что $|0 - y_0| < \delta$. Решение заданного уравнения имеет вид

$$y = y_0 e^{k(x-x_0)}.$$

По определению устойчивости по Ляпунову при всех $x \geq x_0$ должно выполняться неравенство

$$|0 - y_0 e^{k(x-x_0)}| = e^{k(x-x_0)} |0 - y_0| < \varepsilon,$$

тогда для любого $\varepsilon > 0$ должно выполняться соотношение $e^{k(x-x_0)} \delta < \varepsilon$. Неравенство содержит параметр k , рассмотрим три случая: $k < 0$, $k = 0$ и $k > 0$.

а). При $k < 0$, наблюдается асимптотическая устойчивость, так как

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \delta e^{k(x-x_0)} = 0,$$

следовательно решение $y \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову.

б) Если $k = 0$, то $e^{k(x-x_0)} = 1$, при $y_0 \neq 0$ разность $|0 - y_0| < \delta \leq \varepsilon$ не стремится к нулю, и решение $y \equiv 0$, устойчивое по Ляпунову, не является асимптотически устойчивым.

в) $k > 0$. При $y_0 \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \delta e^{k(x-x_0)} = \infty,$$

следовательно, решение $y \equiv 0$ неустойчиво.

Пример 2. Доказать, что система

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 y_3^2, \\ y_2' = y_2 y_3^4, \\ y_3' = -y_3 y_2^2. \end{cases}$$

имеет устойчивую точку покоя.

Решение. Легко проверить, что точка покоя $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ является решением данной системы. Выясним, будет ли оно устойчиво. Положим

$V(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^4 \geq 0$, которая обращается в нуль в точке покоя. Кроме того

$$-\frac{\partial V}{\partial y_1} y_1 y_3^2 + \frac{\partial V}{\partial y_2} y_2 y_3^4 - \frac{\partial V}{\partial y_3} y_3 y_2^2 = -2y_1^2 y_3^2 - 2y_2^2 y_3^4 \leq 0.$$

В силу теоремы Ляпунова, положение равновесия $(0,0,0)$ рассматриваемой системы устойчиво по Ляпунову.

Кроме того, вдоль фазовой траектории вне окрестности начала координат $(y_1^2 + y_2^2 + y_3^4 \geq \delta > 0)$ выполняется условие асимптотической устойчивости. Следовательно, тривиальное решение асимптотически устойчиво.

Пример 3. Доказать неустойчивость тривиального решения системы

$$\begin{cases} y_1' = y_1 y_2^4, \\ y_2' = y_2 y_1^2. \end{cases}$$

Решение. Выберем $V(y_1, y_2) = y_1 y_2$. Для всех точек принадлежащих первому и третьему квадранту выполняется неравенство $V = y_1 y_2 > 0$. Область для которой $V = y_1 y_2 > \alpha$ имеет вид рис. 1 а. Очевидно $y_1^2 + y_2^2 \geq 2y_1 y_2 > 2\alpha$, следовательно $\sqrt{y_1^2 + y_2^2} > \sqrt{2\alpha}$. Определяя $\frac{\partial V}{\partial y_1} = y_2$, $\frac{\partial V}{\partial y_2} = y_1$, и используя

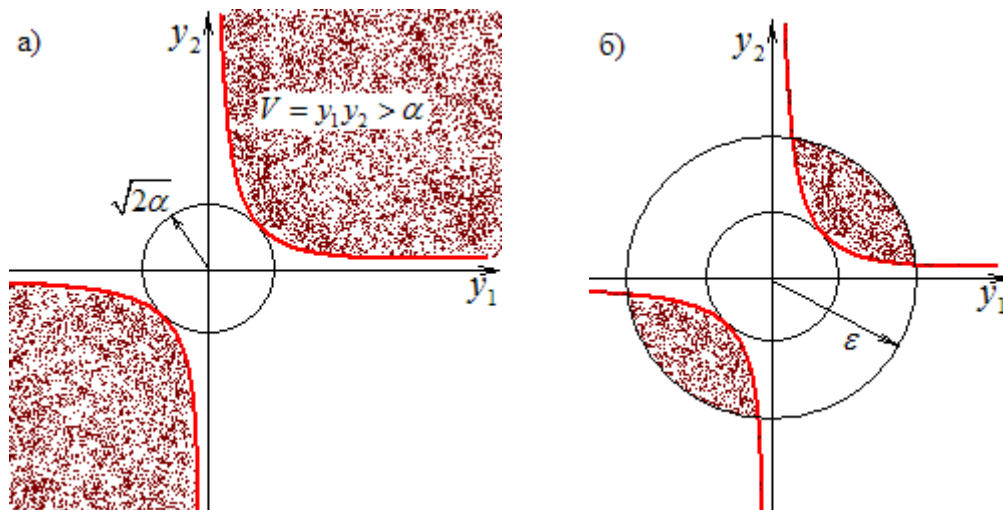


Рис. 1

функции правой части системы имеем

$$\frac{\partial V}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y_2} f_2 = y_1 y_2^5 + y_2 y_1^3 = y_1 y_2 (y_2^4 + y_1^2) > \alpha (y_2^4 + y_1^2).$$

Для выбранного произвольного α существует ϵ - окрестность начала координат рис. 1 б, что для всех точек (y_1, y_2) для которых $y_1 y_2 > \alpha$,

существует $\gamma > 0$ такое, что $y_2^4 + y_1^2 \geq \gamma$, следовательно $\frac{\partial V}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y_2} f_2 > \alpha \gamma = \beta$.

Тем самым выполняется второе условие теоремы о неустойчивости, и поэтому тривиальное решение неустойчивое.

Задачи для репродуктивной работы

Самостоятельная работа по образцу предполагает решение задач на воспроизведение знаний, умений. Все данные для нахождения искомого, а также сам способ выполнения задания представлены в явном виде в самом задании или в соответствующем алгоритме решения (демонстрация решенных заданий)

Возможные формы отчетности: выполненные задания.

1. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, исследовать на устойчивость решения уравнений:

$$a) \frac{dx}{dt} = 2t(x+1), x(0) = 0;$$

$$б) \frac{dx}{dt} = -x + t^2, x(1) = 1.$$

2. Показать, что для уравнения физического маятника

$$y'' = -\sin x$$

положения равновесия $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ устойчивы по Ляпунову, а положения равновесия $x = \frac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, неустойчивы.

