

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению лабораторных работ
по дисциплине

«Компьютерные технологии решения оптимизационных задач»

для студентов направления подготовки

02.03.01 «Математика и компьютерные науки»

направленность (профиль)

«Анализ данных и искусственный интеллект»

Введение

Оптимизация - целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях. Задачи оптимизации - это задачи нахождения максимального или минимального значения некоторой функции, называемой целевой функцией. Если заданы ограничения на аргументы данной функции, то задача называется задачей условной оптимизации, если ограничения не накладываются, то задачей безусловной оптимизации.

В жизни решение задач оптимизации занимает очень много времени и это достаточно трудоемкий процесс, где необходимо учесть все параметры. И чтобы облегчить нам работу по поиску оптимума программисты разных стран написали большое количество программ для решения задач оптимизации практически во всех отраслях производства и сферах нашей жизни.

Другая сторона развития программного обеспечения — ориентация на “непрограммирующего пользователя”. В этом случае пользователь такого пакета получает возможность сосредоточиться на сущности самой задачи, а не способах ее программной реализации. В свою очередь пользователь должен ясно представлять возможности используемого пакета и заложенных в нем методов, а также уметь выбрать необходимый пакет, соответствующий решаемой задаче.

В результате изучения дисциплины студент должен

Знать:

- основные понятия эконометрического подхода,
- основные методы оценивания неизвестных параметров экономических задач;
- методы представления математических данных и основные методы работы с ними;
- алгебраические методы и методы математического анализа решения экономических и социально-экономических задач;

Уметь:

- математически описывать структурные элементы экономики;
- выявлять математические зависимости этих законов;
- применять математические методы при решении практических задач, жизненных ситуаций;

Владеть:

- навыками математического описания экономических объектов;
- навыками выявления закономерностей и математических зависимостей социально-экономического развития;

Лабораторная работа занятие №1 «Задача составления рациона в системах компьютерной математики Mathcad, Matlab и MS Excel.»

Цель: овладеть навыками составления математической модели задачи о диете и ее решения в математических пакетах Maple, Mathcad Prime и в MS Excel.

Задачи: Способствовать интеллектуальному развитию студентов, формированию качеств мышления, характерных для математической деятельности при проектировании решения задач в области экономики. Содействовать формированию опыта творческой деятельности студентов через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач и выполнении проектов. Содействовать формированию навыков работы с научной литературой, использования различных интернет-ресурсов. Сформировать требуемый набор компетенций, соответствующих направлению и обеспечивающих конкурентоспособность на рынке труда.

Знать: - основные понятия эконометрического подхода,

- основные методы оценивания неизвестных параметров экономических задач;
- методы представления математических данных и основные методы работы с ними;
- алгебраические методы и методы математического анализа решения экономических и социально-экономических задач;

Уметь: - математически описывать структурные элементы экономики;

- выявлять математические зависимости этих законов;
- применять математические методы при решении практических задач, жизненных ситуаций;

Владеть: -навыками математического описания экономических объектов;

- навыками выявления закономерностей и математических зависимостей социально-экономического развития;

Указания по технике безопасности

Общие положения:

- К работе в компьютерном классе допускаются лица, ознакомленные с данной инструкцией по технике безопасности и правилам поведения.
- Работа учащихся в компьютерном классе разрешается только в присутствии преподавателя (инженера, лаборанта).
- Во время занятий посторонние лица могут находиться в классе только с разрешения преподавателя.

- Во время перемен между парами проводится обязательное проветривание компьютерного кабинета с обязательным выходом студентов.
- Помните, что каждый студент в ответе за состояние своего рабочего места и сохранность размещенного на нем оборудования.

Перед началом работы необходимо:

- Убедиться в отсутствии видимых повреждений на рабочем месте;
- Разместить на столе тетради, учебные пособия так, что бы они не мешали работе на компьютере;
- Принять правильную рабочую позу.
- Посмотреть на индикатор монитора и системного блока и определить, включён или выключен компьютер. Переместите мышь, если компьютер находится в энергосберегающем состоянии или включить монитор, если он был выключен.

При работе в компьютерном классе категорически запрещается:

- Находиться в классе в верхней одежде;
- Класть одежду и сумки на столы;
- Находиться в классе с напитками и едой;
- Располагаться сбоку или сзади от включенного монитора;
- Присоединять или отсоединять кабели, трогать разъемы, провода и розетки;
- Передвигать компьютеры и мониторы;
- Открывать системный блок;
- Включать и выключать компьютеры самостоятельно.
- Пытаться самостоятельно устранять неисправности в работе аппаратуры;
- Перекрывать вентиляционные отверстия на системном блоке и мониторе;
- Ударять по клавиатуре, нажимать бесцельно на клавиши;
- Класть книги, тетради и другие вещи на клавиатуру, монитор и системный блок;
- Удалять и перемещать чужие файлы;
- Приносить и запускать компьютерные игры.

Находясь в компьютерном классе, учащиеся обязаны:

- Соблюдать тишину и порядок;

- Выполнять требования преподавателя и лаборанта;
- Находясь в сети работать только под своим именем и паролем;
- Соблюдать режим работы (согласно п. 9.4.2. Санитарных правил и норм);
- При появлении рези в глазах, резком ухудшении видимости, невозможности сфокусировать взгляд или навести его на резкость, появления боли в пальцах и кистях рук, усиления сердцебиения немедленно покинуть рабочее место, сообщить о происшедшем преподавателю и обратиться к врачу;
- После окончания работы завершить все активные программы и корректно выключить компьютер;
- Оставить рабочее место чистым.

Работая за компьютером, необходимо соблюдать правила:

- Расстояние от экрана до глаз – 70 – 80 см (расстояние вытянутой руки);
- Вертикально прямая спина;
- Плечи опущены и расслаблены;
- Ноги на полу и не скрещены;
- Локти, запястья и кисти рук на одном уровне;
- Локтевые, тазобедренные, коленные, голеностопные суставы под прямым углом.

Требования безопасности в аварийных ситуациях:

- При появлении программных ошибок или сбоях оборудования учащийся должен немедленно обратиться к преподавателю (лаборанту).
- При появлении запаха гари, необычного звука немедленно прекратить работу, и сообщить преподавателю (лаборанту).

Вопросы к занятию

1. изучить теоретический материал;
2. выполнить математическую постановку задачи;
3. решить задачу в математических пакетах Maple, Mathcad Prime и в среде электронных таблиц MS Excel.

Теоретическая часть

Классическая задача линейного программирования связана с проблемой подбора оптимального набора пищевых продуктов для составления диеты.

Задача имеет следующее экономическое содержание. Рассмотрим условную ситуацию. Дневная диета содержит m видов различных питатель-

ных веществ $S_1, S_2, \dots, S_m$ соответственно не менее $b_1, b_2, \dots, b_m$ условных единиц. Имеется n различных видов продуктов $P_1, P_2, \dots, P_n$, каждый из которых содержит m видов питательных веществ, например, жиров, белков, углеводов. Обозначим a_{ij} – содержание в весовых единицах i -го питательного вещества в единице веса j -го продукта, c_j ($j = \overline{1, n}$) – стоимость единицы веса продукта с номером j . Необходимо определить состав и количество продуктов, необходимых для включения в диету. При этом суточные потребности должны быть удовлетворены с минимальными денежными затратами. Сведем данные условия в таблицу 1.

Составим экономико-математическую модель задачи.

Введем обозначения:

x_1 – количество потребления продукта вида P_1 ,

x_2 – количество потребления продукта вида P_2 , ...

x_n – количество потребления продукта вида P_n в сутки.

В результате потребления x_1 ед. продукта вида P_1 содержание питательного вещества S_1 в суточной норме потребления составит $a_{11}x_1$ усл. единиц. Общее содержание питательного вещества S_1 в рационе определяется выражением $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$. Поскольку содержание питательного вещества S_1 в рационе не должно быть меньше минимальной суточной потребности организма, т.е. величины b_1 , то должно выполняться неравенство $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$. В общем виде, содержание i -го питательного вещества в рационе не должно быть меньше b_i , поэтому необходимо выполнение неравенства $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$. Выполнение подобных ограничений описывает требование к диете, которое разрешает потреблять каждый вид питательного вещества в объеме не менее минимальной суточной потребности организма.

Рассмотрим задачу с конкретными данными.

Пример. Пусть имеются 8 видов продуктов содержащих 9 питательных веществ и незаменимых компонент. В 100 граммах продукта содержится известное a_{ij} количество питательного вещества или незаменимого компонента. Кроме того, известны: b_i – ежесуточная минимальная потребность организма в веществах S_i ($i = \overline{1, 9}$), c_j и e_j – стоимость и энергетическая ценность (в килокалориях) 100 грамм продукта P_j ($j = \overline{1, 8}$). Все указанные величины представлены в табл. 2. Требуется рассчитать суточную диету так, чтобы обеспечить необходимое количество питательных веществ и незаменимых компонент при минимальных затратах на продукты. Найти калорийность K полученной оптимальной диеты.

Решение. Для решения сформулированной задачи составим ее математическую модель.

1. Введем обозначения: x_j – неизвестное пока количество (грамм) продукта P_j ($j = \overline{1,8}$), входящего в диету.

2. Составим целевую функцию – стоимость диеты:

$$Z(X) = \frac{1}{100} \sum_{j=1}^8 c_j x_j = \frac{1}{100} (1.6x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 2.6x_4 + 13x_5 + 11x_6 + 3x_7 + 2.5x_8)$$

(1)

Таблица 2. – Данные к задаче о диете

Питательные вещества	Мин. суточная потребность, г.	Содержание питательных веществ в 100 г. продукта							
		Хлеб ржаной	Масло	Творог жирный	Крупа гречневая	Мясо свиное	Колбаса вареная	Яблоки	Морковь
Белки	90	6.6	0.5	14	12.6	14.3	12.1	0.4	1.3
Жиры	95	1.2	82.5	18	3.3	33.3	13.5	0.4	0.1
Углеводы	330	34.2	0.8	2.8	62.1	0	0	9.8	7.2
Ретинол (витамин А)	0.00017	0	0.54	0.1	0	0	0	0	0
Каротин (витамин А)	0.0059	0	0.38	0.06	0.01	0	0	0.03	9
Витамин В ₁	0.0013	0.18	0	0.05	0.43	0.4	0.06	0.03	0.06
Витамин В ₂	0.0017	0.08	0.1	0.3	0.2	0.1	0.13	0.02	0.07
Витамин РР	0.018	0.67	0.05	0.3	4.19	2.2	0	0.3	1
Витамин С	0.08	0	0	0.3	0	0	0	165	5
Стоимость 100 г продукта (руб.)		1.6	10	7	2.6	13	11	3	2.5
Энергетическая ценность 100 г продукта (Ккал.)		181	748	239	335	491	170	45	34

3. Сформулируем ограничения рассматриваемой задачи. 3.1. По минимальным потребностям организма. Это ограничение можно записать в ви-

де:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{100}(6.6x_1 + 0.5x_2 + 14x_3 + 12.6x_4 + 14.3x_5 + 12.1x_6 + 0.4x_7 + 1.3x_8) \geq 90, \\ \frac{1}{100}(1.2x_1 + 82.5x_2 + 18x_3 + 3.3x_4 + 33.3x_5 + 13.5x_6 + 0.4x_7 + 0.1x_8) \geq 95, \\ \frac{1}{100}(34.2x_1 + 0.8x_2 + 2.8x_3 + 62.1x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 9.8x_7 + 7.2x_8) \geq 330, \\ \frac{1}{100}(0x_1 + 0.54x_2 + 0.1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 12.1x_6 + 0x_7 + 0x_8) \geq 0.00017, \\ \frac{1}{100}(0x_1 + 0.38x_2 + 0.06x_3 + 0.01x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0.03x_7 + 9x_8) \geq 0.0059, \\ \frac{1}{100}(0.18x_1 + 0x_2 + 0.05x_3 + 0.43x_4 + 0.4x_5 + 0.06x_6 + 0.03x_7 + 0.06x_8) \geq 0.0013, \\ \frac{1}{100}(0.08x_1 + 0.1x_2 + 0.3x_3 + 0.2x_4 + 0.1x_5 + 0.13x_6 + 0.02x_7 + 0.07x_8) \geq 0.0017, \\ \frac{1}{100}(0.67x_1 + 0.05x_2 + 0.3x_3 + 4.19x_4 + 2.2x_5 + 0x_6 + 0.3x_7 + 1x_8) \geq 0.018, \\ \frac{1}{100}(0x_1 + 0x_2 + 0.3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 165x_7 + 5x_8) \geq 0.08, \end{array} \right.$$

В левой части каждого неравенства записано фактическое суточное потребление питательных веществ и незаменимых компонент.

3.2. Условие неотрицательности: $x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,8})$ (3)

4. После нахождения оптимального решения рассчитаем калорийность полученной диеты:

$$K = \frac{1}{100} \sum_{j=1}^8 e_j x_j^{onm} = \frac{1}{100} \left(181x_1^{onm} + 748x_2^{onm} + 239x_3^{onm} + 335x_4^{onm} + 491x_5^{onm} + 170x_6^{onm} + 45x_7^{onm} + 34x_8^{onm} \right) \quad (4)$$

Таким образом, целевая функция (1) и ограничения (2–3) и формула (4) образуют математическую модель задачи о диете.

Решение задачи в пакете Maple

1. Подключаем пакет simplex:

>with(simplex):

2. Задаем целевую функцию:

>Z:=1/100*(1.6*x[1]+10*x[2]+7*x[3]+2.6*x[4]+13*x[5]+11*x[6]+3*x[7]+2.5*x[8]):

3. Задаем систему ограничений:

>C:={1/100*(6.6*x[1]+0.5*x[2]+14*x[3]+12.6*x[4]+14.3*x[5]+12.1*x[6]+0.4*x[7]+13*x[8])>=90,

$1/100*(1.2*x[1]+82.5*x[2]+18*x[3]+3.3*x[4]+33.3*x[5]+13.5*x[6]+0.4*x[7]+0.1*x[8])\geq 95,$
 $1/100*(34.2*x[1]+0.8*x[2]+2.8*x[3]+62.1*x[4]+0*x[5]+0*x[6]+9.8*x[7]+7.2*x[8])\geq 330,$
 $1/100*(0*x[1]+0.54*x[2]+0.1*x[3]+0*x[4]+0*x[5]+0*x[6]+0*x[7]+0*x[8])\geq 0.0017,$
 $1/100*(0*x[1]+0.38*x[2]+0.06*x[3]+0.01*x[4]+0*x[5]+0*x[6]+0.03*x[7]+9*x[8])\geq 0.0059,$
 $1/100*(0.18*x[1]+0*x[2]+0.05*x[3]+0.43*x[4]+0.4*x[5]+0.06*x[6]+0.03*x[7]+0.006*x[8])\geq 0.0013,$
 $1/100*(0.08*x[1]+0.1*x[2]+0.3*x[3]+0.2*x[4]+0.1*x[5]+0.13*x[6]+0.02*x[7]+0.07*x[8])\geq 0.0017,$
 $1/100*(0.67*x[1]+0.05*x[2]+0.3*x[3]+4.19*x[4]+2.2*x[5]+0*x[6]+0.3*x[7]+1*x[8])\geq 0.018,$
 $1/100*(0*x[1]+0*x[2]+0.3*x[3]+0*x[4]+0*x[5]+0*x[6]+165*x[7]+5*x[8])\geq 0.08$

}: 4.Находим оптимальное решение задачи:

>X:=**minimize**(Z,C,NONNEGATIVE);

$X = \{x_5 = 0, x_8 = 0, x_2 = 86.71755999, x_1 = 0, x_6 = 0, x_3 = 0, x_4 = 710.84300021, x_7 = .048484879\}$

5.Находим минимальное значение функции Z в найденных точках (минимальную стоимость):

>Z[**min**]:=subs(X,Z);

$Z_{\min} = 27.15512860$

6.Задаем энергетическую ценность 100 г продукта (Ккал.):

>E:=**array**([181,748,239,335,491,170,45,34]);

$E = [181,748,239,335,491,170,45,34]$

7.Найденное оптимальное решение записываем в виде вектора:

>xopt:=**array**([0,86.71755999,0,710.8430021,0,0,0.04848487988,0])

xopt=[0,86.71755999,0,710.8430021,0,0,0.04848487988,0]

8. Находим энергетическую ценность диеты:

>K:=**sum**(xopt[i]*E[i],i=1..8)/100;

K=3029.993224

Решение задачи в пакете Mathcad Prime

Для решения задачи в пакете Mathcad Prime необходимо:

- 1.Задать исходные данные.
- 2.На вкладке «Математика» выбрать «Блок решения».
- 3.В области «Начальные приближения» присвоить переменным, т.е. вектору X начальные (любые, например, нулевые) значения и определить целевую функцию – стоимость разрабатываемой диеты.
- 4.В области «Ограничения» ввести все необходимые ограничения.
- 5.В области «Решатель» найти оптимальное решение с помощью функции **minimize**, вычислить минимальное значение стоимости полученной диеты и ее энергетическую ценность.

Начальные приближения	Количество (грамм) продуктов, входящего в диету)	Минимальная суточная потребность,г.	Стоимость 100 г продукта (руб.)
	$X := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$B := \begin{bmatrix} 90 \\ 95 \\ 330 \\ 0.00017 \\ 0.0059 \\ 0.0013 \\ 0.0017 \\ 0.0018 \\ 0.08 \end{bmatrix}$	$C := \begin{bmatrix} 1.6 \\ 10 \\ 7 \\ 2.6 \\ 13 \\ 11 \\ 3 \\ 2.5 \end{bmatrix}$
	Энергетическая ценность 100 г продукта (Ккал.)	Целевая функция - стоимость диеты $F(X) := \frac{1}{100} \cdot C \cdot X$	
	$E := \begin{bmatrix} 181 \\ 748 \\ 239 \\ 335 \\ 491 \\ 170 \\ 45 \\ 34 \end{bmatrix}$	Содержание питательных веществ в 100 г продукта $A := \begin{bmatrix} 6.6 & 0.5 & 14 & 12.6 & 14.3 & 12.1 & 0.4 & 1.3 \\ 1.2 & 82.5 & 18 & 3.3 & 33.3 & 13.5 & 0.4 & 0.1 \\ 34.2 & 0.8 & 2.8 & 62.1 & 0 & 0 & 9.8 & 7.2 \\ 0 & 0.54 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.38 & 0.06 & 0.01 & 0 & 0 & 0.03 & 9 \\ 0.18 & 0 & 0.05 & 0.43 & 0.4 & 0.06 & 0.03 & 0.06 \\ 0.08 & 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.13 & 0.02 & 0.07 \\ 0.67 & 0.05 & 0.3 & 4.19 & 2.2 & 0 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 165 & 5 \end{bmatrix}$	
Ограничения	Ограничения рассматриваемой задачи		
	$\frac{1}{100} \cdot A \cdot X \geq B$	$X \geq 0$	
Решатель	Оптимальное решение задачи:	$X := \text{minimize}(F, X) = \begin{bmatrix} 0 \\ 86.718 \\ 0 \\ 710.843 \\ 0 \\ 0 \\ 0.048 \\ 0 \end{bmatrix}$	
	Минимальная стоимость:	$F(X) = 27.155$	
	Энергетическая ценность диеты:	$X \cdot \frac{E}{100} = 3029.993$	

Решение задачи в среде электронных таблиц MS Excel

1. Идентифицируйте свою работу, переименовав Лист 1 в «Титульный лист» и записав номер лабораторной работы, ее название, кто выполнил и проверил.

2. На следующем листе, с именем «Задача составления рациона», создайте таблицу для ввода условий задачи и введите исходные данные. Таблицу дополните столбцом «Фактическое суточное потребление».

3. Создайте вторую таблицу, указав в ней продукты диеты и переменные математической модели. В ячейках **D17:K17** поместите нулевые (начальные) значения искомых переменных $x_1, x_2, \dots, x_8$

4. В ячейку **D18** введите формулу целевой функции – стоимости рассчитываемой диеты. Это можно осуществить двумя способами.

1. Способ: введите формулу
= (D12*D17+E12*E17+F12*F17+G12*G17+H12*H17+I12*I17+J12*J17+K12*K17)/100.

Завершите ввод нажатием клавиши Enter, получим в ячейке **D18** нулевое значение, т.к. пока равны нулю все переменные $x_1, x_2, \dots, x_8$.

2. Способ: – Установите курсор на **D18**. – Нажмите кнопку «Вставить функцию», в результате появится диалоговое окно «Мастер функций». В нем установите категорию «Математические» и выберите функцию «СУММПРОИЗВ». Нажмите «ОК».

– В появившемся окне «Аргументы функции» в строку «Массив 1» введите выражение **D12:K12**, а в строку «Массив 2» – **D17:K17**. Нажмите «ОК».

Адреса ячеек удобно вводить не с клавиатуры, а протаскивать мышью по ячейкам, чьи адреса следует вводить.

– Установите курсор на **D18**, и в «Строка формул» **=СУММПРОИЗВ(D12:K12;D17:K17)** поделите на 100. Нажмите Enter.

5. В ячейках столбца В Excel запишите формулы расчета фактического потребления питательных веществ и незаменимых компонент. Формула для белка имеет вид: **=СУММПРОИЗВ(D3:K3;D\$17:K\$17)/100** Эту формулу скопируйте автозаполнением в остальные ячейки диапазона **B4:B11**.

6. В ячейку **D19** запишите формулу для вычисления энергетической ценности полученной диеты: **=СУММПРОИЗВ(D17:K17;D13:K13)/100**

7. На вкладке «Данные» выберите пункт «Поиск решения».

8. В появившемся окне «Параметры поиска решения» нужно выполнить необходимые установки

– Введите адрес целевой ячейки **\$D\$18** в поле «Оптимизировать целевую функцию» или щ **D18** **нижняя кнопка**, за **кнопка**.

– Введите направление целевой функции, щ **□** **лкну** мышью по селекторному полю «Минимум».

– В поле «Изменяя ячейки переменных» впишите адреса **\$D\$17:\$K\$17** или щ **кните** по кнопке, выделите мышью диапазон ячеек **D17:K17** и снова

Википедия:Терминологиями» Введите«В соот

□ ЛКНИ

□ ЛКНИ

□лкните по кнопке. Нажмите «

□ ЛКНИ

КМИТЕ «

Таблица 1

Питательные вещества	Мужчины			Женщины		
	18-25 лет	26-39 лет	40-59 лет	18-25 лет	26-39 лет	40-59 лет
Белки, г	96	95	90	83	80	78
Жиры, г	106	98	90	90	2	76
Углеводы, г	420	409	389	346	341	323
Ретинол (вит. А), мг	0.19	0.18	0.18	0.16	0.15	0.15
Каротин (вит.А), мг	6.6	6.3	6.0	5.5	5.1	5.0
Витамин В ₁ , мг	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.2
Витамин В ₂ , мг	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4
Витамин РР, мг	20	19	18	17	16	15
Витамин С, мг	95	85	80	80	70	65
Суточная энергетическая потребность, Ккал.	3100	2950	2800	2600	2450	2320

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

- цель работы;
- задание с исходными данными;
- описание по пунктам выполненной работы с приведением необходимых схем, рисунков, таблиц, графиков, а также расчетных формул с численными значениями;
- выводы по каждому пункту экспериментальной части задания.

