

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

Методические указания по выполнению практических работ

Направление подготовки 03.03.02 Физика
Направленность (профиль)
«Медицинская физика»

**Ставрополь
2026**

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1	4
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2	13
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3	16
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4	22
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5	28
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №6	33
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №7	40
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №8	45
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №9	53
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №10	58

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Высшая алгебра» является формирование соответствующих общепрофессиональных компетенций будущего бакалавра по направлению подготовки 03.03.02 Физика путем освоения возможностей использования средств и методов высшей алгебры для решения прикладных задач в области физики.

Основными **задачами** освоения дисциплины «Высшая алгебра» являются:

- получение базовых знаний по высшей алгебре;
- приобретение навыков исследования и решения базовых задач высшей алгебры;
- овладение современным алгебраическим аппаратом для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач в области физики;
- развитие способностей применять полученные знания и умения в смежных дисциплинах и будущей профессиональной деятельности.

При освоении дисциплины вырабатывается общематематическая культура: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения алгебраических задач и задач, связанных с приложениями алгебраических методов.

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

ИД-2_{ОПК-1}

использует математический аппарат и методы математического и численного моделирования для описания, анализа, теоретического и экспериментального исследования физических систем, явлений и процессов в своей профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

Знать:

основные свойства важнейших алгебраических структур;

основы высшей алгебры и их применение при математическом моделировании физических процессов

Уметь:

оперировать с элементами числовых полей, линейных пространств, матрицами, векторами;

решать системы линейных уравнений;

использовать аппарат линейной алгебры для освоения теоретических основ и практического использования физических моделей;

применять алгебраические методы для решения прикладных задач, а также производить оценку качества полученных решений;

демонстрировать способность к абстракции, в том числе умение логически развивать отдельные формальные теории и устанавливать связь между ними.

Владеть:

методами высшей алгебры;

методами анализа и синтеза математических моделей в сфере будущей профессиональной деятельности.

Методические рекомендации подготовлены с учетом требований ФГОС ВО и имеющейся программы по данной дисциплине.

Предлагаемые методические рекомендации содержат систематизированный минимум теоретических сведений, необходимых для подготовки к практическим занятиям, закрепления материала, изученного на занятиях, содержит материалы для организации СКР и проведения текущего контроля знаний и умений студентов. Приведены примеры решения типовых задач, демонстрирующие основные приемы и методы решения.

Рассмотренный материал охватывает весь программный материал по соответствующей дисциплине для указанного направления и содержит дополнительный материал, способствующий целостному пониманию материала.

Практическое занятие №1

Тема занятия «Матрицы и определители»

Цель: изучить алгебраические операции и их свойства, рассмотреть основные алгебраические структуры.

Организационная форма занятия: практикум.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Алгебраические операции и их свойства.
2. Группы.
3. Кольца.
4. Поля.

Методические рекомендации

Подготовка к занятию дома

1. Для подготовки к первому вопросу:

- Выучите следующие определения: унарной, бинарной и n - местной операций; ранга операции; нейтрального и симметричного элементов; замкнутого множества.
- Запомните свойства бинарных операций и теоремы о существовании и единственности нейтрального и симметричного элементов.
- Составьте примеры: унарной, бинарной и n - местной операций; коммутативных, ассоциативных и дистрибутивных операций; нейтральных и симметричных элементов относительно бинарной операции на различных множествах; операций и соответствующих им замкнутых множеств.
- Разберите примеры решения типовых задач 1-4 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава III; [3], глава I (§1,2); [5], глава 1 (§5).

2. Для подготовки ко второму:

- Выучите следующие определения: алгебры, однотипных алгебр; гомоморфизма и изоморфизма алгебр; биекции, инъекции и сюръекции; группы; Абелевой группы.
- Запомните свойства группы.
- Разберите примеры решения типовых задач 5-7 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [2], глава III; [3], глава VII (§1); [5], глава 4; [13].

3. Для подготовки к третьему вопросу занятия:

- Выучите следующие определения: алгебр с двумя бинарными операциями, кольца; коммутативного кольца.
- Составьте примеры колец.
- Разберите пример решения типовой задачи 8 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [2], глава VIII (§1); [3], глава 4; [4], глава 10 (§43-45); [5], глава III.

4. Для подготовки к четвертому вопросу:

- Выучите определение поля.
 - Подготовьте примеры полей.
 - Разберите пример решения типовой задачи 9 по теме занятия в данном пособии.
- Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [5], глава VIII (§1); [11], глава 4; [13], глава 14 (§63); [18], глава IV.

На занятии по указанию преподавателя

1. Будьте готовы по вопросам, выносимым на обсуждение, сформулировать основные определения, свойства и теоремы, привести соответствующие примеры.
2. Решите на доске и в тетради задания для развития и контроля владения компетенциями из данного пособия.
3. Получите **ИДЗ №1**. Дома выполните его в отдельной тетради и на следующем практическом занятии сдайте на проверку преподавателю. Номер варианта соответствует Вашему порядковому номеру в списке группы.

Литература

а) основная

1. Глухов М.М. Алгебра и аналитическая геометрия. М.: Гелиос АРВ, 2005.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.1. Основы алгебры: Учебник для вузов. М.: Физико-математическая литература, 2001.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.2. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: Физико-математическая литература, 2001.

б) дополнительная

4. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра: Учебник. В 2-х т. Т.1. М.: Гелиос АРВ, 2007.

5. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов. СПб.: Изд-во «Лань», 2002.

Интернет ресурсы

<http://eek.diary.ru/p57704941.htm> - веб-сайт содержит большое количество книг по алгебре и геометрии, в том числе из списка рекомендованной, доступных для бесплатного скачивания.

Примеры решения типовых задач

1. Являются ли приведенные ниже отображения операциями? Для операций найти нейтральные и симметричные элементы, проверить операции на коммутативность.

1) $a \otimes b = a - b$ на N ;

2) $a \otimes b = (a \times b) - 1$ на Z ;

3) $a \otimes b = \sqrt{a^2 + b^2}$ на $\{a : 0 \leq a, a \in R\}$.

Решение:

1) Натуральные числа N это числа, которые употребляются при счете, то есть $1, 2, 3, \dots$. Если $a > b$, то $a - b > 0$ и $(a - b) \in N$. Если $a \leq b$, то $a - b \leq 0$ и $(a - b) \notin N$. Натуральные числа не замкнуты относительно операции вычитания. Следовательно, отображение $a \otimes b = a - b$ не является операцией на N .

2) Множество целых чисел Z состоит из натуральных чисел n , чисел вида $-n$ и числа нуль. Множество целых чисел замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения. Следовательно, отображение $a \otimes b = (a \times b) - 1$ является операцией на Z .

Элемент $e \in A$ называется нейтральным относительно операции $*$, если $e * a = a * e = a, \forall a \in A$. Если $e \in Z$ - нейтральный элемент и $b \in Z$, то справедливо следующее: $(e * b) = (e \times b) - 1 = b \Rightarrow e \times b = b + 1 \Rightarrow b = \frac{b+1}{e}$. Так как множество целых чисел не яв-

ляется замкнутым относительно операции деления, то число $b = \frac{b+1}{e}$ может не быть целым. Это противоречит тому что $b \in Z$. Следовательно, для операции $a \times b - 1$ на множестве целых чисел нейтрального элемента не существует.

Если $a' \in A$ симметричный элемент к $a \in A$, то $a * a' = a' * a = e$. Учитывая, что нейтрального элемента не существует, последнее равенство не выполнимо. Следовательно, симметричного элемента не существует.

Операция $*$ коммутативна на множестве A , если $a * b = b * a, \forall a, b \in A$. Проверим: $(a * b) = (a \times b) - 1$ и $(b * a) = (b \times a) - 1$. От перемены мест сомножителей произведение не меняется, то есть $(a \times b) - 1 = (b \times a) - 1$. Следовательно, операция коммутативна.

3) Действительные числа R это объединение множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел. Рациональные числа Q - это числа представимые несократимой обыкновенной дробью $\frac{x}{y}$, где $x \in Z, y \in N$. Иррациональные числа I - это бесконечные непериодические десятичные дроби. Любая периодическая дробь является рациональным числом.

Так как $(a^2 + b^2) \geq 0, \forall a, b \in R$, то $\sqrt{a^2 + b^2} \in R$. Следовательно, отображение $a \otimes b = \sqrt{a^2 + b^2}$ на $\{a : 0 \leq a, a \in R\}$ является операцией.

Если $e \in R$ - нейтральный элемент и $b \in R$, то справедливо следующее: $(e * b) = \sqrt{e^2 + b^2} = b$. Если $\sqrt{e^2 + b^2} = b$, то $e^2 = b^2 - b^2 = 0$. Следовательно, для операции $(a * b) = \sqrt{a^2 + b^2}$ нейтральным элементом является $e = 0$.

Если $a' \in A$ симметричный элемент к $a \in R$, то $(a' * a) = \sqrt{a'^2 + a^2} = e$. Так как $e = 0$, то $\sqrt{a'^2 + a^2} = 0$, то $a'^2 + a^2 = 0$. Последнее равенство справедливо только, если элементы a' и a равны нулю одновременно. Следовательно, для операции $(a * b) = \sqrt{a^2 + b^2}$ на множестве R симметричного элемента не существует.

2. Пусть $a * b = a^b$, $\forall a, b \in Z^*$, Z^* - множество целых положительных чисел. Показать, что операция $*$ не коммутативна и не ассоциативна.

Решение:

1) Так как $a * b = a^b \neq b * a = b^a$, $\forall a, b \in Z^*$, то операция $*$ не коммутативна. Например, $3 * 2 = 3^2 = 9 \neq 2 * 3 = 2^3 = 8$.

2) Так как $(a * b) * c = (a^b)^c = a^{bc} \neq a * (b * c) = a^{(b^c)}$, $\forall a, b \in Z^*$, то операция $*$ не ассоциативна. Например, $(2 * 3) * 4 = (2^3)^4 = 2^{12} \neq 2 * (3 * 4) = 2^{(3^4)} = 2^{81}$.

3. Показать, что при $a, b \in Q$ отображение $\langle x, y \rangle \rightarrow ax + by$, $\forall x, y \in Q$, является бинарной ассоциативной операцией на Q .

Решение:

Множество рациональных чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения. Следовательно, отображение $\langle x, y \rangle \rightarrow ax + by$, $\forall x, y \in Q$.

Так как $\langle x, y \rangle \rightarrow ax + by$, $\forall x, y \in Q$ и $\langle y, x \rangle \rightarrow ay + bx$, $\forall x, y \in Q$, то есть $ax + by \neq ay + bx$, $\forall x, y \in Q$, то операция не коммутативна.

Так как $(\langle x, y \rangle, z) \rightarrow a(ax + by) + bz = a^2x + aby + bz$, $\forall x, y, z \in Q$ и $\langle x, \langle y, z \rangle \rangle \rightarrow ax + b(ay + bz) = ax + bay + b^2z$, $\forall x, y, z \in Q$, то есть $a^2x + aby + bz \neq ax + bay + b^2z$, $\forall x, y, z \in Q$, то операция не ассоциативна.

4. Выяснить, являются ли следующие множества рациональных чисел замкнутыми относительно операции сложения. Для множеств замкнутых относительно операции сложения проверить образуют ли они аддитивную группу $G = \langle A, + \rangle$.

1) множество всех четных чисел;

2) множество всех рациональных с нечетными знаменателями.

Решение:

Алгебра $\mathcal{L} = \langle A, * \rangle$ называется группой, если ее главная операция $*$ обладает следующими свойствами:

- ассоциативность;
- наличие нейтрального элемента;
- наличие симметричного элемента.

Для аддитивной группы главной операцией $*$ является сложение $+$, то есть $G = \langle A, + \rangle$.

1) Четные числа – это числа делящиеся на два без остатка. Пусть $U = \{2u : u \in Q\}$, тогда $x = 2n$, $y = 2m$, $z = 2t$, где $x, y, z \in U$.

Проверим замкнутость: если $x + y = 2n + 2m = 2(n + m)$, то $(x + y) \in U \quad \forall x, y \in U$. Множество U замкнуто относительно сложения.

Проверим ассоциативность: $2n + (2m + 2t) = 2n + 2(m + t) = 2(n + m + t)$ и $(2n + 2m) + 2t = 2(n + m) + 2t = 2(n + m + t)$. Сравнивая два результата, видим, что они равны. Операция ассоциативна на U .

Проверим наличие нейтрального элемента: если $e = 2l \in U$ - нейтральный элемент и $x = 2n$, $x \in U$, то $e + x = x$ или $2l + 2n = 2n$, $l + n = n$, $l = n - n$, $l = 0$. Нейтральный элемент существует.

Проверим наличие симметричного элемента: если $x' = 2l \in U$ - симметричный элемент и $x = 2n$, $x \in U$, то $x' + x = 0$ или $2l + 2n = 0$, $x' = 2l = -2n$, $x' \in U$. Симметричный элемент существует.

Следовательно, $\langle U, + \rangle$ - аддитивная группа.

2) Нечетные числа – это числа представимые в виде: $2n + 1$. Пусть W - множество рациональных чисел с нечетными знаменателями, $x = \frac{m}{2n+1}$, $y = \frac{t}{2l+1}$, $z = \frac{k}{2r+1}$, $x, y, z \in W$, $m, t, k \in \mathbb{Z}$, $n, l, r \in \mathbb{N}$.

Проверим на замкнутость:
$$\frac{m}{2n+1} + \frac{t}{2l+1} = \frac{m(2l+1) + t(2n+1)}{4nl + 2n + 2l + 1} = \frac{m(2l+1) + t(2n+1)}{2(2nl + n + l) + 1}.$$

Из последнего выражения видно, что числитель дроби представляет собой суммы и произведения целых чисел. Множество целых чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения, то есть числитель последней дроби – это целое число. Так же видно, что знаменатель – нечетное число. То есть последняя дробь принадлежит множеству W и это множество является замкнутым относительно операции сложения.

Проверим на ассоциативность:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= \frac{m}{2n+1} + \left(\frac{t}{2l+1} + \frac{k}{2r+1} \right) = \frac{m}{2n+1} + \left(\frac{t(2r+1) + k(2l+1)}{(2l+1)(2r+1)} \right) = \\ &= \frac{m}{2n+1} + \frac{t(2r+1) + k(2l+1)}{4lr + 2l + 2r + 1} = \frac{m}{2n+1} + \frac{t(2r+1) + k(2l+1)}{2(2lr + l + r) + 1} = \\ &= \frac{2m(2lr + l + r) + 1 + t(2r+1)(2n+1) + k(2l+1)(2n+1)}{4n(2lr + l + r) + 2n + 2(2lr + l + r) + 1} = \\ &= \frac{2m(2lr + l + r) + 1 + t(2r+1)(2n+1) + k(2l+1)(2n+1)}{2(2n(2lr + l + r) + n + 2lr + l + r) + 1}. \end{aligned}$$

Если выполнить аналогичные преобразования и найти значение $(x + y) + z$, то результат совпадет. Следовательно, операция является симметричной.

Если $e = \frac{m}{2n+1} \in W$ - нейтральный элемент, то $\forall a = \frac{t}{2k+1} \in W$ должно выполняться условие $\frac{m}{2n+1} + \frac{t}{2k+1} = \frac{t}{2k+1}$. Отсюда $e = \frac{t}{2n+1} = 0$. Последнее равенство возможно только при $m = 0$, $2n + 1 \neq 0$. Эти два условия выполняются так как $m = 0$ - целое, а $2n + 1 = 0$ никогда не выполняется на W (0 не является натуральным числом). Нейтральный элемент на W существует.

Если $a' = \frac{m}{2n+1} \in W$ - симметричный элемент, то $\forall a = \frac{t}{2k+1} \in W$ должно выполняться условие $a' + a = 0$. Отсюда $a' = 0 - a$ или $a' = -a$ или $\frac{m}{2n+1} = -\frac{t}{2k+1}$. Дроби равны когда числители и знаменатели их равны. Симметричный элемент на W существует.

Следовательно, $\langle W, + \rangle$ - аддитивная группа.

5. Выяснить, являются ли множество рациональных чисел, знаменатели которых единица или четные числа, замкнутыми относительно операции сложения и умножения. Проверить образуют ли оно кольцо $K = \langle A, +, \times \rangle$.

Решение:

Кольцом называется алгебра $K = \langle A, +, \times \rangle$, главные операции которой удовлетворяют условиям:

- 1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ - ассоциативность сложения;
- 2) $a + b = b + a$ - коммутативность сложения;
- 3) $e + a = a + e = a$ - наличие нейтрального элемента по сложению;
- 4) $a' + a = a + a' = 0$ - наличие симметричного элемента по сложению;
- 5) $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ - ассоциативность умножения;
- 6) $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ и $c \times (a + b) = c \times a + c \times b$ - дистрибутивность умножения относительно сложения.

Пусть F - это множество рациональных чисел, знаменатели которых четные и единица, $x = \frac{m}{2n}$, $y = \frac{k}{2l}$, $z = \frac{t}{2r}$, $x, y, z \in F$, $m, k, t \in \mathbb{Z}$, $n, l, r \in \mathbb{N}$.

Проверим замкнутость по сложению: $x + y = \frac{m}{2n} + \frac{k}{2l} = \frac{ml + nk}{2nl}$. Числитель последней дроби состоит из суммы и произведений целых чисел. Множество целых чисел замкнуто относительно сложения и умножения, поэтому в числителе целое число. В знаменателе четное число. Следовательно, $(x + y) \in F \quad \forall x, y \in F$.

Проверим замкнутость по умножению: $x \times y = \frac{m}{2n} \times \frac{k}{2l} = \frac{mk}{2(2nl)}$. Числитель последней дроби - целое число, знаменатель - четное. Следовательно, $(x \times y) \in F \quad \forall x, y \in F$.