3. С помощью функций Ляпунова исследовать на устойчивость тривиальное решение системы

$$a) \begin{cases} y_1' = -y_1^5 - y_2, \\ y_2' = -y_2^3 + y_1; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} y_1' = y_1 y_2^4, \\ y_2' = -y_1^2 y_2; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} y_1' = -y_1^3 + y_2, \\ y_2' = -y_1 - 3y_2^3. \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y + x^2 y^2, \\ \frac{dy}{dt} = x - \frac{y}{2} - \frac{x^3 y}{2}; \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4}, \\ \frac{dy}{dt} = x - \frac{y}{2} - \frac{y^3}{4}; \end{cases}$$

$$е) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x^3 - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 3y^3; \end{cases}$$

$$ж) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4}, \\ \frac{dy}{dt} = x - \frac{y}{2} - \frac{y^3}{4}; \end{cases}$$

$$з) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^5 + y^3, \\ \frac{dy}{dt} = x^3 + y^5; \end{cases}$$

$$и) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^3 + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y^3. \end{cases}$$

Задания для реконструктивной работы

Характерным признаком этих заданий является то, что в самом задании сообщается общая идея решения, а студенту необходимо развить ее в конкретный способ или способы применительно к условиям задачи. Студент соотносит задание с другими, уже известными ему. При этом главное – актуализация имеющихся знаний, умение отбирать и привлекать необходимые знания для решения задачи

Возможные формы отчетности: конспект выполненных заданий; доклад; реферат; отчет.

4. Для данных систем найти положения равновесия и исследовать их на устойчивость:

$$a) \begin{cases} x' = y - x^2 - x, \\ y' = 3x - x^2 - y; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x' = (x-1)(y-1), \\ y' = xy - 2; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x' = 5 - x^2 - y^2, \\ y' = 1 + y^2 - x; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x' = y, \\ y' = \sin(x+y). \end{cases}$$

5. Исследовать, устойчиво ли решение $x = t$, $y = -t^2$, системы:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \ln(1 + 2t - 2x) + 3y + 3t^2 + 1, \\ \frac{dy}{dt} = x^2 - 2tx - 2x - y. \end{cases}$$

6. Исследовать решение системы $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \cos(x_1 + x_2), \end{cases}$

$$X_k = (x_1, x_2) = \left(\frac{\pi}{2}(2k+1), 0 \right), k \in \mathbb{Z}, \text{ на устойчивость.}$$

Ответ: при k - четном, решение асимптотически устойчиво; при k -нечетном - неустойчиво.

Задания для эвристической работы

Такая работа предполагает создание нестандартных ситуаций, решение нетиповых задач. В ее основе – поиск, догадка, формулирование и реализация идеи решения. Однако поиск имеет частичный характер, необходимый лишь для выполнения какого-либо фрагмента общего задания

Возможные формы отчетности: создание математической модели, отчет по заданной форме; план; конспект; сценарий; продукт деятельности арт-технологий (рисунок); аналитический отчет по заданной форме

- 7*. Выяснить, является ли нулевое решение некоторой системы уравнений устойчивым по Ляпунову, если известно, что общее решение этой системы имеет вид:

$$x = \frac{C_1 - C_2 t}{1 + t^2}, \quad y = (C_1 t^3 + C_2) e^{-t}.$$

- 8*. Доказать, что для устойчивости по Ляпунову нулевого решения уравнения $\frac{dx}{dt} = a(t)x$ ($a(t)$ – непрерывна) необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t a(x) dx < +\infty.$$

9. Исследовать вопрос о существовании устойчивых периодических решений уравнений:

- а) Ван-дер-Поля в случае главного резонанса

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + (1 + \mu b)x = (\lambda + \mu\beta) \sin t, \quad \mu > 0.$$

- б) Дуффинга в случае главного резонанса

$$\ddot{x} + x = \mu(\beta \sin t - bx + \gamma x^3).$$

Литература

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. 3-е изд., Изд. «Лань», 2008. 288 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости 3-е изд., стер. Изд. «Лань», 2008. 480 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным

- уравнениям. 6-е изд., Изд. «Лань» стер 576 с.
4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям 8-е изд., Изд. «Лань», стер., 2009 432 с.
 5. Матвеев П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений 1-е издание. Изд. «Лань», 2008. 336 с.
 6. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения 4-е изд., Изд. «Лань» 2009. 304 с.
 7. Шампайн Л. Ф. Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием matlab. 1-е изд, Изд. «Лань», 2009. 304 с.

Занятие 10. Устойчивость линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Поведение траекторий линейной однородной системы второго порядка

Цель занятия - развитие у обучающихся личностных качеств, а также направлено на овладение следующими *общекультурными компетенциями*:

- навыками межличностных отношений; готовностью к работе в команде;
- знаниями этических норм и использованием их в профессиональной деятельности;
- принятием различий и мультикультурности;
- способностью применять знания на практике;
- способностью приобретать новые знания, используя современные образовательные и информационные технологии;
- фундаментальной подготовкой по основам профессиональных знаний и готовностью к использованию их в профессиональной деятельности;
- навыками работы с компьютером;
- способностью к анализу и синтезу;

профессиональными компетенциями:

1) в сфере научно-исследовательской деятельности:

- умением понять поставленную задачу;
- пониманием корректности постановок задач;
- глубоким пониманием сути точности фундаментального знания;
- способностью передавать результат проведенных физико-математических и прикладных исследований в виде конкретных рекомендаций, выраженных в терминах предметной области изучавшегося явления;
- умением публично представить собственные и известные научные результаты;
- владением проблемно-задачной формой представления математических знаний;

16) в сфере проектной и производственно-технологической деятельности:

- способностью осуществлять целенаправленный поиск информации о новейших научных и технологических достижениях в сети Интернет и из других источников;

- знанием и следование в жизни кодексу профессиональной этики;
- способностью формировать суждения о значении и последствиях своей профессиональной деятельности с учетом социальных, профессиональных и этических позиций;
- пониманием сущности и значения информации в развитии современного общества; владение основными методами, способами и средствами получения и переработки информации.

Проверка теоретических знаний

1. Запишите линейную однородную систему с постоянными коэффициентами из n дифференциальных уравнений в векторном виде.

(Векторная запись системы имеет вид $Y' = AY$, где $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ - вектор - столбец, A - постоянная действительная матрица.)

2. Какой вид имеют функции входящие в фундаментальную систему решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

(Общий вид таких функций можно записать в виде квазимногочленов $y_k = P_{s_k-1}(x)e^{\lambda_k x}$, где $P_{s_k-1}(x)$ - многочлен $s_k - 1$ порядка, $\lambda_k = \mu_k + i\eta_k$ ($k=1, 2, \dots, m$, $m \leq n$) - собственные значения матрицы A , i - мнимая единица, s_k - кратность корня λ_k .)

3. Как определяются собственные значения матрицы A .

(Собственными значениями матрицы A являются корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$.)

4. Сформулируйте теорему об ограниченности решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

(Лемма. Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то для любого решения $Y = \Psi(x)$ системы $Y' = AY$ существуют такие положительные постоянные α, R , что при $x \geq 0$ $|\Psi(x)| \leq Re^{-\alpha x}$.)