Список литературы

Перечень основной литературы:

1. Монахов О.И. Методы оптимизации в пакетах прикладных программ и их применение в решении задач НЛП в системах автоматического управле-

ния: учебно-методическое пособие к практическим занятиям и курсовому проекту по дисциплине «Методы оптимизации» / Монахов О.И. - Москва: Российский университет транспорта (МИИТ), 2021. - 63 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122054.html>

2. Кузнецов А.С. Введение в теорию принятия решений и методы оптимизации (элементы информационных технологий поиска эффективных решений): учебное пособие / Кузнецов А.С. - Новосибирск: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2023. - 163 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/138819.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Ахмадиев Ф. Г. Математическое моделирование и методы оптимизации: учебное пособие / Ф. Г. Ахмадиев, Р. М. Гильфанов. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 178 с. - ISBN 978-5-4497-1383-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/116448.html>

2. Поляков В.М. Методы оптимизации: учебное пособие / Поляков В.М., Агаларов З.С.. - Москва: Дашков и К, 2022. - 86 с. - ISBN 978-5-394-05003-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120727.html>

Лабораторная работа занятие №2 « Решение задачи линейного программирования, двойственной задачи линейного программирования, транспортной задачи в системах компьютерной математики Mathcad, Matlab и MS Excel.»

Цель: овладеть навыками составления математической модели транспортной задачи и ее решения в математических пакетах Maple, Mathcad Prime и в MS Excel.

Задачи: Способствовать интеллектуальному развитию студентов, формированию качеств мышления, характерных для математической деятельности при проектировании решения задач в области экономики. Содействовать формированию опыта творческой деятельности студентов через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач и выполнении проектов. Содействовать формированию навыков работы с научной литературой, использования различных интернет-ресурсов. Сформировать требуемый набор компетенций, соответствующих направлению и обеспечивающих конкурентоспособность на рынке труда.

Знать: - основные понятия эконометрического подхода,

- основные методы оценивания неизвестных параметров экономических задач;
- методы представления математических данных и основные методы работы с ними;
- алгебраические методы и методы математического анализа решения экономических и социально-экономических задач;

Уметь: - математически описывать структурные элементы экономики;

- выявлять математические зависимости этих законов;
- применять математические методы при решении практических задач, жизненных ситуаций;

Владеть: -навыками математического описания экономических объектов;

- навыками выявления закономерностей и математических зависимостей социально-экономического развития;

Указания по технике безопасности

Общие положения:

- К работе в компьютерном классе допускаются лица, ознакомленные с данной инструкцией по технике безопасности и правилам поведения.
- Работа учащихся в компьютерном классе разрешается только в присутствии преподавателя (инженера, лаборанта).
- Во время занятий посторонние лица могут находиться в классе только с разрешения преподавателя.
- Во время перемен между парами проводится обязательное проветривание компьютерного кабинета с обязательным выходом студентов.
- Помните, что каждый студент в ответе за состояние своего рабочего места и сохранность размещенного на нем оборудования.

Перед началом работы необходимо:

- Убедиться в отсутствии видимых повреждений на рабочем месте;
- Разместить на столе тетради, учебные пособия так, что бы они не мешали работе на компьютере;
- Принять правильную рабочую позу.
- Посмотреть на индикатор монитора и системного блока и определить, включён или выключен компьютер. Переместите мышь, если компьютер находится в энергосберегающем состоянии или включить монитор, если он был выключен.

При работе в компьютерном классе категорически запрещается:

- Находиться в классе в верхней одежде;
- Класть одежду и сумки на столы;
- Находиться в классе с напитками и едой;
- Располагаться сбоку или сзади от включенного монитора;
- Присоединять или отсоединять кабели, трогать разъемы, провода и розетки;
- Передвигать компьютеры и мониторы;
- Открывать системный блок;
- Включать и выключать компьютеры самостоятельно.
- Пытаться самостоятельно устранять неисправности в работе аппаратуры;
- Перекрывать вентиляционные отверстия на системном блоке и мониторе;
- Ударять по клавиатуре, нажимать бесцельно на клавиши;
- Класть книги, тетради и другие вещи на клавиатуру, монитор и системный блок;
- Удалять и перемещать чужие файлы;
- Приносить и запускать компьютерные игры.

Находясь в компьютерном классе, учащиеся обязаны:

- Соблюдать тишину и порядок;
- Выполнять требования преподавателя и лаборанта;
- Находясь в сети работать только под своим именем и паролем;
- Соблюдать режим работы (согласно п. 9.4.2. Санитарных правил и норм);
- При появлении рези в глазах, резком ухудшении видимости, невозможности сфокусировать взгляд или навести его на резкость, появления боли в пальцах и кистях рук, усиления сердцебиения немедленно покинуть рабочее место, сообщить о происшедшем преподавателю и обратиться к врачу;
- После окончания работы завершить все активные программы и корректно выключить компьютер;
- Оставить рабочее место чистым.

Работая за компьютером, необходимо соблюдать правила:

- Расстояние от экрана до глаз – 70 – 80 см (расстояние вытянутой руки);
- Вертикально прямая спина;

- Плечи опущены и расслаблены;
- Ноги на полу и не скрещены;
- Локти, запястья и кисти рук на одном уровне;
- Локтевые, тазобедренные, коленные, голеностопные суставы под прямым углом.

Требования безопасности в аварийных ситуациях:

- При появлении программных ошибок или сбоях оборудования учащийся должен немедленно обратиться к преподавателю (лаборанту).
- При появлении запаха гари, необычного звука немедленно прекратить работу, и сообщить преподавателю (лаборанту).

Вопросы к занятию

1. изучить теоретический материал;
2. выполнить математическую постановку задачи;
3. решить задачу в математических пакетах Maple, Mathcad Prime и в среде электронных таблиц MS Excel.

Теоретическая часть

Транспортная задача (ТЗ) – одна из распространенных задач линейного программирования. Ее цель – разработка наиболее рациональных путей и способов транспортирования товаров, устранение чрезмерно дальних, встречных, повторных перевозок. Все это сокращает время продвижения товаров, уменьшает затраты предприятий, фирм, связанные с осуществлением процессов снабжения сырьем, материалами, топливом, оборудованием и т.д. Имеются m пунктов отправления груза (поставщики) и объемы отправления по каждому пункту $a_1, a_2, \dots, a_m$. Известна потребность в грузах $b_1, b_2, \dots, b_n$ по каждому из n пунктов назначения (потребители). Задана матрица стоимостей доставки по каждому варианту c_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Требуется составить план перевозок груза так, чтобы максимально удовлетворить всех потребителей, вывезти груз от поставщиков и чтобы общие затраты на перевозки были минимальными. Все данные располагают в таблице 1, которую называют распределительной таблицей.

Составим экономико-математическую модель задачи.

Введем обозначение: x_{ij} – количество груза, которое нужно перевезти из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения.

Так как нужно перевезти весь груз из каждого пункта отправления A_i , то должны выполняться равенства

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2, \\ \dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m \end{cases}$$

В каждый пункт назначения B_j должен быть завезен весь требуемый груз, потому

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2, \\ \dots \\ x_{1m} + x_{2m} + \dots + x_{mm} = b_n \end{cases}$$

Размер поставок должен выражаться неотрицательным числом:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}$$

Стоимость всех запланированных перевозок должна быть минимальной:

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min$$

Оборудование и материалы

1. Доска меламин в пластик. раме
2. Компьютер моноблок Lenovo Idea Centre C540A1 G2020/4
3. Копи-доска Panasonic UB-T780-G
4. Монитор 17 HP TET
5. Монитор HP TFT 17
6. Мультимедиа-проектор Epson с набором кабелей
7. Проектор Acer P1270 в комплекте с потолочным креплением
8. Сист.блок HP d330 MidiTower

Пример. На складах A_1, A_2, A_3 , хранится $a_1 = 100, a_2 = 200, a_3 = 120$ единиц одного и того же груза, соответственно. Требуется доставить его трем потребителям B_1, B_2, B_3 , заказы которых составляют $b_1 = 190, b_2 = 120, b_3 = 60$ единиц груза, соответственно. Стоимости перевозки c_{ij} единицы груза с i -го склада j -му потребителю указаны в транспортной таблице:

	$b_1 = 190$	$b_2 = 120$	$b_3 = 60$
$a_1 = 100$	4	2	6
$a_2 = 200$	7	5	3
$a_3 = 120$	1	7	6

Установить является ли модель транспортной задачи, заданная таблицей, открытой или закрытой. Если модель является открытой, то ее необхо-

димом закрыть. Составить план перевозок, обеспечивающий минимальную стоимость перевозок. Найти минимальную стоимость перевозок.

Решение. Суммарные запасы груза $100+200+120=420$, а суммарные потребности $190+120+60=370$. Следовательно, задача является задачей открытого типа и ее необходимо закрыть, вводя фиктивного потребителя с потребностями $420-370=50$ единиц груза, при нулевых стоимостях перевозок.

	$b_1 = 190$	$b_2 = 120$	$b_3 = 60$	$b_4 = 50$
$a_1 = 100$	4	2	6	0
$a_2 = 200$	7	5	3	0
$a_3 = 120$	1	7	6	0

1. Введем обозначения: $x_{ij} \geq 0$, $(i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4})$ – количество единиц груза, которое планируется доставить от i -ого склада к j -му потребителю.

2. Составим целевую функцию – минимальную стоимость перевозок:

$$Z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} = 4x_{11} + 2x_{12} + 6x_{13} + 7x_{21} + 5x_{22} + 3x_{23} + 1x_{31} + 7x_{32} + 6x_{33} \rightarrow \min$$

(4)

3. Сформулируем ограничения рассматриваемой задачи.

3.1. Груз из всех складов должен быть перевезен. Это ограничение можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 120 \end{cases} \quad (5)$$

3.2. Необходимо удовлетворить потребности всех потребителей в грузе. Это ограничение можно записать так:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 190, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 120, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 50 \end{cases} \quad (6)$$

3.3. Введем граничные условия, которые определяют предельно допустимые значения искомых переменных. Для нашей задачи их можно представить в виде:

$$x_{ij} \geq 0, (i = \overline{1,3}; j = \overline{1,4}) \quad (7)$$

Таким образом, целевая функция (4) и ограничения (5–7) образуют математическую модель транспортной задачи.

Решение задачи в пакете Maple

1. Подключаем пакеты linalg и simplex:

>with(linalg): with(simplex):

2.Вычисляем суммарные запасы груза и суммарные потребности:

>a:=array(1..3,[100,200,120]);

b:=array(1..3,[190,120,60]);

$a = [100, 200, 120]$ $b = [190, 120, 60]$

>S[a]:=0: for k to 3 do S[a]:=S[a]+a[k] od: S[a];

420

>S[b]:=0: for k to 3 do S[b]:=S[b]+b[k] od: S[b];

370

>S[a]-S[b];

$a = [100, 200, 120]$

3.Задаем матрицу перевозок, матрицу стоимостей и целевую функцию:

>x:=matrix(3,4);

$x = \text{array}(1..3, 1..4, [\])$

>C:=matrix(3,4,[[4,2,6,0],[7,5,3,0],[1,7,6,0]]);

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

>Z:=sum(sum(C[i,j]*x[i,j],i=1..3),j=1..4);

$$Z = 4x_{1,1} + 7x_{2,1} + x_{3,1} + 2x_{1,2} + 5x_{2,2} + 7x_{3,2} + 6x_{1,3} + 3x_{2,3} + 6x_{3,3}$$

4.Решаем задачу линейного программирования, т.е. находим оптимальный план ТЗ:

>minimize(Z, {sum(x[1,j],j=1..4)=100,

sum(x[2,j],j=1..4)=200, sum(x[3,j],j=1..4)=120,

sum(x[i,1],i=1..3)=190, sum(x[i,2],i=1..3)=120,

sum(x[i,3], i=1..3)=60, sum(x[i,4],i=1..3)=50},

NONNEGATIVE);

{ $x_{2,1} = 0, x_{3,2} = 0, x_{3,4} = 0, x_{3,3} = 0, x_{3,1} = 120, x_{2,3} = 60,$

$x_{1,2} = 30, x_{2,2} = 90, x_{2,4} = 50, x_{1,1} = 70, x_{1,4} = 0, x_{1,3} = 0$ }

5. Представляем полученное решение в матричном виде:

>v:=matrix([[70,30,0,0],[0,90,60,50],[120,0,0,0]]);

$$V = \begin{pmatrix} 70 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 90 & 60 & 50 \\ 120 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.Определяем минимальную стоимость перевозок:

>sum(sum(C[i,j]*v[i,j], i=1..3), j=1..4);

1090

Если убрать требование перехода к задаче закрытого типа, то решение будет иметь вид:

>restart:with(simplex):with(linalg):

>x:=matrix(3,3);

$$x = \text{array}(1..3,1..3, [\])$$

>C:=matrix([[4,2,6], [7,5,3], [1,7,6]]);

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

>Z:=sum(sum(C[i,j]*x[i,j], i=1..3), j=1..3);

$$Z = 4x_{1,1} + 7x_{2,1} + x_{3,1} + 2x_{1,2} + 5x_{2,2} + 7x_{3,2} + 6x_{1,3} + 3x_{2,3} + 6x_{3,3}$$

>minimize(Z, {sum(x[1,j],j=1..3)<=100,

sum(x[2,j],j=1..3)<=200, sum(x[3,j],j=1..3)<=120,

sum(x[i,1],i=1..3)=190, sum(x[i,2],i=1..3)=120,

sum(x[i, 3],i=1..3)=60}, NONNEGATIVE);

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{3,2} = 0, x_{3,3} = 0, x_{3,1} = 120, x_{2,3} = 60, x_{1,3} = 0, x_{1,2} = 100, \\ x_{2,2} = 20, x_{2,1} = 70, x_{1,1} = 0, \end{array} \right\}$$

>v:=matrix([[0,100,0],[70,20,60],[120,0,0]]);

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 \\ 70 & 20 & 60 \\ 120 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

>sum(sum(C[i,j]*v[i,j], i=1..3), j=1..3);

1090

Решение задачи в пакете Mathcad Prime

Для решения задачи в пакете Mathcad Prime необходимо:

- 1.Задать исходные данные.
- 2.На вкладке «Математика» выбрать «Блок решения».
- 3.В области «Начальные приближения» присвоить переменным, т.е. матрице X начальные (любые, например, единичные) значения и задать целевую функцию – минимальную стоимость перевозок.
- 4.В области «Ограничения» ввести все необходимые ограничения.
- 5.В области «Решатель» найти оптимальное решение с помощью функции minimize и вычислить минимальную стоимость перевозок.

Решение задачи в среде электронных таблиц MS Excel

- 1.Идентифицируйте свою работу, переименовав Лист1 в «Титульный лист» и записав номер лабораторной работы, ее название, кто выполнил и проверил.
- 2.На следующем листе, с именем «Транспортная задача», создайте таблицу для ввода условий задачи и введите исходные данные.
- 3.Матрицу перевозок заполните пока нулевыми значениями.
- 4.Матрицу перевозок дополните двумя столбцами справа и двумя строками снизу.

5. В ячейку **D18** введите формулу целевой функции – стоимость перевозок: **=СУММПРОИЗВ(C4:F6;C11:F13)**.

6. В ячейку **G11** запишите формулу: **=СУММ(C11:F11)**. Эту формулу скопируйте автозаполнением в остальные ячейки диапазона **G12:G13**.

7. В ячейку **C14** запишите формулу: **=СУММ(C11:C13)**. Эту формулу скопируйте автозаполнением в остальные ячейки диапазона **D14:F14**.

8. На вкладке «Данные» выберите пункт «Поиск решения».

9. В появившемся окне «Параметры поиска решения» нужно выполнить необходимые установки.

– Ввести абсолютный адрес целевой ячейки **\$D\$18** в поле «Оптимизировать целевую функцию» или щелкнуть по кнопке .

– Введите направление целевой функции, щелкнув по кнопке , или щелкнув мышью по селекторному полю «Минимум».

– В поле «Изменяя ячейки переменных» впишите абсолютный адрес диапазона ячеек **\$C\$11:\$F\$13** или щелкнуть по кнопке .

– В поле «В соответствии с ограничениями» введите ограничения с помощью кнопки «Добавить». При этом вызывается диалоговое окно «Добавление ограничения». Введите систему ограничений (5). В поле «Ссылка на ячейки» щелкнуть по кнопке .

G11:G13 и снова щелкнуть по кнопке .
нажав , затем в поле «Ограничение» щелкнуть по кнопке .
мышью диапазон ячеек **H11:H13** и снова щелкнуть по кнопке .
«ОК».

Аналогично введите систему ограничений (6). В поле «Ссылка на ячейки» щелкнуть по кнопке , затем выделить мышью диапазон ячеек **C14:F14** и снова щелкнуть по кнопке .
тем в поле «Ограничение» щелкнуть по кнопке .
диапазон ячеек **C15:F15** и снова щелкнуть по кнопке .

Введите ограничение (7). В поле «Ссылка на ячейки» щелкнуть по кнопке , затем выделить мышью диапазон ячеек **C11:F13** и снова щелкнуть по кнопке , в следующем поле установите знак **>=**, нажав , затем в поле «Ограничение» введите **0**. Нажмите «ОК».

– Установите галочку «Сделать переменные без ограничений неотрицательными». – Выберите метод решения «Поиск решения линейных задач симплекс-методом» – Нажмите «Найти решение». В появившемся окне «Результаты поиска решения» нажмите «ОК».

Выводы. Анализ полученного решения показывает, что минимальная стоимость перевозок составляет 1090 при двух разных оптимальных перевоз-

$$\text{ках: } X_1^{opt} = \begin{pmatrix} 70 & 30 & 0 \\ 0 & 90 & 60 \\ 120 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X_2^{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 0 \\ 70 & 20 & 60 \\ 120 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Исходные данные для лабораторной работы

Продукция определенного вида производится в городах A_1, A_2, A_3 , и потребляется в городах B_1, B_2, B_3 и B_4 . В таблице указаны: объем производства, спрос, стоимость перевозки единицы продукции. Составить оптимальный план перевозки продукции, при котором стоимость всех перевозок будет минимальна. Предварительно следует проверить, сбалансирована ли данная транспортная задача. Если задача не сбалансирована, то нужно ввести фиктивных потребителей или производителей, добавляя к исходной таблице столбцы или строки.

№ 1

Производители	Потребители				Объём производства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	26	47	25	20	48
A_2	10	40	43	6	28
A_3	9	34	46	15	71
Спрос	47	81	25	44	

№ 2

Производители	Потребители				Объём производства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	47	25	20	47	41
A_2	23	47	28	17	41
A_3	7	43	39	10	79
Спрос	13	50	46	28	

№ 3

Производители	Потребители				Объём производства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	25	20	47	30	32
A_2	40	43	6	36	49
A_3	22	47	29	16	46
Спрос	13	50	46	28	

№ 4

Производители	Потребители				Объём производ- ства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	20	47	30	14	22
A_2	47	28	17	46	58
A_3	34	46	15	29	78
Спрос	43	42	50	18	

№ 5

Производители	Потребители				Объём производ- ства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	47	30	14	45	10
A_2	43	6	36	45	61
A_3	43	39	10	40	60
Спрос	44	23	48	6	

№ 6

Производители	Потребители				Объём производ- ства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	30	14	45	35	10
A_2	28	17	46	33	44
A_3	47	29	16	46	41
Спрос	15	43	41	6	

№ 7

Производители	Потребители				Объём производ- ства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	14	45	35	7	22
A_2	6	36	45	13	83
A_3	46	15	29	47	56
Спрос	39	24	30	18	

№ 8

Производители	Потребители				Объём производ- ства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	45	35	7	43	83
A_2	17	46	33	10	18
A_3	39	10	40	43	82
Спрос	47	42	15	29	

№ 9

Производители	Потребители				Объём производства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	5	6	10	530
A_2	8	6	3	8	405
A_3	7	10	4	11	540
Спрос	425	415	335	400	

№ 10

Производители	Потребители				Объём производства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	7	4	8	513
A_2	9	6	4	4	448
A_3	6	10	5	8	522
Спрос	437	417	333	396	

Примерные вопросы на защите работы

1. Каковы основные этапы решения задач ЛП в MS Excel?
2. Каков вид и способы задания формул для целевой ячейки и ячеек левых частей ограничений?
3. В чем смысл использования символа \$ в формулах MS Excel?
4. В чем различие использования в формулах MS Excel символов ; и :?
5. Почему при вводе формул в ячейки ЦФ и левых частей ограничений в них отображаются нулевые значения?
6. Каким образом в MS Excel задается направление оптимизации ЦФ?
7. Какие ячейки экранной формы выполняют иллюстративную функцию, а какие необходимы для решения задачи?
8. Как наглядно отобразить в экранной форме ячейки, используемые в конкретной формуле, с целью проверки ее правильности?
9. Поясните общий порядок работы с окном "Поиск решения".
10. Каким образом можно изменять, добавлять, удалять ограничения в окне "Поиск решения"?
11. Какие сообщения выдаются в MS Excel в случаях: успешного решения задачи ЛП; несовместности системы ограничений задачи; неограниченности ЦФ?
12. Объясните смысл параметров, задаваемых в окне "Параметры поиска решения".
13. Каковы особенности решения в MS Excel целочисленных задач ЛП?
14. Каковы особенности решения в MS Excel двухиндексных задач ЛП?

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

- цель работы;
- задание с исходными данными;
- описание по пунктам выполненной работы с приведением необходимых схем, рисунков, таблиц, графиков, а также расчетных формул с численными значениями;
- выводы по каждому пункту экспериментальной части задания.