Проверим ассоциативность сложения: $x + (y + z) = \frac{m}{2n} + \left(\frac{k}{2l} + \frac{t}{2r} \right) =$
 $= \frac{m}{2n} + \left(\frac{kr + tl}{2lr} \right) = \frac{lrm + nkr + ntl}{2nlr}$ и $(x + y) + z = \left(\frac{m}{2n} + \frac{k}{2l} \right) + \frac{t}{2r} = \frac{lm + nk}{2nl} + \frac{t}{2r} =$
 $= \frac{lrm + nkr + ntl}{2nlr}$. Операция сложения ассоциативна.

Проверим коммутативность сложения: $x + y = \frac{m}{2n} + \frac{k}{2l} = \frac{ml + nk}{2nl}$ и
 $y + x = \frac{k}{2l} + \frac{m}{2n} = \frac{nk + ml}{2nl}$, $x + y = y + x$. Операция сложения коммутативна.

Проверим наличие нейтрального элемента по сложению: если $e = \frac{m}{2n} \in F$ - нейтральный элемент, то $\forall a = \frac{t}{2k} \in F$ должно выполняться условие $\frac{m}{2n} + \frac{t}{2k} = \frac{t}{2k}$. Отсюда $e = \frac{m}{2n} = 0$. Последнее равенство возможно только при $m = 0$, $2n \neq 0$. Эти два условия выполняются так как $m = 0$ - целое, а $2n = 0$ никогда не выполняется на F (0 не является натуральным числом). Нейтральный элемент по сложению на F существует.

Проверим наличие нейтрального элемента по сложению: если $a' = \frac{m}{2n} \in F$ - симметричный элемент, то $\forall a = \frac{t}{2k} \in F$ должно выполняться условие $a' + a = 0$. Отсюда $a' = 0 - a$ или $a' = -a$ или $\frac{m}{2n} = -\frac{t}{2k}$. Дроби равны когда числители и знаменатели их равны. Симметричный элемент по сложению на F существует.

Проверим ассоциативность умножения: если $x \times (y \times z) = \frac{m}{2n} \times \left(\frac{k}{2l} \times \frac{t}{2r} \right) = \frac{m}{2n} \times \left(\frac{kt}{4lr} \right) = \frac{mkt}{6nlr}$ и $(x \times y) \times z = \left(\frac{m}{2n} \times \frac{k}{2l} \right) \times \frac{t}{2r} = \left(\frac{mk}{4nl} \right) \times \frac{t}{2r} = \frac{mkt}{6nlr}$. Операция умножения ассоциативна.

Проверим дистрибутивность умножения относительно сложения: $(x + y) \times z = \left(\frac{m}{2n} + \frac{k}{2l} \right) \times \frac{t}{2r} = \frac{m}{2n} \times \frac{t}{2r} + \frac{k}{2l} \times \frac{t}{2r} = \frac{mt}{4nr} + \frac{kt}{4lr} = \frac{mtlr + ktnr}{4nlr}$ и $z \times (x + y) = \frac{t}{2r} \times \left(\frac{m}{2n} + \frac{k}{2l} \right) = \frac{t}{2r} \times \frac{m}{2n} + \frac{t}{2r} \times \frac{k}{2l} = \frac{tm}{4nr} + \frac{tk}{4lr} = \frac{mtlr + ktnr}{4nlr}$. Операция умножения дистрибутивна относительно операции сложения.

Так как на множестве рациональных чисел, знаменатели которых единица или четные числа, выполняются все свойства операций сложения и умножения в кольце, то алгебра $\langle F, +, \times \rangle$ является кольцом.

6. Выяснить, какие из следующих множеств действительных чисел являются полями относительно обычных операций $+, -, \times$ над ними:

- 1) все числа вида $a + b\sqrt{2}$ с рациональными a и b ;
- 2) все действительные чисел вида $a + b\sqrt[3]{2}$ с рациональными a и b .

Решение:

1) Полем называется коммутативное кольцо, на котором любой элемент является обратимым, то есть $\forall a \neq 0$ существует b такое, что $a \times b = b \times a = 1$.

Проверить является ли указанное множество коммутативным кольцом можно по аналогии с предыдущим примером.

Проверим, является ли любой элемент указанного множества обратимым.

Пусть H - указанное множество, $x = a + b\sqrt{2}$, $y = c + d\sqrt{2}$, $x, y \in H$, $a, b, c, d \in Q$. Если y является обратным для x , то должно выполняться условие $x \times y = y \times x = 1$.

Подставим: $x \cdot y = (a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = 1$, $x = \frac{1}{y}$ или $a + b\sqrt{2} = \frac{1}{c + d\sqrt{2}}$. Правую часть последнего равенства преобразуем к виду, соответствующему множеству H .

Для этого умножим числитель и знаменатель этой дроби на число сопряженное знаменателю $(c - d\sqrt{2})$, так чтобы в знаменателе получить разность квадратов:

$$\frac{c - d\sqrt{2}}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{c - d\sqrt{2}}{c^2 - 2d^2} = \frac{c}{c^2 - 2d^2} - \frac{d}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2}.$$

Числа $\frac{c}{c^2 - 2d^2}$ и $-\frac{d}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2}$ образованы путем сложения, вычитания, умножения и деления рациональных чисел.

Множество рациональных чисел замкнуто относительно всех четырех арифметических операций, поэтому эти числа являются рациональными. То есть $\frac{1}{y} \in H$. Отсюда $\forall x \in H, x \neq 0$ существует обратный элемент $y \in H$. Следовательно, H является полем относительно $+, -, \times$.

2) Так же как в первом пункте проверим только существование обратного элемента. Пусть H - множество чисел вида $a + b\sqrt[3]{2}$ с рациональными a и b , $x = a + b\sqrt[3]{2}$, $y = c + d\sqrt[3]{2}$, $x, y \in H$, $a, b, c, d \in Q$. Если y является обратным для x , то должно выполняться условие $x \times y = y \times x = 1$. Подставим: $x \cdot y = (a + b\sqrt[3]{2})(c + d\sqrt[3]{2}) = 1$, $x = \frac{1}{y}$ или $a + b\sqrt[3]{2} = \frac{1}{c + d\sqrt[3]{2}}$. Правую часть последнего равенства преобразуем к виду, соответствующему множеству H . Для этого умножим числитель и знаменатель этой дроби на число

$$\frac{c^2 - cd\sqrt[3]{2} + d^2(\sqrt[3]{2})^2}{(c + d\sqrt[3]{2})(c^2 - cd\sqrt[3]{2} + d^2(\sqrt[3]{2})^2)} = \frac{c^2 - cd\sqrt[3]{2} + d^2(\sqrt[3]{2})^2}{c^3 - 2d^3} =$$

$$= \frac{c^2}{c^3 - 2d^3} + \left(-\frac{cd}{c^3 - 2d^3} + \frac{d^2}{c^3 - 2d^3}\sqrt[3]{2} \right)\sqrt[3]{2}.$$

По способу задания множества H числа $\frac{c^2}{c^3 - 2d^3}$ и $\left(-\frac{cd}{c^3 - 2d^3} + \frac{d^2}{c^3 - 2d^3}\sqrt[3]{2} \right)\sqrt[3]{2}$ должны быть рациональными. Для первого числа это

условие выполняется, для второго нет ($\sqrt[3]{2}$ иррациональное число). То есть $\frac{1}{y} \notin H$. Отсюда $\forall x \in H, x \neq 0$ не существует обратный элемент $y \in H$. Следовательно, H не является полем относительно $+, -, \times$.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Проверить, является ли алгебраической операцией:
 - 1) деление на множестве Z ; 2) сложение на множестве четных чисел Z_{2n} ;
 - 3) вычитание на множестве $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; 4) сложение и умножение чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in Q$.
2. Показать, на каком из множеств N, Z, Q, R не существует нейтрального элемента относительно сложения и умножения? Симметричного?
4. Доказать, что множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in Q$, является группой по сложению.

5. Проверить, является ли кольцом относительно обычных операций сложения и умножения множество целых чисел, кратных трем.

7. Доказать, что множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, является полем относительно обычных операций сложения и умножения.

8. Выяснить, образует ли группу каждое из следующих множеств при указанной операции над элементами: 1) неотрицательные целые числа относительно сложения; 2) рациональные числа, отличные от нуля, относительно умножения.

9. Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно операций сложения и умножения: 1) рациональные числа; 2) числа вида $a + b\sqrt{3}$ с целыми a и b .

ИДЗ № 1 по теме «Алгебраические структуры»

Являются ли приведенные ниже отображения операциями? Для операций найти нейтральные и симметричные элементы, проверить операции на коммутативность.	
Вариант 1.	$a \otimes b = \max(a, b)$ на N
Вариант 2.	$a \otimes b = a/b$ на $\{x : 0 < x, x \in R\}$
Выяснить, являются ли следующие множества рациональных чисел замкнутыми относительно операции сложения. Для множеств замкнутых относительно операции сложения проверить образуют ли они аддитивную группу $G = \langle A, + \rangle$.	
Вариант 3.	Множество всех нечетных целых чисел.
Вариант 4.	Множество всех целых чисел, кратных числу 5.
Вариант 5.	Множество всех целых чисел, кратных числу 7.
Вариант 6.	Множество всех рациональных с нечетными знаменателями.
Вариант 7.	Множество всех рациональных с четными знаменателями.
Выяснить, являются ли следующие множества рациональных чисел замкнутыми относительно операции умножения. Для множеств замкнутых относительно операции умножения проверить образуют ли они мультипликативную группу $G = \langle A, \times \rangle$.	
Вариант 8.	Множество $\{1, -1\}$.
Вариант 9.	Множество всех отличных от нуля чисел с четными знаменателями.
Вариант 10.	Множество всех отличных от нуля рациональных чисел с нечетными знаменателями.
Вариант 11.	Множество всех целочисленных степеней числа 2.
Вариант 12.	Множество всех целочисленных степеней числа 3.
Вариант 13.	Множество всех целочисленных степеней числа 5.
Вариант 14.	Множество $\{p^n n \in \mathbb{N}, p \text{ — простое число}\}$, где p - простое число.
Выяснить, являются ли следующие множества рациональных чисел замкнутыми относительно операции сложения и умножения. Для замкнутых множеств проверить образуют ли они кольцо $K = \langle A, +, \times \rangle$.	
Вариант 15.	Множество всех четных целых чисел.
Вариант 16.	Множество натуральных чисел N .
Вариант 17.	Множество всех рациональных чисел с нечетными знаменателями.
Вариант 18.	Множество всех рациональных чисел с нечетными знаменателями.
Вариант 19.	Множество всех чисел вида $a + b\sqrt{2}$ с целыми a и b .
Вариант 20.	Множество всех чисел вида $a + b\sqrt{5}$ с рациональными a и b .
Вариант 21.	Множество всех чисел вида $a + b\sqrt{7}$ с целыми a и b .
Вариант 22.	Множество всех чисел вида $a + b\sqrt{8}$ с рациональными a и b .
Вариант 23.	Множество всех чисел вида $a + b\sqrt{11}$ с рациональными a и b .
Выяснить, какие из следующих множеств действительных чисел являются полями относительно обычных операций $+, -, \times$ над ними.	
Вариант 24.	Множество натуральных чисел N .
Вариант 25.	Все рациональные числа с нечетными знаменателями.
Вариант 26.	Все числа вида $a + b\sqrt{5}$ с рациональными a и b .
Вариант 27.	Все числа вида $b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ с рациональными a, b и c .
Вариант 28.	Все числа вида $a + b\sqrt{7}$ с рациональными a и b .
Вариант 29.	Все действительные числа вида $a + b\sqrt[3]{5}$ с рациональными a и b .
Вариант 30.	Все числа вида $b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9}$ с рациональными a, b и c .

Практическое занятие №2

Тема занятия «Алгебраическая форма комплексного числа»

Цель: изучить действия над комплексными числами в алгебраической форме и рассмотреть геометрическое изображение комплексных чисел.

Организационная форма занятия: практикум.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Алгебраическая форма комплексного числа.
2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
3. Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

Методические рекомендации

Подготовка к занятию дома

1. Для подготовки к первому вопросу:

- Ознакомьтесь с понятием комплексного числа.
- Выучите определение комплексного числа, заданного в алгебраической форме.
- Выясните, что называется действительной и мнимой частями комплексного числа.
- Сформулируйте понятие мнимой единицы.
- Запомните, какие комплексные числа называются равными, какие - комплексно-сопряженными.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава VIII (§3); [2], глава 4.

2. Для подготовки ко второму вопросу:

- Запомните, какие арифметические операции можно выполнять над комплексными числами в алгебраической форме.
- Выучите правила выполнения арифметических операций над комплексными числами в алгебраической форме: сложения и вычитания, умножения, возведения в степень, деления.
- Разберите примеры решения типовых задач 1-4 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [3] глава II (§1-3); [4], глава IV (§4); [5], глава 10.

3. Для подготовки к третьему вопросу:

- Выясните, какую геометрическую интерпретацию имеют комплексные числа.
- Запомните формулы для нахождения модуля и аргумента комплексных чисел.
- Разберите пример решения типовой задачи 5 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [3] глава II (§1-3); [4], глава IV (§4); [5], глава 10.

На занятии по указанию преподавателя

1. Будьте готовы по вопросам, выносимым на обсуждение, сформулировать основные определения и записать соответствующие формулы.

2. Решите на доске и в тетради задания для развития и контроля владения компетенциями из данного пособия.

3. Получите **ИДЗ №2**. Дома выполните его в отдельной тетради и на следующем практическом занятии сдайте на проверку преподавателю. Номер варианта соответствует Вашему порядковому номеру в списке группы.

Литература

а) основная

1. Глухов М.М. Алгебра и аналитическая геометрия. М.: Гелиос АРВ, 2012.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: МЦНМО, 2009.
3. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения: учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.

б) дополнительная

4. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра: Учебник. В 2-х т. Т.1. М.: Гелиос АРВ, 2007.
5. Мальцев И.А. Линейная алгебра. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2008.

Интернет ресурсы

<http://eek.diary.ru/p57704941.htm> - веб-сайт содержит большое количество книг по алгебре и геометрии, в том числе из списка рекомендованной, доступных для бесплатного скачивания.

Примеры решения типовых задач

1. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел $z_1 = 2 + i$ и $z_2 = 3 - 2i$

Решение:

1) $z_1 + z_2 = 2 + i + 3 - 2i = 5 - i$;

2) $z_1 - z_2 = 2 + i - 3 + 2i = -1 + 3i$;

3) $z_1 \cdot z_2 = (2 + i)(3 - 2i) = 6 - 4i + 3i - 2i^2 = 8 - i$;

4) для того, чтобы найти частное умножим числитель и знаменатель на число комплексно-сопряженное

знаменателю: $\frac{2 + i}{3 - 2i} = \frac{(2 + i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} =$

$$= \frac{6 + 4i + 3i + 2i^2}{9 + 4} = \frac{4 + 7i}{13} = \frac{4}{13} + \frac{7}{13}i.$$

2. Записать комплексное число $z = \frac{5 + i}{(1 + i)(2 - 3i)}$ в алгебраической форме.

Решение:

$$z = \frac{5 + i}{(1 + i)(2 - 3i)} = \frac{5 + i}{2 + 2i - 3i + 3} = \frac{5 + i}{5 - i} = \frac{(5 + i)(5 + i)}{(5 - i)(5 + i)} = \frac{24 + 10i}{26} = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i.$$

3. Решить уравнения:

1) $x^2 + 6x + 13 = 0$;

2) $z^2 - (4 - 6i)z + (10 - 20i) = 0$.

Решение:

1) Найдем дискриминант $a = 1$, $b = 6$, $c = 13$: $D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 13 = -16 < 0 \Rightarrow$ действительных корней нет.

Найдем мнимые корни: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = \begin{bmatrix} -3 + 4i \\ -3 - 4i \end{bmatrix}$.

2) Найдем дискриминант $a = 1$, $b = -(4 - 6i) = 6i - 4$, $c = 10 - 20i$:

$$D = b^2 - 4ac = (6i - 4)^2 - 4 \cdot (10 - 20i) = 36i^2 - 48i + 16 - 40 + 80i = -36 - 24 + 32i = -60 + 32i.$$

Найдем мнимые корни:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 - 6i \pm \sqrt{-60 + 32i}}{2} = \frac{4 - 6i \pm 2\sqrt{-15 + 8i}}{2} = \begin{bmatrix} 2 - 3i + \sqrt{-15 + 8i} \\ 2 - 3i - \sqrt{-15 + 8i} \end{bmatrix}.$$

4. Найти действительные значения x и y такие, удовлетворяющие уравнению $(1 + i) \cdot x + (1 - i) \cdot y = 3 - i$.

Решение:

Раскроем скобки: $x + ix + y - iy = 3 - i$. Выполним группировку: $(x + y) + (x - y)i = 3 - i$.

Два комплексных числа равны, когда равны их действительная и мнимая части. Приравняем соответствующие коэффициенты в левой и правой частях и решим систему из двух уравнений: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ 3 - y - y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x = 3 - y \\ -2y = -4 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

5. Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = 1 + i$.

Решение:

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется величина $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Найдем модуль: $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Аргумент φ комплексного числа $z = a + bi$ может быть найден из уравнения $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$.

Найдем аргумент: $\varphi = \arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$.

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. При $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = 2 - i$ найти: 1) $z_1 + z_2$; 2) $z_1 - z_2$; 3) $z_1 \cdot z_2$; 4) $\frac{z_1}{z_2}$; 5) $\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_1$.
2. Найти $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если $z = \frac{1 + 2i}{3 - i} + (1 - i)^2$.
3. Вычислить: 1) $\frac{(1 + i)^9}{(1 - i)^7}$; 2) $f(i)$, если $f(x) = x^{117} + 5x^{96} + x^9 - 3$.
4. Решить уравнения:
 - 1) $x^2 + 36 = 0$; 2) $x^2 - 4x + 8 = 0$; 3) $z^2 + (1 - 2i)z - 2i = 0$.
5. Найти действительные значения x и y такие, что $(2x + 3yi)(2x - 3yi) + xi = 97 + 2i$.
6. Построить на комплексной плоскости векторы, соответствующие комплексным числам z .
Найти $|z|$ и $\arg z$: 1) $z = -5$; 2) $z = 2 + 3i$; 3) $z = -1 - i$; 4) $z = 3 - i$.
7. Найти модуль и аргумент чисел: 1) $z = -1 + i\sqrt{3}$; 2) $z = -2 - i$.