5. Имеет ли линейная однородная система с постоянными коэффициентами тривиальное решение.

(Система $Y' = AY$ всегда имеет решение в виде положения равновесия: $Y = 0$.)

6. Сформулируйте теорему об устойчивости положения равновесия для линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

(Теорема. Для того чтобы положение равновесия $Y = 0$ системы $Y' = AY$ было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения системы ($\det(A - \lambda E) = 0$) имели отрицательные действительные части.)

7. Сформулируйте теорему об устойчивости положения равновесия для линейной неоднородной системы вида $Y' = AY + F(x, Y)$.

(Теорема. Пусть имеется нормальная система уравнений $Y' = AY + F(x, Y)$, $F(x, 0) = 0$, A - матрица с постоянными коэффициентами, все собственные значения которой имеют отрицательные действительные части, и при $x \geq x_0$ и достаточно малом $|Y|$ выполняется неравенство $|F(x, Y)| \leq M|Y|^{\alpha+1}$, где α, M - положительные числа. Тогда положение равновесия $Y = 0$ системы уравнений асимптотически устойчиво.)

8. Сформулируйте теорему об неустойчивости положения равновесия для линейной неоднородной системы вида $Y' = AY + F(x, Y)$.

(Теорема. Пусть задана нормальная система уравнений $Y' = AY + F(x, Y)$, где A - постоянная матрица, имеющая хотя бы одно собственное значение с положительной

действительной частью, и при $X \geq X_0$ и достаточно малом $|Y|$ выполняется неравенство $|F(x, Y)| \leq M|Y|^{\alpha+1}$, тогда положение равновесия $Y = 0$ системы уравнений неустойчиво.)

9. Дать понятие кинематической интерпретации системы уравнений в фазовом пространстве.

(Кинематическая интерпретация в некоторых случаях более выразительна, чем геометрическая, так как каждому решению системы ставится в соответствие не интегральная кривая, а движение точки по кривой.)

10. Дайте классификацию собственных значений матрицы коэффициентов системы однородных линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

(Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (223)$$

может иметь следующие варианты собственных значений:

1. Собственные значения λ_1, λ_2 матрицы A - действительные и различные;

2. Собственные значения λ_1, λ_2 - комплексно сопряженные;

3. Матрица A имеет единственное собственное значение λ_1 второй кратности.)

11. Дайте классификацию видов точек покоя системы однородных линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

12. Изобразите поведение траекторий фазового пространства в окрестности устойчивого узла (неустойчивого узла).

13. Какой вид собственных значений матрицы коэффициентов дает устойчивый узел (неустойчивый узел).

14. Изобразите поведение траекторий фазового пространства в окрестности седловидной точки покоя.

15. Какой вид собственных значений матрицы коэффициентов дает седло.

16. Изобразите поведение траекторий фазового пространства в окрестности центра.

17. Какой вид собственных значений матрицы коэффициентов дает точку покоя в виде центра.

18. Изобразите поведение траекторий фазового пространства в окрестности устойчивого фокуса (неустойчивого фокуса).

19. Какой вид собственных значений матрицы коэффициентов дает точку покоя в виде устойчивого фокуса (неустойчивого фокуса).

20. Перечислите возможные виды вырожденных случаев для систем второго порядка.

21. В каком случае возникает устойчивый вырожденный узел, неустойчивый вырожденный узел, дикритический узел.

22. Какой вид имеют фазовые траектории при двукратном нулевом собственном значении матрицы коэффициентов

(При двукратном корне $\lambda = 0$ и $B \neq 0$ траектории представляют собой семейство параллельных прямых. При $B = 0$ и $C = 0$ все точки решения $y_1 = A$ будут положениями равновесия.)

Практические задания

Пример 1. Доказать, что положение равновесия $Y=0$ системы $Y' = AY$ асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения системы имеют отрицательные действительные части.

Решение. Докажем прямую теорему. Пусть все корни характеристического уравнения системы ($\det(A - \lambda E) = 0$) имеют отрицательные действительные части, и пусть $Y = \Psi(x)$ - некоторое решение системы уравнений. Тогда в силу леммы для любого решения, существуют такие положительные постоянные α, R , что при $x \geq 0$ $|\Psi(x)| \leq Re^{-\alpha x}$. Так как $Y=0$ также является решением этой системы, то оценим разность $|\Psi(x) - Y| = |\Psi(x) - 0| \leq Re^{-\alpha x}$. Переходя к пределу в полученном соотношении при $x \rightarrow \infty$, имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\Psi(x) - Y| = \lim_{x \rightarrow \infty} |\Psi(x) - 0| \leq R \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} = 0.$$

Следовательно, по определению положение равновесия $Y = 0$ асимптотически устойчиво.

Теперь следует доказать обратное утверждение: Если $Y = 0$ асимптотически устойчиво, то все корни характеристического уравнения системы имеют отрицательные действительные части. Воспользуемся известным из курса математической логики законом контрапозиции ($(B \rightarrow G) \Leftrightarrow (\neg G \rightarrow \neg B)$): если имеется теорема $B \rightarrow G$, то она одновременно истинна или ложна вместе с теоремой $\neg G \rightarrow \neg B$, где обозначены следующие логические операции $\rightarrow$ - импликация, $\neg$ - отрицание, $\Leftrightarrow$ - эквиваленция) и, докажем теорему обратную противоположной: *Если хотя бы одно собственное значение матрицы A имеет неотрицательную действительную часть, то положение равновесия $Y=0$ не может быть устойчивым.*

Положим, что имеется хотя бы одно собственное значение матрицы A такое, что $\operatorname{Re} \lambda_1 = \mu_1 \geq 0$ ($\lambda_1 = \mu_1 + i\eta_1$), s_1 - кратность этого корня, тогда решение системы примет вид $\Psi(x) = P_{s_1-1}(x)e^{\lambda_1 x}$. Сделаем оценку разности $|\Psi(x) - Y| = |\Psi(x) - 0|$:

$$\begin{aligned} |\Psi(x) - Y| &= |\Psi(x) - 0| = |P_{s_1-1}(x)e^{\lambda_1 x}| = |P_{s_1-1}(x)e^{(\mu_1 + i\eta_1)x}| = \\ &= |P_{s_1-1}(x)|e^{\mu_1 x} |\cos \eta_1 x + i \sin \eta_1 x| = |P_{s_1-1}(x)|e^{\mu_1 x} \sqrt{\cos^2 \eta_1 x + \sin^2 \eta_1 x} = |P_{s_1-1}(x)|e^{\mu_1 x}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в полученном соотношении при $x \rightarrow \infty$, получим $\lim_{x \rightarrow \infty} |\Psi(x) - Y| = \lim_{x \rightarrow \infty} |\Psi(x) - 0| = \lim_{x \rightarrow \infty} |P_{s_1-1}(x)|e^{\mu_1 x} = \infty$, так как при $\operatorname{Re} \lambda_1 = \mu_1 \geq 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\mu_1 x} = \infty$ выражение не стремится к нулю. Поэтому и любое решение сколь угодно близкое к положению равновесия $Y = 0$ при $x \rightarrow \infty$ не стремится к нулю, тогда положение равновесия не является асимптотически устойчивым. Поэтому верна теорема и противоположная обратной, т.е. если $Y = 0$ асимптотически устойчиво, то все корни характеристического уравнения системы имеют отрицательные действительные части.