Список литературы

Перечень основной литературы:

1. Монахов О.И. Методы оптимизации в пакетах прикладных программ и их применение в решении задач НЛП в системах автоматического управления: учебно-методическое пособие к практическим занятиям и курсовому проекту по дисциплине «Методы оптимизации» / Монахов О.И. - Москва: Российский университет транспорта (МИИТ), 2021. - 63 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122054.html>

2. Кузнецов А.С. Введение в теорию принятия решений и методы оптимизации (элементы информационных технологий поиска эффективных решений): учебное пособие / Кузнецов А.С. - Новосибирск: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2023. - 163 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/138819.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Ахмадиев Ф. Г. Математическое моделирование и методы оптимизации: учебное пособие / Ф. Г. Ахмадиев, Р. М. Гильфанов. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 178 с. - ISBN 978-5-4497-1383-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/116448.html>

2. Поляков В.М. Методы оптимизации: учебное пособие / Поляков В.М., Агаларов З.С.. - Москва: Дашков и К, 2022. - 86 с. - ISBN 978-5-394-05003-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120727.html>

Лабораторная работа №3 « Решение задач динамического программирования в среде Matlab: задача распределения инвестиций, задача распределения инвестиций без пустых проектов, задача о рюкзаке (ранце), задача о надежности, задача календарного планирования трудовых ресурсов, управления запасами, задача о замене оборудования.»

Цель: овладеть навыками составления математической модели задачи о назначениях и ее решения в математических пакетах Maple, Mathcad Prime и в MS Excel.

Задачи: Способствовать интеллектуальному развитию студентов, формированию качеств мышления, характерных для математической деятельности при проектировании решения задач в области экономики. Содействовать формированию опыта творческой деятельности студентов через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач и выполнении проектов. Содействовать формированию навыков работы с научной литературой, использования различных интернет-ресурсов. Сформировать требуемый набор компетенций, соответствующих направлению и обеспечивающих конкурентоспособность на рынке труда.

Знать: - основные понятия эконометрического подхода,

- основные методы оценивания неизвестных параметров экономических задач;
- методы представления математических данных и основные методы работы с ними;
- алгебраические методы и методы математического анализа решения экономических и социально-экономических задач;

Уметь: - математически описывать структурные элементы экономики;

- выявлять математические зависимости этих законов;
- применять математические методы при решении практических задач, жизненных ситуаций;

Владеть: -навыками математического описания экономических объектов;

- навыками выявления закономерностей и математических зависимостей социально-экономического развития;

Указания по технике безопасности

Общие положения:

- К работе в компьютерном классе допускаются лица, ознакомленные с данной инструкцией по технике безопасности и правилам поведения.
- Работа учащихся в компьютерном классе разрешается только в присутствии преподавателя (инженера, лаборанта).

- Во время занятий посторонние лица могут находиться в классе только с разрешения преподавателя.
- Во время перемен между парами проводится обязательное проветривание компьютерного кабинета с обязательным выходом студентов.
- Помните, что каждый студент в ответе за состояние своего рабочего места и сохранность размещенного на нем оборудования.

Перед началом работы необходимо:

- Убедиться в отсутствии видимых повреждений на рабочем месте;
- Разместить на столе тетради, учебные пособия так, что бы они не мешали работе на компьютере;
- Принять правильную рабочую позу.
- Посмотреть на индикатор монитора и системного блока и определить, включён или выключен компьютер. Переместите мышь, если компьютер находится в энергосберегающем состоянии или включить монитор, если он был выключен.

При работе в компьютерном классе категорически запрещается:

- Находиться в классе в верхней одежде;
- Класть одежду и сумки на столы;
- Находиться в классе с напитками и едой;
- Располагаться сбоку или сзади от включенного монитора;
- Присоединять или отсоединять кабели, трогать разъемы, провода и розетки;
- Передвигать компьютеры и мониторы;
- Открывать системный блок;
- Включать и выключать компьютеры самостоятельно.
- Пытаться самостоятельно устранять неисправности в работе аппаратуры;
- Перекрывать вентиляционные отверстия на системном блоке и мониторе;
- Ударять по клавиатуре, нажимать бесцельно на клавиши;
- Класть книги, тетради и другие вещи на клавиатуру, монитор и системный блок;
- Удалять и перемещать чужие файлы;
- Приносить и запускать компьютерные игры.

Находясь в компьютерном классе, учащиеся обязаны:

- Соблюдать тишину и порядок;
- Выполнять требования преподавателя и лаборанта;
- Находясь в сети работать только под своим именем и паролем;
- Соблюдать режим работы (согласно п. 9.4.2. Санитарных правил и норм);
- При появлении рези в глазах, резком ухудшении видимости, невозможности сфокусировать взгляд или навести его на резкость, появления боли в пальцах и кистях рук, усиления сердцебиения немедленно покинуть рабочее место, сообщить о происшедшем преподавателю и обратиться к врачу;
- После окончания работы завершить все активные программы и корректно выключить компьютер;
- Оставить рабочее место чистым.

Работая за компьютером, необходимо соблюдать правила:

- Расстояние от экрана до глаз – 70 – 80 см (расстояние вытянутой руки);
- Вертикально прямая спина;
- Плечи опущены и расслаблены;
- Ноги на полу и не скрещены;
- Локти, запястья и кисти рук на одном уровне;
- Локтевые, тазобедренные, коленные, голеностопные суставы под прямым углом.

Требования безопасности в аварийных ситуациях:

- При появлении программных ошибок или сбоях оборудования учащийся должен немедленно обратиться к преподавателю (лаборанту).
- При появлении запаха гари, необычного звука немедленно прекратить работу, и сообщить преподавателю (лаборанту).

Вопросы к занятию

- а. изучить теоретический материал;
- б. выполнить математическую постановку задачи;
- с. решить задачу в математических пакетах Maple, Mathcad Prime и в среде электронных таблиц MS Excel.

Теоретическая часть

Задача о назначениях является типичным примером оптимального принятия управленческих решений. Эта задача позволяет распределить объекты из некоторого множества по группе субъектов из другого множества и это распределение должно соответствовать оптимальности одного или нескольких итоговых показателей. Данная задача имеет место при назначении людей на должности или работы, автомашин на маршруты, водителей на машины, при распределении студенческих групп по аудиториям, научных тем по научноисследовательским лабораториям и т.п.

Пусть требуется выполнить n различных работ и имеется n механизмов (машин) для их выполнения, причем каждый механизм может использоваться на любой работе. Производительность механизма на различных работах, вообще говоря, различна. Обозначим через c_{ij} производительность i -го механизма на j -й работе. Задача заключается в таком распределении механизмов по работам, при котором суммарная производительность максимальна.

Построим математическую модель этой задачи.

Сопоставим каждому из возможных вариантов распределения машин по работам набор значений неизвестных x_{ij} , относительно которых условимся, что $x_{ij} = 1$, если в данном варианте i -й механизм назначается на j -ю работу, и $x_{ij} = 0$, если i -й механизм назначается не на j -ю работу. Для любого варианта среди чисел x_{ij} должно быть точно n единиц, причем должны выполняться условия: $\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = \overline{1, n}$ (каждый механизм назначается на одну работу); $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = \overline{1, n}$ (на каждую работу назначен один механизм). Суммарная производительность при данном варианте назначения машин на работы выразится суммой: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$.

Математическая постановка задачи:

$$L = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, & j = \overline{1, n} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, & i = \overline{1, n} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} \text{если } i - \text{й механизм назначен на } j - \text{ю работу;} \\ 0, \text{ если } i - \text{й механизм не назначен на } j - \text{ю работу;} \end{cases}$$

Условия выводят задачу о назначениях из класса задач линейного программирования, так как они нелинейны. Задачи математического программирования, в которых на переменные наложены такие условия, называются **задачами с булевыми переменными**. Поскольку все остальные условия и целевая функция нашей задачи линейны, мы должны формально отнести ее к классу задач линейного программирования с булевыми переменными. Однако задачу можно рассмотреть как частный случай транспортной (и, следовательно, просто линейной) задачи. В самом деле, если отбросить последнее условие, заменив его условиями неотрицательности переменных, то задача превращается в обычную транспортную задачу, имеющую ту особенность, что в ней все a_i и все b_j , $i, j = \overline{1, n}$ равны единице. □ к

Пример. Некоторая компания имеет четыре сбытовые базы и четыре заказа, которые необходимо доставить различным потребителям. Складские помещения каждой базы вполне достаточны для того, чтобы вместить один из этих заказов. В табл. 1 содержится информация о расстоянии между каждой базой и каждым потребителем. Как следует распределить заказы по сбытовым базам, чтобы общая дальность транспортировки была минимальной?

Решение. Для решения задачи составим ее математическую модель:

1. Введем обозначения:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ая сбытовая база осуществляет перевозки к } j\text{-му потребителю} \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$i, j = \overline{1, 4}$$

Таблица 1

Сбытовая база	Расстояние, миль, потребители			
	I	II	III	IV
1	68	72	75	83
2	56	60	58	63
3	38	40	35	45
4	47	42	40	45

2. Составим целевую функцию – минимальная дальность транспортировки:

$$L = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij} = 68x_{11} + 72x_{12} + 75x_{13} + 83x_{14} + 56x_{21} + 60x_{22} + 58x_{23} + 63x_{24} + 38x_{31} + 40x_{32} + 35x_{33} + 45x_{34} + 47x_{41} + 42x_{42} + 40x_{43} + 45x_{44} \rightarrow \min$$

(1)

3. Сформулируем ограничения рассматриваемой задачи.

3.1. Каждая сбытовая база вмещает один заказ. Это ограничение можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1, \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1. \end{cases} \quad (2)$$

3.2. Каждый заказ распределяется на одну сбытовую базу. Это ограничение можно записать так:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1. \end{cases} \quad (3)$$

3.3. Бинарность переменных x_{ij} :

$$x_{ij} - \text{бинарные (двоичные)}, \quad i = \overline{1,4}, \quad j = \overline{1,4}. \quad (4)$$

Таким образом, целевая функция (1) и ограничения (2–4) образуют математическую модель задачи о назначениях.

Решение задачи в пакете Maple

1. Подключаем пакеты linalg и simplex:

>restart:with(simplex):

2. Задаем матрицу назначений, матрицу расстояний между каждой базой и каждым потребителем и целевую функцию:

>x:=matrix(4,4);

$$x = \text{array}(1..4, 1..4, [\quad])$$

>C:=matrix([[68,72,75,83], [56,60,58,63], [38,40,35,45], [47,42,40,45]]);

$$C = \begin{bmatrix} 68 & 72 & 75 & 83 \\ 56 & 60 & 58 & 63 \\ 38 & 40 & 35 & 45 \\ 47 & 42 & 40 & 45 \end{bmatrix}$$

>Z:=sum(sum(C[i,j]*x[i,j], i=1..4), j=1..4);

$$Z = 68x_{1,1} + 56x_{2,1} + 38x_{3,1} + 47x_{4,1} + 72x_{1,2} + 60x_{2,2} + 40x_{3,2} + 42x_{4,2} + 75x_{1,3} + 58x_{2,3} + 35x_{3,3} + 40x_{4,3} + 83x_{1,4} + 63x_{2,4} + 45x_{3,4} + 45x_{4,4}$$

3. Находим оптимальное решение:

>minimize(Z, {sum(x[1,j],j=1..4)=1, sum(x[2,j],j=1..4)=1, sum(x[3,j],j=1..4)=1, sum(x[4,j],j=1..4)=1, sum(x[i,1],i=1..4)=1, sum(x[i,2],i=1..4)=1, sum(x[i,3], i=1..4)=1, sum(x[i,4],i=1..4)=1}, NONNEGATIVE);

$$\begin{cases} x_{3,1} = 0, x_{4,1} = 0, x_{2,1} = 0, x_{1,4} = 0, x_{1,2} = 0, x_{1,3} = 0, x_{2,3} = 0, x_{2,4} = 1, x_{33} = 1, \\ x_{1,1} = 1, x_{3,2} = 0, x_{4,2} = 1, x_{4,3} = 0, x_{3,4} = 0, x_{4,4} = 0, x_{2,2} = 0 \end{cases}$$

4. Представляем полученное решение в матричном виде:

>v:=matrix([[1,0,0,0], [0,0,0,1], [0,0,1,0],[0,1,0,0]]);

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Определяем минимальную дальность транспортировки:

>sum(sum(C[i,j]*v[i,j],i=1..4),j =1..4);

Решение задачи в пакете Mathcad Prime

Для решения задачи в пакете Mathcad Prime необходимо:

1. Задать исходные данные.
2. На вкладке «Математика» выбрать «Блок решения».
3. В области «Начальные приближения» присвоить переменным, т.е. матрице X начальные (любые, например, нулевые) значения и задать целевую функцию.
4. В области «Ограничения» ввести все необходимые ограничения.
5. В области «Решатель» найти оптимальное решение с помощью функции minimize и вычислить минимальную дальность транспортировки.

Решение задачи в среде электронных таблиц MS Excel

1. Идентифицируйте свою работу, переименовав Лист1 в «Титульный лист» и записав номер лабораторной работы, ее название, кто выполнил и проверил.
2. На следующем листе, с именем «Задача о назначениях», создайте таблицу для ввода условий задачи и введите исходные данные.
3. Матрицу назначений заполните пока нулевыми значениями.
4. Матрицу назначений дополните столбцом справа и строкой снизу/
5. В ячейку **D20** введите формулу целевой функции – стоимость перевозок: **=СУММПРОИЗВ(C5:F8;C14:F17)**.
6. В ячейку **G14** запишите формулу: **=СУММ(C14:F14)**. Эту формулу скопируйте автозаполнением в остальные ячейки диапазона **G15:G17**.
7. В ячейку **C18** запишите функцию: **=СУММ(C14:C17)**. Эту формулу скопируйте автозаполнением в остальные ячейки диапазона **D18: F18**.
8. На вкладке «Данные» выберите пункт «Поиск решения».
9. В появившемся окне «Параметры поиска решения» нужно выполнить необходимые установки.
 - Введите абсолютный адрес целевой ячейки **\$D\$20** в поле «Оптимизировать целевую функцию» или щелкните по ячейке **D20** мышью, а затем снова по кнопке .
 - Введите направление целевой функции, щелкните мышью по селекторному полю «Минимум».

– В поле «Изменяя ячейки переменных» впишите абсолютный адрес диапазона ячеек **\$C\$14:\$F\$17** или щ ☐лкните по кнопке .
диапазон ячеек **C14:F17** и снова щ ☐лкните по кнопке .

– В поле «В соответствии с ограничениями» введите ограничения с помощью кнопки «Добавить». При этом вызывается диалоговое окно «Добавление ограничения».

Введите систему ограничений (2). В поле «Ссылка на ячейки» щ ☐лкните по кнопке , затем выделите мышью диапазон ячеек **G14÷G17** и снова щ ☐лкните по кнопке **Итого по условию**, нажав $\vee$, затем в поле «Ограничение» введите 1. Нажмите «Добавить».

Аналогично введите систему ограничений (3). В поле «Ссылка на ячейки» щ ☐лкните по кнопке , затем выделите мышью диапазон ячеек **C18:F18** и снова щ ☐лкните по кнопке **Итого по условию**, нажав $\vee$, затем в поле «Ограничение» введите 1. Нажмите «Добавить».

Теперь введите ограничение (4). В поле «Ссылка на ячейки» щ ☐лкните по кнопке , затем выделите мышью диапазон ячеек **C14:F17** и снова щ ☐лкните по кнопке , в следующем поле установите «бин», нажав $\vee$, поле «Ограничение» заполнится автоматически, появится «бинарное». Нажмите «ОК».

– Установите галочку «Сделать переменные без ограничений неотрицательными».

– Выберите метод решения «Поиск решения линейных задач симплекс-методом»

– Нажмите «Найти решение». В появившемся окне «Результаты поиска решения» нажмите «ОК».

Выводы. Решая задачу в Maple и Mathcad Prime перевозки осуществляются со сбытовой базы 1 к потребителю I, с базы 2 – к потребителю IV, с базы 3 – к потребителю III и с базы 4 – к потребителю II. Минимальная дальность перевозок составляет $68 + 60 + 35 + 45 = 208$ миль.

Решая задачу в MS Excel перевозки осуществляются со сбытовой базы 1 к потребителю I, с базы 2 – к потребителю II, с базы 3 – к потребителю III и с базы 4 – к потребителю IV. Минимальная дальность перевозок составляет $68 + 60 + 35 + 45 = 208$ миль.

Оборудование и материалы

1. Доска меламин в пластик. раме
2. Компьютер моноблок Lenovo Idea Centre C540A1 G2020/4
3. Копи-доска Panasonic UB-T780-G
4. Монитор 17 HP TET
5. Монитор HP TFT 17
6. Мультимедиа-проектор Epson с набором кабелей
7. Проектор Acer P1270 в комплекте с потолочным креплением
8. Сист.блок HP d330 MidiTower

Исходные данные для лабораторной работы

Распределить работы таким образом, чтобы минимизировать временные затраты на выполнение всех работ при условии, что каждый из претендентов получит одну и только одну из работ. Матрица временных затрат каждого претендента на выполнение каждой из работ приведена в таблице.

Работники	Номера работ									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Иванов	7+№	9	1	15	1	9	3	4	6	3
Петров	4	14+№	11	11	4	12	2	3	5	3
Сидоров	№	17	20-№	16	9	16	4	6	7	1
Копылов	4	17	10	12+№	16	14	3	7	3	1
Минин	2	5	18	8	18	5	1	6	1	3
Жаров	7	17	1	8	8	20-№	7	3	2	7
Власов	3	1	№	3	2	3	4+№	5	3	№
Демченко	6	№	2	1	1	5	4	№	1	1
Серегин	№	1	3	7	4	3	5	2	2+№	4
Панин	3	3	5	№	3	№	3	1	1	№

№- номер варианта

Примерные вопросы на защите работы

1. Каковы основные этапы решения задач ЛП в MS Excel?
2. Каков вид и способы задания формул для целевой ячейки и ячеек левых частей ограничений?
3. В чем смысл использования символа \$ в формулах MS Excel?
4. В чем различие использования в формулах MS Excel символов ; и :?
5. Почему при вводе формул в ячейки ЦФ и левых частей ограничений в них отображаются нулевые значения?
6. Каким образом в MS Excel задается направление оптимизации ЦФ?
7. Какие ячейки экранной формы выполняют иллюстративную функцию, а какие необходимы для решения задачи?
8. Как наглядно отобразить в экранной форме ячейки, используемые в конкретной формуле, с целью проверки ее правильности?
9. Поясните общий порядок работы с окном "Поиск решения".
10. Каким образом можно изменять, добавлять, удалять ограничения в окне "Поиск решения"?
11. Какие сообщения выдаются в MS Excel в случаях: успешного решения задачи ЛП; несовместности системы ограничений задачи; неограниченности ЦФ?
12. Объясните смысл параметров, задаваемых в окне "Параметры поиска решения".

13. Каковы особенности решения в MS Excel целочисленных задач ЛП?
14. Каковы особенности решения в MS Excel двухиндексных задач ЛП?

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

- цель работы;
- задание с исходными данными;
- описание по пунктам выполненной работы с приведением необходимых схем, рисунков, таблиц, графиков, а также расчетных формул с численными значениями;
- выводы по каждому пункту экспериментальной части задания.

Список литературы

Перечень основной литературы:

1. Монахов О.И. Методы оптимизации в пакетах прикладных программ и их применение в решении задач НЛП в системах автоматического управления: учебно-методическое пособие к практическим занятиям и курсовому проекту по дисциплине «Методы оптимизации» / Монахов О.И. - Москва: Российский университет транспорта (МИИТ), 2021. - 63 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122054.html>
2. Кузнецов А.С. Введение в теорию принятия решений и методы оптимизации (элементы информационных технологий поиска эффективных решений): учебное пособие / Кузнецов А.С. - Новосибирск: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2023. - 163 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/138819.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Ахмадиев Ф. Г. Математическое моделирование и методы оптимизации: учебное пособие / Ф. Г. Ахмадиев, Р. М. Гильфанов. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 178 с. - ISBN 978-5-4497-1383-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/116448.html>
2. Поляков В.М. Методы оптимизации: учебное пособие / Поляков В.М., Агаларов З.С.. - Москва: Дашков и К, 2022. - 86 с. - ISBN 978-5-394-05003-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120727.html>

Лабораторная работа №4 «Задачи на безусловный экстремум»

Цель работы: овладеть навыками решения задач безусловной оптимизации в пакете MAPLE.

Задачи: Способствовать интеллектуальному развитию студентов, формированию качеств мышления, характерных для математической деятельности при проектировании решения задач в области экономики. Содействовать формированию опыта творческой деятельности студентов через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач и выполнении проектов. Содействовать формированию навыков работы с научной литературой, использования различных интернет-ресурсов. Сформировать требуемый набор компетенций, соответствующих направлению и обеспечивающих конкурентоспособность на рынке труда.

Знать: - основные понятия эконометрического подхода,

- основные методы оценивания неизвестных параметров экономических задач;
- методы представления математических данных и основные методы работы с ними;
- алгебраические методы и методы математического анализа решения экономических и социально-экономических задач;

Уметь: - математически описывать структурные элементы экономики;

- выявлять математические зависимости этих законов;
- применять математические методы при решении практических задач, жизненных ситуаций;

Владеть: -навыками математического описания экономических объектов;

- навыками выявления закономерностей и математических зависимостей социально-экономического развития;

Указания по технике безопасности

Общие положения:

- К работе в компьютерном классе допускаются лица, ознакомленные с данной инструкцией по технике безопасности и правилам поведения.
- Работа учащихся в компьютерном классе разрешается только в присутствии преподавателя (инженера, лаборанта).
- Во время занятий посторонние лица могут находиться в классе только с разрешения преподавателя.
- Во время перемен между парами проводится обязательное проветривание компьютерного кабинета с обязательным выходом студентов.
- Помните, что каждый студент в ответе за состояние своего рабочего места и сохранность размещенного на нем оборудования.

Перед началом работы необходимо:

- Убедиться в отсутствии видимых повреждений на рабочем месте;
- Разместить на столе тетради, учебные пособия так, что бы они не мешали работе на компьютере;
- Принять правильную рабочую позу.
- Посмотреть на индикатор монитора и системного блока и определить, включён или выключен компьютер. Переместите мышь, если компьютер находится в энергосберегающем состоянии или включить монитор, если он был выключен.

При работе в компьютерном классе категорически запрещается:

- Находиться в классе в верхней одежде;
- Класть одежду и сумки на столы;
- Находиться в классе с напитками и едой;
- Располагаться сбоку или сзади от включенного монитора;
- Присоединять или отсоединять кабели, трогать разъемы, провода и розетки;
- Передвигать компьютеры и мониторы;
- Открывать системный блок;
- Включать и выключать компьютеры самостоятельно.
- Пытаться самостоятельно устранять неисправности в работе аппаратуры;
- Перекрывать вентиляционные отверстия на системном блоке и мониторе;
- Ударять по клавиатуре, нажимать бесцельно на клавиши;
- Класть книги, тетради и другие вещи на клавиатуру, монитор и системный блок;
- Удалять и перемещать чужие файлы;
- Приносить и запускать компьютерные игры.