ИДЗ № 2 по теме «Алгебраическая форма комплексного числа»

Для чисел z_1 и z_2 : 1) найти сумму, произведение и частное чисел; 2) построить точки, изображающие эти числа; 3) найти модули и аргументы.			
Вариант 1.	$z_1 = 2 - i, z_2 = -3 + 2i$	Вариант 16.	$z_1 = 2 - i, z_2 = -3 + 2i$
Вариант 2.	$z_1 = 5 - i, z_2 = 4i$	Вариант 17.	$z_1 = -4 + i, z_2 = 3 - 4i$
Вариант 3.	$z_1 = 6 - 2i, z_2 = -5 + 2i$	Вариант 18.	$z_1 = -2i, z_2 = -2 - i$
Вариант 4.	$z_1 = 4 - 3i, z_2 = -6 + 4i$	Вариант 19.	$z_1 = 9 - 2i, z_2 = -5 + 3i$
Вариант 5.	$z_1 = 7 + 2i, z_2 = 2i$	Вариант 20.	$z_1 = 1 - 2i, z_2 = 5 + 7i$
Вариант 6.	$z_1 = 8 - 3i, z_2 = -5 - 4i$	Вариант 21.	$z_1 = -5i, z_2 = -7 + 3i$
Вариант 7.	$z_1 = 1 - 7i, z_2 = -3 + 2i$	Вариант 22.	$z_1 = 5 - 2i, z_2 = -6 + i$
Вариант 8.	$z_1 = 7 + 2i, z_2 = -3 + 5i$	Вариант 23.	$z_1 = 3 - i, z_2 = -6 + i$
Вариант 9.	$z_1 = 6i, z_2 = -3 + 2i$	Вариант 24.	$z_1 = 7 - 2i, z_2 = 2i$
Вариант 10.	$z_1 = 9 + 4i, z_2 = -7 - 2i$	Вариант 25.	$z_1 = 5 - i, z_2 = -8 + 2i$
Вариант 11.	$z_1 = 3 - 7i, z_2 = -2 + 2i$	Вариант 26.	$z_1 = 3 - 5i, z_2 = -9 + 2i$
Вариант 12.	$z_1 = 7 - 3i, z_2 = -6i$	Вариант 27.	$z_1 = -8i, z_2 = -6 + 3i$
Вариант 13.	$z_1 = 5 - 2i, z_2 = -7 + i$	Вариант 28.	$z_1 = 7 - 3i, z_2 = -5 + 4i$
Вариант 14.	$z_1 = 3 - 5i, z_2 = -7i$	Вариант 29.	$z_1 = 7 - i, z_2 = -6 + 2i$
Вариант 15.	$z_1 = 7 - 2i, z_2 = -9 + 2i$	Вариант 30.	$z_1 = 3 - 5i, z_2 = -2 + 3i$

Практическое занятие №3

Тема занятия «Тригонометрическая форма комплексного числа»

Цель: изучить действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Организационная форма занятия: практикум с применением интерактивной игры «карусель».

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Тригонометрическая форма комплексного числа.
2. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
3. Формула Муавра.
4. Извлечение корней из комплексных чисел.

Методические рекомендации

Подготовка к занятию дома

1. Для подготовки к первому вопросу:

- Вспомните определения модуля и аргумента комплексного числа.
- Выучите определение комплексного числа, заданного в тригонометрической форме.
- Разберите пример решения типовой задачи 1 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава VIII (§3); [2], глава 4.

2. Для подготовки ко второму вопросу:

- Выучите правила нахождения суммы, разности, произведения и частного двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме.
- Разберите примеры решения типовых задач 2 и 3 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [3] глава II (§1-3); [4], глава IV (§4); [5], глава 10.

3. Для подготовки к третьему вопросу:

- Запомните формулу Муавра для возведения комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, в целую положительную степень.
- Разберите пример решения типовой задачи 4 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [3] глава II (§1-3); [4], глава IV (§4); [5], глава 10.

4. Для подготовки к четвертому вопросу:

- Запомните последовательность действий при извлечении корней n -ой степени из комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме.

- Разберите пример решения типовой задачи 5 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [3] глава II (§1-3); [4], глава IV (§4); [5], глава 10.

5. Подготовка к интерактивной игре «Карусель»:

- Прочитайте и запомните алгоритм игры.

Алгоритм интерактивной обучающей игры «Карусель»

1). Преподаватель объявляет о начале интерактивной обучающей игры «Карусель». В зависимости от темы занятия игра может занимать от 20 до 60 минут. Способ расположения студентов в аудитории значения не имеет.

2). Все учащиеся разбиваются на группы по 4-6 человек в зависимости от общего количества учащихся. Группы организуются либо по рекомендации преподавателя, либо в зависимости от желания учащихся.

3). Всем членам группы присваиваются номера (например, от 1 до 6).

4). Во время игры задачи решаются на исходном и зачетном рубежах.

5). На исходном рубеже преподаватель выдает однотипные задания для каждой группы, задание общее для членов одной группы.

6). По сигналу преподавателя группы приступают к решению задачи на исходном рубеже и предъявляют ему решение или ответ.

7). Если решение верное, то игрок №1 переходит на зачётный рубеж и получает там отдельную задачу, а члены команды, оставшиеся на исходном рубеже, получают новую задачу (общую для команды).

8). Если решение верное, то игрок №2 переходит на зачётный рубеж, присоединяется к игроку №1.

9). Игроки №1 и №2 получают задачу на зачетном рубеже (одну на двоих), а члены команды, оставшиеся на исходном рубеже, получают новую задачу (общую для команды).

10). Если на зачетном рубеже задача решена не правильно, то игрок с наименьшим порядковым номером возвращается на исходный рубеж.

11). Игра для команды заканчивается, если:

- кончилось игровое время;

- кончились задачи на зачетном рубеже;

- кончились задачи на исходном рубеже, а на зачётном рубеже нет ни одного игрока.

12). Игра оканчивается, если она закончилась для всех команд. Побеждает команда, набравшая больше баллов.

13). Члены победившей команды освобождаются от выполнения индивидуального домашнего задания, соответствующего теме игры.

14). Члены проигравшей команды получают у преподавателя ИДЗ №3.

- Просмотрите решения практических заданий для развития и контроля владения компетенциями, соответствующие занятиям №2 и №3, так как из них составлены задания для игры.

- Ознакомьтесь с правилом оценивания игры.

Правило оценивания игры «Карусель»

На исходном рубеже за каждую верно решённую задачу ставится 1 балл, за первый верный ответ на зачёте команда получает 3 балла, за второй верный ответ 4 балла, и т.д. Если же очередная задача решена неверно, то цена следующей задачи зависит от цены нерешённой следующим образом. Если цена неверно решённой задачи была 6 баллов или больше, то следующая задача стоит 5 баллов. Если неверно решённая задача стоила 5 баллов, то следующая задача стоит 4 балла, если же неверно решённая задача стоила 3 или 4 балла, то следующая задача стоит 3 балла.

Общее количество баллов заработанных группой зависит от конкретной игры. В начале игры преподаватель озвучивает общее количество возможных баллов, интервалов колебания баллов, для каждого интервала эквивалент из пятибалльной системы. Поэтому после окончания игры, в зависимости от результатов, преподаватель может либо просто зачесть тему игры для победившей команды, либо оценить их работу по пятибалльной системе. Оценки по пятибалльной системе и соответствующие им проценты от общего количества баллов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Оценки и проценты от возможного количества баллов

Оценка «отлично»	80 – 100 %
Оценка «хорошо»	60 – 79%
Оценка «удовлетворительно»	40 – 59%
Оценка «неудовлетворительно»	39% < 0

На занятии по указанию преподавателя

1. Будьте готовы по вопросам, выносимым на обсуждение, сформулировать основные определения и записать соответствующие формулы.
2. Решите на доске и в тетради задания для развития и контроля владения компетенциями из данного пособия.
3. Выполните последовательность шагов в соответствии с алгоритмом интерактивной игры «карусель».
4. С учетом результатов игры, получите **ИДЗ №3**. Дома выполните его в отдельной тетради и на следующем практическом занятии сдайте на проверку преподавателю. Номер варианта соответствует Вашему порядковому номеру в списке группы.

Литература

а) основная

1. Глухов М.М. Алгебра и аналитическая геометрия. М.: Гелиос АРВ, 2012.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.П. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: МЦНМО, 2009.
3. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения: учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.

б) дополнительная

4. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра: Учебник. В 2-х т. Т.1. М.: Гелиос АРВ, 2007.
5. Мальцев И.А. Линейная алгебра. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2008.

Интернет ресурсы

<http://eek.diary.ru/p57704941.htm> - веб-сайт содержит большое количество книг по алгебре и геометрии, в том числе из списка рекомендованной, доступных для бесплатного скачивания.

Примеры решения типовых задач

1. Записать следующие комплексные числа в тригонометрической форме: 1) $z = 2$; 2) $z = \frac{3}{\sqrt{2}} + i \frac{3}{\sqrt{2}}$; 3) $z = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}$; 4) $z = 1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

Решение:

- 1) Представим число в виде: $z = 2 + 0 \cdot i$. То есть $a = 2$, $b = 0$. Отсюда имеем $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$ - модуль, $\varphi = \arctg \frac{b}{a} = \arctg \frac{0}{2} = \arctg 0 = 0$.

Запишем тригонометрическую форму: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z = 2(\cos 0 + i \sin 0)$.

- 2) Если $a = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{3}{\sqrt{2}}$, то $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = 3$ - модуль, $\varphi = \arctg \frac{b}{a} = \arctg \left(\frac{3}{\sqrt{2}} : \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

Запишем тригонометрическую форму: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$.

- 3) Между действительной и мнимой частью стоит знак минус, значит это не тригонометрическая форма. Выполним следующие преобразования с помощью единичной окружности:

$z = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}$, $z = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $z = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$ - тригонометрическая форма при модуле $r = 1$.

- 4) Число не записано в тригонометрической форме, лишняя единица. Выполним преобразования с помощью формул тригонометрии. Так как $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, то $1 + \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{6}$. Учитывая что $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, получим $\sin \frac{\pi}{3} = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6}$.

Подставим в исходное выражение:

$z = 2 \cos^2 \frac{\pi}{6} + i 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cos \frac{\pi}{6} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$. Следовательно, $z = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ - тригонометрическая форма.

2. Найти произведение двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме:

$$z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ и } z_2 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Решение: Для того чтобы найти произведение двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме нужно модули их перемножить, а аргументы сложить. Применим это правило:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 3\sqrt{3} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = 3\sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

3. Найти частное от деления комплексного числа $z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ на комплексное число $z_2 = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$, записанных в тригонометрической форме.

Решение:

Для того чтобы найти частное от деления двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме нужно модули их разделить, а аргументы вычесть. Применим это правило:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) : \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3}{\sqrt{3}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) \right) = \\ &= \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

4. Найти z^6 , если $z = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

Решение:

Для того чтобы комплексное число, записанное в тригонометрической форме, возвести в целую положительную степень нужно модуль возвести в эту степень, а аргумент умножить на эту степень.

Применим правило: $z^6 = 3^6 \left(\cos \left(6 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(6 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right) = 3^6 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$.

5. Найти $\sqrt[4]{z}$, если $z = 16 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$.

Решение: Запишем сначала формулу в общем виде:

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4} \right), \text{ где } k \in [0; 4), k - \text{целое. Будем теперь присваивать}$$

k возможные значения, и находить соответствующие корни.

$k = 0$

$$z_1 = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 0}{4} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 0}{4} \right) = 2 \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3}}{4} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3}}{4} \right) =$$

$$= 2 \left(\cos \frac{2\pi}{12} + i \sin \frac{2\pi}{12} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) - \text{первый корень.}$$

$k=1$

$$z_2 = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 1}{4} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 1}{4} \right) = 2 \left(\cos \frac{\frac{8\pi}{3}}{4} + i \sin \frac{\frac{8\pi}{3}}{4} \right) =$$

$$= 2 \left(\cos \frac{8\pi}{12} + i \sin \frac{8\pi}{12} \right) = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) - \text{второй корень.}$$

$k=2$

$$z_3 = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 2}{4} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 2}{4} \right) =$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 4\pi}{4} \right) = 2 \left(\cos \frac{\frac{14\pi}{3}}{4} + i \sin \frac{\frac{14\pi}{3}}{4} \right) =$$

$$= 2 \left(\cos \frac{14\pi}{12} + i \sin \frac{14\pi}{12} \right) = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) - \text{третий корень.}$$

$k=3$

$$z_4 = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 3}{4} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi \cdot 3}{4} \right) =$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{4} \right) = 2 \left(\cos \frac{\frac{20\pi}{3}}{4} + i \sin \frac{\frac{20\pi}{3}}{4} \right) =$$

$$= 2 \left(\cos \frac{20\pi}{12} + i \sin \frac{20\pi}{12} \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) - \text{четвертый корень.}$$

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Изобразить на комплексной плоскости множества точек, удовлетворяющих следующим усло-

$$\text{виям: 1) } |z| = 2; 2) |z - 1 + i| > 1; 3) |z + i| = |z - 1|; \quad 4) \arg z = \frac{\pi}{3}; 5) \begin{cases} |z - 4i| \leq 5, \\ 0 \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

2. Представить в тригонометрической форме комплексные числа: 1) $z = 200$; 2) $z = -1$; 3) $z = 5i$; 4) $z = -i$; 5) $z = -1 + i\sqrt{3}$.

3. Вычислить в тригонометрической форме: 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{100}$; 2) $\frac{(1+i)^8(\sqrt{3}+i)^{12}}{(1-i)^4}$.

4. Найти все значения корня $\sqrt[3]{-1+i}$.

ИДЗ № 3 по теме «Тригонометрическая форма комплексного числа»

Найти результат выполнения арифметической операции, предварительно представив все комплексные числа в тригонометрической форме.		
Вариант 1. $z_1 \cdot z_2 = (2 + 2i)^{20} \cdot (1 + i\sqrt{3})^{10}$	Вариант 2. $z_1 \cdot z_2 = (2\sqrt{3} - 2i)^5 \cdot (1 - i\sqrt{3})^8$	Вариант 3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 - 2i)^6}{(\sqrt{3} - i)^7}$
Вариант 4. $z_1 \cdot z_2 = (1 - i\sqrt{3})^5 \cdot (-1 + i\sqrt{3})^8$	Вариант 5. $z_1 \cdot z_2 = (-2 + 2i)^{10} \cdot (1 - i\sqrt{3})^5$	Вариант 6. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-4 - 4i)^7}{(2 + i2\sqrt{3})^6}$
Вариант 7. $z_1 \cdot z_2 = (2\sqrt{3} + 2i)^5 \cdot (1 + i\sqrt{3})^7$	Вариант 8. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 + 2i)^8}{(\sqrt{3} - i)^7}$	Вариант 9. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-4\sqrt{3} + 4i)^5}{(-2\sqrt{3} - 2i)^4}$
Вариант 10. $z_1 \cdot z_2 = (-1 + i\sqrt{3})^5 \cdot (1 - i\sqrt{3})^8$	Вариант 11. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 - i2\sqrt{3})^4}{(-4\sqrt{3} - 4i)^8}$	Вариант 12. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-2 - 2i)^6}{(-\sqrt{12} + 2i)^{11}}$
Вариант 13. $z_1 \cdot z_2 = (2 - 2i)^7 \cdot (-2 + i2\sqrt{3})^8$	Вариант 14. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-3 - i3\sqrt{3})^7}{(2 - 2i)^6}$	Вариант 15. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(2 + 2i)^6}{(-\sqrt{12} - 2i)^{11}}$
Вариант 16. $z_1 \cdot z_2 = (-3\sqrt{3} - 3i)^6 \cdot (1 - i\sqrt{3})^4$	Вариант 17. $z_1 \cdot z_2 = (-2 - i2\sqrt{3})^5 \cdot (1 + i\sqrt{3})^8$	Вариант 18. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-2 + i2\sqrt{3})^4}{(4\sqrt{3} - 4i)^8}$
Вариант 19. $z_1 \cdot z_2 = (3 - 3i)^7 \cdot (-2 + i2\sqrt{3})^6$	Вариант 20. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 - i3\sqrt{3})^8}{(-2 - 2i)^6}$	Вариант 21. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 - 3i)^6}{(\sqrt{12} - 2i)^{11}}$
Вариант 22. $z_1 \cdot z_2 = (-3\sqrt{3} + 3i)^7 \cdot (-2 - 2i)^{15}$	Вариант 23. $z_1 \cdot z_2 = (-2 - 2i)^6 \cdot (-\sqrt{3} - i)^7$	Вариант 24. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-3 - i3\sqrt{3})^4}{(\sqrt{3} + i)^8}$
Вариант 25. $z_1 \cdot z_2 = (-3 - 3i)^7 \cdot (-2 - i2\sqrt{3})^6$	Вариант 26. $z_1 \cdot z_2 = (3\sqrt{3} - 3i)^7 \cdot (2 - 2i)^{15}$	Вариант 27. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-4 - i4\sqrt{3})^{11}}{(-2 - 2i)^9}$
Вариант 28. $z_1 \cdot z_2 = (5\sqrt{3} - 2i)^7 \cdot (3 - 5i)^{15}$	Вариант 29. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(5 - i2\sqrt{3})^{11}}{(-2 + 4i)^9}$	Вариант 30. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-2 - i\sqrt{3})^4}{(\sqrt{3} + 2i)^8}$

Практическое занятие №4

Тема занятия «Матрицы»

Цель: изучить основные операции над матрицами.