Пример 2. Определить при каких параметрах a и b система уравнений

$$y_1' = ay_1 + y_2,$$

$$y_2' = y_1 + by_2,$$

имеет устойчивое тривиальное решение.

Найдем собственные значения характеристического уравнения

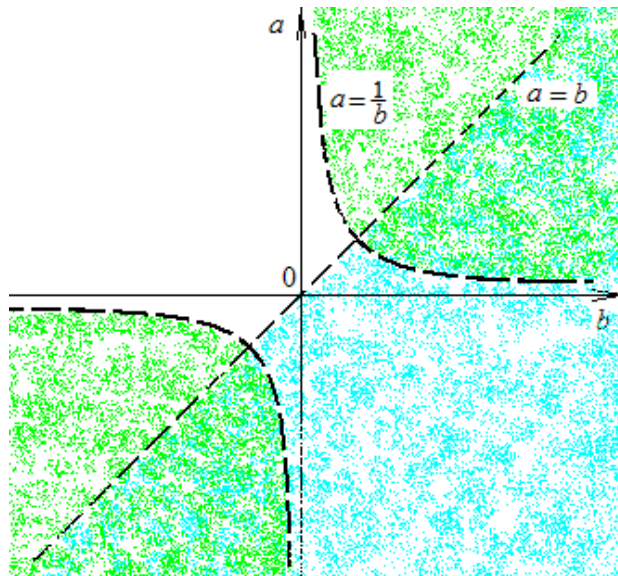


Рис. 11

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & 1 \\ 1 & b - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

тогда $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(a + b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4} \right).$

Для того, чтобы решение $Y = 0$ было устойчивым, необходимо, чтобы оба корня имели отрицательные действительные части, т.е.

$$\begin{cases} a + b < 0, \\ (a + b)^2 > (a - b)^2 + 4, \end{cases}$$

следовательно $\begin{cases} a < b, \\ ba < 1. \end{cases}$

Область, на которой данная система имеет только устойчивые решения, изображена на рис. 11.

Пример 3. Система дифференциальных уравнений

$$y_1' = -y_1 - y_2 + \frac{y_1 y_2}{1 + x},$$

$$y_2' = 2y_1 - 3y_2 + \frac{y_2^2}{1 + x^2},$$

с матрицей $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. При $x > 0$

все условия теоремы 25.2 выполняются, поэтому положение равновесия $y_1 = y_2 = 0$ будет асимптотически устойчивым.

Пример 4. Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки массой m вдоль оси OX под действием силы трения, пропорциональной скорости (-

$\alpha x'(t)$) и упругой силы, пропорциональной пройденному пути ($-\beta x(t)$). Тогда уравнение, описывающее данное движение, имеет вид

$$mx'' + \alpha x' + \beta x = 0,$$

или, разделив на массу m ,

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0.$$

Запишем полученное уравнение в виде системы ($x = y_1, x' = y_2$),

$$y_1' = y_2,$$

$$y_2' = -a_1 y_2 - a_2 y_1.$$

Собственные значения λ_1, λ_2 являются корнями характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_2 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

и выражаются через коэффициенты a_1 и a_2 :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

При $a_1^2 > 4a_2$ корни вещественные различные и отрицательные. Расположение траекторий системы представляет собой устойчивый узел, при $t \rightarrow \infty$ материальная точка приближается к началу координат, так как $x = y_1 \rightarrow 0$.

При $a_1^2 < 4a_2$ корни комплексные сопряженные, $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -0,5a_1$. Если $a_1 > 0$, то расположение траекторий представляет собой устойчивый фокус. Материальная точка совершает затухающие колебания около начала координат $x = 0$.

Если $a_1 = 0$, то трение отсутствует и траектория представляет собой центр. Материальная точка совершает незатухающие колебания около начала координат.

При $a_1^2 = 4a_2$ корни характеристического многочлена вещественны и совпадают, причем $a_1 > 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -0,5a_1 < 0$. В этом случае расположение траекторий определяет устойчивый вырожденный узел.

Задачи для репродуктивной работы

Самостоятельная работа по образцу предполагает решение задач на воспроизведение знаний, умений. Все данные для нахождения искомого, а также сам способ выполнения задания представлены в явном виде в самом задании или в соответствующем алгоритме решения (демонстрация решенных заданий)

Возможные формы отчетности: выполненные задания.

1. Исследовать на устойчивость решения следующих уравнений и систем:

а) $\frac{dx}{dt} = x + t, x(0) = 1$; б) $\frac{dx}{dt} = -x + t^2, x(1) = 1$; в) $\frac{dx}{dt} = 2 + t, x(0) = 1$;

$$2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 13y, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{4}x - 2y, \quad x(0) = y(0) = 0; \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 9y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y, \quad x(0) = y(0) = 0; \end{cases}$$

$$е) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + z, \\ \frac{dy}{dt} = -2y - z, \\ \frac{dz}{dt} = y - z, \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0; \end{cases}$$

$$жс) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + 5z, \\ \frac{dy}{dt} = -2y + z, \\ \frac{dz}{dt} = -3z, \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y, \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dz}{dt} = x + 3y + z; \end{cases}$$

$$и) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z. \end{cases}$$

2. При каких значениях α точка покоя $(0,0)$ системы устойчива

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + \alpha y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

Задания для реконструктивной работы

Характерным признаком этих заданий является то, что в самом задании сообщается общая идея решения, а студенту необходимо развить ее в конкретный способ или способы применительно к условиям задачи.

Студент соотносит задание с другими, уже известными ему. При этом главное – актуализация имеющихся знаний, умение отбирать и привлекать необходимые знания для решения задачи

Возможные формы отчетности: конспект выполненных заданий; доклад; реферат; отчет.