Находясь в компьютерном классе, учащиеся обязаны:

- Соблюдать тишину и порядок;
- Выполнять требования преподавателя и лаборанта;
- Находясь в сети работать только под своим именем и паролем;
- Соблюдать режим работы (согласно п. 9.4.2. Санитарных правил и норм);

- При появлении рези в глазах, резком ухудшении видимости, невозможности сфокусировать взгляд или навести его на резкость, появления боли в пальцах и кистях рук, усиления сердцебиения немедленно покинуть рабочее место, сообщить о происшедшем преподавателю и обратиться к врачу;
- После окончания работы завершить все активные программы и корректно выключить компьютер;
- Оставить рабочее место чистым.

Работая за компьютером, необходимо соблюдать правила:

- Расстояние от экрана до глаз – 70 – 80 см (расстояние вытянутой руки);
- Вертикально прямая спина;
- Плечи опущены и расслаблены;
- Ноги на полу и не скрещены;
- Локти, запястья и кисти рук на одном уровне;
- Локтевые, тазобедренные, коленные, голеностопные суставы под прямым углом.

Требования безопасности в аварийных ситуациях:

- При появлении программных ошибок или сбоях оборудования учащийся должен немедленно обратиться к преподавателю (лаборанту).
- При появлении запаха гари, необычного звука немедленно прекратить работу, и сообщить преподавателю (лаборанту).

Вопросы к занятию

1. изучить теоретический материал;
2. решить задачу в математическом пакете Maple

Теоретическая часть

Дана функция $f(X)$, определенная и непрерывная на множестве $M = R^n$. Требуется исследовать функцию $f(X)$ на экстремум, то есть определить точки $X^* \in R^n$ ее локальных максимумов и максимумов на R^n :

$$f(X^*) = \min_{X \in R^n} f(X) \text{ или } f(X^*) = \max_{X \in R^n} f(X) \quad (1)$$

Точки X^* находятся с помощью необходимых условий локального экстремума первого и второго порядков (порядок условий определяется порядком используемых производных), а также достаточных условий безусловного локального экстремума.

Утверждение 1 (необходимые условия экстремума первого порядка). Пусть $X^* \in R^n$ есть точка локального минимума (максимума) функции $f(X)$ на множестве R^n и $f(X)$ дифференцируема в точке X^* . Тогда градиент функции $f(X)$ в точке X^* равен нулю, то

$$\nabla f(X^*) = 0 \quad (2)$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X^*) = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (3)$$

Точки X^* , удовлетворяющие условию (2) или (3), называются стационарными.

Утверждение 2 (необходимые условия экстремума второго порядка). Пусть точка X^* есть точка локального минимума (максимума) функции $f(X)$ на множестве R^n и функция $f(X)$ дважды дифференцируема в этой точке. Тогда матрица Гессе $H(X^*)$ функции $f(X)$, вычисленная в точке X^* , является положительно полуопределенной (отрицательно полуопределенной), то есть

$$H(X^*) \geq 0, \quad (4)$$

$$(H(X^*) \leq 0) \quad (5)$$

Утверждение 3 (достаточные условия экстремума). Пусть функция $f(X)$ в точке $X^* \in R^n$ дважды дифференцируема, ее градиент в точке X^* равен нулю, а матрица Гессе является положительно определенной (отрицательно определенной) в точке X^* , то есть

$$\nabla f(X^*) = 0 \text{ и } H(X^*) > 0 \quad (6)$$

$$\nabla f(X^*) = 0 \text{ и } (H(X^*) < 0) \quad (7)$$

Тогда точка X^* есть точка локального минимума (максимума) функции $f(X)$ на множестве R^n .

Рассмотрим определитель матрицы Гессе, вычисленной в стационарной точке

$$\det H(X^*) = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix}$$

$$1. \text{ Определители } \Delta_1 = h_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix} \text{ назы-}$$

ваются угловыми минорами.

2. Определители m -ого порядка ($m \leq n$), получающиеся из определителя матрицы $H(X^*)$ вычеркиванием каких-либо $(n-m)$ строк и $(n-m)$ столбцов с одними и теми же номерами, называются **главными минорами**.

Для проверки выполнения достаточных условий экстремума и необходимых условий второго порядка используются два способа.

Первый способ (с помощью угловых и главных миноров)

Критерий проверки достаточных условий экстремума (критерий Сильвестра).

1. Для того чтобы матрица Гессе $H(X^*)$ была положительно определенной и точка X^* являлась точкой локального минимума, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров были строго положительны:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0 \quad (8)$$

2. Для того чтобы матрица Гессе $H(X^*)$ была отрицательно определенной и точка X^* являлась точкой локального максимума, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров чередовались, начиная с отрицательного:

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots, (-1)^n \Delta_n > 0 \quad (9)$$

Критерий проверки необходимых условий экстремума второго порядка (критерий Сильвестра).

1. Для того чтобы матрица Гессе $H(X^*)$ была положительно полуопределенной и точка X^* может быть являлась точкой локального минимума, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы Гессе были неотрицательны.

2. Для того чтобы матрица Гессе $H(X^*)$ была отрицательно полуопределенной и точка X^* может быть являлась точкой локального максимума, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры четного порядка были неотрицательны, а все главные миноры нечетного порядка — неположительны.

Второй способ (с помощью собственных значений матрицы Гессе)

Собственные значения $\lambda_i, i = \overline{1, n}$, матрицы $H(X^*)$ размера $n \times n$ находятся как корни характеристического уравнения (алгебраического уравнения n -ой степени):

$$\left(|H(X^*) - \lambda E| = \begin{vmatrix} h_{11} - \lambda & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} - \lambda & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \right) \quad (10)$$

Замечание 1. Собственные значения вещественной симметрии матрицы $H(X^*)$ вещественны.

Алгоритм решения задачи:

1. Записать необходимые условия экстремума первого порядка в форме (3) и найти стационарные точки X^* в результате решения системы, в общем случае, n нелинейных алгебраических уравнений с n неизвестными.
2. В найденных стационарных точках X^* проверить выполнение достаточных, а если они не выполняются, то необходимых условий второго порядка.
3. Вычислить значения $f(X^*)$ в точках экстремума.

Замечание 2:

1. Если требуется определить глобальные экстремумы, то они находятся в результате сравнения значений функции в точках локальных минимумов и максимумов с учетом ограниченности функции на R^n .

2. (Критерий безусловного экстремума для функции одной переменной). Если функция $f(X)$ и ее производные непрерывны, то точка X^* является точкой экстремума тогда и только тогда, когда

$f'(X^*) = f''(X^*) = \dots = f^{(m-1)}(X^*) = 0, f^{(m)}(X^*) \neq 0$ и m – четно. При этом если $f^{(m)}(X^*) > 0$, то в точке X^* – локальный минимум, а если $f^{(m)}(X^*) < 0$, то в точке X^* – локальный максимум. Если число m нечетное, то в точке X^* нет экстремума.

Пример. Исследовать на экстремум функцию
 $f = x^4 + y^4 - x^2 - 2 \cdot x \cdot y - y^2$

Решение задачи в пакете Maple

1. Зададим функцию с помощью функционального оператора:

> f:=(x, y)->x^4+y^4-x^2-2*x*y-y^2;

$f := (x, y) \rightarrow x^4 + y^4 - x^2 - 2 \cdot x \cdot y - y^2$

2. Прежде всего, нарисуем (трехмерный) график нашей функции. Для этого необходимо подключить пакет расширения **plots** с помощью команды **with**:

```
>with(plots): plot3d(f(x,y), x=-2.5..2.5, y=-2.5..2.5, axes = frame);
```

В этой команде указана опция **axes**, которая задает вид координатных осей. На самом деле, в данной команде, можно указывать большое количество различных опций, которые задают вид графиков: цвет, тип и толщину линий, угол поворота осей и д.р. Их подробное описание можно найти в Help.

Итак, мы получаем график.

Теперь построим контурный график, только в команде plot3d укажем опцию **style** и присвоим значение **patchcontour**:

```
> plot3d(f(x,y), x=-2.5..2.5, y=-2.5..2.5, style=patchcontour, axes=frame, contours=20);
```

Опция **contours** задает количество линий уровня функций на поверхности.

Получаем график.

На контурном графике чуть лучше виден характер функции, но все равно для определения экстремумов удобнее использовать двумерные линии уровня функции. Их можно получить таким образом:

```
> contourplot(f(x,y), x=-2.5..2.5, y=-2.5.. 2.5, axes=frame, filled=true, contours=50, coloring=[yellow, green]);
```

В этой команде опция **filled** равна **true**. Это означает, что Maple автоматически закрашивает области между линиями уровня в разные цвета в зависимости от значения функции f на этих линиях уровня. Это делает график более выразительным и позволяет визуально оценить характер изменения значений функции. Если положить опцию **filled** равной **false** (или вообще не указывать), то получим не закрашенный график. Напротив, если положить **filled=true**, то можно использовать опцию **coloring**, которая позволяет управлять цветами закрашки. Например, если указана **coloring=[yellow, green]**, то линии уровня, отвечающие наименьшему значению f , будут желтыми, а линии уровня, отвечающие наибольшему значению f — зелеными. Промежуточные линии уровня Maple закрасит в промежуточные цвета.

Глядя на эти рисунки, можно высказать предположение, что наша функция имеет два экстремума, причем из характера графика, полученного выше, следует, что это точки минимума.

Далее продемонстрируем, как можно решить задачу нахождения экстремумов нашей функции аналитически.

3. Применим необходимое условие первого порядка. Для нахождения критических точек функции зададим систему уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0:$$

```
> SysEqn:={diff(f(x,y), x)=0, diff(f(x,y), y)=0};
```

$$\text{SysEqn} := \{4x^3 - 2x - 2y = 0, 4y^3 - 2x - 2y = 0\}$$

4. Решаем данную систему с помощью команды solve:

> rez:=solve(SysEqn,{x, y});

$$\text{rez} := \{x = 0, y = 0\}, \{x = 0, y = 0\}, \{x = 0, y = 0\}, \{y = 1, x = 1\}, \{y = -1, x = -1\} \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \text{RootOf}\left(-\frac{1}{2}\text{Root}\left(-Z^2 - Z + 1\right) + Z^2\right)\left(\text{RootOf}\left(-Z^2 - Z + 1\right) - 1\right), \\ y = \text{RootOf}\left(-\frac{1}{2}\text{RootOf}\left(-Z^2 - Z + 1\right) + Z^2\right) \end{array} \right\}$$

Видим, что Maple выдает результат, содержащий функцию RootOf. Это означает, что аналитические решения системы нельзя выразить в радикалах. В таком случае можно попытаться получить численные, приближенные значения решений с помощью команды **evalf**. Эта команда служит для принудительного приближенного вычисления результата: **evalf(rez)**. Другой способ борьбы с функцией RootOf заключается в том, что в ответ исходной системы искусственно внести неточность, чтобы Maple не пыталась найти точное решение. Это можно сделать, например, так: вместо какого-нибудь целого числа в записи уравнений системы, например, числа 0, написать число 0.0. Maple воспринимает это число как нецелое и автоматически ищет приближенное решение такой системы.

Таким образом, нас интересуют следующие координаты (x,y): rez[1]=rez[2]=rez[3]=(0,0); rez[4]=(1,1); rez[5]=(-1,-1);

5. Далее применим условия экстремума второго порядка. Загружаем пакет линейной алгебры **linalg** и вычисляем Гессеан с помощью команды **hessian**:

> with(linalg): MatrixGesse:=hessian(f(x,y), [x,y]);

$$\text{MatrixGesse} := \begin{bmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{bmatrix}$$

6. Подставляем в Гессеан координаты стационарных точек с помощью оператора subs.

Подставляем точку (0;0):

> MatrixGesse:=subs(rez[1], hessian(f(x,y), [x,y]));

$$\text{MatrixGesse} := \begin{bmatrix} -2. & -2 \\ -2 & -2. \end{bmatrix}$$

Если **rez** содержал бы один результат, то мы бы написали

>MatrixGesse:=subs(rez, hessian(f(x,y), [x,y]));

У матрицы Гессе вычисляем главные диагональные миноры.

>M11:=MatrixGesse[1,1]; M21:=det(MatrixGesse);

$$M11 := -2$$

$$M21 := 0$$

Точка (0,0) не является точкой экстремума функции.

Также, выяснить положительную или отрицательную определенность матрицы можно при помощи команды **definite**(A,param), где param может принимать значения: 'positive_def ' – положительно определена ($A > 0$), 'positive_semidef' – неотрицательно определенная ($A \geq 0$), 'negative_def ' – отрицательно определенная ($A < 0$), 'negative_semidef' – неположительно определенная ($A \leq 0$). Результатом действия будет константа true – подтверждение, false – отрицание сделанного предположения.

```
>definite(MatrixGesse,'positive_def '); definite(MatrixGesse, 'negative_def ');  
  
false  
false
```

Подставляем точку (-1;-1). У матрицы Гессе вычисляем главные диагональные миноры.

```
>MatrixGesse:=subs(rez[4], hessian(f(x,y),[x,y])); M12:=MatrixGesse[1,1];  
M22:=det(MatrixGesse); definite(MatrixGesse,'positive_def');
```

$$MatrixGesse := \begin{bmatrix} 10. & -2 \\ -2 & 10. \end{bmatrix}$$

M12:=10.

M 22 := 96.

true

Т.к. все главные диагональные миноры матрицы Гессе положительны, то точка (-1,-1) точка минимума функции.

Вычисляем значение функции в данной точке.

```
> F:=subs(rez[5], f(x, y));
```

Ответ: Точки минимума (1,1) (-1,-1), $F_{\min}(1,1) = F_{\min}(-1,-1) = 2$.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

- цель работы;
- задание с исходными данными;
- описание по пунктам выполненной работы с приведением необходимых схем, рисунков, таблиц, графиков, а также расчетных формул с численными значениями;
- выводы по каждому пункту экспериментальной части задания.

Исходные данные для лабораторной работы

Найти точки безусловного экстремума функции:

$$ax_1^2 - bx_1 \cdot x_2 + cx_2^2 - dx_1 + ex_2 \rightarrow extr$$

№ варианта	a	b	c	d	e
1	3	3	1	-7	-7
2	4	1	-3	-7	7
3	-4	8	9	-7	3
4	-6	-1	8	-5	-9
5	2	-1	-1	8	8
6	7	-8	5	-7	-5
7	-4	1	9	6	-5
8	1	2	-8	-3	8
9	1	-7	-1	-4	8
10	-7	4	-6	-1	-5

Список литературы

Перечень основной литературы:

1. Монахов О.И. Методы оптимизации в пакетах прикладных программ и их применение в решении задач НЛП в системах автоматического управления: учебно-методическое пособие к практическим занятиям и курсовому проекту по дисциплине «Методы оптимизации» / Монахов О.И. - Москва: Российский университет транспорта (МИИТ), 2021. - 63 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122054.html>

2. Кузнецов А.С. Введение в теорию принятия решений и методы оптимизации (элементы информационных технологий поиска эффективных решений): учебное пособие / Кузнецов А.С. - Новосибирск: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2023. - 163 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/138819.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Ахмадиев Ф. Г. Математическое моделирование и методы оптимизации: учебное пособие / Ф. Г. Ахмадиев, Р. М. Гильфанов. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 178 с. - ISBN 978-5-4497-1383-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/116448.html>

2. Поляков В.М. Методы оптимизации: учебное пособие / Поляков В.М., Агаларов З.С. - Москва: Дашков и К, 2022. - 86 с. - ISBN 978-5-394-05003-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120727.html>

Лабораторная работа №5 «Задачи на условный экстремум»

Цель работы: овладеть навыками решения задач условной оптимизации в пакете MAPLE.

Задачи: Способствовать интеллектуальному развитию студентов, формированию качеств мышления, характерных для математической деятельности при проектировании решения задач в области экономики. Содействовать формированию опыта творческой деятельности студентов через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач и выполнении проектов. Содействовать формированию навыков работы с научной литературой, использования различных интернет-ресурсов. Сформировать требуемый набор компетенций, соответствующих направлению и обеспечивающих конкурентоспособность на рынке труда.

Знать: - основные понятия эконометрического подхода,

- основные методы оценивания неизвестных параметров экономических задач;
- методы представления математических данных и основные методы работы с ними;
- алгебраические методы и методы математического анализа решения экономических и социально-экономических задач;

Уметь: - математически описывать структурные элементы экономики;

- выявлять математические зависимости этих законов;
- применять математические методы при решении практических задач, жизненных ситуаций;

Владеть: -навыками математического описания экономических объектов;

- навыками выявления закономерностей и математических зависимостей социально-экономического развития;

Указания по технике безопасности

Общие положения:

- К работе в компьютерном классе допускаются лица, ознакомленные с данной инструкцией по технике безопасности и правилам поведения.
- Работа учащихся в компьютерном классе разрешается только в присутствии преподавателя (инженера, лаборанта).
- Во время занятий посторонние лица могут находиться в классе только с разрешения преподавателя.
- Во время перемен между парами проводится обязательное проветривание компьютерного кабинета с обязательным выходом студентов.
- Помните, что каждый студент в ответе за состояние своего рабочего места и сохранность размещенного на нем оборудования.

Перед началом работы необходимо:

- Убедиться в отсутствии видимых повреждений на рабочем месте;
- Разместить на столе тетради, учебные пособия так, что бы они не мешали работе на компьютере;
- Принять правильную рабочую позу.
- Посмотреть на индикатор монитора и системного блока и определить, включён или выключен компьютер. Переместите мышь, если компьютер находится в энергосберегающем состоянии или включить монитор, если он был выключен.

При работе в компьютерном классе категорически запрещается:

- Находиться в классе в верхней одежде;
- Класть одежду и сумки на столы;
- Находиться в классе с напитками и едой;
- Располагаться сбоку или сзади от включенного монитора;
- Присоединять или отсоединять кабели, трогать разъемы, провода и розетки;
- Передвигать компьютеры и мониторы;
- Открывать системный блок;
- Включать и выключать компьютеры самостоятельно.
- Пытаться самостоятельно устранять неисправности в работе аппаратуры;
- Перекрывать вентиляционные отверстия на системном блоке и мониторе;
- Ударять по клавиатуре, нажимать бесцельно на клавиши;

- Класть книги, тетради и другие вещи на клавиатуру, монитор и системный блок;
- Удалять и перемещать чужие файлы;
- Приносить и запускать компьютерные игры.

Находясь в компьютерном классе, учащиеся обязаны:

- Соблюдать тишину и порядок;
- Выполнять требования преподавателя и лаборанта;
- Находясь в сети работать только под своим именем и паролем;
- Соблюдать режим работы (согласно п. 9.4.2. Санитарных правил и норм);
- При появлении рези в глазах, резком ухудшении видимости, невозможности сфокусировать взгляд или навести его на резкость, появления боли в пальцах и кистях рук, усиления сердцебиения немедленно покинуть рабочее место, сообщить о происшедшем преподавателю и обратиться к врачу;
- После окончания работы завершить все активные программы и корректно выключить компьютер;
- Оставить рабочее место чистым.

Работая за компьютером, необходимо соблюдать правила:

- Расстояние от экрана до глаз – 70 – 80 см (расстояние вытянутой руки);
- Вертикально прямая спина;
- Плечи опущены и расслаблены;
- Ноги на полу и не скрещены;
- Локти, запястья и кисти рук на одном уровне;
- Локтевые, тазобедренные, коленные, голеностопные суставы под прямым углом.

Требования безопасности в аварийных ситуациях:

- При появлении программных ошибок или сбоях оборудования учащийся должен немедленно обратиться к преподавателю (лаборанту).
- При появлении запаха гари, необычного звука немедленно прекратить работу, и сообщить преподавателю (лаборанту).

Вопросы к занятию

1. изучить теоретический материал;
2. решить задачу в математическом пакете Maple

Теоретическая часть

Пусть целевая функция $f(X)$ дважды, а функции ограничений $g_j(X)$, $j = \overline{1, k}$, определяющие множество допустимых точек M , один раз непрерывно дифференцируемы на некотором множестве, содержащем M . Требуется исследовать функцию $f(X)$ на экстремум, то есть определить точки X^* ее локальных минимумов и максимумов на множестве M :

$$f(X^*) = \min_{X \in M} f(X), \text{ или } f(X^*) = \max_{X \in M} f(X) \quad (1)$$

где $M = \{X \mid g_j(X) = 0, j = \overline{1, k}, k < n\}$.

Задача (1) называется **задачей на условный экстремум с ограничениями типа равенств**.

Функция

$$L(X, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(X)$$

называется **обобщенной функцией Лагранжа**, числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ — множителями Лагранжа, $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$.

Классической функцией Лагранжа $L(X, \lambda)$ называется функция $L(X, 1, \lambda)$, то есть $L(X, \lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(X)$.

Градиентом функции Лагранжа по X называется векторстолбец, составленный из ее частных производных первого порядка по $x_i, i = \overline{1, n}$:

$$\nabla_x L(X, \lambda_0, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L(X, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L(X, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial L(X, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Вторым дифференциалом обобщенной (классической) функции Лагранжа $L(X, \lambda_0, \lambda)$ ($L(X, \lambda)$) по X называется функция

$$d^2 L(X, \lambda_0, \lambda) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(X, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

$$\left(d^2 L(X, \lambda_0, \lambda) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(X, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \right)$$

Таким образом, второй дифференциал функции Лагранжа является квадратичной формой с матрицей Гессе по X

$$L''_{xx}(X, \lambda_0, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L(X, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L(X, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L(X, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 L(X, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L(X, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L(X, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 L(X, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L(X, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 L(X, \lambda_0, \lambda)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Первым дифференциалом ограничения $g_j(X)$ называется функция

$$dg_j(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j(X)}{\partial x_i} dx_i, \quad j = \overline{1, m}$$

Ограничение $g_j(X) \leq 0$ называется **активным** в точке X^* , если $g_j(X^*) = 0$. Если $g_j(X) < 0$, то ограничение называется **пассивным**.

Градиенты ограничений $g_1(X), g_2(X), \dots, g_m(X)$ называются **линейно независимыми** в точке X^* , если равенство $\lambda_1 \nabla g_1(X^*) + \lambda_2 \nabla g_2(X^*) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(X^*) = 0$ выполняется только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$. Если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ одновременно не равные нулю, для которых равенство выполняется, то градиенты **линейно зависимы**.

Отметим, что в случае линейной зависимости векторов один из них есть линейная комбинация остальных. Один вектор тоже образует систему векторов, которая является линейно независимой при $\nabla g_1(X^*) \neq 0$ и линейно зависимой при $\nabla g_1(X^*) = 0$.

Система векторов, содержащая нулевой вектор, всегда линейно зависима. Если $r(A) = r(\nabla g_1(X^*), \nabla g_2(X^*), \dots, \nabla g_m(X^*)) = m$, то система векторов линейно независима. Если же $r(A) < m$, то система векторов линейно зависима.