Организационная форма занятия: практикум.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Понятие матрицы. Виды матриц.
2. Линейные операции над матрицами.
3. Произведение матриц.
4. Транспонирование матриц.

Методические рекомендации

Подготовка к занятию дома

1. Для подготовки к первому вопросу:

- Выучите следующие определения: матрицы, квадратной матрицы, главной и побочной диагоналей, диагональной матрицы, нулевой матрицы, единичной матрицы, равных матриц.
- Запомните: как записывается матрица в полном и сокращенном виде, как обозначается единичная и нулевая матрицы.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава VI (§1); [2], глава 2; [3], глава 1 (§1); [5], глава IV (§1); [6], глава V (§1); [8], глава 1 (§1) из раздела I; [9], глава I.

2. Для подготовки ко второму вопросу:

- Выучите правила выполнения следующих линейных операций над матрицами: умножения матрицы на число, сложения и вычитания матриц.
- Запомните основные свойства линейных операций над матрицами.
- Разберите примеры решения типовых задач 1 и 2 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава VI (§2); [3], глава 1 (§2); [4], глава 1 (§2); [5], глава IV (§2); [10], глава 3 (пункт 3.1); [11], глава 2 (пункты 2.2-2.6).

3. Для подготовки к третьему вопросу:

- Выучите правило умножения двух матриц.
- Выясните, при каком условии можно перемножать две матрицы.
- Запомните основные свойства операции умножения матриц.
- Разберите пример решения типовой задачи 3 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава VI (§2); [3], глава 1 (§2); [4], глава 1 (§2); [5], глава IV (§2); [10], глава 3 (пункт 3.1); [11], глава 2 (пункты 2.2-2.6).

4. Для подготовки к четвертому вопросу:

- Выучите правило транспонирования матриц.
- Разберите пример решения типовой задачи 4 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава VI (§2); [3], глава 1 (§2); [4], глава 1 (§2); [5], глава IV (§2); [10], глава 3 (пункт 3.1); [11], глава 2 (пункты 2.2-2.6).

На занятии по указанию преподавателя

1. Будьте готовы по вопросам, выносимым на обсуждение, сформулировать основные определения и свойства операций над матрицами, записать соответствующие формулы.

2. Решите на доске и в тетради задания для развития и контроля владения компетенциями из данного пособия.

3. Получите **ИДЗ №4**. Дома выполните его в отдельной тетради и на следующем практическом занятии сдайте на проверку преподавателю. Номер варианта соответствует Вашему порядковому номеру в списке группы.

Литература

а) основная

1. Глухов М.М. Алгебра и аналитическая геометрия. М.: Гелиос АРВ, 2012.
2. Ивлева А.М., Пинус А.Г., Чехонадских А.В. Основы алгебры и аналитической геометрии: Учебник. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
4. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: МЦНМО, 2009.
5. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения: учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.

б) дополнительная

6. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
7. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.И., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учебное пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.

8. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
9. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов. СПб.: Изд-во «Лань», 2008.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Изд-во «Лань», 2007.
11. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебное пособие. М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2010.

Интернет ресурсы

<http://eek.diary.ru/p57704941.htm> - веб-сайт содержит большое количество книг по алгебре и геометрии, в том числе из списка рекомендованной, доступных для бесплатного скачивания.

Примеры решения типовых задач

1. Найти матрицу $C = \lambda \cdot A$, если $\lambda = 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение: Применим правило умножения матрицы на число:

$$C = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 9 & 12 & 0 \\ 15 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

2. Найти матрицу $C = A + B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение: Применим правило сложения двух матриц одного порядка:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{3 \times 2} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1+0 & -2+3 \\ 3+4 & 4+1 \\ 0+7 & 5+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 3}.$$

3. Найти матрицу $C = A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ и $\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение: Так как количество столбцов первой матрицы равно количеству строк второй матрицы то операция допустима. Применим правило сложения двух матриц одного порядка:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 5; & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 \\ 5 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 5; & 5 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -13 \end{pmatrix}.$$

4. Найти значение многочлена $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ от матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение: Вместо x подставляем в многочлен $f(x)$ матрицу A , вместо числа 3 используем матрицу $3E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A (это обеспечивает возможность сложения матриц). Получим $f(A) = 2A^2 - 5A + 3E$.

Тогда

$$1. 2A^2 = 2 \cdot A \cdot A = 2 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4+4 & 8+0 \\ 2+0 & 4+0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$2. 5A = 5 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3. 3E = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Окончательно находим $f(A) = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}.$

5. Найти матрицу A^T , если $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$

Решение: Применим правило транспонирования матриц: $A^T = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

Практические задания для развития и контроля владения компетенциями

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1/2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$

Найти: 1) $3A + 2B$; 2) $A - 4B$; 3) $5A + C^T$; 4) $3A^T - 2B^T + 7C$; 5) числа X и Y такие, что все элементы матрицы $D = XA + YB$ равны нулю.

2. Найти произведения матриц: 1) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; 3)

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $(1 \ 2 \ -3) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$; 6)

$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 8) $(1 \ -1 \ 3) \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; 9)

$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

3. Найти те из произведений матриц AB и BA , которые существуют:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; 4)

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$

4. Найти матрицу $D = (AB)^T - C^2$, при $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$

5. Найти матрицу A^n , если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ и $n = 3$.

6. Найти значение многочлена $f(x)$ от матрицы A :

$$1) f(x) = 3x^2 - 2x + 5, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}; \quad 2) f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5, A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ИДЗ № 4 по теме «Матрицы»

Для матриц A,B,C найти значение выражения $A = D = 5A^T - B \cdot C$.				
Вариант 1 $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	Вариант 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -1 \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$	Вариант 3 $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$	Вариант 4 $A = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
Вариант 6 $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 10 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 8 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 7 $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 8 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$	Вариант 8 $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 5 & -4 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	Вариант 9 $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	Вариант 10 $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 7 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
Вариант 11 $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	Вариант 12 $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 8 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	Вариант 13 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -1 \\ 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	Вариант 14 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 15 $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
Вариант 16 $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	Вариант 17 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	Вариант 18 $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -1 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -8 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 19 $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 7 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	Вариант 20 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
Вариант 21 $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 22 $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	Вариант 23 $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	Вариант 24 $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 9 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	Вариант 25 $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 26	Вариант 27	Вариант 28	Вариант 29	Вариант 30
$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & 8 & 3 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

Практическое занятие №5

Тема занятия «Определители»

Цель: изучить методы вычисления определителей различных порядков.

Организационная форма занятия: практикум.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Понятие об определителе n -го порядка.
2. Определители 2-го и 3-го порядков.
3. Свойства определителей.
4. Миноры и алгебраические дополнения.
5. Разложение определителя по элементам строки или столбца.

Методические рекомендации

Подготовка к занятию дома

1. Для подготовки к первому вопросу:

- Выучите определение перестановки конечного множества.
 - Запомните формулу для подсчета числа перестановок.
 - Выясните, что понимается под определителем матрицы и, для каких матриц можно найти определитель.

- Запомните, как обозначается и как записывается определитель матрицы $n - \tilde{a}i$ порядка.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава VI (§1); [2], глава 1 (§1); [3], глава 1 (§3); [4], глава IV (§2); [5], глава V (§2); [9], глава I; [10], глава 3 (пункт 3.1).

2. Для подготовки ко второму вопросу:

- Выучите правила нахождения определителей второго и третьего порядков.
 - Разберите примеры решения типовых задач 1 и 2 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава VI (§3); [2], глава 1 (§2); [3], глава 1 (§3,4); [4], глава IV (§5); [5], глава V (§3); [11], глава 2 (пункты 2.2-2.6).

3. Для подготовки к третьему вопросу:

- Прочитайте и запомните свойства определителей.
 - Разберите пример решения типовой задачи 3 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава VI (§3); [3], глава 1 (§5,6); [4], глава IV (§5); [9], глава I; [10], глава 3 (пункт 3.1), глава 5.

4. Для подготовки к четвертому вопросу:

- Выучите определения минора и алгебраического дополнения.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [3], глава 1 (§6); [4], глава IV (§5); [5], глава V (§3); [9], глава III (§12,13); [10], глава 5; [11], глава 3 (пункты 3.1-3.4).

5. Для подготовки к пятому вопросу:

- Запомните формулировку теоремы Лапласа.
 - Выясните, как упростить применение теоремы Лапласа.
 - Разберите пример решения типовой задачи 4 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [3], глава 3; [4], глава IV (§5); [10], глава 5; [11], глава 3 (пункты 3.1-3.4).

На занятии по указанию преподавателя

1. Будьте готовы по вопросам, выносимым на обсуждение, сформулировать основные определения, свойства, теоремы и записать соответствующие формулы.

2. Решите на доске и в тетради задания для развития и контроля владения компетенциями из данного пособия.

3. Получите **ИДЗ №5**. Дома выполните его в отдельной тетради и на следующем практическом занятии сдайте на проверку преподавателю. Номер варианта соответствует Вашему порядковому номеру в списке группы.

Литература

а) основная

1. Глухов М.М. Алгебра и аналитическая геометрия. М.: Гелиос АРВ, 2012.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: МЦНМО, 2009.
4. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения: учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.

б) дополнительная

5. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
6. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.И., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учебное пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
7. Ивлева А.М., Пинус А.Г., Чехонадских А.В. Основы алгебры и аналитической геометрии: Учебник. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007.
8. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
9. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов. СПб.: Изд-во «Лань», 2008.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Изд-во «Лань», 2007.
11. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебное пособие. М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2010.

Интернет ресурсы

<http://eek.diary.ru/p57704941.htm> - веб-сайт содержит большое количество книг по алгебре и геометрии, в том числе из списка рекомендованной, доступных для бесплатного скачивания.

Примеры решения типовых задач

1. Вычислить определители 2-го порядка: 1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$.

Решение: 1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) = 6 + 4 = 10$;

2) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^2 - ab \cdot ab = (ab)^2 - (ab)^2 = 0$.

2. Вычислить определитель 3-го порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ по правилу треугольников.

Решение: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5 \cdot 3 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 5 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = -15$.

3. Используя свойства определителей, доказать справедливость равенства

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1-x & 2 & 4 \\ 1+x & 1-x & 3 & 9 \\ 1+x & 1-x & 4 & 16 \\ 1+x & 1-x & 5 & 25 \end{vmatrix} = 0.$$

Решение: Преобразуем левую часть данного равенства, используя свойства определителей:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1-x & 2 & 4 \\ 1+x & 1-x & 3 & 9 \\ 1+x & 1-x & 4 & 16 \\ 1+x & 1-x & 5 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-x & 2 & 4 \\ 1 & 1-x & 3 & 9 \\ 1 & 1-x & 4 & 16 \\ 1 & 1-x & 5 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1-x & 2 & 4 \\ x & 1-x & 3 & 9 \\ x & 1-x & 4 & 16 \\ x & 1-x & 5 & 25 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & 5 & 25 \end{vmatrix}}_{O(св.3)} - \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 4 \\ 1 & x & 3 & 9 \\ 1 & x & 4 & 16 \\ 1 & x & 5 & 25 \end{vmatrix}}_{O(св.3)} + \underbrace{\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ x & 1 & 3 & 9 \\ x & 1 & 4 & 16 \\ x & 1 & 5 & 25 \end{vmatrix}}_{O(св.3)} - \underbrace{\begin{vmatrix} x & x & 2 & 4 \\ x & x & 3 & 9 \\ x & x & 4 & 16 \\ x & x & 5 & 25 \end{vmatrix}}_{O(св.3)} = \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 4 \\ 1 & x & 3 & 9 \\ 1 & x & 4 & 16 \\ 1 & x & 5 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ x & 1 & 3 & 9 \\ x & 1 & 4 & 16 \\ x & 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ x & 1 & 3 & 9 \\ x & 1 & 4 & 16 \\ x & 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ x & 1 & 3 & 9 \\ x & 1 & 4 & 16 \\ x & 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} = \\
&= 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ x & 1 & 3 & 9 \\ x & 1 & 4 & 16 \\ x & 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 16 \\ 0 & 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

Следовательно, данное равенство справедливо.

4. Вычислить определитель 4-го порядка $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & -2 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$.

Решение: Используя свойства, преобразуем определитель Δ , не меняя его значение, таким образом, чтобы все элементы первого столбца, кроме $a_{31} = 1$, стали равны нулю. С этой целью умножим третью строку на 2 и прибавим к первой строке, а также умножим третью строку на (-2) и прибавим ко

второй и четвертой строкам. Получим:

$$\begin{vmatrix} -2 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & -2 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -17 & 7 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 5 \\ 1 & -6 & 4 & -2 \\ 0 & 30 & -15 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -17 & 7 & -1 \\ 7 & 1 & 5 \\ 30 & -15 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -17 & 7 & -1 \\ 7 & 1 & 5 \\ 30 & -15 & -6 \end{vmatrix} : 3 = 3 \cdot \begin{vmatrix} -17 & 7 & -1 \\ 7 & 1 & 5 \\ 10 & -5 & -2 \end{vmatrix} = \\
&= 3 \cdot \begin{vmatrix} -17 & 7 & -1 \\ -78 & 36 & 0 \\ 44 & -19 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -78 & 36 \\ 44 & -19 \end{vmatrix} = -3 \cdot (1482 - 1584) = 306.
\end{aligned}$$

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Вычислить определители 2-го порядка:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x & x+1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{vmatrix}$.

2. Вычислить определители 3-го порядка двумя способами: по правилу треугольников и путем разложения по строке или столбцу.

1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 10 & 3 & 16 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -6 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & -a \\ a & a & x \end{vmatrix}$.

3. Решить уравнение: 1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & x & -1 \\ x & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

4. Разлагая по третьему столбцу, вычислить определитель
$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & x & 8 \\ -4 & -1 & y & -5 \\ 8 & -1 & z & 12 \\ 4 & -1 & t & 7 \end{vmatrix}.$$

5. Разлагая по второй строке, вычислить определитель
$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -4 \end{vmatrix}.$$

6. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ -5 & -6 & -5 & -4 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$

7. Используя только свойства определителей, доказать справедливость равенств: 1)

$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b) \cdot (b-c) \cdot (c-a)$; 2) $\begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$

ИДЗ № 5 по теме «Матрицы»

Найти определитель матрицы. Сначала два раза применить теорему Лапласа и свойства определителей, в конце правило треугольников.			
Вариант 1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$	Вариант 2. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 10 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	Вариант 3. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	Вариант 4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
Вариант 5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 6. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 5 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	Вариант 7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 8. $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 10 & -7 & -2 \\ -3 & 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 7 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
Вариант 9. $\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	Вариант 10. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 6 & 13 & 12 \\ 2 & -2 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$	Вариант 11. $\begin{pmatrix} 3 & 12 & -6 & -1 & 2 \\ -3 & -10 & 6 & 1 & 1 \\ -2 & -5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & -10 & 10 & -9 & 15 \\ 9 & -7 & -4 & -4 & 9 \end{pmatrix}$	Вариант 12. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 3 & 10 \\ 6 & 6 & 13 & 3 & 13 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
Вариант 13. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$	Вариант 14. $\begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 & 3 & 10 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	Вариант 15. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	Вариант 16. $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 & 11 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 13 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$
Вариант 17. $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	Вариант 18. $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & 2 & -1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	Вариант 19. $\begin{pmatrix} -2 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	Вариант 20. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
Вариант 21. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	Вариант 22. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 11 & 2 & 11 & 3 \end{pmatrix}$	Вариант 23. $\begin{pmatrix} 2 & 10 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & -9 & -2 \\ 3 & -13 & -2 & 8 & -7 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ -4 & 4 & 7 & 11 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 24. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 8 & 2 & 3 & 3 & 7 \\ 10 & 2 & 5 & 3 & 11 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
Вариант 25. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 3 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 8 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	Вариант 26. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 & 2 \\ -1 & -7 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -8 & 12 & 7 & 4 \\ 7 & 9 & 17 & 27 & -6 \\ 8 & 3 & 6 & 2 & 37 \end{pmatrix}$	Вариант 27. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$	Вариант 28. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 7 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Вариант 29. $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ -2 & 7 & 3 & 5 & -1 \\ -4 & -2 & 5 & -2 & -4 \\ -6 & 4 & 5 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	Вариант 30. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 7 & 2 & -5 \\ -2 & 7 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$
---	--

Практическое занятие №6

Тема занятия «Обратная матрица и ранг матрицы»

Цель: изучить основные методы нахождения обратной матрицы и вычисления ранга матрицы.

Организационная форма занятия: «практикум-тренинг».

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Обратная матрица.
2. Методы нахождения обратной матрицы.
3. Ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы методом окаймления миноров.
4. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

Методические рекомендации

Подготовка к занятию дома

1. Для подготовки к первому вопросу:

- Выучите определение обратной матрицы.
- Выясните, при каком условии обратная матрица существует.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава VI (§4); [2], глава 1 (§2); [3]; [7], глава 2 (§3); [10], глава 3 (пункт 3.5).

2. Для подготовки ко второму вопросу:

- Запомните формулу нахождения обратной матрицы с помощью присоединенной.
- Выучите элементарные преобразования матриц.
- Ознакомьтесь с методом нахождения обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

- Разберите примеры решения типовых задач 1 и 2 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [3], глава 2 (§10); [4], глава IV (§6); [5], глава V (§5); [6], глава II (§5); [9], глава III (§15).

3. Для подготовки к третьему вопросу:

- Выучите определение ранга матрицы.
- Выясните, что понимается под окаймляющими минорами.
- Запомните последовательность действий при нахождении ранга матрицы методом окаймления миноров.