1. Выяснить тип расположения фазовых траекторий системы в окрестности точки равновесия $x = y = 0$:

$$а) \frac{dx}{dt} = x^l, \quad \frac{dy}{dt} = ax^m + by, \text{ где } l \geq 2, m \geq 1, l, m \in \mathbb{N}, \quad a, b \neq 0 - \text{const};$$

$$б) \frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = ax^m + by^n, \text{ где } n \geq 2, m \geq 1, l, m \in \mathbb{N}, \quad a, b \neq 0 - \text{const};$$

$$в) \frac{dx}{dt} = y + (x + y)^3, \quad \frac{dy}{dt} = -(x + y)^3;$$

$$з) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3, \\ \frac{dy}{dt} = -(x^3 + 3ax^2y + 3bxy^2 + cy^3), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 3x^2y - y^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x^3 + 3xy^2; \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + ax^3 + 2a^2x^2y - a^3xy^2 + by^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x^3 - 3ax^2y - a^2xy^2 + a^3y^3, \quad a \neq 0; \end{cases} \quad жс) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + xy; \end{cases}$$

2. При каких значениях α точка покоя $(0,0)$ системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + \alpha y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

является

а) устойчивым узлом;

б) неустойчивым узлом;

в) седлом;

г) центром;

д) устойчивым фокусом;

е) неустойчивым фокусом.

3. Определить характер точек покоя для следующих систем дифференциальных уравнений. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y) , начальные условия задать самостоятельно.

$$a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x, \\ \frac{dy}{dt} = 3y; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y; \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y; \end{cases}$$

$$е) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y; \end{cases}$$

$$жс) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + \frac{5}{7}y, \\ \frac{dy}{dt} = 7x - 3y. \end{cases}$$

4. Докажите, что если особая точка уравнения

$$(ax + by)dx + (mx + ny)dy = 0$$

является центром, то это уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Обратное неверно.

5. Исследовать на устойчивость нулевое решение, определяемое однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0,$$

где p, q - действительные числа, по его характеристическим числам.

6. Доказать, что для того, чтобы нулевое решение задачи 4 было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы характеристический полином $\lambda^2 + p\lambda + q$ имел: $p > 0, q > 0$.

Задания для эвристической работы

Такая работа предполагает создание нестандартных ситуаций, решение нетиповых задач. В ее основе – поиск, догадка, формулирование и реализация идеи решения. Однако поиск имеет частичный характер,

необходимый лишь для выполнения какого-либо фрагмента общего задания

Возможные формы отчетности: создание математической модели, отчет по заданной форме; план; конспект; сценарий; продукт деятельности арт-технологий (рисунок); аналитический отчет по заданной форме

5*. Для следующих уравнений дать чертеж расположения интегральных кривых в окрестности начала координат:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } y' = \frac{xy}{x+y}; & \text{б) } y' = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y}; & \text{в) } y' = \frac{xy}{x^2 + y}; \\ \text{г) } y' = \frac{xy}{y - x^2}; & \text{д) } y' = \frac{y^2}{x^2 + y}. & \end{array}$$

Указание. Особые точки указанных задач не принадлежат к рассмотренным типам в параграфе 27. Для их исследования можно построить несколько изоклин и выяснить, с каких сторон интегральные кривые входят в особую точку.

6. Доказать, что если уравнение

$$(ax + by)dx + (mx + ny)dy = 0$$

не является уравнением в полных дифференциалах, но имеет интегрирующий множитель, непрерывный в окрестности начала координат, то особая точка - седло.

7*. Доказать, что в области, содержащей особую точку типа узла или фокуса, для системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

не может существовать первого интеграла вида $\varphi(x, y) = C$ с непрерывной функцией φ .

8*. Исследовать положение равновесия системы уравнений Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy, \\ \dot{y} = -cy + dxy, \end{cases} \text{ где } a, b, c, d > 0, \text{ const,}$$

$y(t)$ - описывает число хищников, а $x(t)$ - число их жертв в изолированной среде.

Ответ. Положение равновесия $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ - центр, все решения - периодические функции времени.

9*. Доказать, что если какое-либо решение линейной системы дифференциальных уравнений устойчиво по Ляпунову, то устойчивы все решения этой системы.

10*. Приведите пример неустойчивого (по Ляпунову) положения равновесия некоторого уравнения, для которого все $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$.

Указание. Можно доказать, что если вещественная часть хотя бы одного собственного числа λ положительна, то положение равновесия

неустойчиво. В случае нулевых вещественных частей устойчивость зависит от членов выше первой степени.

11. Доказать, что устойчивость положения равновесия не зависит от системы координат.

Литература

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. 3-е изд., Изд. «Лань», 2008. 288 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости 3-е изд., стер. Изд. «Лань», 2008. 480 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., Изд. «Лань» стер 576 с.
4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям 8-е изд., Изд. «Лань», стер., 2009 432 с.
5. Матвеев П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений 1-е издание. Изд. «Лань», 2008. 336 с.
6. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения 4-е изд., Изд. «Лань» 2009. 304 с.
7. Шампайн Л. Ф. Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием matlab. 1-е изд, Изд. «Лань», 2009. 304 с.

Занятие 11-12. Поведение траекторий линейной однородной системы второго порядка

Пример 1. Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки массой m вдоль оси OX под действием силы трения, пропорциональной скорости ($-\alpha x'(t)$) и упругой силы, пропорциональной пройденному пути ($-\beta x(t)$). Тогда уравнение, описывающее данное движение, имеет вид

$$mx'' + \alpha x' + \beta x = 0,$$

или, разделив на массу m ,

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = 0.$$

Запишем полученное уравнение в виде системы ($x = y_1, x' = y_2$),

$$y_1' = y_2,$$

$$y_2' = -a_1 y_2 - a_2 y_1.$$

Собственные значения λ_1, λ_2 являются корнями характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_2 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

и выражаются через коэффициенты a_1 и a_2 :

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

При $a_1^2 > 4a_2$ корни вещественные различные и отрицательные. Расположение траекторий системы представляет собой устойчивый узел, при $t \rightarrow \infty$ материальная точка приближается к началу координат, так как $x = y_1 \rightarrow 0$.

При $a_1^2 < 4a_2$ корни комплексные сопряженные, $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = -0,5a_1$. Если $a_1 > 0$, то расположение траекторий представляет собой устойчивый фокус. Материальная точка совершает затухающие колебания около начала координат $x = 0$.

Если $a_1 = 0$, то трение отсутствует и траектория представляет собой центр. Материальная точка совершает незатухающие колебания около начала координат.

При $a_1^2 = 4a_2$ корни характеристического многочлена вещественны и совпадают, причем $a_1 > 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -0,5a_1 < 0$. В этом случае расположение траекторий определяет устойчивый вырожденный узел.