Точки X^* находятся с помощью необходимых и достаточных условий условного минимума и максимума первого и второго порядка при ограничениях типа равенств.

Утверждение 1 (необходимые условия экстремума первого порядка). Пусть X^* есть точка локального экстремума в задаче (1). Тогда найдутся числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*$, не равные одновременно нулю, и такие, что выполняются следующие условия:

– **условие стационарности функции Лагранжа по X:**

$$\frac{\partial L(X^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (2)$$

– **условие допустимости решения:**

$$g_j(X^*) = 0, \quad j = \overline{1, k}. \quad (3)$$

Если при этом градиенты $\nabla g_1(X^*), \nabla g_2(X^*), \dots, \nabla g_m(X^*)$ в точке X^* линейно независимы (выполняется **условие регулярности**), то $\lambda_0^* \neq 0$.

Замечания 1:

1. Система (2)–(3) содержит $n + k$ уравнений с $n + k + 1$ неизвестными $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$. Точки $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$, удовлетворяющие системе (2)–(3) при некоторых $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*$, называются **условно стационарными**.

2. Проверка условия регулярности затруднена, так как точка X^* заранее не известна. Поэтому, как правило, рассматриваются два случая: $\lambda_0^* = 0$ и $\lambda_0^* \neq 0$. Если $\lambda_0^* \neq 0$ в (2) полагают $\lambda_0^* = 1$. Это эквивалентно делению соотношения (2) на λ_0^* и замене $\frac{\lambda_j^*}{\lambda_0^*}$ на λ_j^* . При этом, функция Лагранжа становится классической. В этом случае в системе (2)–(3) число неизвестных становится равным числу уравнений, и эта система имеет вид

$$\frac{\partial L(X^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (4)$$

$$g_j(X^*) = 0, \quad j = \overline{1, k}. \quad (5)$$

3. Точка экстремума, удовлетворяющая системе (2)–(3) при $\lambda_0^* \neq 0$ называется **регулярной**, а при $\lambda_0^* = 0$ – **нерегулярной**. Случай $\lambda_0^* = 0$ отражает вырожденность ограничений. При этом в функции Лагранжа исчезает член, содержащий целевую функцию, а в необходимых условиях экстремума не используется информация, представляемая градиентом целевой функции.

Утверждение 2 (необходимые условия условного экстремума второго порядка). Пусть X^* – регулярная точка минимума (максимума) в задаче (1) и имеется решение (X^*, λ^*) системы (4)–(5). Тогда второй дифференци-

ал классической функции Лагранжа, вычисленный в точке (X^*, λ^*) , неотрицателен (неположителен)

$$d^2L(X^*, \lambda^*) \geq 0, \quad (d^2L(X^*, \lambda^*) \leq 0) \quad (6)$$

для всех $dX = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)^T \in R^n$ таких, что

$$dg_j(X^*) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j(X^*)}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad j = \overline{1, k}. \quad (7)$$

Утверждение 3 (достаточные условия условного экстремума). Пусть имеется точка (X^*, λ^*) , удовлетворяющая системе (4)- (5). Если в этой точке $d^2L(X^*, \lambda^*) \geq 0, (d^2L(X^*, \lambda^*) \leq 0,)$ для всех ненулевых значений $dX = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)^T \in R^n$ таких, что выполняются соотношения (7), то точка X^* является точкой локального минимума (максимума) в задаче (1).

Замечания 2. Отметим, что достаточные и необходимые условия экстремума второго порядка проверяются в условно-стационарных точках, которые удовлетворяют системе (2)-(3) при $\lambda_0^* \neq 0$ или системе (4)-(5), так как для практики, безусловно, представляет интерес случай, когда в функции Лагранжа присутствует целевая функция, экстремум которой ищется.

Алгоритм решения задачи (1):

1. Составить обобщенную функцию Лагранжа:

$$L(X, \lambda, \lambda_0) = \lambda_0 f(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(X)$$

2. Записать необходимые условия условного экстремума первого порядка (2)–(3):

$$\frac{\partial L(X^*, \lambda_0^*, \lambda^*)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$g_j(X^*) = 0, \quad j = \overline{1, k}$$

3. Решить систему (2)-(3) для случаев а) $\lambda_0^* = 0$; б) $\lambda_0^* = 1$. В результате найти условно-стационарные точки X^* , выделив из них регулярные точки.

4. Для выделенных в предыдущем пункте точек проверить достаточные условия экстремума:

а) записать выражение для второго дифференциала по X классической функции Лагранжа в точке (X^*, λ^*) :

$$d^2L(X^*, \lambda^*) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(X^*, \lambda^*)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

б) записать систему (7) в точке X^* :

$$dg_j(X^*) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j(X^*)}{\partial x_i} dx_i = 0, \quad j = \overline{1, k},$$

в) из предыдущей системы выразить любые k дифференциалов dx_i через остальные $(n-k)$ дифференциалов (будем называть их независимыми) и подставить в $d^2L(X^*, \lambda^*)$,

г) если $d^2L(X^*, \lambda^*) > 0$ при ненулевых dX , то в точке X^* – условный локальный минимум. Если $d^2L(X^*, \lambda^*) < 0$ при ненулевых dX , то в точке X^* – условный локальный максимум. Если достаточные условия экстремума не выполняются, следует проверить выполнение необходимых условий второго порядка, следуя аналогичной процедуре. Если они выполняются, то требуется дополнительное исследование, а если они не выполняются, то в точке X^* нет условного экстремума.

5. Вычислить значение целевой функции в точках условного экстремума.

Замечания 3. Иногда удастся проверить условие линейной независимости градиентов ограничений на множестве M . Если оно выполняется, то

на шаге 1 следует записать классическую функцию Лагранжа, на шаге 2 можно сразу записать систему (4)-(5), а на шаге 3 отсутствует случай $\lambda_0^* = 0$.

Пример. Исследовать на условный экстремум функцию двух переменных при наличии одного ограничения: $f(x, y) := (x - 2)^2 + (y - 1)^2 \rightarrow \text{extr}$,
 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Решение задачи в пакете Maple

1. Зададим нашу функцию и ограничения:

```
> restart; f:=(x-2)^2+(y-1)^2; g:=x^2+y^2-1;
```

$$f := (x - 2)^2 + (y - 1)^2$$

$$g := x^2 + y^2 - 1$$

2. Изобразим на плоскости xOy линии уровня функции $f(x, y)$ и множество $Q = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$:

```
> with(plots):
```

```
> g1:=implicitplot(g(x,y)=0, x=-1..1, y=-1..1, scaling=constrained):
```

```
> g2:=contourplot(f(x,y), x=-1.5..1.5, y=-1.5..1.5, scaling= constrained,
filled=false,coloring=[red, green], contours=30):
```

```
> display(g1,g2);
```

Опция **scaling=constrained** означает, что масштабы по осям Ox и Oy на графике будут выбраны одинаковыми. Этот фрагмент программы выдает рисунок. Полученный график позволяет локализовать точки минимума и максимума, которые являются точками касания окружности $g(x, y)$ и линий уровня функции $f(x, y)$.

Найдем экстремальные точки нашей функции аналитически.

3. Зададим функцию Лагранжа:

```
> L:=f+lambda*g;
```

4. Найдем частные производные функции Лагранжа и приравняем их к

$$\text{нулю} \begin{cases} \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0. \end{cases}$$

> SysEqn := {diff(L, x) = 0, diff(L, y) = 0, diff(L, lambda) = 0};

$$\text{SysEqn} := \{2x - 4 + 2\lambda x = 0, 2y - 2 + 2\lambda y = 0, x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

5. Решаем данную систему с помощью команды solve:

> rez := solve(SysEqn, {x, y, lambda});

$$\text{rez} := \{\lambda = -3.236067978, y = -.4472135955, x = -.8944271910\},$$

$$\{\lambda = 1.236067978, x = .8944271910, y = .4472135955\},$$

В этой команде можно, вообще говоря, и не указывать набор переменных, относительно которых решается система. В ответе появится команда **RootOf**, которая, как мы уже знаем, означает, что корни не могут быть найдены в квадратурах. Для этого применяем команду **evalf(rez)**.

Значит, одна из найденных точек минимум, а вторая максимум, достаточно просто подставить их в функцию

> F1 := subs(rez[1], f); F2 := subs(rez[2], f);

$$F1 = 1.527864045$$

$$F2 = 10.47213596$$

В данном случае оказалось, что задачу нахождения экстремумов можно решить, не применяя условий второго порядка. Однако для полноты изложения покажем, как применить эти условия. Вначале построим второй дифференциал функции Лагранжа. Можно действовать так.

6. Построим второй дифференциал функции Лагранжа, как функцию 4 переменных x, y, dx, dy:

> DDL := diff(L, x\$2)*dx^2 + 2*(diff(L, x, y))*dx*dy + diff(L, y\$2)*dy^2;

$$DDL := (2 + 2\lambda)dx^2 + (2 + 2\lambda)dy^2$$

7.Находим связь между дифференциалами dx , dy , которая выражается равенством $dg(x, y) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}dy = 0$:

>dg:=(diff(g, x))*dx+(diff(g, y))*dy=0;

$$dg = 2x dx + 2y dy = 0$$

8.Из равенства $dg(x, y) = \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}dy = 0$ выражаем dy через

dx с помощью команды solve:

>dy:=solve(dg, dy);

$$dy := -\frac{xdx}{y}$$

9.Теперь возвращаем функцию DDL от трех переменных x , y , dx (выражение для dy уже подставлено):

>eq:=DDL;

$$eq := (2 + 2\lambda)dx^2 + \frac{(2 + 2\lambda)x^2 dx^2}{y^2}$$

10.Для удобства можно привести подобные с помощью команды **collect**:

>collect(eq, dx);

$$\left(2 + 2\lambda + \frac{(2 + 2\lambda)x^2}{y^2} \right) dx^2$$

11.Найдем значения второго дифференциала в найденных точках:

>for i from 1 to 2 do assign(rez[i]); X[i]:=x; Y[i]:=y; Lambda[i]:=lambda;
print('DDL'=DDL): x:='x': y:='y': lambda:='lambda': od;

$$X_1 := 0.8944271910$$

$$Y_1 := 0.4472135955$$

$$\lambda_1 = 1.236067978$$

$$DDL = 22.36067978 dx^2$$

$$x := x$$

$$y := y$$

$$\lambda := \lambda$$

$$X_2 = -0.8944271910$$

$$Y_2 := -0.4472135955$$

$$\lambda_2 := -3.236067978$$

$$DDL := -22.36067978 dx^2$$

$$x := x$$

$$y := y$$

$$\lambda := \lambda$$

Получаем, что при $x = 0.894427191$, $y = 0.4472135955$, $\lambda = 1.236067978$ второй дифференциал положителен (т.е. этому значению соответствует минимум функции $f(x, y)$), а при $x = -0.894427191$, $y = -0.4472135955$, $\lambda = -3.236067978$ – отрицателен (т.е. этому значению соответствует максимум функции $f(x, y)$).

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

- цель работы;
- задание с исходными данными;
- описание по пунктам выполненной работы с приведением необходимых схем, рисунков, таблиц, графиков, а также расчетных формул с численными значениями;
- выводы по каждому пункту экспериментальной части задания.

Исходные данные для лабораторной работы

Найти условный экстремум функции:

$$ax_1^2 + bx_2^2 \rightarrow extr$$

$$(cx_1 - d)^2 + ex_2^2 = f$$

№ варианта	a	b	c	d	e	f
1	3	-3	2	-1	-6	1
2	0	-1	-1	-5	3	7
3	3	9	-2	2	-2	-4
4	7	1	-8	-5	6	-8
5	5	-4	0	8	3	8
6	1	-6	7	9	7	4
7	6	-7	7	-7	-6	8
8	-7	-2	6	-8	-7	-9
9	-9	-1	5	-4	-3	-8
10	7	9	-6	-3	9	4

Список литературы

Перечень основной литературы:

1. Монахов О.И. Методы оптимизации в пакетах прикладных программ и их применение в решении задач НЛП в системах автоматического управления: учебно-методическое пособие к практическим занятиям и курсовому проекту по дисциплине «Методы оптимизации» / Монахов О.И. - Москва: Российский университет транспорта (МИИТ), 2021. - 63 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122054.html>

2. Кузнецов А.С. Введение в теорию принятия решений и методы оптимизации (элементы информационных технологий поиска эффективных решений): учебное пособие / Кузнецов А.С. - Новосибирск: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2023. - 163 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/138819.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Ахмадиев Ф. Г. Математическое моделирование и методы оптимизации: учебное пособие / Ф. Г. Ахмадиев, Р. М. Гильфанов. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 178 с. - ISBN 978-5-4497-1383-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/116448.html>

2. Поляков В.М. Методы оптимизации: учебное пособие / Поляков В.М., Агаларов З.С. - Москва: Дашков и К, 2022. - 86 с. - ISBN 978-5-394-05003-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120727.html>

Лабораторная работа №6 «Задача коммивояжера»

Цель работы: овладеть навыками составления математической модели задачи коммивояжера и ее решения в MS Excel.

Задачи: Способствовать интеллектуальному развитию студентов, формированию качеств мышления, характерных для математической деятельности при проектировании решения задач в области экономики. Содействовать формированию опыта творческой деятельности студентов через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач и выполнении проектов. Содействовать формированию навыков работы с научной литературой, использования различных интернет-ресурсов. Сформировать требуемый набор компетенций, соответствующих направлению и обеспечивающих конкурентоспособность на рынке труда.

Знать: - основные понятия эконометрического подхода,

- основные методы оценивания неизвестных параметров экономических задач;
- методы представления математических данных и основные методы работы с ними;
- алгебраические методы и методы математического анализа решения экономических и социально-экономических задач;

Уметь: - математически описывать структурные элементы экономики;

- выявлять математические зависимости этих законов;
- применять математические методы при решении практических задач, жизненных ситуаций;

Владеть: -навыками математического описания экономических объектов;

- навыками выявления закономерностей и математических зависимостей социально-экономического развития;

Указания по технике безопасности

Общие положения:

- К работе в компьютерном классе допускаются лица, ознакомленные с данной инструкцией по технике безопасности и правилам поведения.
- Работа учащихся в компьютерном классе разрешается только в присутствии преподавателя (инженера, лаборанта).
- Во время занятий посторонние лица могут находиться в классе только с разрешения преподавателя.
- Во время перемен между парами проводится обязательное проветривание компьютерного кабинета с обязательным выходом студентов.
- Помните, что каждый студент в ответе за состояние своего рабочего места и сохранность размещенного на нем оборудования.

Перед началом работы необходимо:

- Убедиться в отсутствии видимых повреждений на рабочем месте;
- Разместить на столе тетради, учебные пособия так, что бы они не мешали работе на компьютере;
- Принять правильную рабочую позу.
- Посмотреть на индикатор монитора и системного блока и определить, включён или выключен компьютер. Переместите мышь, если компьютер находится в энергосберегающем состоянии или включить монитор, если он был выключен.

При работе в компьютерном классе категорически запрещается:

- Находиться в классе в верхней одежде;
- Класть одежду и сумки на столы;
- Находиться в классе с напитками и едой;
- Располагаться сбоку или сзади от включенного монитора;
- Присоединять или отсоединять кабели, трогать разъемы, провода и розетки;
- Передвигать компьютеры и мониторы;
- Открывать системный блок;
- Включать и выключать компьютеры самостоятельно.
- Пытаться самостоятельно устранять неисправности в работе аппаратуры;
- Перекрывать вентиляционные отверстия на системном блоке и мониторе;
- Ударять по клавиатуре, нажимать бесцельно на клавиши;

- Класть книги, тетради и другие вещи на клавиатуру, монитор и системный блок;
- Удалять и перемещать чужие файлы;
- Приносить и запускать компьютерные игры.

Находясь в компьютерном классе, учащиеся обязаны:

- Соблюдать тишину и порядок;
- Выполнять требования преподавателя и лаборанта;
- Находясь в сети работать только под своим именем и паролем;
- Соблюдать режим работы (согласно п. 9.4.2. Санитарных правил и норм);
- При появлении рези в глазах, резком ухудшении видимости, невозможности сфокусировать взгляд или навести его на резкость, появления боли в пальцах и кистях рук, усиления сердцебиения немедленно покинуть рабочее место, сообщить о происшедшем преподавателю и обратиться к врачу;
- После окончания работы завершить все активные программы и корректно выключить компьютер;
- Оставить рабочее место чистым.

Работая за компьютером, необходимо соблюдать правила:

- Расстояние от экрана до глаз – 70 – 80 см (расстояние вытянутой руки);
- Вертикально прямая спина;
- Плечи опущены и расслаблены;
- Ноги на полу и не скрещены;
- Локти, запястья и кисти рук на одном уровне;
- Локтевые, тазобедренные, коленные, голеностопные суставы под прямым углом.

Требования безопасности в аварийных ситуациях:

- При появлении программных ошибок или сбоях оборудования учащийся должен немедленно обратиться к преподавателю (лаборанту).
- При появлении запаха гари, необычного звука немедленно прекратить работу, и сообщить преподавателю (лаборанту).

Вопросы к занятию

1. изучить теоретический материал;
2. овладеть навыками составления математической модели задачи коммивояжера и ее решения в MS Excel.

Теоретическая часть

Имеется n городов. Расстояния между любой парой городов i и j известны и составляют c_{ij} . Коммивояжер выезжает из какого-либо города и должен посетить все города, побывав в каждом только один раз и вернуться в исходный город. Ставится задача определить такую последовательность объезда городов, или маршрут, при которой суммарная длина маршрута была бы минимальной.

Исходная постановка задачи коммивояжера формулируется в форме задачи оптимизации на графах. С этой целью рассмотрим связный ориентированный граф: $G = (V, E, h)$, в котором $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – конечное множество вершин, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – конечное множество дуг, $h: E \rightarrow Z_+$ – весовая функция дуг. Для математической постановки задачи удобно обозначить отдельные значения весовой функции дуг через: $c_{ij} = h(e_k)$, где дуга $e_k \in E$ соответствует упорядоченной паре вершин (v_i, v_j) . Согласно содержательной постановке рассматриваемой задачи отдельные значения $c_{ij} = h(v_i, v_j)$ интерпретируются как длина участка (i, j) исходного графа.

Длина любого подмножества дуг $E_k \subset E$ в графе G равна сумме весов дуг, входящих в это подмножество. Требуется определить такое подмножество дуг, которое образует в графе G замкнутый путь, проходит через каждую вершину ровно один раз и обладает минимальной длиной.

Отметим следующие особенности искомого маршрута в графе.

Во-первых, каждая из вершин исходного графа должна иметь в искомом маршруте ровно одну инцидентную ей дугу, которая является входящей для этой вершины, и ровно одну инцидентную ей дугу, которая является выходящей для этой вершины. В противном случае такие вершины окажутся

изолированными или тупиковым и, следовательно, путь не будет проходить через все вершины исходного графа.

Во-вторых, общее количество дуг в искомом пути должно быть в точности равно n , где n – общее количество вершин исходного графа. Действительно, если некоторый путь содержит меньше n дуг, то он не будет проходить через все вершины или является циклическим. Если искомый путь содержит больше n дуг, то он не будет удовлетворять условию прохождения каждой вершины ровно один раз.

В-третьих, что наиболее важно, искомый путь должен представлять собой единственный цикл и не должен распадаться на отдельные циклы с количеством дуг меньше n . Введем в рассмотрение следующие булевы переменные x_{ij} , которые интерпретируются следующим образом. Переменная $x_{ij} = 1$, если дуга (v_i, v_j) входит в искомый маршрут минимальной длины, т.е. коммивояжер непосредственно переезжает из города i в город j , и $x_{ij} = 0$, если дуга (v_i, v_j) не входит в оптимальный маршрут, т.е. коммивояжер не переезжает из города i в город j .

Тогда в общем случае математическая постановка задачи коммивояжера может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n} \quad (3)$$

$$u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1, \quad i, j = \overline{2, n}, i \neq j \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (5)$$

$$u_i \in R^1, \quad i = \overline{2, n} \quad (6)$$

В данной математической модели задачи коммивояжера используются также вспомогательные переменные u_i , $i = \overline{2, n}$, которые могут принимать любые действительные значения. При этом ограничения (2)-(3) обеспечивают выполнение первых двух указанных ранее условий – искомый путь должен проходить через каждую верну графа ровно один раз. Ограничения (4) обеспечивают выполнение третьего из указанных ранее условий – искомый путь не должен распадаться на отдельные циклы. Ограничения (5) обеспечивают выполнения условия – переменные x_{ij} должны принимать булевы значения. Нетрудно показать, что общее количество ограничений (2)-(4) равно $2n + (n-1)(n-2) = n^2 - n + 2$.

Следует заметить, что те коэффициенты целевой функции c_{ij} , для которых весовая функция ребер h исходного графа не определена или равна 0, в математической постановке рассматриваемой задачи (1)-(6) следует положить равными $+\infty$, т.е. достаточно большому положительному значению.

Классическая задача коммивояжера формулируется как несимметричная, т.е. для случая несимметричного исходного графа, при котором $c_{ij} \neq c_{ji}$. Если же $c_{ij} = c_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$, то соответствующая задача коммивояжера называется симметричной. Нетрудно увидеть, что исходный граф симметричной задачи коммивояжера является неориентированным.

Пример. Дана транспортная сеть, которая соединяет 6 населенных пунктов в некотором географическом районе. Данный район представлен в виде схемы, формально представляющей собой ориентированный связный граф, состоящий из 6 вершин, которые связаны между собой в прямом и обратном направлении. Длина участка автодороги между двумя соседними населенными пунктами, выраженная в км., равна значению весовой функции для каждой дуги. Это значение указано рядом с изображением соответствующей дуги.

ющей дуги в графе. Требуется найти такой полный замкнутый путь, начинающийся в вершине с номером 1 и заканчивающийся в вершине с номером 6, чтобы общая длина пути была минимальной.