- Разберите пример решения типовой задачи 3 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава VI (§4,5); [5], глава V (§5); [6], глава I (§1), глава II (§5); [10], глава 3 (пункт 3.5), глава 4 (пункт 4.3); [11], глава 4 (пункты 4.3)

4. Для подготовки к четвертому вопросу:

- Вспомните определение ступенчатой и эквивалентной матриц.
- Запомните последовательность действий при нахождении ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

- Разберите пример решения типовой задачи 4 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [6], глава II (§5); [7], глава 3 (§3); [10], глава 4 (пункт 4.3); [11], глава 4 (пункты 4.3).

5. Подготовка к «Практикуму-тренингу»:

- Прочитайте и запомните алгоритм «Практикума-тренинга».

Алгоритм интерактивного метода «Практикум – тренинг»

1. Преподаватель объявляет о проведении практикума – тренинга. В зависимости от темы занятия тренинг может занимать от 15 до 40 минут.

2. Все учащиеся разбиваются на группы по два человека. Группы организуются либо по рекомендации преподавателя, либо в зависимости от желания учащихся, но так чтобы студенты из одной группы сидели отдельно друг от друга.

3. Преподаватель раздает однотипные задания для каждой группы.

4. Два учащихся из одной группы сначала выполняют одинаковое задание отдельно друг от друга.

5. По сигналу преподавателя студенты из одной группы садятся вместе.

6. Далее участники одной группы объединяются, сравнивают решения, анализируют полученный результат, переосмысливают решение, объявляют об окончании работы.
 7. По сигналу преподавателя тренинг завершается и выполняется анализ результатов.
 8. В процессе проведения тренинга и по его окончании преподаватель оценивает работу студентов.
 9. Учащиеся, получившие оценки «хорошо» и «отлично» освобождаются от выполнения ИДЗ №6.
 10. Учащиеся, получившие низкие оценки получают у преподавателя ИДЗ №6.
- Просмотрите решения практических заданий для развития и контроля владения компетенциями, соответствующие занятиям №4 - №6, так как из них составлены задания для тренинга.
 - Ознакомьтесь с правилом оценивания практикума-тренинга.

Правило оценивания «Практикума-тренинга»

Таблица 3. Виды деятельности в группе и их оценка в баллах

Виды деятельности в группе	Параметр оценивания	Количество баллов
Активность во время самостоятельного выполнения задания	высокая	2 балла
	средняя	1 балл
	низкая	0 баллов
Правильность выполнения задания самостоятельно	правильно	2 балла
	есть недочеты	1 балл
	неправильно	0 баллов
Правильность выполнения задания совместно	правильно	2 балла
	есть недочеты	1 балл
	неправильно	0 баллов
Время выполнения задания самостоятельно	выполнил первым	1 балл
	выполнил вторым	0 баллов
Время выполнения задания группой	уложились	1 балл
	не уложились	0 баллов
Общее количество возможных баллов:		0-8 баллов

Таблица 4. Преобразование баллов в эквивалент пятибалльной системы

Оценка «отлично»	7-8 баллов
Оценка «хорошо»	5-6 баллов
Оценка «удовлетворительно»	3-4 балла
Оценка «неудовлетворительно»	0-2 баллов

На занятии по указанию преподавателя

1. Будьте готовы по вопросам, выносимым на обсуждение, сформулировать основные определения и записать соответствующие формулы.
2. Решите на доске и в тетради задания для развития и контроля владения компетенциями из данного пособия.
3. Выполните последовательность шагов в соответствии с алгоритмом «Практикума-тренинга».
4. С учетом результатов тренинга, получите **ИДЗ №6**. Дома выполните его в отдельной тетради и на следующем практическом занятии сдайте на проверку преподавателю. Номер варианта соответствует Вашему порядковому номеру в списке группы.

Литература

а) основная

1. Глухов М.М. Алгебра и аналитическая геометрия. М.: Гелиос АРВ, 2012.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: МЦНМО, 2009.
4. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения: учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.

б) дополнительная

5. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
6. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.И., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учебное пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
7. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра: Учебник. В 2-х т. Т.1. М.: Гелиос АРВ, 2007.

8. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
9. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов. СПб.: Изд-во «Лань», 2008.
10. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Изд-во «Лань», 2007.
11. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебное пособие. М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2010.

Интернет ресурсы

<http://eek.diary.ru/p57704941.htm> - веб-сайт содержит большое количество книг по алгебре и геометрии, в том числе из списка рекомендованной, доступных для бесплатного скачивания.

Примеры решения типовых задач

1. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ двумя способами – с помощью при-

соединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований.

Решение:

Способ 1.

- 1) Вычислим определитель матрицы A по правилу треугольников:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 2 - 1 - 1 + 4 = 5 \neq 0. \text{ Так как } |A| \neq 0, \text{ то матрица } A \text{ - невырожденная и об-}$$

ратная матрица A^{-1} существует и единственна.

- 2) Запишем формулу для нахождения обратной матрицы $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$,

$$\text{где } A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \text{ - присоединённая матрица.}$$

- 3) Найдём присоединённую матрицу A^* . Для этого вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; & A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; & A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \\ A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3. \end{aligned}$$

Таким образом, присоединённая матрица имеет вид $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

- 4) Найдём обратную матрицу A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

5) Используя определение обратной матрицы, проверим правильность её вычисления:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E, \text{ где } E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{единичная матрица. Действительно,}$$

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично можно показать, что $A^{-1} \times A = E$.

Способ 2.

Так как матрица A - невырожденная ($|A| = 5 \neq 0$), то припишем к матрице A справа единичную матрицу E и будем выполнять элементарные преобразования над строками объединённой матрицы $(A | E)$ до тех пор, пока матрица A не превратится в единичную:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right) :5 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 4/5 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 0 & -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом, обратная матрица имеет вид } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

2. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$

Решение:

Введём следующие обозначения: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда данное уравнение можно записать в виде $AX = B$. Так как $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу, и решение данного уравнения находится по формуле $X = A^{-1}B$. Найдём матрицу A^{-1} с помощью элементарных преобразований: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. В результате получим $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$

3. Найти ранг матрицы A методом окаймления миноров:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 7 \\ 4 & 15 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 17 & 4 & 13 & -9 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1) Так как матрица A содержит ненулевые элементы, то $\text{rang } A \geq 1$.

2) Матрица A имеет минор 2-го порядка $M = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = 26$, отличный от нуля. Следовательно,

$\text{rang } A \geq 2$.

3) Вычислим миноры 3-го порядка, окаймляющие минор M :

$$M_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 15 & 8 \\ 2 & 17 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 15 & 2 \\ 1 & 17 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 15 & 7 \\ 2 & 17 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 13 & 13 \\ 0 & 16 & 16 \end{vmatrix} \begin{matrix} :13 \\ :16 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 15 & 1 \\ 2 & 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 13 & -13 \\ 0 & 16 & -16 \end{vmatrix} \begin{matrix} :13 \\ :16 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как все миноры 3-го порядка, окаймляющие минор M , равны 0, то минор M , имеющий 2-ой порядок, является базисным минором матрицы A и $\text{rang } A = 2$.

4. Найти ранг матрицы A с помощью элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -2 & 8 & 6 \\ -3 & -6 & 19 & -10 & -8 \\ 3 & 9 & -5 & 13 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение: Приведем данную матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & -2 & 8 & 6 \\ -3 & -6 & 19 & -10 & -8 \\ 3 & 9 & -5 & 13 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

В результате преобразований получили ступенчатую матрицу B , эквивалентную матрице A , число ненулевых строк которой равно 3. Следовательно, $\text{rang } A = \text{rang } B = 3$.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Выяснить, какие из приведённых ниже матриц имеют обратные:

$$1) \begin{pmatrix} 21 \\ 31 \\ 06 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Найти обратные матрицы для следующих матриц двумя способами – с помощью присоединённой матрицы и с помощью элементарных преобразований: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -10 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

3. Решить матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $X \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Найти ранги матриц методом окаймления миноров:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 10 & 24 & 20 & -44 & -10 \\ 2 & 3 & 6 & 12 & 17 \\ 5 & 10 & -10 & 10 & 25 \end{pmatrix}$.

5. Выяснить, при каком значении параметра a матрица $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & a \end{pmatrix}$ имеет ранг равный 3.

6. Найти ранги матриц с помощью элементарных преобразований:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & -2 & -5 \\ 8 & 6 & 12 & -1 & 0 \\ 7 & 9 & 8 & -9 & -25 \\ 1 & 3 & 0 & -5 & -15 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 3 & -4 & 1 & 14 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -9 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -5 & 7 & 2 & -7 \end{pmatrix}$.

ИДЗ № 6 по теме «Обратная матрица. Ранг матрицы.»

1. Для матрицы A найти A^{-1} и установить, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. 2. Найти ранг матрицы B двумя способами.			
Вариант 1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -4 \\ 1 & 9 & 8 & -2 \\ 1 & 12 & -7 & -2 \end{pmatrix}$	Вариант 2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	Вариант 3. $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$	Вариант 4. $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
Вариант 5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	Вариант 6. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	Вариант 7. $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$	Вариант 8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
Вариант 9. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	Вариант 10. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 15 & 17 \end{pmatrix}$	Вариант 11. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 12. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Вариант 13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	Вариант 14. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	Вариант 15. $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	Вариант 16. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 4 & -1 & 1 & 17 \end{pmatrix}$
Вариант 17. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 18. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 13 & 16 \\ 1 & -3 & 9 & 11 \end{pmatrix}$	Вариант 19. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	Вариант 20. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Вариант 21. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 0 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$	Вариант 22 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	Вариант 23. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -11 & -1 & 19 \\ 1 & 12 & 2 & -16 \end{pmatrix}$	Вариант 24. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
Вариант 25. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	Вариант 26. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 8 & 10 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -23 & 4 & 4 \\ 3 & 21 & 2 & 7 \\ 5 & -27 & 10 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$	Вариант 27. $A = \begin{pmatrix} 17 & 10 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 28. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 6 & -3 & 3 & 9 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
Вариант 29. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$		Вариант 30. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 8 & -3 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	

Практическое занятие №7

Тема занятия «Методы решения квадратных систем линейных уравнений»

Цель: изучить методы решения квадратных систем линейных уравнений.

Организационная форма занятия: «практикум-тренинг».

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Системы линейных уравнений. Основные понятия и определения.
2. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
3. Теорема Крамера.

Методические рекомендации

Подготовка к занятию дома

1. Для подготовки к первому вопросу:

- Запомните, как записывается в общем виде: линейное уравнение; система m линейных уравнений с n неизвестными; решение системы линейных уравнений.
- Прочитайте и запомните, какие системы линейных уравнений называются: совместными и несовместными; определенными и неопределенными; равносильными или эквивалентными.
- Выучите определения: частного и общего решений; тривиального и противоречивого уравнений.
- Ознакомьтесь с элементарными преобразованиями систем линейных уравнений.
- Запомните форму записи квадратной системы линейных уравнений, основной матрицы системы, столбца свободных членов, столбца неизвестных.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава VIII; [2], глава 3; [3], глава 2 (§11); [5], глава V (§4); [8], глава II.

2. Для подготовки ко второму вопросу:

- Запомните формулу для решения квадратной системы линейных уравнений матричным способом.
- Выясните, при каком условии система линейных уравнений не может быть решена матричным способом.
- Разберите пример решения типовой задачи 1 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава VIII; [2], глава 3; [7], глава 2 из раздела I; [8], глава II.

3. Для подготовки к третьему вопросу:

- Запомните формулы для решения квадратной системы линейных уравнений методом Крамера.
- Обратите внимание на то, как составляются определители в методе Крамера.
- Выясните, при каком условии система линейных уравнений не может быть решена методом

Крамера.

- Разберите пример решения типовой задачи 2 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [7], глава 2 из раздела I; [8], глава II; [9], глава 4 (пункт 4.1), глава 5 (пункт 5.6); [10], глава 4; [11], глава 2 (пункты 2.1, 2.7).

5. Подготовка к «Практикуму-тренингу»:

- Прочитайте и запомните алгоритм «Практикума-тренинга».

Алгоритм интерактивного метода «Практикум – тренинг»

1. Преподаватель объявляет о проведении практикума – тренинга. В зависимости от темы занятия тренинг может занимать от 15 до 40 минут.

2. Все учащиеся разбиваются на группы по два человека. Группы организуются либо по рекомендации преподавателя, либо в зависимости от желания учащихся, но так чтобы студенты из одной группы сидели отдельно друг от друга.

3. Преподаватель раздает однотипные задания для каждой группы.

4. Два учащихся из одной группы сначала выполняют одинаковое задание отдельно друг от друга.

5. По сигналу преподавателя студенты из одной группы садятся вместе.

6. Далее участники одной группы объединяются, сравнивают решения, анализируют полученный результат, переосмысливают решение, объявляют об окончании работы.

7. По сигналу преподавателя тренинг завершается и выполняется анализ результатов.

8. В процессе проведения тренинга и по его окончании преподаватель оценивает работу студентов.

9. Учащиеся, получившие оценки «хорошо» и «отлично» освобождаются от выполнения ИДЗ №7.

10. Учащиеся, получившие низкие оценки получают у преподавателя ИДЗ №7.

- Просмотрите решения практических заданий для развития и контроля владения компетенциями, соответствующие занятиям №5 - №7, так как из них составлены задания для тренинга.

- Ознакомьтесь с правилом оценивания практикума-тренинга.

Правило оценивания «Практикума-тренинга»

Таблица 5. Виды деятельности в группе и их оценка в баллах

Виды деятельности в группе	Параметр оценивания	Количество баллов
Активность во время самостоятельного выполнения задания	высокая	2 балла
	средняя	1 балл
	низкая	0 баллов
Правильность выполнения задания самостоятельно	правильно	2 балла
	есть недочеты	1 балл
	неправильно	0 баллов
Правильность выполнения задания совместно	правильно	2 балла
	есть недочеты	1 балл
	неправильно	0 баллов
Время выполнения задания самостоятельно	выполнил первым	1 балл
	выполнил вторым	0 баллов
Время выполнения задания группой	уложились	1 балл
	не уложились	0 баллов
Общее количество возможных баллов:		0-8 баллов

Таблица 6. Преобразование баллов в эквивалент пятибалльной системы

Оценка «отлично»	7-8 баллов
Оценка «хорошо»	5-6 баллов
Оценка «удовлетворительно»	3-4 балла
Оценка «неудовлетворительно»	0-2 баллов

На занятии по указанию преподавателя

1. Будьте готовы по вопросам, выносимым на обсуждение, сформулировать основные определения и записать соответствующие формулы.
2. Решите на доске и в тетради задания для развития и контроля владения компетенциями из данного пособия.
3. Выполните последовательность шагов в соответствии с алгоритмом «Практикума-тренинга».
4. С учетом результатов тренинга, получите **ИДЗ №7**. Дома выполните его в отдельной тетради и на следующем практическом занятии сдайте на проверку преподавателю. Номер варианта соответствует Вашему порядковому номеру в списке группы.

Литература

а) основная

1. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра: Учебник. В 2-х т. Т.1. М.: Гелиос АРВ, 2007.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: МЦНМО, 2009.
4. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения: учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.

б) дополнительная

5. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
6. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.И., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учебное пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
7. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
8. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов. СПб.: Изд-во «Лань», 2008.
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Изд-во «Лань», 2007.
10. Мальцев И.А. Линейная алгебра. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2008.
11. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебное пособие. М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2010.

Интернет ресурсы

<http://eek.diary.ru/p57704941.htm> - веб-сайт содержит большое количество книг по алгебре и геометрии, в том числе из списка рекомендованной, доступных для бесплатного скачивания.

Примеры решения типовых задач

1. Решить систему уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение:

1) Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, тогда система примет вид $AX=B$.

2) Найдем определитель системы: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{vmatrix} = 13 + 18 + 24 - 12 - 18 - 26 = -1 \neq 0$. Следова-

тельно, система является совместной и имеет единственное решение, определяемое по формуле $X=A^{-1}B$.

3) Найдем обратную матрицу A^{-1} : $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$, где $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{21} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Найдем алгебраические дополнения: $A_{11} = -5$; $A_{21} = -1$; $A_{31} = 2$; $A_{12} = -8$; $A_{22} = 1$; $A_{32} = 2$; $A_{13} = 3$; $A_{23} = 0$; $A_{33} = -1$. Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Найдем решение системы: $X = A^{-1} B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Следовательно, $x_1 = 3$,

$x_2 = 2$, $x_3 = -1$ и ответ запишется в виде: $(3, 2, -1)$.

2. Решить систему уравнений по формулам Крамера:
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

Решение:

1) Найдем определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$.

Следовательно, система совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам Крамера $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ ($i = \overline{1, 3}$).

2) Найдем определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученные из определителя Δ заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 15$;

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 5$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 10$.

3) Найдем решение системы по формулам Крамера:

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2$.