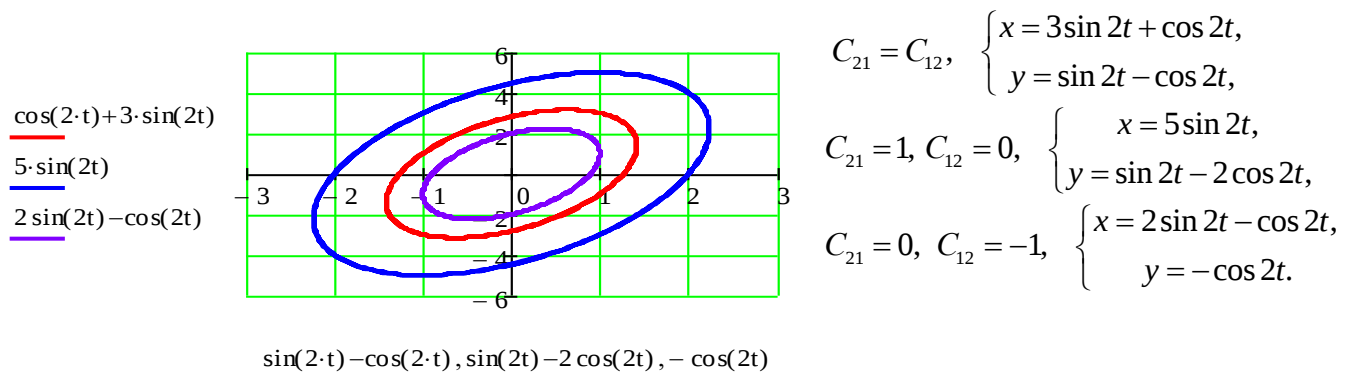
Пример. Исследовать точку покоя для системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y, \end{cases} \quad \left| \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -5 \\ 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \right| \text{ solve } \rightarrow \begin{pmatrix} 2i \\ -2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ -2i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = C_{11} \sin 2t + C_{12} \cos 2t, \\ y = C_{21} \sin 2t + C_{22} \cos 2t, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = 2C_{11} \cos 2t - 2C_{12} \sin 2t, \\ \dot{y} = 2C_{21} \cos 2t - 2C_{22} \sin 2t, \end{cases}$$

$$\sin 2t : \begin{cases} -2C_{12} = C_{11} - 5C_{21}, \\ -2C_{22} = C_{11} - C_{21}, \end{cases} \quad \cos 2t : \begin{cases} 2C_{11} = C_{12} - 5C_{22}, \\ 2C_{21} = C_{12} - C_{22}, \end{cases} \quad \begin{cases} C_{11} = 5C_{21} - 2C_{12}, \\ C_{22} = C_{12} - 2C_{21} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = [5C_{21} - 2C_{12}] \sin 2t + C_{12} \cos 2t, \\ y = C_{21} \sin 2t + [C_{12} - 2C_{21}] \cos 2t, \end{cases}$$



Задачи для самостоятельной работы

2. Выяснить тип расположения фазовых траекторий системы в окрестности точки равновесия $x = y = 0$:

а) $\frac{dx}{dt} = x^l, \frac{dy}{dt} = ax^m + by$, где $l \geq 2, m \geq 1, l, m \in \mathbb{N}, a, b \neq 0 - \text{const}$;

б) $\frac{dx}{dt} = x, \frac{dy}{dt} = ax^m + by^n$, где $n \geq 2, m \geq 1, l, m \in \mathbb{N}, a, b \neq 0 - \text{const}$;

в) $\frac{dx}{dt} = y + (x + y)^3, \frac{dy}{dt} = -(x + y)^3$;

г) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3, \\ \frac{dy}{dt} = -(x^3 + 3ax^2y + 3bxy^2 + cy^3), \end{cases} a, b, c, d \in \mathbb{R};$

д) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 3x^2y - y^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x^3 + 3xy^2; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + ax^3 + 2a^2x^2y - a^3xy^2 + by^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x^3 - 3ax^2y - a^2xy^2 + a^3y^3, \end{cases} a \neq 0;$

ж) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x^2 + xy; \end{cases}$

3. При каких значениях α точка покоя $(0,0)$ системы

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + \alpha y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

является

а) устойчивым узлом;

б) неустойчивым узлом;

в) седлом;

з) центром;

д) устойчивым фокусом;

е) неустойчивым фокусом.

4. Определить характер точек покоя для следующих систем дифференциальных уравнений. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y) , начальные условия задать самостоятельно.

$$а) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x, \\ \frac{dy}{dt} = 3y; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y; \end{cases}$$

$$з) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y; \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y; \end{cases}$$

$$е) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + 3y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + y; \end{cases}$$

$$ж) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + \frac{5}{7}y, \\ \frac{dy}{dt} = 7x - 3y. \end{cases}$$

7. Докажите, что если особая точка уравнения
 $(ax + by)dx + (mx + ny)dy = 0$

является центром, то это уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Обратное неверно.

5*. Для следующих уравнений дать чертеж расположения интегральных кривых в окрестности начала координат:

$$а) y' = \frac{xy}{x + y};$$

$$б) y' = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y};$$

$$в) y' = \frac{xy}{x^2 + y};$$

$$г) y' = \frac{xy}{y - x^2};$$

$$д) y' = \frac{y^2}{x^2 + y}.$$

Указание. Особые точки указанных задач не принадлежат к рассмотренным типам в параграфе 27. Для их исследования можно построить несколько изоклин и выяснить, с каких сторон интегральные кривые входят в особую точку.

7. Доказать, что если уравнение
 $(ax + by)dx + (mx + ny)dy = 0$

не является уравнением в полных дифференциалах, но имеет

интегрирующий множитель, непрерывный в окрестности начала координат, то особая точка - седло.

7*. Доказать, что в области, содержащей особую точку типа узла или фокуса, для системы

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

не может существовать первого интеграла вида $\varphi(x, y) = C$ с непрерывной функцией φ .

8*. Исследовать положение равновесия системы уравнений Вольтерра

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy, \\ \dot{y} = -cy + dxy, \end{cases} \text{ где } a, b, c, d > 0, \text{ const,}$$

$y(t)$ - описывает число хищников, а $x(t)$ - число их жертв в изолированной среде.

Ответ. Положение равновесия $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ - центр, все решения - периодические функции времени.

Занятие 13-14. Лине́йные уравнения с частными производными первого порядка

Пример 1. Найдем общий интеграл уравнения

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

Составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (230), (231) для заданного уравнения

$$\frac{dy}{ds} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = b(x_1, \dots, x_n, y) \quad \frac{dx}{ds} = x, \quad \frac{dy}{ds} = y, \quad \frac{dz}{ds} = 2z \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x}.$$

$$ds = \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}, \quad \int \frac{dz}{2z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln x = \ln y + \ln C_1, \quad \ln z = 2 \ln x + \ln C_2$$

Интегрируя уравнения, получаем первые интегралы системы

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad \frac{z}{x^2} = C_2,$$

тогда общим решением уравнения будет функция

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x^2}\right) = 0$$

или, разрешая относительно z находим

$$z = x^2 f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Как видно из (234), решение уравнения в частных производных в отличие от решений обыкновенных дифференциальных уравнений, которые имеют произвольные постоянные, содержит произвольные функции. Задача Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка с n независимыми переменными имеет следующее содержание: найти решение уравнения $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такое, чтобы

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

где x_n^0 - заданное число, $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ - заданная функция, дифференцируемая относительно своих аргументов.