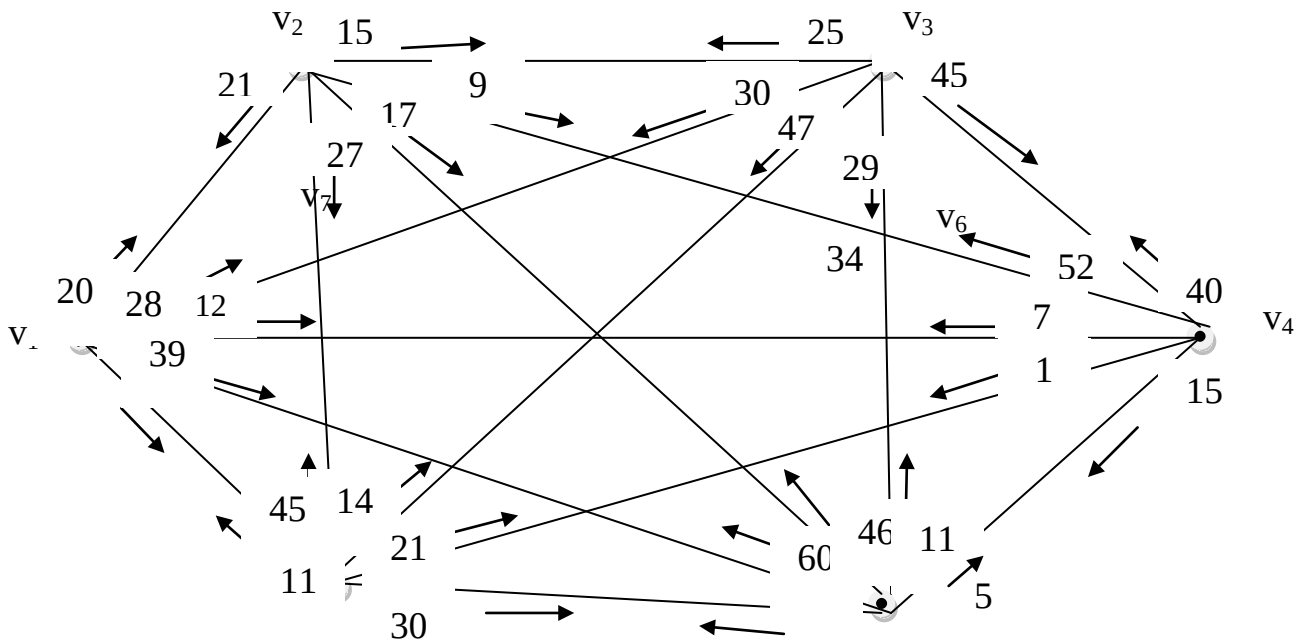


Рис.1: Исходный граф задачи коммивояжера

Решение. Для решения задачи составим ее математическую модель:

1. Введем обозначения: x_{ij} , $i, j = \overline{1,6}$ u_i , $i = \overline{2,6}$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга}(i, j) \text{ входит в минимальный полный путь;} \\ 0, & \text{если дуга}(i, j) \text{ не входит в минимальный полный путь.} \end{cases}$$

2. Составим целевую функцию (для удобства вычислений установим значения весов c_{ii} равными некоторому достаточно большому положительному числу, например, $c_{ii} = 1000$, $i = \overline{1,6}$):

$$\begin{aligned} Z = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 c_{ij} x_{ij} = & 1000x_{11} + 20x_{12} + 28x_{13} + 12x_{14} + 39x_{15} + 32x_{16} + \\ & + 21x_{21} + 1000x_{22} + 15x_{23} + 9x_{24} + 17x_{25} + 27x_{26} + 30x_{31} + 25x_{32} + 1000x_{33} + \\ & + 45x_{34} + 29x_{35} + 47x_{36} + 7x_{41} + 52x_{42} + 40x_{43} + 1000x_{44} + 15x_{45} + 1x_{46} + \\ & + 60x_{51} + 46x_{52} + 11x_{53} + 5x_{54} + 1000x_{55} + 34x_{56} + 11x_{61} + 45x_{62} + 14x_{63} + 21x_{64} + \\ & + 30x_{65} + 1000x_{66} \rightarrow \min \end{aligned}$$

(7)

3. Сформулируем ограничения рассматриваемой задачи.

3.1. Ограничения вида (2):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} = 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} = 1 \\ x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} + x_{66} = 1 \end{array} \right. \quad (8)$$

3.2. Ограничения вида (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} = 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} = 1 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + x_{65} = 1 \\ x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{66} = 1 \end{array} \right. \quad (9)$$

3.3. Ограничения вида (4):

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2 - u_3 + 6x_{23} \leq 5, \\ u_2 - u_4 + 6x_{24} \leq 5, \\ \dots \\ u_2 - u_6 + 6x_{26} \leq 5, \\ u_3 - u_2 + 6x_{32} \leq 5, \\ u_3 - u_4 + 6x_{34} \leq 5, \\ \dots \\ u_3 - u_6 + 6x_{36} \leq 5, \\ \dots \\ u_6 - u_2 + 6x_{62} \leq 5, \\ u_6 - u_3 + 6x_{63} \leq 5, \\ \dots \\ u_6 - u_5 + 6x_{65} \leq 5. \end{array} \right. \quad (10)$$

3.4. Ограничения вида (5), т.е. бинарность переменных x_{ij} :

$$x_{ij} - \text{бинарные (двоичные)}, i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6}. \quad (11)$$

3.5. Ограничения вида (6):

$$u_2, u_3, u_4, u_5, u_6 \in R \quad (12)$$

Таким образом, целевая функция (7) и ограничения (8–12) образуют математическую модель задачи коммивояжера.

Решение задачи в среде электронных таблиц MS Excel

1. Идентифицируйте свою работу, переименовав Лист1 в «Титульный лист» и записав номер лабораторной работы, ее название, кто выполнил и проверил.

2. На следующем листе, с именем «Задача коммивояжера», создайте таблицу для ввода условий задачи и введите исходные данные.

3. Матрицу переменных дополните столбцом справа и строкой снизу.

4. В ячейку **E28** введите формулу целевой функции:

$$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{C3:H8};\text{C11:H16}).$$

5. В ячейку **I11** запишите формулу: **=СУММ(C11:H11)**. Эту формулу скопируйте автозаполнением в остальные ячейки диапазона **I12: I16**.

6. В ячейку **C17** запишите формулу: **=СУММ(C11:C16)**. Эту формулу скопируйте автозаполнением в остальные ячейки диапазона **D17: H17**

7. В ячейки **D22:H26** введите формулы, соответствующие ограничениям (10)

8. На вкладке «Данные» выберите пункт «Поиск решения».

9. В появившемся окне «Параметры поиска решения» нужно выполнить необходимые установки

– Введите абсолютный адрес целевой ячейки **\$E\$28** в поле «Оптимизировать целевую функцию» или щелкните по ячейке **E28** и снова по кнопке .

– Введите направление целевой функции, щелкните мышью по селекторному полю «Минимум».

– В поле «Изменяя ячейки переменных» впишите абсолютный адрес диапазона ячеек **\$C\$11:\$H\$16;\$D\$20:\$H\$20** или щелкните мышью диапазон ячеек **C11:H16**, поставьте точку запятой, затем выделите мышью диапазон ячеек **D20:H20** и снова щелкните по к

– В поле «В соответствии с ограничениями» введите ограничения с помощью кнопки «Добавить».

При этом вызывается диалоговое окно «Добавление ограничения».

Введите систему ограничений (8). В поле «Ссылка на ячейки» щелкните по кнопке , затем выделите мышью диапазон ячеек **I11:I16** и снова щелкните по кнопке , нажав **Ограничение**, затем в поле «Ограничение» введите 1. Нажмите «Добавить».

Аналогично введите систему ограничений (9). В поле «Ссылка на ячейки» щелкните по кнопке , затем выделите мышью диапазон ячеек **C17:H17** и снова щелкните по кнопке , нажав **Ограничение**, затем в поле «Ограничение» введите 1. Нажмите «Добавить».

Введите систему ограничений (10). В поле «Ссылка на ячейки» щелкните по кнопке , затем выделите мышью диапазон ячеек **D22:H26** и снова щелкните по кнопке , нажав **Ограничение**, затем в поле «Ограничение» введите 5. Нажмите «Добавить».

Теперь введите ограничение (11). В поле «Ссылка на ячейки» щелкните по кнопке , затем выделите мышью диапазон ячеек **C11:H16** и снова щелкните по кнопке , нажав **Ограничение**, затем в поле «Ограничение» введите **1**. Нажмите «Добавить».

– Установите галочку «Сделать переменные без ограничений неотрицательными».

– Выберите метод решения «Поиск решения линейных задач симплекс-методом»

– Нажмите «Найти решение». В появившемся окне «Результаты поиска решения» нажмите «ОК»

Выводы. Результатом решения данной задачи коммивояжера являются найденные оптимальные значения переменных: $x_{12} = 1, x_{23} = 1, x_{35} = 1, x_{46} = 1, x_{54} = 1, x_{61} = 1$, остальные переменные равны 0. Найденному оптимальному решению соответствует значение целевой функции $Z_{opt} = 81$

Анализ найденного решения показывает, что замкнутый маршрут минимальной длины, проходящий через все вершины ориентированного графа, содержит следующие дуги (1,2), (2,4), (3,5), (5,4), (4,6), (6,1). Тем самым найден оптимальный полный замкнутый маршрут, начинающийся и заканчивающийся в вершине с номером 1 и включающий себя последовательное посещение насел

6 в 1 (см. рис.2). При этом общая длина этого пути будет минимальной и равна 81 км.

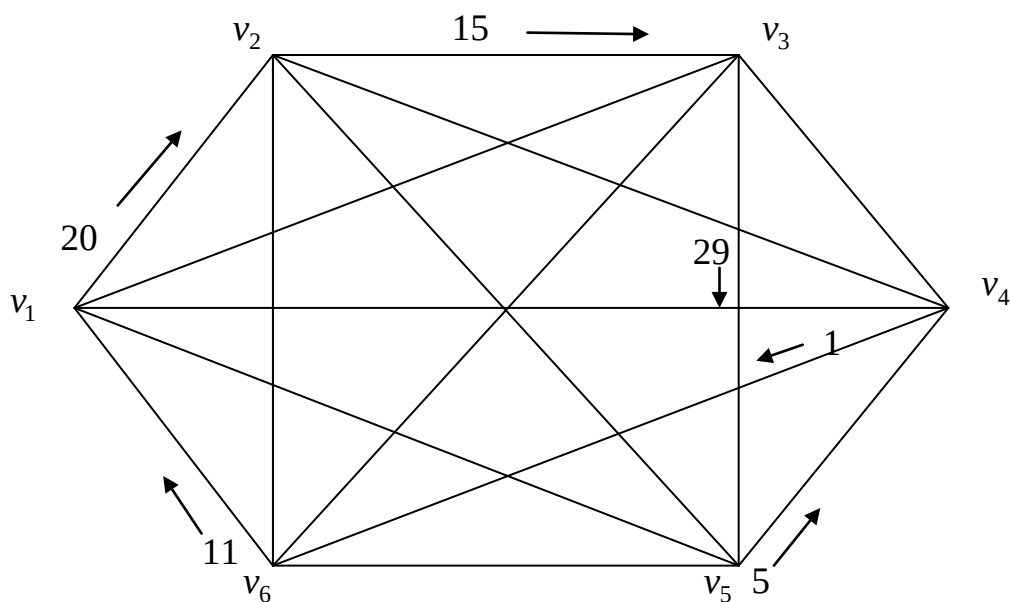


Рис.2: Полный замкнутый путь минимальной длины в исходном графе

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

2. цель работы;

- задание с исходными данными;
- описание по пунктам выполненной работы с приведением необходимых схем, рисунков, таблиц, графиков, а также расчетных формул с численными значениями;
- выводы по каждому пункту экспериментальной части задания.

Исходные данные для лабораторной работы

Дана матрица расстояний $\begin{pmatrix} \infty & a & b & c & d \\ e & \infty & f & g & h \\ k & m & \infty & n & p \\ q & r & s & \infty & t \\ x & y & z & w & \infty \end{pmatrix}$. Решить задачу коммивояжера.

Варианты заданий

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	9	8	5	2	1	7	7	8	5	6
b	4	9	5	6	8	7	1	9	7	11
c	2	1	4	9	5	5	8	11	12	9
d	9	3	4	3	3	1	1	9	18	16
e	5	5	4	3	1	8	9	12	6	9
f	7	7	3	2	5	7	2	6	5	5
g	2	4	8	2	9	4	5	14	2	12
h	1	8	3	4	5	2	9	5	12	9
k	4	6	2	8	8	9	8	8	7	9
m	3	7	4	6	7	7	8	2	8	6

n	7	4	6	1	8	8	6	9	14	12
p	3	2	1	7	9	2	9	11	5	3
q	1	4	2	5	5	5	2	10	8	8
r	6	7	7	7	8	6	7	6	10	9
s	7	1	5	7	6	9	2	8	4	7
t	1	4	6	2	1	1	7	9	4	8
x	4	1	5	9	5	6	6	3	2	3
y	4	3	9	2	4	2	3	5	4	8
z	7	5	3	7	9	4	4	2	2	7
w	6	5	4	1	4	3	1	6	8	1

Список литературы

Перечень основной литературы:

1. Монахов О.И. Методы оптимизации в пакетах прикладных программ и их применение в решении задач НЛП в системах автоматического управления: учебно-методическое пособие к практическим занятиям и курсовому проекту по дисциплине «Методы оптимизации» / Монахов О.И. - Москва: Российский университет транспорта (МИИТ), 2021. - 63 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122054.html>

2. Кузнецов А.С. Введение в теорию принятия решений и методы оптимизации (элементы информационных технологий поиска эффективных решений): учебное пособие / Кузнецов А.С. - Новосибирск: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2023. - 163 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/138819.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Ахмадиев Ф. Г. Математическое моделирование и методы оптимизации: учебное пособие / Ф. Г. Ахмадиев, Р. М. Гильфанов. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 178 с. - ISBN 978-5-4497-1383-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/116448.html>

2. Поляков В.М. Методы оптимизации: учебное пособие / Поляков В.М., Агаларов З.С.. - Москва: Дашков и К, 2022. - 86 с. - ISBN 978-5-394-05003-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120727.html>

Лабораторная работа №7 «Задача о минимальном пути в графе»

Цель работы: овладеть навыками составления математической модели задачи о минимальном пути в графе и ее решения в MS Excel.

Задачи: Способствовать интеллектуальному развитию студентов, формированию качеств мышления, характерных для математической деятельности при проектировании решения задач в области экономики. Содействовать формированию опыта творческой деятельности студентов через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач и выполнении проектов. Содействовать формированию навыков работы с научной литературой, использования различных интернет-ресурсов. Сформировать требуемый набор компетенций, соответствующих направлению и обеспечивающих конкурентоспособность на рынке труда.

Знать: - основные понятия эконометрического подхода,

- основные методы оценивания неизвестных параметров экономических задач;
- методы представления математических данных и основные методы работы с ними;
- алгебраические методы и методы математического анализа решения экономических и социально-экономических задач;

Уметь: - математически описывать структурные элементы экономики;

- выявлять математические зависимости этих законов;
- применять математические методы при решении практических задач, жизненных ситуаций;

Владеть: -навыками математического описания экономических объектов;

- навыками выявления закономерностей и математических зависимостей социально-экономического развития;

Указания по технике безопасности

Общие положения:

- К работе в компьютерном классе допускаются лица, ознакомленные с данной инструкцией по технике безопасности и правилам поведения.
- Работа учащихся в компьютерном классе разрешается только в присутствии преподавателя (инженера, лаборанта).

- Во время занятий посторонние лица могут находиться в классе только с разрешения преподавателя.
- Во время перемен между парами проводится обязательное проветривание компьютерного кабинета с обязательным выходом студентов.
- Помните, что каждый студент в ответе за состояние своего рабочего места и сохранность размещенного на нем оборудования.

Перед началом работы необходимо:

- Убедиться в отсутствии видимых повреждений на рабочем месте;
- Разместить на столе тетради, учебные пособия так, что бы они не мешали работе на компьютере;
- Принять правильную рабочую позу.
- Посмотреть на индикатор монитора и системного блока и определить, включён или выключен компьютер. Переместите мышь, если компьютер находится в энергосберегающем состоянии или включить монитор, если он был выключен.

При работе в компьютерном классе категорически запрещается:

- Находиться в классе в верхней одежде;
- Класть одежду и сумки на столы;
- Находиться в классе с напитками и едой;
- Располагаться сбоку или сзади от включенного монитора;
- Присоединять или отсоединять кабели, трогать разъемы, провода и розетки;
- Передвигать компьютеры и мониторы;
- Открывать системный блок;
- Включать и выключать компьютеры самостоятельно.
- Пытаться самостоятельно устранять неисправности в работе аппаратуры;
- Перекрывать вентиляционные отверстия на системном блоке и мониторе;
- Ударять по клавиатуре, нажимать бесцельно на клавиши;
- Класть книги, тетради и другие вещи на клавиатуру, монитор и системный блок;
- Удалять и перемещать чужие файлы;
- Приносить и запускать компьютерные игры.

Находясь в компьютерном классе, учащиеся обязаны:

- Соблюдать тишину и порядок;
- Выполнять требования преподавателя и лаборанта;
- Находясь в сети работать только под своим именем и паролем;
- Соблюдать режим работы (согласно п. 9.4.2. Санитарных правил и норм);
- При появлении рези в глазах, резком ухудшении видимости, невозможности сфокусировать взгляд или навести его на резкость, появления боли в пальцах и кистях рук, усиления сердцебиения немедленно покинуть рабочее место, сообщить о происшедшем преподавателю и обратиться к врачу;
- После окончания работы завершить все активные программы и корректно выключить компьютер;
- Оставить рабочее место чистым.

Работая за компьютером, необходимо соблюдать правила:

- Расстояние от экрана до глаз – 70 – 80 см (расстояние вытянутой руки);
- Вертикально прямая спина;
- Плечи опущены и расслаблены;
- Ноги на полу и не скрещены;
- Локти, запястья и кисти рук на одном уровне;
- Локтевые, тазобедренные, коленные, голеностопные суставы под прямым углом.

Требования безопасности в аварийных ситуациях:

- При появлении программных ошибок или сбоях оборудования учащийся должен немедленно обратиться к преподавателю (лаборанту).
- При появлении запаха гари, необычного звука немедленно прекратить работу, и сообщить преподавателю (лаборанту).

Вопросы к занятию

- 1.изучить теоретический материал;
- 2.решить задачу в среде электронных таблиц MS Excel.

Теоретическая часть

Общая постановка задачи

Дана транспортная сеть. Найти путь от начального узла к конечному, имеющий наименьшую общую продолжительность.

Исходная постановка задачи формулируется в форме задачи оптимизации на графах.

Рассмотрим ориентированный граф: $G = (V, E, h)$, в котором $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – конечное множество вершин, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – конечное множество дуг, $h: E \rightarrow Z_+$ – весовая функция дуг. Для математической постановки задачи удобно обозначить отдельные значения весовой функции дуг через: $c_{ij} = h(e_k)$, где дуга $e_k \in E$ соответствует упорядоченной паре вершин (v_i, v_j) . Согласно содержательной постановке рассматриваемой задачи отдельные значения $c_{ij} = h(v_i, v_j)$ интерпретируются как длина участка (i, j) , затраты или стоимость переезда из i -го города в j -ый город.

Длина любого маршрута в графе равна сумме весов дуг, входящих в этот маршрут. Дополнительно в графе фиксируются две вершины: начальная вершина v_s и конечная вершина v_t . В предположении, что исходный граф G является связным, т.е. вершина v_t потенциально достижима из v_s , требуется определить маршрут минимальной длины из начальной вершины v_s в конечную вершину v_t .

Введем в рассмотрение следующие булевы переменные x_{ij} , которые интерпретируются следующим образом. Переменная $x_{ij} = 1$, если дуга (v_i, v_j) входит в искомый маршрут минимальной длины и $x_{ij} = 0$, если дуга (v_i, v_j) не входит в оптимальный маршрут.

Тогда в общем случае математическая постановка задачи о минимальном маршруте или пути в ориентированном графе может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{sj} - \sum_{i=1}^n x_{is} = 1 \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{tj} - \sum_{i=1}^n x_{it} = -1 \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n x_{ji} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad i \neq s, \quad i \neq t \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (5)$$

При этом первое ограничение (2) требует выполнения следующего условия – искомый путь должен начинаться в вершине v_s . Ограничение (3) требует выполнения следующего условия – искомый путь должен заканчиваться в вершине v_t . Третье ограничение (4) гарантирует связность минимального пути, т.е. искомый путь должен проходить через промежуточные вершины графа. Общее количество ограничений (2)-(4) равно n . Наконец, последнее ограничение (5) требует, чтобы переменные x_{ij} принимали только булевы значения.

Следует заметить, что те коэффициенты целевой функции c_{ij} , для которых весовая функция ребер h исходного графа не определена или равна 0, в общей математической постановке рассматриваемой задачи (1)-(5) следует положить равными $+\infty$ т.е. достаточно большому положительному значению.

Если в постановке задачи о минимальном пути в графе (1)-(5) в выражении целевой функции (1) операцию отыскания минимума заменить операцией отыскания максимума, то может быть получена математическая постановка соответствующей задачи о максимальном пути в ориентированном графе. Однако последний вариант задачи получил наибольшую известность в виде задачи о критическом пути в сети.

Пример. Рассмотрим задачу нахождения минимального пути в транспортной сети, которая соединяет 8 населенных пунктов в некотором географическом районе (см. рис. 1). Район представлен в виде схемы, формально

представляющей собой ориентированный связный граф, состоящий из 8 вершин и 15 дуг. Длина автодороги между двумя соседними населенными пунктами, выраженная в км., равна значению весовой функции для каждой дуги. Это значение указано рядом с изображением соответствующей дуги в графе. Требуется найти маршрут, соединяющий начальный пункт 1, которому соответствует вершина 1, $v_1 = v_s$ с конечным пунктом 8, которому соответствует вершина $v_8 = v_t$, так чтобы общая длина пути была минимальной

Рис.7.1: Исходный ориентированный граф задачи

Решение. Для решения задачи составим ее математическую модель:

1. Введем обозначения. Переменными математической модели данной задачи о минимальной пути в ориентированном графе являются 15 переменных: $x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{36}, x_{45}, x_{46}, x_{47}, x_{57}, x_{58}, x_{67}, x_{68}, x_{78}$. Каждая из этих переменных x_{ij} принимает значение 1, если дуга (i, j) входит в минимальный путь, и 0 – в противном случае.

2. Запишем целевую функцию:

$$Z = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 c_{ij} x_{ij} = 7x_{12} + 11x_{13} + 18x_{14} + 6x_{24} + 14x_{25} + 4x_{34} + 13x_{36} + 7x_{45} + 5x_{46} + 10x_{47} + 2x_{57} + 15x_{58} + 3x_{67} + 12x_{68} + 9x_{78} \rightarrow \min$$

(6)

3. Сформулируем ограничения рассматриваемой задачи.

3.1. Ограничения вида (2):

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1. \quad (7)$$

3.2. Ограничения вида (3):

$$x_{58} + x_{68} + x_{78} = 1. \quad (8)$$

3.3. Ограничения вида (4):

$$\begin{cases} x_{12} - x_{24} - x_{25} = 0, \\ x_{13} - x_{34} - x_{35} = 0, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} - x_{47} = 0, \\ x_{25} + x_{45} - x_{57} - x_{58} = 0, \\ x_{36} + x_{46} - x_{67} - x_{68} = 0, \\ x_{47} + x_{57} + x_{67} - x_{78} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

1.2. Ограничения вида (5):

$$x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{36}, x_{45}, x_{46}, x_{47}, x_{57}, x_{58}, x_{67}, x_{68}, x_{78} \quad (10)$$

Таким образом, целевая функция (6) и ограничения (7–10) образуют математическую модель задачи о минимальном пути.