Решением системы является вектор $(3, 1, 2)$.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Решить системы уравнений методом обратной матрицы и по формулам Крамера: 1)

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 + 7x_2 = 81; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = -6, \\ 3x_1 + 4x_2 = 18; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x - y = 0, \\ x + 3y = 7; \end{cases}$$

4) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 5, \\ 3x + y - 5z = 4, \\ 4x - 2y - 3z = 10; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 2x - 3y + z = -7, \\ x + 4y + 2z = -1, \\ x - 4y = -5; \end{cases}$

10) $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -1, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2; \end{cases}$ 11) $\begin{cases} x - 2y + 3z - t = 9, \\ 4x + 3y - z + 2t = 5, \\ 2x - 5y + 3z + t = 16, \\ 4x + 6y + 2z - t = 5. \end{cases}$

ИДЗ №7 по теме «Методы решения квадратных систем линейных уравнений»

Решить систему линейных уравнений двумя способами: матричным способом и по формулам Крамера.		
Вариант 1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$	Вариант 2. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$	Вариант 3. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$
Вариант 4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 8 \end{cases}$	Вариант 5. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$	Вариант 6. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ -5x_1 + x_2 - 4x_3 = -3 \end{cases}$
Вариант 7. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$	Вариант 8. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_3 = 7 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$	Вариант 9. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$
Вариант 10. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases}$	Вариант 11. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 - 7x_3 = -5 \end{cases}$	Вариант 12. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$
Вариант 13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$	Вариант 14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$	Вариант 15. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$
Вариант 16. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$	Вариант 17. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3 \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 = -6 \end{cases}$	Вариант 18. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ -4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -6 \end{cases}$
Вариант 19. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 4 \end{cases}$	Вариант 20. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -10 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -6 \end{cases}$	Вариант 21. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 - 7x_3 = -3 \end{cases}$
Вариант 22. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$	Вариант 23. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$	Вариант 24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$
Вариант 25. $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$	Вариант 26. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -9 \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 5 \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$	Вариант 27. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4 \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = -6 \end{cases}$

Вариант 28. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 7 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ -4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$	Вариант 29. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$	Вариант 30. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 1 \end{cases}$
---	---	--

Практическое занятие №8

Тема занятия «Метод Гаусса»

Цель: рассмотреть критерии совместности произвольных систем линейных уравнений и изучить универсальный метод решения систем – метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса).

Организационная форма занятия: практикум с применением интерактивной игры «вопросы по кругу».

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Критерий совместности систем линейных уравнений.
2. Метод Гаусса.

Методические рекомендации

Подготовка к занятию дома

1. Для подготовки к первому вопросу:

- Вспомните, как записывается в общем виде система m линейных уравнений с n неизвестными.
- Выясните, в чем разница между основной и расширенной матрицами системы.
- Запомните, как записываются в общем случае основная и расширенная матрица системы.
- Выучите теорему Кронекера-Капелли о критерии совместности системы линейных уравнений.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава VIII; [4], глава IV (§4); [7], глава 2 из раздела I; [8], глава II.

2. Для подготовки ко второму вопросу:

- Запомните последовательность шагов алгоритма метода Гаусса.
- Разберите примеры решения типовых задач 1-3 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [5], глава V (§4,6); [6], глава III; [7], [8], глава II; [9], глава 4 (пункт 4.1), глава 5 (пункт 5.6); [10], глава 4; [11], глава 2 (пункты 2.1, 2.7).

3. Подготовка к интерактивной игре «Вопросы по кругу»:

- Прочитайте и запомните алгоритм интерактивной игры «Вопросы по кругу».

Алгоритм интерактивной обучающей игры «Вопросы по кругу»

Предварительная подготовка к игре

1. Дома по теме интерактивной игры студенты готовят короткие вопросы, предполагающие ответ в одно предложение. Вопросы записываются в тетради для индивидуальных домашних заданий.

2. Количество вопросов должно быть равно двойному количеству людей в списке плюс десять дополнительных вопросов. То есть если людей в списке 18, то каждый должен подготовить $18 \cdot 2 + 10 = 46$ разных вопросов.

3. На поставленные вопросы в той же тетради записываются ответы.

Проведение игры на занятии

1. Преподаватель объявляет о начале проведения интерактивной игры «Вопросы по кругу». В зависимости от темы занятия игра может занимать от 20 до 40 минут. Способ расположения студентов в аудитории значения не имеет.

2. Сначала выбирается студент, который будет задавать вопрос, потом тот, кто будет отвечать, и только после этого озвучивается вопрос.

3. На первом этапе игры по списку или по желанию учащихся каждый студент должен один раз по своему желанию выбрать другого студента из присутствующих в аудитории и задать ему один вопрос, отличающийся от тех, которые уже были заданы.

4. Выбор осуществляется из тех студентов, кто еще не отвечал на вопросы, но независимо от его желания.

5. На втором этапе игры по списку или по желанию учащихся каждый студент должен один раз выбрать другого студента из присутствующих в аудитории и задать ему один вопрос, отличающийся от тех, которые уже были заданы.

6. Любой студент может быть выбран два раза разными студентами, но его желание при этом обязательно (желающие ответить, молча, поднимают руки).

7. На двух этапах каждый студент задавший вопрос слушает ответ и коротко оценивает правильный он или нет.
 8. По сигналу преподавателя игра завершается и проводится анализ результатов.
 9. Учащиеся, получившие оценки «хорошо» и «отлично» освобождаются от сдачи коллоквиума.
 10. Учащиеся, получившие низкие оценки должны до следующего практического занятия сдать коллоквиум в виде компьютерного тестирования по темам интерактивной игры.
- Для проведения интерактивной игры заранее дома подготовьте теоретические вопросы по темам занятий №4-№8 данного пособия.
 - Ознакомьтесь с правилом оценивания интерактивной игры.

Таблица 6. Виды деятельности студентов в процессе игры и их оценка

Виды деятельности в группе	Параметр оценивания	Количество баллов
Предварительная подготовка к игре		
Количество подготовленных вопросов	соответствует требованию	1 балл
	не соответствует требованию	0 баллов
Корректность сформулированных вопросов	все составлены корректно	2 балла
	меньше половины составлены не корректно	1 балл
	больше половины составлены не корректно	0 баллов
Правильность ответов подготовленных в тетради	все ответы правильные	2 балла
	меньше половины ответов не правильные	1 балл
	больше половины ответов не правильные	0 баллов
Первый этап игры		
Активность студента, задающего вопрос	вызвался сам	2 балла
	выбран по списку	1 баллов
	отказался задавать вопрос	0 баллов
Подготовленность студента, отвечающего на вопрос	ответ правильный	2 балла
	ответ с погрешностями	1 балл
	ответ не правильный	0 баллов
Второй этап игры		
Активность студента, задающего вопрос	вызвался сам	2 балла
	выбран по списку	1 баллов
	отказался задавать вопрос	0 баллов
Активность студента, отвечающего вопрос	вызвался ответить на два вопроса	2 балла
	вызвался ответить на один вопрос	1 балл
Подготовленность студента, отвечающего на вопрос	два раза правильно ответил	2 балла
	один раз правильно ответил	1 балл
	ответил не правильно	0 баллов
Общее количество возможных баллов:		0-15

Таблица 7. Преобразование баллов в эквивалент пятибалльной системы

Оценка «отлично»	11-15 баллов
Оценка «хорошо»	8-10 баллов
Оценка «удовлетворительно»	5-7 балла
Оценка «неудовлетворительно»	0-4 баллов

На занятии по указанию преподавателя

1. Решите на доске и в тетради задания для развития и контроля владения компетенциями из данного пособия.
2. Выполните последовательность шагов в соответствии с алгоритмом интерактивной игры «Вопросы по кругу».
3. Получите **ИДЗ №8**. Дома выполните его в отдельной тетради и на следующем практическом занятии сдайте на проверку преподавателю. Номер варианта соответствует Вашему порядковому номеру в списке группы.

Литература

а) основная

1. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра: Учебник. В 2-х т. Т.1. М.: Гелиос АРВ, 2007.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: МЦНМО, 2009.
4. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения: учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.

б) дополнительная

5. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
6. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.И., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учебное пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
7. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
8. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов. СПб.: Изд-во «Лань», 2008.
9. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Изд-во «Лань», 2007.
10. Мальцев И.А. Линейная алгебра. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2008.
11. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебное пособие. М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2010.

Интернет ресурсы

<http://eek.diary.ru/p57704941.htm> - веб-сайт содержит большое количество книг по алгебре и геометрии, в том числе из списка рекомендованной, доступных для бесплатного скачивания.

Примеры решения типовых задач

$$1. \text{ Решить систему } \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 7x_1 + 5x_2 - 7x_3 - x_4 = 8 \\ x_1 + 8x_2 - 18x_3 - 5x_4 = -6 \end{cases} \quad \text{методом Гаусса.}$$

Решение: Запишем расширенную матрицу системы $\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 6 \\ 7 & 5 & -7 & -1 & 8 \\ 1 & 8 & -18 & -5 & -6 \end{array} \right).$

С помощью элементарных преобразований приведем систему к ступенчатому виду.

Умножим первую строку на «-7» и «-1» и прибавим соответственно ко второй и к третьей строкам:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 12 & -28 & -8 & -34 \\ 0 & 9 & -21 & -6 & -12 \end{array} \right).$$

Разделим вторую строку на «2», третью на «3»:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & -14 & -4 & -17 \\ 0 & 3 & -7 & -2 & -4 \end{array} \right).$$

Поменяем вторую и третью строки местами:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -7 & -2 & -4 \\ 0 & 6 & -14 & -4 & -17 \end{array} \right).$$

Умножим вторую строку на «-2» и прибавим ее к третьей строке:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -7 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 \end{array} \right).$$

Так как $\text{rang} A = 2$, $\text{rang} \bar{A} = 3$, то по теореме Кронекера-Капелли система несовместна.

2. Решить систему $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$ методом Гаусса.

Решение: Запишем расширенную матрицу системы $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & 9 \\ 1 & -4 & -2 & 3 \end{array} \right).$

С помощью элементарных преобразований приведем систему к ступенчатому виду.

Умножим первую строку на «-1» и прибавим ее сначала ко второй, потом к третьей строкам:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{array} \right).$$

Разделим третью строку на «-3»:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

Прибавим вторую строку к третьей строке:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

Так как $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = 3$, то по теореме Кронекера-Капелли система совместна.

Так как $\text{rang} \bar{A} = n = 3$, то система имеет единственное решение.

Составим из ступенчатой матрицы систему и решим ее:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 6 + x_2 - x_3 = 6 + (-3) - 4 = -1 \\ x_2 = 1 - 4 = -3 \\ x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 4 \end{cases}.$$

Проверка (подставим в первое уравнение системы): $-1 - (-3) + 4 = 6$.

3. Решить систему
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 - x_4 - 12x_5 = 1 \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 10x_5 = -1 \\ 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 21x_5 = 2 \end{cases}$$
 методом Гаусса.

Решение:

Запишем расширенную матрицу системы $\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 7 & 3 & -1 & -12 & 1 \\ 1 & 6 & 4 & 2 & 10 & -1 \\ 3 & 10 & 4 & -2 & -21 & 2 \end{array} \right).$

С помощью элементарных преобразований приведем систему к ступенчатому виду, так чтобы на главной диагонали лежали единицы.

Поменяем местами первую и вторую строки:
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 4 & 2 & 10 & -1 \\ 2 & 7 & 3 & -1 & -12 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & -2 & -21 & 2 \end{array} \right).$$

Умножим первую строку на «-2» и на «-3» и прибавим ее соответственно ко второй и третьей строкам:
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 4 & 2 & 10 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & -5 & -32 & 3 \\ 0 & -8 & -8 & -8 & -51 & 5 \end{array} \right).$$

Разделим вторую и третью строки на «-1»:
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 4 & 2 & 10 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & 32 & -3 \\ 0 & 8 & 8 & 8 & 51 & -5 \end{array} \right).$$

Умножим вторую строку на «-2» и прибавим ее к третьей строке:
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 4 & 2 & 10 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & 32 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -13 & 1 \end{array} \right).$$

Умножим третью строку на «2» и прибавим ее ко второй строке:
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 4 & 2 & 10 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -13 & 1 \end{array} \right).$$

Умножим вторую строку на «2» и прибавим ее к третьей строке:
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 4 & 2 & 10 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right).$$

Поменяем местами третий столбец (x_3) и пятый столбец (x_5), так чтобы на главной диагонали

не было нулей:
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 10 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Разделим третью строку на «-1»:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 6 & 10 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Так как $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = 3$, то по теореме Кронекера-Капелли система совместна.

Так как $\text{rang} \bar{A} = 3$, а $n = 5$, то есть $\text{rang} \bar{A} < n$, то система имеет бесчисленное множество решений. При этом $\text{rang} \bar{A} = 3$ - число главных переменных, а $n - \text{rang} \bar{A} = 5 - 3 = 2$ - число свободных переменных.

Составим из ступенчатой матрицы систему, с учетом того, что была замена столбцов:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 10x_5 + 2x_4 + 4x_3 = -1 \\ x_2 + 6x_5 + x_4 + x_3 = -1 \\ x_5 = 1 \end{cases}.$$

В качестве главных переменные выберем x_1, x_2, x_5 (расположены на главной диагонали), а переменные x_3, x_4 - в качестве свободных. Выразим главные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -1 - 6x_2 - 10x_5 - 2x_4 - 4x_3 \\ x_2 = -1 - 6x_5 - x_4 - x_3 \\ x_5 = 1 \end{cases}$$

1) $x_5 = 1$

2) $x_2 = -1 - 6 \cdot 1 - x_4 - x_3 \Rightarrow x_2 = -7 - x_4 - x_3$

3) $x_1 = -1 - 6 \cdot (-7 - x_4 - x_3) - 10 \cdot 1 - 2x_4 - 4x_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = -1 + 42 + 6x_4 + 6x_3 - 10 - 2x_4 - 4x_3 \Rightarrow x_1 = 31 + 4x_4 + 2x_3$

$X = (31 + 4x_4 + 2x_3; -7 - x_4 - x_3; x_3; x_4; 1)$ - общее решение.

Проверка (подставим во второе уравнение системы):

$31 + 4x_4 + 2x_3 + 6 \cdot (-7 - x_4 - x_3) + 4x_3 + 2x_4 + 10 \cdot 1 = -1$

$31 + 4x_4 + 2x_3 - 42 - 6x_4 - 6x_3 + 4x_3 + 2x_4 + 10 \cdot 1 = -1$

$-1 = -1.$

Найдем одно из частных решений:

$X^* = (31 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3; -7 - 2 - 3; 3; 2; 1) \Rightarrow X^* = (45; -12; 3; 2; 1)$

Проверка (подставим во второе уравнение системы):

$45 + 6 \cdot (-12) + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = -1 \Rightarrow -1 = -1.$

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Исследовать на совместность системы уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 - 4x_2 = -1, \\ 7x_1 + 10x_2 = 12, \\ 5x_1 + 6x_2 = 8, \\ 3x_1 - 16x_2 = -5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 3, \\ 3x_1 + 15x_2 + 12x_3 = 5; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1; \end{cases}$$

2. Исследовать на совместность систему уравнений, у которой основная матрица A и столбец свободных членов B имеют вид $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}$.

3. При каких значениях параметра c совместна система уравнений:

$$1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = c, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = c, \\ 5x_1 + cx_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3? \end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 + 2x_2 - 12x_3 = -3; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 2x + 3y - z + t = -3, \\ 3x - y + 2z + 4t = 8, \\ x + y + 3z - 2t = 6, \\ -x + 2y + 3z + 5t = 3; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23; \end{cases} \quad 5) \begin{cases} x + y - 3z = -1, \\ 2x + y - 2z = 1, \\ x + y + z = 3, \\ x + 2y - 3z = 1; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 - 13x_3 - 18x_4 = -1; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 - x_4 - 12x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 10x_5 = 0, \\ 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 21x_5 = 0; \end{cases}$$

ИДЗ №8 по теме «Метод Гаусса»

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса. Найти общее решение, одно частное, выполнить проверку.		
Вариант 1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 14 \end{cases}$	Вариант 2. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}$	Вариант 3. $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 2, \\ 15x_1 + 30x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 = -13, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 9, \\ 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = -1 \end{cases}$
Вариант 4. $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = -5 \end{cases}$	Вариант 5. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 6, \\ 14x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 9x_4 - x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 7, \\ 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$	Вариант 6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 = -2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 7, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 1 \end{cases}$
Вариант 7. $\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 23, \\ 3x_1 + 20x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -8, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 1, \\ 9x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 12 \end{cases}$	Вариант 8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$	Вариант 9. $\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 8, \\ 11x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 7, \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5 \end{cases}$
Вариант 10. $\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 10, \\ 8x_1 + 4x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 7 \end{cases}$	Вариант 11. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 7, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5 = -4, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$	Вариант 12. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 4, \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 8 \end{cases}$
Вариант 13. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = -3, \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 2, \\ 9x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = -7, \\ 7x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -6 \end{cases}$	Вариант 14. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + x_3 + 10x_4 + 7x_5 = 3, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 7, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$	Вариант 15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 17x_4 + 10x_5 = -7 \end{cases}$
Вариант 16. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$	Вариант 17. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$	Вариант 18. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2 \end{cases}$
Вариант 19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ 13x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 9, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$	Вариант 20. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 2, \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 1 \end{cases}$	Вариант 21. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 2, \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 1 \end{cases}$
Вариант 22. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}$	Вариант 23. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 4x_5 = -4, \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -2 \end{cases}$	Вариант 24. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 6, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 5 \end{cases}$

Вариант 25. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 3x_5 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -7 \end{cases}$	Вариант 26. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \end{cases}$	Вариант 27. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 8, \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 - 3x_5 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$
Вариант 28. $\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 5, \\ 10x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 15x_5 = 10, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 11x_5 = 8 \end{cases}$	Вариант 29. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -2, \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = -1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2 \end{cases}$	Вариант 30. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 4x_1 - 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$

Практическое занятие №9

Тема занятия «Линейные пространства»

Цель: изучить понятие линейного пространства и научиться находить базис и ранг системы векторов.

Организационная форма: практикум.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Определение и примеры линейных пространств.
2. n-мерное арифметическое линейное пространство.
3. Линейная зависимость векторов.
4. Базис и ранг системы векторов.

Методические рекомендации

Подготовка к занятию дома

1. Для подготовки к первому вопросу:

- Выучите определение и аксиомы линейного пространства.
- Разберите пример решения типовой задачи 1 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава XIII (§1,16); [2], глава XI (§1-4); [3], глава 2 (§1,2,4); [4], глава 1 (§1,2); [7], глава XII (§1); [8], глава VI (§1); [9], глава II (§1,3,4,6,7); [10], глава IV (§17-20); [11], глава 4 (пункты 4.1, 4.2, 4.4-4.7).

2. Для подготовки ко второму вопросу:

- Выучите определения n-мерного арифметического вектора и n-мерного арифметического векторного пространства.