Для решения задачи Коши в первые интегралы (228) вместо x_n подставим начальное значение x_n^0 , результат обозначим через $\tilde{C}_i$

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n, x_n^0, y) &= \tilde{C}_1, \quad \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n, x_n^0, y) = \tilde{C}_2, \dots, \\ \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n, x_n^0, y) &= \tilde{C}_n. \end{aligned}$$

Разрешая полученную систему относительно $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, y$, получим начальные значения $x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0, y_0$, выраженные через $\tilde{C}_i$ ($i = 1, \dots, n$). Подставляя в (234), получим решение задачи Коши.

Пример 2. Решим задачу Коши для уравнения

$$(x^3 + 3xy^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2y^3 \frac{\partial u}{\partial y} + 2y^2 z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (235)$$

со следующим начальным условием:

$$u(x, y, z)|_{y=1} = z^2 - x^{-2}, \text{ при } y_0 = 1. \quad (236)$$

Характеристическая система, соответствующая уравнению (235), имеет вид

$$\frac{dx}{ds} = x^3 + 3xy^2, \quad \frac{dy}{ds} = 2y^3, \quad \frac{dz}{ds} = 2y^2z, \quad \frac{du}{ds} = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x^3 + 3xy^2} &= \frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2y^2z} = \frac{du}{0} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x^3 + 3xy^2}{2y^3} = \frac{x^3}{2y^3} + 3\frac{x}{2y}, \quad \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{x^3 + 3xy^2}{2y^3} = \frac{x^3}{2y^3} + 3\frac{x}{2y}, \quad x = vy, \quad \frac{dx}{dy} = v'y + v \\ v'y &= \frac{1}{2}v^3 + \frac{1}{2}v, \quad 2\int \frac{dv}{v(v^2 + 1)} = \int \frac{dy}{y} \\ \frac{1}{v(v^2 + 1)} &= \frac{A}{v} + \frac{Bv + C}{v^2 + 1}, \quad A + B = 0, \quad C = 0, \quad A = 1, \quad B = -1 \\ 2\int \left(\frac{1}{v} - \frac{v}{v^2 + 1} \right) dv &= \int \frac{dy}{y}, \quad 2\ln v - \ln(v^2 + 1) = \ln y + \ln C_1, \quad \frac{x^2}{(x^2 + y^2)y} = C_1 \end{aligned}$$

Решая ее, получим, что система имеет два независимых первых интеграла

$$y + \frac{y^3}{x^2} = C_1, \quad \frac{z}{y} = C_2 \quad \text{и} \quad u = C_3. \quad (237)$$

Следовательно, общим решением уравнения (235) будет

$$u = \Phi\left(\frac{z}{y}, y + \frac{y^3}{x^2}\right).$$

Найдем решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию (236). Полагая в найденных интегралах $y_0 = 1$, имеем $z_0 = \tilde{C}_2$, $x_0^{-2} = \tilde{C}_1 - 1$, тогда, с учетом (236), искомым решением будет

$$u = \tilde{C}_2^2 - \tilde{C}_1 + 1 \quad \text{или} \quad u = \left(\frac{z}{y}\right)^2 - y - \frac{y^3}{x^2} + 1.$$

Полученное решение содержится в общем решении при

$$\Phi(C_2, C_1) = C_2^2 - C_1 + 1.$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Проинтегрировать уравнения и, где указано найти решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию:

$$a) x \frac{\partial u}{\partial x} + yz \frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = x^y, \text{ при } z = 1; \quad б) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$в) \frac{\partial u}{\partial x} - (y + 2z) \frac{\partial u}{\partial y} + (3y + 4z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad г) \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$д) -x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{2y} \frac{\partial u}{\partial y} = u, u = y, \text{ при } x + y = 1; \quad е) x \frac{\partial z}{\partial x} - z \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$ж) x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{2} \frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = y + z^2, \text{ при } x = 1;$$

$$з) y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0, z = 2y, \text{ при } x = 0;$$

$$и) x \frac{\partial z}{\partial x} + (y + x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = z, z = y - 4 \text{ при } x = 2;$$

$$к) (1 + \sqrt{z - x - y}) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2, z = 2x, \text{ при } y = 0$$

$$л) (y + z + u) \frac{\partial u}{\partial x} + (z + u + x) \frac{\partial u}{\partial y} + (y + u + x) \frac{\partial u}{\partial z} = x + y + z;$$

$$м) (y^3 x - 2x^4) \frac{\partial z}{\partial x} + (2y^4 - x^3 y) \frac{\partial z}{\partial y} = 9z(x^3 - y^3);$$

$$н) \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + c \frac{\partial u}{\partial z} = xyz, (b, c - \text{const});$$

$$о) z(x + z) \frac{\partial z}{\partial x} - y(y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, z = \sqrt{y} \text{ при } x = 1.$$

2*. Найти уравнение в частных производных поверхностей описанных прямой, которая движется, пересекая данную прямую под данным углом. Проинтегрировать это уравнение.

Указание: взять данную прямую за ось OZ .

3. Уравнение всевозможных конических поверхностей с вершиной в начале координат имеет вид:

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

φ - произвольная функция. Найти соответствующее уравнение в частных

производных и первые интегралы.

4*. Для задачи 3 решить задачу Коши: на окружности

$$x^2 + y^2 = 1, \quad z(x, y) = x + 1.$$

5*. Найти общее уравнение поверхностей, пересекающих под прямым углом поверхности семейства $z^2 = Cxy$.

6*. Найти поверхность, проходящую через прямую $y = x, z = 1$ и ортогональную к поверхностям $x^2 + y^2 + z^2 = Cx$.

7*. Написать уравнение в частных производных, которому удовлетворяют цилиндрические поверхности с образующими, параллельными вектору $(1, 1, 2)$. Найти общее решение этого уравнения.

8*. Пользуясь результатом предыдущей задачи, найти уравнение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными вектору $(1, 1, 2)$ и направляющей $x + y + z = 0, 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 4$.

9*. Написать уравнение в частных производных, которому удовлетворяют все конические поверхности с вершиной в данной точке (a, b, c) , и решить его.

10*. Найти поверхности, у которых любая касательная плоскость пересекает ось Ox в точке с абсциссой, вдвое меньше абсциссы точки касания.