Решение задачи в среде электронных таблиц MS Excel

1. Идентифицируйте свою работу, переименовав Лист1 в «Титульный лист» и записав номер лабораторной работы, ее название, кто выполнил и проверил.

2. На следующем листе, с именем «Задача о минимальном пути в орграфе», создайте таблицу для ввода условий задачи и введите исходные данные.

3. В ячейку **E19** введите формулу целевой функции:

$$=\text{СУММПРОИЗВ}(\text{C3:C17};\text{D3:D17})$$

2. В ячейку **E3** введите левую часть ограничения (7):

$$=\text{D3}+\text{D4}+\text{D5}$$

3. В ячейку **E10** введите левую часть ограничения (8):

$$=\text{D14}+\text{D16}+\text{D17}$$

4. В ячейки **E4:E9** введите левую часть ограничения (9):

=D3-D6-D7

=D4-D8-D9

=D5+D6+D8-D10-D11-D12

=D7+D10-D13-D14

=D9+D11-D15-D16

=D12+D13+D15-D17

7. На вкладке «Данные» выберите пункт «Поиск решения».

8. В появившемся окне «Параметры поиска решения» нужно выполнить необходимые установки:

– Введите абсолютный адрес целевой ячейки **\$E\$19** в поле «Оптимизировать целевую функцию» или щ ☐ лкните

E19 и снова по кнопке .

– Введите направление целевой функции, щ ☐ лкните мышью по селекторному полю «Минимум».

– В поле «Изменяя ячейки переменных» впишите абсолютный адрес диапазона ячеек **\$D\$3:\$D\$17** или щ ☐ лкните

шью диапазон ячеек **D3:D17** и снова щ ☐ лкните по кнопке

– В поле «В соответствии с ограничениями» введите ограничения с помощью кнопки «Добавить». При этом вызывается диалоговое окно «Добавление ограничения».

Введите ограничение (7). В поле «Ссылка на ячейки» щ ☐ лкните кнопку , затем выделите мышью ячейку **E3** и снова щ ☐ лкните

следующем поле установите знак =, нажав , затем в поле «Ограничение» введите 1. Нажмите «Добавить».

Аналогично введите ограничение (8). В поле «Ссылка на ячейки» щ ☐ лкните кнопку , затем выделите мышью ячейку **E10** и снова щ ☐ лкните

по кнопке , в следующем поле установите знак =, нажав , затем в поле «Ограничение» введите 1. Нажмите «Добавить».

Введите систему ограничений (9). В поле «Ссылка на ячейки» щ лните по кнопке , затем выделите мышью диапазон ячеек **E4:E9** и снова щ лните по кнопке , в следующем поле установите знак =, нажав , затем в поле «Ограничение» введите 0. Нажмите «Добавить».

Теперь ведите ограничений (10). В поле «Ссылка на ячейки» щ лните по кнопке , затем выделите мышью диапазон ячеек **D3:D17** и снова щ лните по кнопке , в следующем поле установите «бин», нажав , поле «Ограничение» заполнится автоматически, появится «бинарное». Нажмите «ОК».

– Установите галочку «Сделать переменные без ограничений неотрицательными».

– Выберите метод решения «Поиск решения линейных задач симплекс-методом»

– Нажмите «Найти решение». В появившемся окне «Результаты поиска решения» нажмите «ОК».

Выводы. Анализ найденного решения показывает, что минимальный путь в исходном ориентированном графе, соединяющий вершину 1 с вершиной 8, содержит следующие дуги (1,2), (2,4), (4,6), (6,8). Тем самым найден оптимальный маршрут перемещения из исходного населенного пункта в конечный, который включает в себя последовательное перемещение между соседними насел

этом общая длина этого пути будет минимальной и равна 30 км.

Содержание отчета

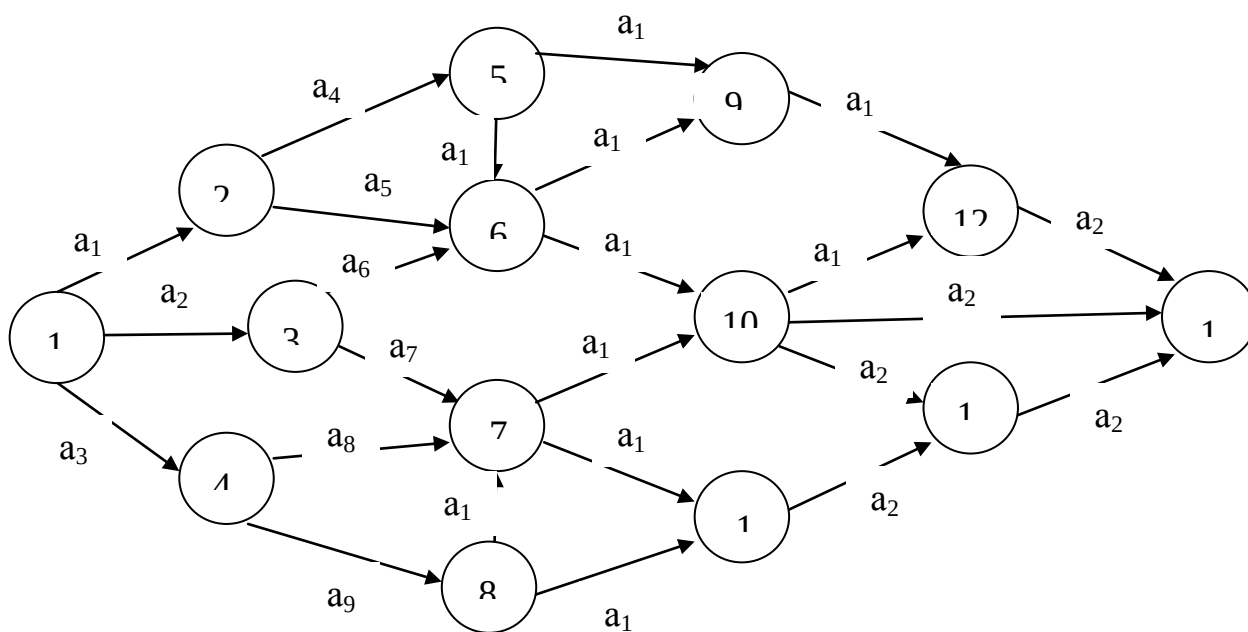
Отчет должен содержать:

3. цель работы;

- задание с исходными данными;
- описание по пунктам выполненной работы с приведением необходимых схем, рисунков, таблиц, графиков, а также расчетных формул с численными значениями;
- выводы по каждому пункту экспериментальной части задания.

Исходные данные для лабораторной работы

Транспортному предприятию требуется перевезти груз из пункта 1 в пункт 14. На рис. показана сеть дорог и стоимость перевозки единицы груза между отдельными пунктами. Определить маршрут доставки груза, которому соответствуют наименьшие затраты.



Значения коэффициентов условия задачи

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a ₁	20	18	22	15	17	19	23	16	21	24
a ₂	18	19	21	16	18	21	20	15	19	22
a ₃	19	17	20	17	16	20	22	17	20	23
a ₄	11	13	12	14	10	15	20	17	19	18
a ₅	15	14	11	10	12	1	16	15	16	17
a ₆	13	15	10	12	13	16	17	16	18	16
a ₇	12	16	9	11	9	14	19	14	15	19
a ₈	14	17	13	13	11	18	18	19	17	20
a ₉	12	18	14	16	15	17	15	18	14	21
a ₁₀	24	21	20	18	17	16	19	16	22	23
a ₁₁	21	19	20	21	22	18	23	17	18	19
a ₁₂	20	22	19	23	18	17	24	16	20	21

a ₁₃	22	21	18	22	21	19	20	18	19	18
a ₁₄	23	23	21	20	19	16	22	15	21	20
a ₁₅	24	18	17	24	20	15	21	19	22	22
a ₁₆	20	21	23	19	22	18	20	16	17	21
a ₁₇	22	17	19	23	18	17	19	22	20	21
a ₁₈	31	32	30	35	37	36	33	36	31	34
a ₁₉	32	33	29	31	36	37	34	35	32	33
a ₂₀	35	37	32	33	34	38	36	31	36	30
a ₂₁	37	36	31	34	36	35	40	37	39	38
a ₂₂	45	41	43	42	44	40	46	45	47	45
a ₂₃	28	32	30	25	26	28	33	31	29	27
a ₂₄	30	3	32	24	25	29	32	33	30	29

Список литературы

Перечень основной литературы:

1. Монахов О.И. Методы оптимизации в пакетах прикладных программ и их применение в решении задач НЛП в системах автоматического управления: учебно-методическое пособие к практическим занятиям и курсовому проекту по дисциплине «Методы оптимизации» / Монахов О.И. - Москва: Российский университет транспорта (МИИТ), 2021. - 63 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122054.html>

2. Кузнецов А.С. Введение в теорию принятия решений и методы оптимизации (элементы информационных технологий поиска эффективных решений): учебное пособие / Кузнецов А.С. - Новосибирск: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2023. - 163 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/138819.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Ахмадиев Ф. Г. Математическое моделирование и методы оптимизации: учебное пособие / Ф. Г. Ахмадиев, Р. М. Гильфанов. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 178 с. - ISBN 978-5-4497-1383-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/116448.html>

2. Поляков В.М. Методы оптимизации: учебное пособие / Поляков В.М., Агаларов З.С. - Москва: Дашков и К, 2022. - 86 с. - ISBN 978-5-394-05003-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120727.html>

Лабораторная работа №8 «Матричные игры»

Цель работы: овладеть навыками решения матричных игр в математических пакетах Maple, Mathcad Prime и в MS Excel.

Задачи: Способствовать интеллектуальному развитию студентов, формированию качеств мышления, характерных для математической деятельности при проектировании решения задач в области экономики. Содействовать формированию опыта творческой деятельности студентов через исследовательскую деятельность при решении нестандартных задач и выполнении проектов. Содействовать формированию навыков работы с научной литературой, использования различных интернет-ресурсов. Сформировать требуемый набор компетенций, соответствующих направлению и обеспечивающих конкурентоспособность на рынке труда.

Знать: - основные понятия эконометрического подхода,

- основные методы оценивания неизвестных параметров экономических задач;
- методы представления математических данных и основные методы работы с ними;
- алгебраические методы и методы математического анализа решения экономических и социально-экономических задач;

Уметь: - математически описывать структурные элементы экономики;

- выявлять математические зависимости этих законов;
- применять математические методы при решении практических задач, жизненных ситуаций;

Владеть: -навыками математического описания экономических объектов;

- навыками выявления закономерностей и математических зависимостей социально-экономического развития;

Указания по технике безопасности

Общие положения:

- К работе в компьютерном классе допускаются лица, ознакомленные с данной инструкцией по технике безопасности и правилам поведения.
- Работа учащихся в компьютерном классе разрешается только в присутствии преподавателя (инженера, лаборанта).
- Во время занятий посторонние лица могут находиться в классе только с разрешения преподавателя.
- Во время перемен между парами проводится обязательное проветривание компьютерного кабинета с обязательным выходом студентов.
- Помните, что каждый студент в ответе за состояние своего рабочего места и сохранность размещенного на нем оборудования.

Перед началом работы необходимо:

- Убедиться в отсутствии видимых повреждений на рабочем месте;
- Разместить на столе тетради, учебные пособия так, что бы они не мешали работе на компьютере;
- Принять правильную рабочую позу.
- Посмотреть на индикатор монитора и системного блока и определить, включён или выключен компьютер. Переместите мышь, если компьютер находится в энергосберегающем состоянии или включить монитор, если он был выключен.

При работе в компьютерном классе категорически запрещается:

- Находиться в классе в верхней одежде;
- Класть одежду и сумки на столы;
- Находиться в классе с напитками и едой;
- Располагаться сбоку или сзади от включенного монитора;
- Присоединять или отсоединять кабели, трогать разъемы, провода и розетки;
- Передвигать компьютеры и мониторы;
- Открывать системный блок;
- Включать и выключать компьютеры самостоятельно.
- Пытаться самостоятельно устранять неисправности в работе аппаратуры;
- Перекрывать вентиляционные отверстия на системном блоке и мониторе;
- Ударять по клавиатуре, нажимать бесцельно на клавиши;

- Класть книги, тетради и другие вещи на клавиатуру, монитор и системный блок;
- Удалять и перемещать чужие файлы;
- Приносить и запускать компьютерные игры.

Находясь в компьютерном классе, учащиеся обязаны:

- Соблюдать тишину и порядок;
- Выполнять требования преподавателя и лаборанта;
- Находясь в сети работать только под своим именем и паролем;
- Соблюдать режим работы (согласно п. 9.4.2. Санитарных правил и норм);
- При появлении рези в глазах, резком ухудшении видимости, невозможности сфокусировать взгляд или навести его на резкость, появления боли в пальцах и кистях рук, усиления сердцебиения немедленно покинуть рабочее место, сообщить о происшедшем преподавателю и обратиться к врачу;
- После окончания работы завершить все активные программы и корректно выключить компьютер;
- Оставить рабочее место чистым.

Работая за компьютером, необходимо соблюдать правила:

- Расстояние от экрана до глаз – 70 – 80 см (расстояние вытянутой руки);
- Вертикально прямая спина;
- Плечи опущены и расслаблены;
- Ноги на полу и не скрещены;
- Локти, запястья и кисти рук на одном уровне;
- Локтевые, тазобедренные, коленные, голеностопные суставы под прямым углом.

Требования безопасности в аварийных ситуациях:

- При появлении программных ошибок или сбоях оборудования учащийся должен немедленно обратиться к преподавателю (лаборанту).
- При появлении запаха гари, необычного звука немедленно прекратить работу, и сообщить преподавателю (лаборанту).

Вопросы к занятию

- 1.изучить теоретический материал;
- 2.решить задачу в среде электронных таблиц MS Excel.

Теоретическая часть

Общая постановка задачи

Дана транспортная сеть. Найти путь от начального узла к конечному, имеющий наименьшую общую продолжительность.

Исходная постановка задачи формулируется в форме задачи оптимизации на графах.

Рассмотрим ориентированный граф: $G = (V, E, h)$, в котором $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – конечное множество вершин, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – конечное множество дуг, $h: E \rightarrow Z_+$ – весовая функция дуг. Для математической постановки задачи удобно обозначить отдельные значения весовой функции дуг через: $c_{ij} = h(e_k)$, где дуга $e_k \in E$ соответствует упорядоченной паре вершин (v_i, v_j) . Согласно содержательной постановке рассматриваемой задачи отдельные значения $c_{ij} = h(v_i, v_j)$ интерпретируются как длина участка (i, j) , затраты или стоимость переезда из i -го города в j -ый город.

Длина любого маршрута в графе равна сумме весов дуг, входящих в этот маршрут. Дополнительно в графе фиксируются две вершины: начальная вершина v_s и конечная вершина v_t . В предположении, что исходный граф G является связным, т.е. вершина v_t потенциально достижима из v_s , требуется определить маршрут минимальной длины из начальной вершины v_s в конечную вершину v_t .

Введем в рассмотрение следующие булевы переменные x_{ij} , которые интерпретируются следующим образом. Переменная $x_{ij} = 1$, если дуга (v_i, v_j) входит в искомый маршрут минимальной длины и $x_{ij} = 0$, если дуга (v_i, v_j) не входит в оптимальный маршрут.

Тогда в общем случае математическая постановка задачи о минимальном маршруте или пути в ориентированном графе может быть сформулирована следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n x_{sj} - \sum_{i=1}^n x_{is} = 1 \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{tj} - \sum_{i=1}^n x_{it} = -1 \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n x_{ji} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad i \neq s, \quad i \neq t \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (5)$$

При этом первое ограничение (2) требует выполнения следующего условия – искомый путь должен начинаться в вершине v_s . Ограничение (3) требует выполнения следующего условия – искомый путь должен заканчиваться в вершине v_t . Третье ограничение (4) гарантирует связность минимального пути, т.е. искомый путь должен проходить через промежуточные вершины графа. Общее количество ограничений (2)-(4) равно n . Наконец, последнее ограничение (5) требует, чтобы переменные x_{ij} принимали только булевы значения.

Следует заметить, что те коэффициенты целевой функции c_{ij} , для которых весовая функция ребер h исходного графа не определена или равна 0, в общей математической постановке рассматриваемой задачи (1)-(5) следует положить равными $+\infty$ т.е. достаточно большому положительному значению.

Если в постановке задачи о минимальном пути в графе (1)-(5) в выражении целевой функции (1) операцию отыскания минимума заменить операцией отыскания максимума, то может быть получена математическая поста-

новка соответствующей задачи о максимальном пути в ориентированном графе. Однако последний вариант задачи получил наибольшую известность в виде задачи о критическом пути в сети.

Пример. Рассмотрим задачу нахождения минимального пути в транспортной сети, которая соединяет 8 населенных пунктов в некотором географическом районе (см. рис. 1). Район представлен в виде схемы, формально представляющей собой ориентированный связный граф, состоящий из 8 вершин и 15 дуг. Длина автодороги между двумя соседними населенными пунктами, выраженная в км., равна значению весовой функции для каждой дуги. Это значение указано рядом с изображением соответствующей дуги в графе. Требуется найти маршрут, соединяющий начальный пункт 1, которому соответствует вершина 1, $v_1 = v_s$ с конечным пунктом 8, которому соответствует вершина $v_8 = v_t$, так чтобы общая длина пути была минимальной

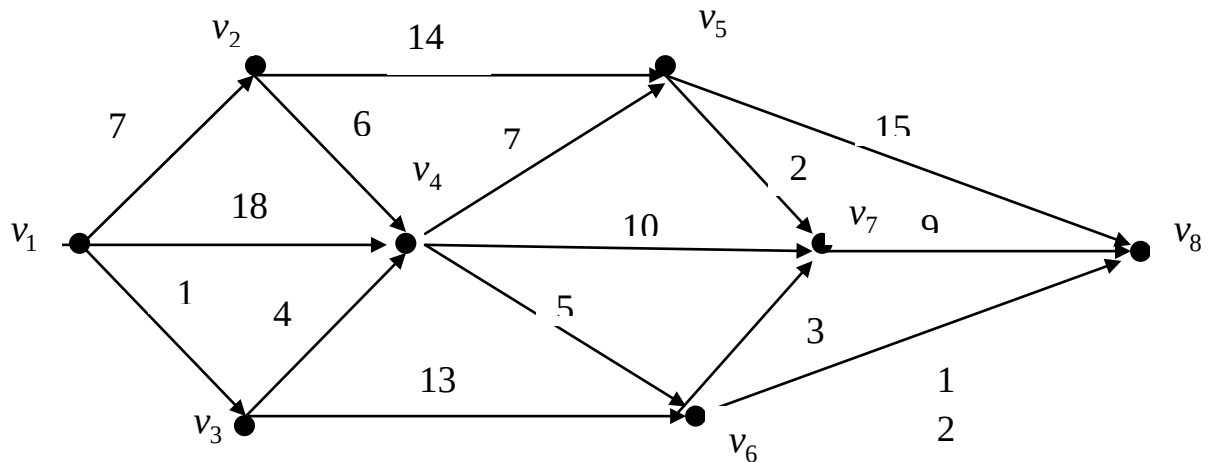


Рис.7.1: Исходный ориентированный граф задачи

Решение. Для решения задачи составим ее математическую модель:

1. Введем обозначения. Переменными математической модели данной задачи о минимальной пути в ориентированном графе являются 15 переменных: $x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{36}, x_{45}, x_{46}, x_{47}, x_{57}, x_{58}, x_{67}, x_{68}, x_{78}$. Каждая из этих

переменных x_{ij} принимает значение 1, если дуга (i, j) входит в минимальный путь, и 0 – в противном случае.

2. Запишем целевую функцию:

$$Z = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 c_{ij} x_{ij} = 7x_{12} + 11x_{13} + 18x_{14} + 6x_{24} + 14x_{25} + 4x_{34} + 13x_{36} + 7x_{45} + 5x_{46} + 10x_{47} + 2x_{57} + 15x_{58} + 3x_{67} + 12x_{68} + 9x_{78} \rightarrow \min$$

(6)

3. Сформулируем ограничения рассматриваемой задачи.

3.1. Ограничения вида (2):

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1. \quad (7)$$

3.2. Ограничения вида (3):

$$x_{58} + x_{68} + x_{78} = 1. \quad (8)$$

3.3. Ограничения вида (4):

$$\begin{cases} x_{12} - x_{24} - x_{25} = 0, \\ x_{13} - x_{34} - x_{35} = 0, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} - x_{47} = 0, \\ x_{25} + x_{45} - x_{57} - x_{58} = 0, \\ x_{36} + x_{46} - x_{67} - x_{68} = 0, \\ x_{47} + x_{57} + x_{67} - x_{78} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

4.2. Ограничения вида (5):

$$x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{36}, x_{45}, x_{46}, x_{47}, x_{57}, x_{58}, x_{67}, x_{68}, x_{78} \quad (10)$$

Таким образом, целевая функция (6) и ограничения (7–10) образуют математическую модель задачи о минимальном пути.

Решение задачи в среде электронных таблиц MS Excel

1. Идентифицируйте свою работу, переименовав Лист1 в «Титульный лист» и записав номер лабораторной работы, ее название, кто выполнил и проверил.

2. На следующем листе, с именем «Задача о минимальном пути в орграфе», создайте таблицу для ввода условий задачи и введите исходные данные.

3. В ячейку **E19** введите формулу целевой функции:

$$=СУММПРОИЗВ(С3:С17;D3:D17)$$

5. В ячейку **E3** введите левую часть ограничения (7):

$$=D3+D4+D5$$

6. В ячейку **E10** введите левую часть ограничения (8):

$$=D14+D16+D17$$

7. В ячейки **E4:E9** введите левую часть ограничения (9):

$$=D3-D6-D7$$

$$=D4-D8-D9$$

$$=D5+D6+D8-D10-D11-D12$$

$$=D7+D10-D13-D14$$

$$=D9+D11-D15-D16$$

$$=D12+D13+D15-D17$$

7. На вкладке «Данные» выберите пункт «Поиск решения».

8. В появившемся окне «Параметры поиска решения» нужно выполнить необходимые установки:

– Введите абсолютный адрес целевой ячейки **\$E\$19** в поле «Оптимизировать целевую функцию» или щ ☐ лкните

E19 и снова по кнопке .

– Введите направление целевой функции, щ ☐ лкните
мышью по селекторному полю «Минимум».