- Запомните, как сложить два арифметических вектора, как умножить на число.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава XIII (§1,16); [6], глава 2 (пункты 2.1-2.3); [7], глава XII (§1); [8], глава VI (§1); [9], глава II (§1,3,4,6,7); [10], глава IV (§17-20); [11], глава 4 (пункты 4.1, 4.2, 4.4-4.7).

3. Для подготовки к третьему вопросу:

- Выучите определения: системы векторов; подсистемы данной системы векторов; линейной комбинации векторов; линейно зависимой системы векторов; линейно независимой системы векторов.

- Разберите примеры решения типовых задач 2 и 3 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [4], глава 1 (§1,2); [5], глава 7 (§29,30); [6], глава 2 (пункты 2.1-2.3); [7], глава XII (§1); [8], глава VI (§1); [9], глава II (§1,3,4,6,7); [10], глава IV (§17-20); [11], глава 4 (пункты 4.1, 4.2, 4.4-4.7).

4. Для подготовки к четвертому вопросу:

- Запомните определения: базиса и ранга системы векторов.

- Разберите пример решения типовой задачи 4 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава XIII (§1,16); [2], глава XI (§1-4); [3], глава 2 (§1,2,4); [4], глава 1 (§1,2); [5], глава 7 (§29,30).

На занятии по указанию преподавателя

1. Будьте готовы по вопросам, выносимым на обсуждение, сформулировать основные определения и записать соответствующие формулы.

2. Решите на доске и в тетради задания для развития и контроля владения компетенциями из данного пособия.

3. Получите **ИДЗ №16**. Дома выполните его в отдельной тетради и на следующем практическом занятии сдайте на проверку преподавателю. Номер варианта соответствует Вашему порядковому номеру в списке группы.

Литература

а) основная

1. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра: Учебник. В 2-х т. Т. II. М.: Гелиос АРВ, 2009.
2. Глухов М.М. Алгебра и аналитическая геометрия. М.: Гелиос АРВ, 2012.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
4. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. I. Основы алгебры: Учебник для вузов. М.: МЦНМО, 2012.
5. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: МЦНМО, 2009.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Изд-во «Лань», 2007.
7. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения: учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.

б) дополнительная

8. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
9. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.И., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учебное пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
10. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов. СПб.: Изд-во «Лань», 2008.
11. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебное пособие. М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2010.

Интернет ресурсы

<http://eek.diary.ru/p57704941.htm> - веб-сайт содержит большое количество книг по алгебре и геометрии, в том числе из списка рекомендованной, доступных для бесплатного скачивания.

Примеры решения типовых задач

1. Выяснить, является ли линейным пространством множество квадратных матриц n -го порядка с действительными элементами.

Решение: Проверим выполнение условий определения линейного пространства.

1) Сумма двух квадратных матриц n -го порядка есть матрица того же самого порядка (по определению сложения матриц).

2) Произведение квадратной матрицы n -го порядка на действительное число есть матрица того же самого порядка (по определению произведения матрицы на число).

3) Проверим выполнение аксиом линейного пространства. Пусть L – множество квадратных матриц n -го порядка. Очевидно, что для любых $A, B, C \in L$ выполняются равенства: $A + B = B + A$ и $(A + B) + C = A + (B + C)$, то есть аксиомы 1 и 2 выполнены.

Нулевым элементом является нулевая матрица n -го порядка $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, которая удо-

влетворяет аксиоме 3: для любой матрицы $A \in L$: $A + O = A$. Противоположным элементом для любой

матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ служит матрица $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{nn} \end{pmatrix}$. так же принад-

лежащая L , для которой выполнена аксиома 4: $A + (-A) = O$.

Очевидно, что выполняются и остальные аксиомы 5-8:

Аксиома 5. Для любой матрицы $A \in L$: $E \cdot A = A$, где E – единичная матрица n -го порядка.

Аксиома 6. Для любых $\alpha, \beta \in R$ и $A \in L$: $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$.

Аксиома 7. Для любых $\alpha, \beta \in R$ и $A \in L$: $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$.

Аксиома 8. Для любых $A, B \in L$ и $\alpha \in R$: $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Выполнение данных аксиом следует из свойств соответствующих операций над матрицами.

Таким образом, множество всех квадратных матриц n -го порядка с действительными элементами образует линейное пространство.

2. Выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов: $a_1 = (1, -1, 2, 1)$, $a_2 = (1, -1, 1, 2)$, $a_3 = (1, -1, 4, -1)$.

Решение: Векторы a_1, a_2, a_3 линейно зависимы, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что будет выполняться равенство $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$.

В последнее равенство вместо векторов a_1, a_2, a_3 , 0 подставим их компоненты и перейдем к компонентным равенствам:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда получим систему
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$
 Решая последнюю систему методом Гаусса,

приводим ее к виду:
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг системы ($r=2$) меньше числа неизвестных ($n=3$), то данная система имеет множество решений, в том числе и ненулевые решения. Следовательно, векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы.

3. Найти все значения m , при которых вектор $b = (1, m, 3)$ линейно выражается через векторы $a_1 = (2, 3, 7)$, $a_2 = (3, -2, 4)$, $a_3 = (-1, 1, -1)$.

Решение: Вектор b линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3 , если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ такие, что $b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$ или

$$\begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Перейдя к покомпонентным равенствам, получим систему

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 1, \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = m, \\ 7\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3 = 3. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & m \\ 7 & 4 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & -2 & 1-m \\ 3 & -2 & 1 & m \\ 7 & 4 & -1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & -2 & 1-m \\ 0 & 13 & -5 & 3-2m \\ 0 & 39 & -15 & 10-7m \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & -2 & 1-m \\ 0 & 13 & -5 & 3-2m \\ 0 & 0 & 0 & 1-m \end{array} \right).$$

Система является совместной, если ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной матрицы. Это возможно только в том случае, когда $1-m=0$, т.е. $m=1$. Следовательно, вектор b является линейной комбинацией векторов a_1, a_2, a_3 при $m=1$.

4. Вычислить ранг и указать какой-либо базис системы векторов: $a_1 = (2, 3, -4, -1)$, $a_2 = (1, -2, 1, 3)$, $a_3 = (5, -3, 1, 8)$, $a_4 = (3, 8, -9, -5)$.

Решение: Составим матрицу из компонент заданных векторов и найдем ее ранг:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -4 & -1 & a_1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & a_2 \\ 5 & -3 & -1 & 8 & a_3 \\ 3 & 8 & -9 & -5 & a_4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & a_2 \\ 2 & 3 & -4 & -1 & a_1 \\ 5 & -3 & -1 & 8 & a_3 \\ 3 & 8 & -9 & -5 & a_4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & a_2 \\ 0 & 7 & -6 & -7 & a_1 - 2a_2 \\ 0 & 7 & -6 & -7 & a_3 - 5a_2 \\ 0 & 14 & -12 & -14 & a_4 - 3a_2 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & a_2 \\ 0 & 7 & -6 & -7 & a_1 - 2a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 - a_1 - 3a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 - 2a_1 + a_2 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang } A = 2.$$

Следовательно, ранг системы векторов также равен 2, то есть $\text{rang}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 2$. В качестве базиса данной системы векторов можно взять векторы a_1 и a_2 , т.е. $B = \{a_1, a_2\}$.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. Выяснить, является ли линейным пространством множество всех алгебраических многочленов одной переменной: 1) степени не выше n ; 2) степени n ; 3) степени выше n .

2. Выяснить, является ли линейным пространством множество всех: 1) матриц размера $m \times n$; 2) диагональных матриц порядка n ; 3) невырожденных матриц порядка n ; 4) векторов.

3. Каким должно быть число a , чтобы множество, состоящее из одного этого числа, являлось линейным пространством?

4. Доказать, что система векторов будет линейно зависима, если она содержит: 1) два равных вектора; 2) два пропорциональных вектора.

5. Найти линейную комбинацию векторов $3a_1 + 5a_2 - a_3$, если $a_1 = (4, 1, -3, 2)$, $a_2 = (1, 2, -3, 2)$, $a_3 = (16, 9, 1, -3)$.

6. В некотором базисе заданы векторы $a_1 = (-2, 0, 1)$, $a_2 = (1, -1, 0)$, $a_3 = (0, 1, 2)$. Выяснить, является ли вектор $a_4 = (2, 3, 4)$ линейной комбинацией векторов a_1, a_2, a_3 .

7. В некотором базисе даны векторы $a_1 = (2, 1)$, $a_2 = (-1, 3)$. Найти все значения m , при которых вектор $b = (1, m)$ в том же базисе является линейной комбинацией векторов a_1, a_2 .

8. В некотором базисе даны векторы $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (2, 1, 1)$, $a_3 = (-1, -2, -1)$. Найти все значения m , при которых вектор $b = (2, 3, m)$ линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3 .

9. Выяснить вопрос о линейной зависимости систем векторов:

1) $a_1 = (-7, 5, 19)$, $a_2 = (5, 7, -7)$, $a_3 = (-8, 7, 14)$;

2) $a_1 = (1, 8, -1)$, $a_2 = (-2, 3, 3)$, $a_3 = (4, -11, 9)$;

3) $a_1 = (0, 1, 1, 0)$, $a_2 = (1, 1, 3, 1)$, $a_3 = (1, 3, 5, 1)$, $a_4 = (0, 1, 1, -2)$;

4) $a_1 = (-1, 7, 1, -2)$, $a_2 = (2, 3, 2, 1)$, $a_3 = (4, 4, 4, -3)$, $a_4 = (1, 6, -1, 1)$.

10. Выяснить ранг и указать какой-нибудь базис системы векторов:

1) $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (2, 1, 3)$, $a_3 = (1, 5, 0)$, $a_4 = (2, -2, 4)$; 2) $a_1 = (1, 1, 2)$, $a_2 = (0, 1, 2)$, $a_3 = (2, 1, 4)$, $a_4 = (1, 1, 0)$; 3) $a_1 = (1, 1, 4, 2)$, $a_2 = (1, -1, -2, 4)$, $a_3 = (0, 2, 6, -2)$, $a_4 = (-3, 3, 3, -12)$, $a_5 = (-1, 0, -4, -3)$;

4) $a_1 = (1, 3, 0, 5)$, $a_2 = (1, 2, 0, 4)$, $a_3 = (1, 1, 1, 3)$, $a_4 = (1, 0, -1, 2)$, $a_5 = (1, -3, 3, -1)$; 5) $a_1 = (1, 1, 0, 0)$, $a_2 = (1, 0, 1, 0)$, $a_3 = (1, 0, 0, 1)$, $a_4 = (0, 1, 1, 0)$, $a_5 = (0, 1, 0, 1)$, $a_6 = (0, 0, 1, 1)$.

ИДЗ №9 по теме «Линейные пространства»

Выяснить ранг и указать какой-нибудь базис системы векторов. Выразить через найденный базис, векторы не вошедшие в базис.	
Вариант 1. $a_1 = [1, 3, 6, 10], a_2 = [1, 1, 1, 1]$ $a_3 = [1, -3, -8, -18], a_4 = [3, 5, 8, 12]$ $a_5 = [1, 4, 10, 20]$	Вариант 16. $a_1 = [3, 4, 1, 2], a_2 = [4, 1, 2, 3]$ $a_3 = [3, 1, -4, 5], a_4 = [2, 3, 4, 1]$ $a_5 = [1, 2, 3, 4]$
Вариант 2. $a_1 = [3, 1, 1, 1], a_2 = [1, 1, 3, 1]$ $a_3 = [1, 3, 1, 1], a_4 = [-1, 1, 5, 1]$ $a_5 = [-1, 5, 1, 1]$	Вариант 17. $a_1 = [1, 3, 1, 1], a_2 = [1, 1, 3, 1]$ $a_3 = [1, 3, -2, 3], a_4 = [3, 1, 1, 1]$ $a_5 = [1, 1, 1, 3]$
Вариант 3. $a_1 = [1, 2, 3, 4], a_2 = [4, 1, 2, 3]$ $a_3 = [-2, -2, 2, 2], a_4 = [3, 4, 1, 2]$ $a_5 = [-2, -2, 0, -1]$	Вариант 18. $a_1 = [1, 4, 9, 16], a_2 = [1, 1, 1, 1]$ $a_3 = [1, 8, 27, 64], a_4 = [2, 1, 8, 1]$ $a_5 = [1, 2, 3, 4]$
Вариант 4. $a_1 = [1, 8, 27, 64], a_2 = [1, 2, 3, 4]$ $a_3 = [0, -4, -18, -48], a_4 = [1, 4, 9, 16]$ $a_5 = [-1, 0, 3, 8]$	Вариант 19. $a_1 = [1, 3, 6, 10], a_2 = [1, 1, 1, 1]$ $a_3 = [2, 10, 1, 3], a_4 = [1, 2, 3, 4]$ $a_5 = [1, 4, 10, 20]$
Вариант 5. $a_1 = [1, 3, 6, 10], a_2 = [1, 1, 1, 1]$ $a_3 = [1, -3, -8, -18], a_4 = [3, 5, 8, 12]$ $a_5 = [1, 4, 10, 20]$	Вариант 20. $a_1 = [3, 4, 1, 2], a_2 = [4, 1, 2, 3]$ $a_3 = [3, 1, -4, 5], a_4 = [2, 3, 4, 1]$ $a_5 = [1, 2, 3, 4]$
Вариант 6. $a_1 = [3, 1, 1, 1], a_2 = [1, 1, 3, 1]$ $a_3 = [1, 3, 1, 1], a_4 = [-1, 1, 5, 1]$ $a_5 = [-1, 5, 1, 1]$	Вариант 21. $a_1 = [1, 3, 1, 1], a_2 = [1, 1, 3, 1]$ $a_3 = [1, 3, -2, 3], a_4 = [3, 1, 1, 1]$ $a_5 = [1, 1, 1, 3]$
Вариант 7. $a_1 = [1, 2, 3, 4], a_2 = [4, 1, 2, 3]$ $a_3 = [-2, -2, 2, 2], a_4 = [3, 4, 1, 2]$ $a_5 = [-2, -2, 0, -1]$	Вариант 22. $a_1 = [1, 4, 9, 16], a_2 = [1, 1, 1, 1]$ $a_3 = [1, 8, 27, 64], a_4 = [2, 1, 8, 1]$ $a_5 = [1, 2, 3, 4]$
Вариант 8. $a_1 = [1, 8, 27, 64], a_2 = [1, 2, 3, 4]$ $a_3 = [0, -4, -18, -48], a_4 = [1, 4, 9, 16]$ $a_5 = [-1, 0, 3, 8]$	Вариант 23. $a_1 = [1, 3, 6, 10], a_2 = [1, 1, 1, 1]$ $a_3 = [2, 10, 1, 3], a_4 = [1, 2, 3, 4]$ $a_5 = [1, 4, 10, 20]$
Вариант 9. $a_1 = [1, 3, 6, 10], a_2 = [1, 1, 1, 1]$ $a_3 = [1, -3, -8, -18], a_4 = [3, 5, 8, 12]$ $a_5 = [1, 4, 10, 20]$	Вариант 24. $a_1 = [3, 4, 1, 2], a_2 = [4, 1, 2, 3]$ $a_3 = [3, 1, -4, 5], a_4 = [2, 3, 4, 1]$ $a_5 = [1, 2, 3, 4]$
Вариант 10. $a_1 = [3, 1, 1, 1], a_2 = [1, 1, 3, 1]$ $a_3 = [1, 3, 1, 1], a_4 = [-1, 1, 5, 1]$ $a_5 = [-1, 5, 1, 1]$	Вариант 25. $a_1 = [1, 3, 1, 1], a_2 = [1, 1, 3, 1]$ $a_3 = [1, 3, -2, 3], a_4 = [3, 1, 1, 1]$ $a_5 = [1, 1, 1, 3]$

Вариант 11. $a_1 = [1, 2, 3, 4], a_2 = [4, 1, 2, 3]$ $a_3 = [-2, -2, 2, 2], a_4 = [3, 4, 1, 2]$ $a_5 = [-2, -2, 0, -1]$	Вариант 26. $a_1 = [1, 4, 9, 16], a_2 = [1, 1, 1, 1]$ $a_3 = [1, 8, 27, 64], a_4 = [2, 1, 8, 1]$ $a_5 = [1, 2, 3, 4]$
Вариант 12. $a_1 = [1, 8, 27, 64], a_2 = [1, 2, 3, 4]$ $a_3 = [0, -4, -18, -48], a_4 = [1, 4, 9, 16]$ $a_5 = [-1, 0, 3, 8]$	Вариант 27. $a_1 = [1, 3, 6, 10], a_2 = [1, 1, 1, 1]$ $a_3 = [2, 10, 1, 3], a_4 = [1, 2, 3, 4]$ $a_5 = [1, 4, 10, 20]$
Вариант 13. $a_1 = [1, 3, 6, 10], a_2 = [1, 1, 1, 1]$ $a_3 = [1, -3, -8, -18], a_4 = [3, 5, 8, 12]$ $a_5 = [1, 4, 10, 20]$	Вариант 28. $a_1 = [3, 4, 1, 2], a_2 = [4, 1, 2, 3]$ $a_3 = [3, 1, -4, 5], a_4 = [2, 3, 4, 1]$ $a_5 = [1, 2, 3, 4]$
Вариант 14. $a_1 = [3, 1, 1, 1], a_2 = [1, 1, 3, 1]$ $a_3 = [1, 3, 1, 1], a_4 = [-1, 1, 5, 1]$ $a_5 = [-1, 5, 1, 1]$	Вариант 29. $a_1 = [1, 3, 1, 1], a_2 = [1, 1, 3, 1]$ $a_3 = [1, 3, -2, 3], a_4 = [3, 1, 1, 1]$ $a_5 = [1, 1, 1, 3]$
Вариант 15. $a_1 = [1, 2, 3, 4], a_2 = [4, 1, 2, 3]$ $a_3 = [-2, -2, 2, 2], a_4 = [3, 4, 1, 2]$ $a_5 = [-2, -2, 0, -1]$	Вариант 30. $a_1 = [1, 4, 9, 16], a_2 = [1, 1, 1, 1]$ $a_3 = [1, 8, 27, 64], a_4 = [2, 1, 8, 1]$ $a_5 = [1, 2, 3, 4]$

Практическое занятие №10

Тема занятия «Базис пространства. Координаты вектора в базисе»

Цель: изучить понятия базиса и размерности линейного пространства и научиться находить координаты векторов в различных базисах.