Занятие 15-16. Нелинейные уравнения в частных производных первого порядка

Пример 1. Найти поверхности, удовлетворяющие данным уравнениям Пфаффа $(z + yx)dx - (z + y^2)dy + ydz = 0$.

$$\text{Условие интегрируемости } P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0.$$

$$(z + yx)(1 - 1) - (z + y^2)(0 - 1) + y(x - 0) = 0 \quad \text{или} \quad z = y^2 - yx \quad \text{не выполняется.}$$

Попробуем найти интегрирующий множитель $\mu(x, y, z)$, тогда должна

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y},$$

$$\text{выполняться система } \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) = R\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial z},$$

$$\mu\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) = P\frac{\partial \mu}{\partial z} - R\frac{\partial \mu}{\partial x}.$$

$$\begin{aligned}\mu x &= -(z + y^2)\mu_x - (z + yx)\mu_y, \\ 0 &= y\mu_y + (z + y^2)\mu_z, \\ -\mu &= (z + yx)\mu_z - y\mu_x,\end{aligned}$$

из второго уравнения системы имеем характеристическую систему $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z + y^2} = \frac{d\mu}{0}$, тогда первый интеграл определим из уравнения

$$y \frac{dz}{dy} = z + y^2, \quad \frac{z}{y} - y = C(x),$$

следовательно интегрирующий множитель имеет вид

$$\mu = \varphi\left(\frac{z}{y} - y, \psi(x)\right) = \varphi(\xi, \psi(x)),$$

где φ, ψ - произвольные функции, $\xi = \frac{z}{y} - y$. Оставшиеся уравнения системы (253) после подстановки функции μ и элементарных преобразований дают систему

$$\begin{aligned}\frac{x}{z + y^2} &= \left[\frac{z + yx}{y^2} - \psi'_x \right] \frac{\varphi'_\xi}{\varphi}, \\ -\frac{1}{y} &= \left[\frac{z + yx}{y^2} - \psi'_x \right] \frac{\varphi'_\xi}{\varphi},\end{aligned}$$

которая может быть совместна только при $-xy = z + y^2$, следовательно, надо искать однопараметрическое семейство решений $z = \varphi(x, y(x))$.

Равенство (251) после подстановки примет вид

$$\varphi + yx + \left[y \frac{d\varphi}{dy} - \varphi - y^2 \right] \frac{dy}{dx} + y \frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

Уравнение распадается на два равенства

$$y \frac{d\varphi}{dy} - \varphi - y^2 = 0, \quad \varphi + yx + y \frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

Первое уравнение имеет решение $\varphi = yC(x) + y^2$, а из второго определим неизвестную функцию $C(x)$:

$$yC(x) + y^2 + yx + C'(x)y^2 = 0, \quad C(x) + x + (C'(x) + 1)y = 0, \quad C(x) = -x.$$

В результате получено решение $z = y^2 - xy$.

в). Пфафовой формой называется выражение вида:

$$\sum_{i=1}^n F(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i,$$

форма от трёх переменных имеет вид: $R(x, y, z)dz + P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy$, где P, Q, R — данные функции от x, y, z .

Если пфафова форма представляет точный дифференциал; следовательно, существует такая функция $u(x, y, z)$, что

$$R(x, y, z)dz + P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy = du,$$

в таком случае выполняются равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Эти условия достаточны для представления формы Пфаффа в виде

$$u = \int_{x_0}^x P(x, y, z)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z)dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z)dz + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Если условия точного дифференциала и условие интегрируемости не выполнены, то в этом случае можно от формы отнять полный дифференциал так, что для разности будет выполнено условие. Итак,

$$Rdz + Pdx + Qdy - du = R_1dz + P_1dx + Q_1dy,$$

что для $R_1 = R - \frac{\partial u}{\partial z}$, $P_1 = P - \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q_1 = Q - \frac{\partial u}{\partial y}$ выполняется условие

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Соответствующая этому линейному неоднородному уравнению в частных производных система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx}{Q_z - R_y} = \frac{dy}{R_x - P_z} = \frac{dz}{P_y - Q_x} = \frac{du}{P(Q_z - R_y) + Q(R_x - P_z) + R(P_y - Q_x)}.$$

Все условия для существования решения (необращение в нуль некоторых знаменателей, дифференцируемость) выполнены, и в качестве u мы можем взять любое решение этого уравнения.

Итак, любая пфафова форма приводится к одному из трёх канонических видов: du , vdu , $du + vdw$. Наименьшее количество переменных, через которые может быть выражена пфафова форма, определяет её класс I,

II или III. В первых двух случаях du, vdu оно допускает интегральное соотношение двух измерений, в последнем случае $du + vdw$ существуют интегральные соотношения только одного измерения.

Задачи для самостоятельной работы

1. Решить системы уравнений

$$\begin{array}{ll}
 a). \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2z}{y}; \end{cases} & б). \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y - z, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = xz; \end{cases} \\
 в). \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = yz + z, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz + z^2; \end{cases} & г). \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = ay^2, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b}{2y^2} + \frac{2z}{y} - ay^2; \end{cases} \quad (\text{Имшенецкий})
 \end{array}$$

2. Найти поверхности, удовлетворяющие данным уравнениям Пфаффа

$$\begin{array}{ll}
 a). (x - y)dx + zdy - xdz = 0; & б). 3yzdx + 2xzdy + yxdz = 0; \\
 в). (2yz + 3x)dx + xzdy + yxdz = 0; & г). yzdx + xzdy + yxzd = 0; \\
 д). (2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)dx + dy + 2zdz = 0; & е). ydx + zdy + xdz = 0;
 \end{array}$$

3. Определить проекции на плоскость xOy семейства кривых, определяемых на эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ уравнением Пфаффа:

$$xdx + ydy + c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dz = 0.$$

4. Проверить условия интегрируемости и найти интегральные многообразия уравнений:

$$\begin{array}{l}
 a). (zy - z^2)dx - xzdy + xydz = 0; \\
 б). (z - y)^3(z - 2x + y)dx + (x - z)^3(x - 2y + z)dy + (y - x)^3(x + y - 2z)dz = 0;
 \end{array}$$

Указание. Ввести вместо x и y новые переменные: $y - z = u, z - x = v$.

$$\begin{array}{l}
 в). z(1 - z^2)dx + zdy - (x + y + xz^2)dz = 0; \\
 г). (3x^2 + yz)ydx - x^2dy + (x + 2z)y^2dz = 0;
 \end{array}$$

д). $(1-4x)dx + (1+4y)dy - 4zdz = 0$; начальные условия $x = y = z = 1$.

е). $dx + (y+z)dy + zdz = 0$.

Литература

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения. 3-е изд., Изд. «Лань», 2008. 288 с.
2. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости 3-е изд., стер. Изд. «Лань», 2008. 480 с.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 6-е изд., Изд. «Лань» стер 576 с.
4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям 8-е изд., Изд. «Лань», стер., 2009 432 с.
5. Матвеев П. Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений 1-е издание. Изд. «Лань», 2008. 336 с.
6. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения 4-е изд., Изд. «Лань» 2009. 304 с.
7. Шампайн Л. Ф. Гладвел И., Томпсон С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием matlab. 1-е изд, Изд. «Лань», 2009. 304 с.