– В поле «Изменяя ячейки переменных» впишите абсолютный адрес
диапазона ячеек **\$D\$3:\$D\$17** или щ ☐ лкните

шью диапазон ячеек **D3:D17** и снова щ ☐ лкните по кнопке

– В поле «В соответствии с ограничениями» введите ограничения с помощью кнопки «Добавить». При этом вызывается диалоговое окно «Добавление ограничения».

Введите ограничение (7). В поле «Ссылка на ячейки» щ ☐ лкни
по кнопке , затем выделите мышью ячейку **E3** и снова щ ☐ лкни
в следующем поле установите знак =, нажав , затем в поле «Ограничение» вве-
дите 1. Нажмите «Добавить».

Аналогично введите ограничение (8). В поле «Ссылка на ячейки» щ ☐ лкни
по кнопке , затем выделите мышью ячейку **E10** и снова щ ☐ лкни
по кнопке , в следующем поле установите знак =, нажав , затем в поле «Огра-
ничение» введите 1. Нажмите «Добавить».

Введите систему ограничений (9). В поле «Ссылка на ячейки» щ ☐ л-л
ните по кнопке , затем выделите мышью диапазон ячеек **E4:E9** и снова
щ ☐ лкно кнопке , в следующем поле установите знак =, нажав , затем в
поле «Ограничение» введите 0. Нажмите «Добавить».

Теперь ведите ограничений (10). В поле «Ссылка на ячейки» щ ☐ лкни
по кнопке , затем выделите мышью диапазон ячеек **D3:D17** и снова щ ☐ л-л
те по кнопке , в следующем поле установите «бин», нажав , поле «Ограниче-
ние» заполнится автоматически, появится «бинарное». Нажмите «ОК».

– Установите галочку «Сделать переменные без ограничений неотри-
цательными».

– Выберите метод решения «Поиск решения линейных задач симплекс-
методом»

– Нажмите «Найти решение». В появившемся окне «Результаты поиска
решения» нажмите «ОК».

Выводы. Анализ найденного решения показывает, что минимальный
путь в исходном ориентированном графе, соединяющий вершину 1 с верши-
ной 8, содержит следующие дуги (1,2), (2,4), (4,6), (6,8). Тем самым найден
оптимальный маршрут перемещения из исходного населенного пункта в ко-

нечный, который включает в себя последовательное перемещение между соседними населенными пунктами, из 6 в 8. При этом общая длина этого пути будет минимальной и равна 30 км.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

4. цель работы;
- задание с исходными данными;
- описание по пунктам выполненной работы с приведением необходимых схем, рисунков, таблиц, графиков, а также расчетных формул с численными значениями;
- выводы по каждому пункту экспериментальной части задания.

Исходные данные для лабораторной работы

Задание 1. Предприятие может выпускать четыре вида продукции (А, Б, В и Г), получая при этом прибыль, зависящую от спроса. Спрос в свою очередь может принимать одно из шести состояний (I, II, III, IV, V, VI). В следующей матрице элементы a_{ij} характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске i -й продукции и j -м состоянии спроса. Определить оптимальные пропорции выпускаемой продукции, считая состояние спроса полностью неопределенным, гарантируя при этом среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса.

	I	II	III	IV	V	VI
А	$0+N_0$	3	6	2	4	5
Б	$1+N_0$	$10-N_0$	8	$0-N_0$	3	6
В	$10-N_0$	4	$0+N_0$	5	N_0-10	6
Г	$0+N_0$	1	7	$10-N_0$	4	$10-N_0$

N_0 - номер варианта

Задание 2. Графическим методом найти оптимальные стратегии и цену игры, заданной платежной матрицей. При этом с 1-го по 5-й вариант выпол-

нения работы принять платежную матрицу вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

С 6-го по 10-й вариант – вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$$

Значения коэффициентов платежных матриц

№ варианта Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a₁₁	4	5	3	6	5	5	4	5	4	-1
a₁₂	5	4	6	5	4	8	3	2	5	4
a₁₃	5	2	3	3	6	-	-	-	-	-
a₁₄	2	3	4	7	4	-	-	-	-	-
a₂₁	7	5	3	4	5	9	4	2	2	4
a₂₂	6	2	2	2	6	3	-1	3	3	2
a₂₃	4	6	5	5	4	-	-	-	-	-
a₂₄	8	1	3	4	7	-	-	-	-	-
a₃₁	-	-	-	-	-	2	4	-1	5	3
a₃₂	-	-	-	-	-	8	3	2	3	5
a₄₁	-	-	-	-	-	5	2	3	4	2
a₄₂	-	-	-	-	-	9	4	5	2	4

Список литературы

Перечень основной литературы:

1. Монахов О.И. Методы оптимизации в пакетах прикладных программ и их применение в решении задач НЛП в системах автоматического управле-

ния: учебно-методическое пособие к практическим занятиям и курсовому проекту по дисциплине «Методы оптимизации» / Монахов О.И. - Москва: Российский университет транспорта (МИИТ), 2021. - 63 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122054.html>

2. Кузнецов А.С. Введение в теорию принятия решений и методы оптимизации (элементы информационных технологий поиска эффективных решений): учебное пособие / Кузнецов А.С. - Новосибирск: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2023. - 163 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/138819.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Ахмадиев Ф. Г. Математическое моделирование и методы оптимизации: учебное пособие / Ф. Г. Ахмадиев, Р. М. Гильфанов. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 178 с. - ISBN 978-5-4497-1383-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/116448.html>

2. Поляков В.М. Методы оптимизации: учебное пособие / Поляков В.М., Агаларов З.С.. - Москва: Дашков и К, 2022. - 86 с. - ISBN 978-5-394-05003-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120727.html>

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Методические указания
по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине
«Компьютерные технологии решения оптимизационных задач»
для студентов направления подготовки
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»
направленность (профиль)
«Анализ данных и искусственный интеллект»**

Содержание

Введение

- 1. Общая характеристика самостоятельной работы обучающегося при изучении дисциплины Компьютерные технологии решения оптимизационных задач**
- 2. План - график выполнения самостоятельной работы**
- 3. Контрольные точки и виды отчетности по ним**
- 4. Методические рекомендации по изучению теоретического материала**
- 5. Методические указания по видам работ, предусмотренных рабочей программой дисциплины**
- 6. Список рекомендуемой литературы**

Введение

Самостоятельная работа студентов (СРС) - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Целью СРС является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

- а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;

- б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое

эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы - это составление расписания, которое должно отражать

время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

1. Общая характеристика самостоятельной работы обучающегося при изучении дисциплины Компьютерные технологии решения оптимизационных задач

Основные цели самостоятельной работы обучающихся:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование и дальнейшее развитие мыслительных операций: анализа, сравнения, обобщения, классификации и т.п.;
- развитие познавательных способностей и активности обучающихся: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских навыков;
- контроль знаний.

2. План - график выполнения самостоятельной работы

Тема дисциплины по учебной программе	Количество часов	Вид деятельности	Итоговый продукт самостоятельной работы	Средства и технологии оценки	Срок выполнения (неделя)
6 семестр					
Задача составления рациона в системах компьютерной математики Mathcad, Matlab и MS Excel.	9	Изучение литературы, подготовка к лабораторному занятию	Конспект Индивидуальное задание	Собеседование	2
Решение задачи линейного программирования, двойственной задачи линейного программирования, транспортной задачи в системах компьютерной математики Mathcad, Matlab и MS Excel.	9	Изучение литературы, подготовка к лабораторному занятию	Конспект Индивидуальное задание	Собеседование	4
Решение задач динамического программирования в среде Matlab: зада-	9	Изучение литературы, подготовка к лаборатор-	Конспект Индивидуальное задание	Собеседование	6

ча распределения инвестиций, задача распределения инвестиций без пустых проектов, задача о рюкзаке (ранце), задача о надежности, задача календарного планирования трудовых ресурсов, управления запасами, задача о замене оборудования.		ному занятию			
Задачи на безусловный экстремум	9	Изучение литературы, подготовка к лабораторному занятию	Конспект Индивидуальное задание	Собеседование	8
Задачи на условный экстремум	9	Изучение литературы, подготовка к лабораторному занятию	Конспект Индивидуальное задание	Собеседование	10
Решение комбинаторных задач в Mathcad: метод ветвей и границ, решение задачи коммивояжера.	9	Изучение литературы, подготовка к лабораторному занятию	Конспект Индивидуальное задание	Собеседование	12
Задача о минимальном пути в графе	9	Изучение литературы, подготовка к лабораторному занятию	Конспект Индивидуальное задание	Собеседование	14
Решение матричных игр и анализ конфликтных ситуаций в Maple, Mathcad Prime и в MS Excel	13	Изучение литературы, подготовка к лабораторному занятию	Конспект Индивидуальное задание	Собеседование	16
Итого	76.00				

3. Контрольные точки и виды отчетности по ним

Код оцениваемой компетенции (или её части)	Этап формирования компетенции (№ темы)	Тип контроля	Вид контроля	Компонент фонда оценочных средств	Количество элементов, шт.
ПК-3, ПК-4	1-4	текущий	устный	Вопросы для собеседования по самостоятельному изучению тем дисциплины	30
ПК-3, ПК-4	5-8	текущий	устный	Вопросы для собеседования по самостоятельному изучению тем дисциплины	30
ПК-3, ПК-4	1-8	Промежуточный Зачет с оценкой	устный	Вопросы для проверки уровня знаний	28
				Вопросы (задания) для проверки умений и навыков	28

4. Методические рекомендации по изучению теоретического материала

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности. Вчерашнему школьнику сделать это бывает весьма непросто: если в школе ежедневный контроль со стороны учителя заставлял постоянно и систематически готовиться к занятиям, то в вузе вопрос об уровне знаний вплотную встает перед студентом только в период сессии. Такая ситуация оборачивается для некоторых соблазном весь семестр посвятить свободному времяпрепровождению («когда будет нужно – выучу!»), а когда приходит пора экзаменов, материала, подлежащего усвоению, оказывается так много, что никакая память не способна с ним справиться в оставшийся промежуток времени.

Работа с книгой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке ис-

пользуются алфавитный и систематический каталоги. Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу. Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода). При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались. Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;
2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;
3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;
4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;
5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. По-

этому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;
2. Выделите главное, составьте план;
3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;
4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.
5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

5. Методические указания по видам работ, предусмотренных рабочей программой дисциплины.

Задания для самостоятельного решения

1. Известны (табл. 1) минимальные суточные потребности человека, в зависимости от пола и возраста, в питательных веществах и незаменимых компонентах. В табл. 2 приведены содержание питательных веществ и незаменимых компонентов в 100 г. продукта. Стоимости 100 г. продуктов, включенных в диету, и предельные количества по каждому сформировать самостоятельно. Требуется рассчитать суточную диету (табл. 3), чтобы, с одной стороны, обеспечить минимально необходимое количество питательных веществ и незаменимых компонент, а с другой – минимизировать стоимость разработанной диеты. При этом необходимо подсчитать энергетическую ценность полученной диеты.

Таблица 1

Питательные вещества	Мужчины			Женщины		
	18-25 лет	26-39 лет	40-59 лет	18-25 лет	26-39 лет	40-59 лет
Белки, г	96	95	90	83	80	78
Жиры, г	106	98	90	90	2	76
Углеводы, г	420	409	389	346	341	323
Ретинол (вит. А), мг	0.19	0.18	0.18	0.16	0.15	0.15
Каротин (вит.А), мг	6.6	6.3	6.0	5.5	5.1	5.0
Витамин В ₁ , мг	1.6	1.5	1.4	1.3	1.2	1.2
Витамин В ₂ , мг	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.4
Витамин РР, мг	20	19	18	17	16	15
Витамин С, мг	95	85	80	80	70	65
Суточная энерге- тическая потреб- ность, Ккал.	3100	2950	2800	2600	2450	2320

Питательные вещества	Хлебные изделия		Молочные продукты			Мясо			Крупы		Колбаса		Овощи			Фрукты	
	Хлеб ржаной	Хлеб бородинский	Масло	Сметаногоржирный	Кефир жирный	Свинина	Говядина	Баранина	Гречневая	Рисовая	Диетическая	Чайная	Морковь	Капуста	Кабачки	Яблоки	Апельсины
Белки, г	6.6	6.8	0.5	14	2.8	14.3	20	15.6	12.6	7	12.1	11.7	1.3	1.8	0.6	0.4	0.9
Жиры, г	1.2	1.3	82.5	18	3.2	33.3	9.8	16.3	3.3	1	13.5	2.5	0.1	0.1	0.3	0.4	0.2
Углеводы, г	34.2	35.6	0.8	2.8	4.1	0	0	0	62.1	70.7	0	0	7.2	4.7	4.9	9.8	0
Ретинол (вит. А), мг	0	0	0.54	0.1	0.05	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Каротин (вит.А), мг	0	0	0.38	0.06	0.01	0	0	0	0.01	0	0	0	9.0	0.02	0.03	0.03	0.05
Витамин В ₁ , мг	0.18	0.18	0	0.05	0.03	0.4	0.07	0.08	0.43	0.08	0.06	0.1	0.06	0.03	0.03	0.03	0.04
Витамин В ₂ , мг	0.08	0.08	0.1	0.3	0.17	0.1	0.18	0.14	0.2	0.04	0.13	0.16	0.07	0.04	0.03	0.02	0.03
Витамин РР, мг	0.67	1	0.05	0.3	0.14	2.2	5	3.8	4.19	1.6	0	0	1.0	0.74	0.6	0.3	0.2

Витамин С, мг	0	0	0	0.3	0.7	0	0		0	0	3.8	2.3	5.0	45.0	5.0	1.65	60
Суточная энергетиче- ская по- требность, Ккал.	181	207	748	239	56	491	168	209	335	330	170	216	34	27	23	45	40

Таблица 3

№ варианта	Пол	Возраст	Продукты
1	м	18-25 лет	Хлеб ржаной, масло, творог жирный, свинина, крупа гречневая, колбаса диетическая, колбаса чайная, морковь, кабачки, яблоки.
2	ж	26-39 лет	Хлеб бородинский, масло, кефир жирный, говядина, крупа рисовая, колбаса чайная, морковь, капуста, яблоки, апельсины.
3	м	40-59 лет	Хлеб ржаной, масло, творог жирный, баранина, крупа гречневая, колбаса диетическая, морковь, капуста, яблоки, апельсины.
4	ж	18-25 лет	Хлеб бородинский, масло, кефир жирный, свинина, крупа рисовая, колбаса чайная, морковь, кабачки, яблоки, апельсины.
5	м	26-39 лет	Хлеб ржаной, масло, творог жирный, говядина, крупа гречневая, колбаса диетическая, колбаса чайная, морковь, капуста, яблоки, апельсины.
6	ж	40-59 лет	Хлеб бородинский, масло, кефир жирный, баранина, крупа рисовая, колбаса чайная, морковь, кабачки, апельсины.
7	м	18-25 лет	Хлеб ржаной, масло, творог жирный, свинина, крупа гречневая, колбаса диетическая, колбаса чайная, морковь, капуста, яблоки.
8	ж	26-39 лет	Хлеб бородинский, масло, кефир жирный, говядина, крупа рисовая, морковь, кабачки, яблоки, апельсины.
9	м	40-59 лет	Хлеб ржаной, масло, творог жирный, баранина, крупа гречневая, колбаса диетическая, колбаса чайная, морковь, капуста, Яблоки, Апельсины.
10	ж	26-39 лет	Хлеб бородинский, Масло, Кефир жирный, свинина, рисовая, чайная, морковь, кабачки, яблоки, апельсины

2. Продукция определенного вида производится в городах A_1, A_2, A_3 , и потребляется в городах B_1, B_2, B_3 и B_4 . В таблице указаны: объем производства, спрос, стоимость перевозки единицы продукции. Составить оптимальный план перевозки продукции, при котором стоимость всех перевозок будет минимальна. Предварительно следует проверить, сбалансирована ли данная транспортная задача. Если задача не сбалансирована, то нужно ввести фиктивных потребителей или производителей, добавляя к исходной таблице столбцы или строки.

№ 1

Производители	Потребители				Объём производства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	26	47	25	20	48
A_2	10	40	43	6	28
A_3	9	34	46	15	71
Спрос	47	81	25	44	

№ 2

Производители	Потребители				Объём производства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	47	25	20	47	41
A_2	23	47	28	17	41
A_3	7	43	39	10	79
Спрос	13	50	46	28	

№ 3

Производители	Потребители				Объём производства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	25	20	47	30	32
A_2	40	43	6	36	49
A_3	22	47	29	16	46
Спрос	13	50	46	28	

№ 4

Производители	Потребители				Объём производ- ства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	20	47	30	14	22
A_2	47	28	17	46	58
A_3	34	46	15	29	78
Спрос	43	42	50	18	

№ 5

Производители	Потребители				Объём производ- ства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	47	30	14	45	10
A_2	43	6	36	45	61
A_3	43	39	10	40	60
Спрос	44	23	48	6	

№ 6

Производители	Потребители				Объём производ- ства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	30	14	45	35	10
A_2	28	17	46	33	44
A_3	47	29	16	46	41
Спрос	15	43	41	6	

№ 7

Производители	Потребители				Объём производ- ства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	14	45	35	7	22
A_2	6	36	45	13	83

A_3	46	15	29	47	56
Спрос	39	24	30	18	

№ 8

Производители	Потребители				Объём производ- ства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	45	35	7	43	83
A_2	17	46	33	10	18
A_3	39	10	40	43	82
Спрос	47	42	15	29	

№ 9

Производители	Потребители				Объём производ- ства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	4	5	6	10	530
A_2	8	6	3	8	405
A_3	7	10	4	11	540
Спрос	425	415	335	400	

№ 10

Производители	Потребители				Объём производ- ства
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	7	4	8	513
A_2	9	6	4	4	448
A_3	6	10	5	8	522
Спрос	437	417	333	396	

3. Распределить работы таким образом, чтобы минимизировать временные затраты на выполнение всех работ при условии, что каждый из претендентов получит одну и только одну из работ. Матрица временных затрат каждого претендента на выполнение каждой из работ приведена в таблице.

Работники	Номера работ									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Иванов	7+№	9	1	15	1	9	3	4	6	3
Петров	4	14+№	11	11	4	12	2	3	5	3
Сидоров	№	17	20-№	16	9	16	4	6	7	1
Копылов	4	17	10	12+№	16	14	3	7	3	1
Минин	2	5	18	8	18	5	1	6	1	3
Жаров	7	17	1	8	8	20-№	7	3	2	7
Власов	3	1	№	3	2	3	4+№	5	3	№
Демченко	6	№	2	1	1	5	4	№	1	1
Серегин	№	1	3	7	4	3	5	2	2+№	4
Панин	3	3	5	№	3	№	3	1	1	№

№- номер вариант

Вопросы для собеседования

Базовый уровень

1. Дайте определение модели.
2. Дайте определение моделирования.
3. Какая модель называется непрерывной?
4. Какая модель называется дискретной?
5. Приведите упрощённый алгоритм моделирования.
6. На чём основываются математические модели?
7. Что включает в себя математическое описание объекта?
8. Что понимают под адекватностью математической модели?
9. Что понимают под точностью математической модели?
10. Что такое погрешность модели?
11. Для чего нужен контрольный вычислительный эксперимент?
12. В чем состоит задача построения математической модели?
13. Перечислите проблемы построения математической модели.

14. Какие объекты называются подобными?
15. Сформулируйте П-теорему.
16. Какие вершины в графе называются смежными?
17. Какие вершины в графе называются изолированными?
18. Что называется в графе петлёй?
19. Что такое поток событий?
20. Какой поток является стационарным?
21. Какой поток является ординарным?
22. Какой поток является потоком без последствия?
23. Какой поток называется марковским?
24. Какой режим работы СМО называется стационарным?
25. Когда применяется метод Монте Карло?
26. Дайте определение полной группы событий.
27. Дайте определение несовместных событий.
28. Перечислите вычислительные методы алгебры.
29. Перечислите вычислительные методы решения дифференциальных уравнений.
30. Перечислите приемы упрощения математических моделей.
31. На чём основаны методы вычисления для задач, не имеющих аналитического представления решения?
32. В чём состоят основные качества метода вычисления с точки зрения потребителя?

Повышенный уровень

1. Как классифицируются модели?
2. Как подразделяются модели по основаниям для преобразования свойств модели в свойства оригинала?
3. Чем определяется адекватность модели?
4. Чем определяется точность модели?
5. Как определить погрешность модели?
6. Дайте определение математической модели.
7. Дайте определение имитационной модели.
8. Дайте определение вычислительного эксперимента.
9. В чём заключается метод ранжирования?
10. В чём заключается метод агрегирования?
11. В чём заключается метод последовательных приближений?
12. В чём заключается метод проб и ошибок?
13. В чём заключается метод перебора?
14. Дайте определение полу степени исхода вершины.
15. Задача о Кенигсбергских мостах.
16. Задача о коммивояжере.
17. Задача о раскраске политической карты.
18. Как определить интенсивность потока?

19. Как определить вероятность наступления события в потоке?
20. Как составляются уравнения Эрланга?
21. Приведите примеры частных случаев СМО.
22. В чём заключается метод Монте Карло?
23. Поясните суть метода деления отрезка пополам.
24. Поясните суть метода секущих.
25. Поясните суть метода золотого сечения.
26. Поясните суть метода касательных (Ньютона).
27. Раскройте основные способы упрощения моделей.
28. Раскройте основные способы упрощения уравнений.

Учебно-методическое обеспечение дисциплины

Перечень основной литературы:

1. Монахов О.И. Методы оптимизации в пакетах прикладных программ и их применение в решении задач НЛП в системах автоматического управления: учебно-методическое пособие к практическим занятиям и курсовому проекту по дисциплине «Методы оптимизации» / Монахов О.И. - Москва: Российский университет транспорта (МИИТ), 2021. - 63 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/122054.html>
2. Кузнецов А.С. Введение в теорию принятия решений и методы оптимизации (элементы информационных технологий поиска эффективных решений): учебное пособие / Кузнецов А.С. - Новосибирск: Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2023. - 163 с. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/138819.html>

Перечень дополнительной литературы:

1. Ахмадиев Ф. Г. Математическое моделирование и методы оптимизации: учебное пособие / Ф. Г. Ахмадиев, Р. М. Гильфанов. - Москва: Ай Пи Ар Медиа, 2022. - 178 с. - ISBN 978-5-4497-1383-4. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/116448.html>
2. Поляков В.М. Методы оптимизации: учебное пособие / Поляков В.М., Агаларов З.С.. - Москва: Дашков и К, 2022. - 86 с. - ISBN 978-5-394-05003-9. - Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/120727.html>

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

- <http://www.exponenta.ru/> - образовательный математический сайт
- <http://www.matlab.ru> консультационный центр Matlab компании Softline