Организационная форма: практикум.

Вопросы, выносимые на обсуждение

1. Базис и размерность линейного пространства.
2. Координаты вектора.
3. Преобразование координат вектора при переходе к другому базису.

Методические рекомендации

Подготовка к занятию дома

1. Для подготовки к первому вопросу:

- Запомните определения: базиса и размерности линейного пространства.
- Разберите пример решения типовой задачи 1 (п.1) по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава XIII (§1,16); [2], глава XI (§1-4); [3], глава 2 (§1,2,4); [4], глава 1 (§1,2); [8], глава VI (§1); [9], глава II (§1,3,4,6,7); [10], глава IV (§17-20).

2. Для подготовки ко второму вопросу:

- Запомните определения: разложения вектора по базису; координат вектора.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [1], глава XIII (§1,16); [7], глава XII (§1); [9], глава II (§1,3,4,6,7); [10], глава IV (§17-20); [11], глава 4 (пункты 4.1, 4.2, 4.4-4.7).

3. Для подготовки к третьему вопросу:

- Запомните как в общем случае записать разложение векторов базиса B' по базису B .
- Обратите внимание, из каких коэффициентов составляется матрица перехода.
- Выучите формулы преобразования координат вектора при переходе от базиса к базису.
- Разберите примеры решения типовых задач 1 (п.2), 2 и 3 по теме занятия в данном пособии.

Для подготовки к этому вопросу обратитесь к конспекту лекций и к следующей литературе: [4], глава 1 (§1,2); [5], глава 7 (§29,30); [6], глава 2 (пункты 2.1-2.3); [7], глава XII (§1); [8], глава VI (§1); [9], глава II (§1,3,4,6,7); [10], глава IV (§17-20); [11], глава 4 (пункты 4.1, 4.2, 4.4-4.7).

На занятии по указанию преподавателя

1. Будьте готовы по вопросам, выносимым на обсуждение, сформулировать основные определения и записать соответствующие формулы.
2. Решите на доске и в тетради задания для развития и контроля владения компетенциями из данного пособия.
3. Получите **ИДЗ №17**. Дома выполните его в отдельной тетради и на следующем практическом занятии сдайте на проверку преподавателю. Номер варианта соответствует Вашему порядковому номеру в списке группы.

Литература

а) основная

1. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра: Учебник. В 2-х т. Т.II. М.: Гелиос АРВ, 2009.
2. Глухов М.М. Алгебра и аналитическая геометрия. М.: Гелиос АРВ, 2012.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
4. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.1. Основы алгебры: Учебник для вузов. М.: МЦНМО, 2012.
5. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.2. Линейная алгебра: Учебник для вузов. М.: МЦНМО, 2009.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Изд-во «Лань», 2007.
7. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения: учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.

б) дополнительная

8. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.
9. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.И., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учебное пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
10. Клиот-Дашинский М.И. Алгебра матриц и векторов. СПб.: Изд-во «Лань», 2008.
11. Федорчук В.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебное пособие. М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2010.

Интернет ресурсы

<http://eek.diary.ru/p57704941.htm> - веб-сайт содержит большое количество книг по алгебре и геометрии, в том числе из списка рекомендованной, доступных для бесплатного скачивания.

Примеры решения типовых задач

1. В некотором базисе $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ пространства R^3 даны векторы $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 2)$, $a_3 = (1, 2, 3)$. Требуется: 1) доказать, что векторы a_1, a_2, a_3 образуют базис; 2) найти координаты вектора $x = 6e_1 + 9e_2 + 14e_3$ в базисе $B' = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Решение: 1) Три вектора a_1, a_2, a_3 образуют базис трехмерного пространства, если они линейно

независимы. Составим соответствующее векторное равенство $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$ или $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда получим систему
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$
. Решая эту систему методом Гаусса, получим един-

ственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Следовательно, векторы a_1, a_2, a_3 – линейно независимы и образуют базис пространства R^3 .

2) Найдем координаты вектора $x = 6e_1 + 9e_2 + 14e_3$ (т.е. $x = (6, 9, 14)_B$) в новом базисе $B' = \{a_1, a_2, a_3\}$, где $a_1 = (1, 1, 1)_B$, $a_2 = (1, 1, 2)_B$, $a_3 = (1, 2, 3)_B$.

Пусть $x = (x'_1, x'_2, x'_3)_{B'}$. Тогда связь между координатами вектора x в базисах B и B' выражается

формулами: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, где $x = (x_1, x_2, x_3)_B$, T – матрица перехода от

базиса B к базису B' . Так как известны координаты новых базисных векторов a_1, a_2, a_3 в старом базисе B ,

то составим из них матрицу перехода T : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Находим обратную матрицу T^{-1} : $T^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $x = (6, 9, 14)_B$, то получим $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Таким образом, $x = (1, 2, 3)_{B'}$

или $x = a_1 + 2a_2 + 3a_3$, где $B' = \{a_1, a_2, a_3\}$.

2. Дана матрица $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

Найти координаты вектора e'_3 в базисе B .

Решение: Пусть $e'_3 = (x_1, x_2, x_3)_B$ и $e'_3 = (x'_1, x'_2, x'_3)_{B'}$. Так как вектор e'_3 входит в базис B' , то его разложение в данном базисе имеет вид: $e'_3 = 0 \cdot e'_1 + 0 \cdot e'_2 + 1 \cdot e'_3$, то есть $e'_3 = (0, 0, 1)_{B'}$. Следовательно, получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \text{ то есть в базисе } B = \{e_1, e_2, e_3\} \text{ вектор } e'_3 \text{ имеет координаты } (3, 4, -5)_{B'}.$$

3. Найти матрицу перехода от базиса $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $B' = \{e_2, e_3, e_1\}$.

Решение: Пусть $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, где $e'_1 = e_2$, $e'_2 = e_3$, $e'_3 = e_1$. Найдем координаты новых базисных векторов в старом базисе:

$$\begin{cases} e'_1 = e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \Rightarrow e'_1 = (0, 1, 0)_B, \\ e'_2 = e_3 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \Rightarrow e'_2 = (0, 0, 1)_B, \\ e'_3 = e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \Rightarrow e'_3 = (1, 0, 0)_B. \end{cases}$$

Следовательно, матрица перехода T от базиса B к базису B' имеет вид: $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Практические задания

для развития и контроля владения компетенциями

1. В базисе $B = \{e_1, e_2\}$ даны векторы $a_1 = 2e_1 + e_2$, $a_2 = e_1 - 2e_2$. Требуется:

1) доказать, что векторы a_1, a_2 образуют базис; 2) найти координаты вектора $x = 3e_1 + 2e_2$ в базисе $B' = \{a_1, a_2\}$.

2. Выяснить, образуют ли базис трехмерного пространства R^3 векторы $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1)$, $a_3 = (2, 1, 2)$.

3. Выяснить, образуют ли базис четырехмерного пространства R^4 векторы $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1, 0)$, $a_3 = (0, -1, 0, -1)$, $a_4 = (1, 0, 0, 1)$.

4. В базисе $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ задан вектор $x = (4, 0, -12)$. Найти координаты этого вектора в базисе $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, где $e'_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $e'_2 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3$, $e'_3 = 3e_1 + 4e_2 + 3e_3$.

5. Дана матрица $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $B = \{e_1, e_2\}$ к базису $B' = \{e'_1, e'_2\}$. Найти координаты векторов e_1, e_2 в базисе B' .

6. Дана матрица $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

Найти координаты векторов e_1, e_2, e_3 в базисе B' .

7. Дана матрица $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$.

Найти координаты вектора e'_2 в базисе B .

8. Найти матрицу перехода от базиса $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, где $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = -e_1 + 2e_3$, $e'_3 = e_1 + e_2$.

9. Найти матрицу перехода от базиса $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ к базису $\{e_3, e_4, e_2, e_1\}$.

10. Даны две системы векторов: $B = \{e_1 = (5, -1, 3), e_2 = (4, -1, 2), e_3 = (0, 0, 1)\}$, $B' = \{e'_1 = (3, 2, 3), e'_2 = (-4, -3, -5), e'_3 = (5, 1, -1)\}$. Доказать, что каждая из двух заданных систем векторов B и B' является базисом. Найти матрицу перехода от базиса B к базису B' .

ИДЗ №10 по теме «Базис пространства. Координаты вектора в базисе»

В базисе $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ задан вектор X. Найти координаты этого вектора в базисе $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ и записать его разложение по векторам базиса B'.		
Вариант 1. $X = 4e_1 + 12e_2 - 3e_3;$ $\begin{cases} e'_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ e'_2 = 2e_1 + 3e_2 + 3e_3 \\ e'_3 = 3e_1 + 4e_2 + 3e_3 \end{cases}$	Вариант 2. $X = 43e_1 - 7e_3;$ $\begin{cases} e'_1 = 4e_1 - 2e_2 + e_3 \\ e'_2 = 2e_1 + 5e_3 \\ e'_3 = 8e_1 - e_2 + 3e_3 \end{cases}.$	Вариант 3. $X = 2e_1 + 11e_2 - 7e_3;$ $\begin{cases} e'_1 = 8e_1 - 2e_2 + 3e_3 \\ e'_2 = 2e_1 - 4e_2 + 7e_3 \\ e'_3 = -4e_1 - e_2 \end{cases}$
Вариант 4. $X = 3e_1 - 2e_2 - 8e_3;$ $\begin{cases} e'_1 = 2e_1 - e_2 \\ e'_2 = -e_1 + 2e_2 \\ e'_3 = e_1 - e_2 + e_3 \end{cases}.$	Вариант 5. $X = 35e_1 + 2e_2 + 4e_3;$ $\begin{cases} e'_1 = 4e_1 - 5e_2 \\ e'_2 = 4e_1 + 3e_2 - 2e_3 \\ e'_3 = 5e_1 - 7e_2 + e_3 \end{cases}.$	Вариант 6. $X = 7e_1 - 2e_2 + 3e_3;$ $\begin{cases} e'_1 = 5e_1 + 3e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 - 5e_2 - 2e_3 \\ e'_3 = 5e_1 - 2e_2 + e_3 \end{cases}.$
Вариант 7. $X = 5e_1 - 4e_2 + e_3;$ $\begin{cases} e'_1 = 3e_1 + 4e_2 + 4e_3 \\ e'_2 = -2e_1 + 4e_2 + 3e_3 \\ e'_3 = 4e_1 + 5e_2 + 5e_3 \end{cases}.$	Вариант 8. $X = 3e_1 + 2e_2 - 6e_3;$ $\begin{cases} e'_1 = 4e_1 - 5e_2 + 2e_3 \\ e'_2 = 5e_1 - e_2 + 3e_3 \\ e'_3 = 6e_1 - 9e_2 + 4e_3 \end{cases}.$	Вариант 9. $X = 8e_1 - 3e_2 + e_3;$ $\begin{cases} e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3 \\ e'_2 = -6e_1 + 4e_2 + 2e_3 \\ e'_3 = -e_1 + e_2 + 5e_3 \end{cases}$
Дана матрица T перехода от базиса $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $B' = \{a_1, a_2, a_3\}$. Найти координаты векторов e_1, e_2, e_3 в базисе B'. Записать разложения этих векторов по векторам базиса B'.		
Вариант 10. $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 11. $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 12. $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Вариант 13. $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 8 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 14. $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 15. $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & -8 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$
Вариант 16. $T = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	Вариант 17. $T = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	Вариант 18. $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & -8 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$
Вариант 19. $T = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$	Вариант 20. $T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	Вариант 21. $T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Вариант 22. $T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$	Вариант 23. $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	Вариант 24. $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$
Вариант 25. $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$	Вариант 26. $T = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	Вариант 27. $T = \begin{pmatrix} 17 & 10 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$
Вариант 28. $T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 4 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$	Вариант 29. $T = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	Вариант 30. $T = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -7 & -5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебник. – М.: Проспект, 2012.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия: учебник. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

Дополнительная литература:

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник для вузов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
2. Кадомцев С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.
3. Канатников А. Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия: учеб. пособие. - М.: Академия, 2009.
4. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – СПб.: Изд-во «Лань», 2011.

Методическая литература: отсутствует

Интернет-ресурсы:

1. <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
2. <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
3. <http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.
4. <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.
5. <http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России. Основные разделы: журналы, персоналии, организации, конференции, семинары, видеотека, библиотека.
6. <http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).
7. <http://www.mccme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА

**Методические указания для обучающихся по организации и проведению
самостоятельной работы**

Направление подготовки 03.03.02 Физика
Направленность (профиль)
«Медицинская физика»

**Ставрополь
2026**

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение
2. Самостоятельная работа как важнейшая форма учебного процесса
3. Цели и основные задачи СРС
4. Виды самостоятельной работы
5. Методические рекомендации для студентов по изучению дисциплины
6. Выполнение разноуровневых заданий, решение разноуровневых задач
7. Вопросы для коллоквиумов
8. Вопросы к экзамену
9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

ВВЕДЕНИЕ

Целью освоения дисциплины «Высшая алгебра» является формирование компетенции ОПК-1 (Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности) будущего бакалавра по направлению подготовки 03.03.02 Физика путем освоения возможностей использования средств и методов высшей алгебры для решения прикладных задач в области физики.

Основными задачами освоения дисциплины «Высшая алгебра» являются:

- получение базовых знаний по высшей алгебре;
- приобретение навыков исследования и решения базовых задач высшей алгебры;
- овладение современным алгебраическим аппаратом для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач в области физики;
- развитие способностей применять полученные знания и умения в смежных дисциплинах и будущей профессиональной деятельности.

При освоении дисциплины вырабатывается общематематическая культура: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения алгебраических задач и задач, связанных с приложениями алгебраических методов.

В результате изучения дисциплины «Высшая алгебра» студент должен

Знать:

основные свойства важнейших алгебраических структур;
основы высшей алгебры и их применение при математическом моделировании физических процессов

Уметь:

оперировать с элементами числовых полей, линейных пространств, матрицами, векторами;
решать системы линейных уравнений;
использовать аппарат линейной алгебры для освоения теоретических основ и практического использования физических моделей;
применять алгебраические методы для решения прикладных задач, а так же производить оценку качества полученных решений;
демонстрировать способность к абстракции, в том числе умение логически развивать отдельные формальные теории и устанавливать связь между ними.

Владеть:

методами высшей алгебры;
методами анализа и синтеза математических моделей в сфере будущей профессиональной деятельности.

Самостоятельная работа как важнейшая форма учебного процесса

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50% часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов (далее СРС). В связи с этим, обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования - "подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности".

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Цели и основные задачи СРС

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой специалиста и бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная

работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

Виды самостоятельной работы

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы – аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации, содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.):

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателей являются:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание рефератов;
- подготовка к семинарам и лабораторным работам, их оформление;

- составление аннотированного списка статей из соответствующих журналов по отраслям знаний (педагогических, психологических, методических и др.);
- подготовка рецензий на статью, пособие;
- выполнение микроисследований;
- подготовка практических разработок;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;
- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов.

(В зависимости от особенностей факультета перечисленные виды работ могут быть расширены, заменены на специфические).

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

- текущие консультации;
- коллоквиум как форма контроля освоения теоретического содержания дисциплин: (в часы консультаций, предусмотренных учебным планом);
- прием и разбор домашних заданий (в часы практических занятий);
- прием и защита лабораторных работ (во время проведения л/р);
- выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин (руководство, консультирование и защита курсовых работ (в часы, предусмотренные учебным планом);
- выполнение учебно-исследовательской работы (руководство, консультирование и защита УИРС);
- прохождение и оформление результатов практик (руководство и оценка уровня сформированности профессиональных умений и навыков);
- выполнение выпускной квалификационной работы (руководство, консультирование и защита выпускных квалификационных работ) и др.

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

На первом этапе необходимо ознакомиться с рабочей программой дисциплины, в которой рассмотрено содержание тем практических занятий, темы и виды самостоятельной работы. По каждому виду самостоятельной работы предусмотрены определённые формы отчетности

При подготовке к занятиям студентам рекомендуется при отсутствии ответов в конспектах лекций на теоретические задания для оценки владения компетенциями воспользоваться поисковыми системами и электронными энциклопедиями наряду с бумажными источниками информации и провести сравнительный анализ полученных сведений.

Для успешного освоения дисциплины, необходимо выполнить следующие виды самостоятельной работы, используя рекомендуемые источники информации.

Для успешного освоения дисциплины, необходимо выполнить следующие виды самостоятельной работы, используя рекомендуемые источники информации

№ п/п	Виды самостоятельной работы	Рекомендуемые источники информации (№ источника)			
		Основная	Дополнительная	Методическая	Интернет-ресурсы
1	Выполнение разноуровневых заданий, решение разноуровневых задач	1	1 2	2 3 4	2
2	Подготовка к коллоквиуму	1	1 2	1 2 3 4	1 2 3 4 5 6 1 2 4 5
3	Подготовка к практическому занятию	1	1 2	2 4	2
4	Самостоятельное изучение литературы	1	1 2	1 3 4	1 3 5 1 2 3

Выполнение разноуровневых заданий, решение разноуровневых задач

Темы «Действия над матрицами. Вычисление определителей»

Вариант 1 1. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют. 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$	Вариант 2 1. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют. 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$
Вариант 3 1. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют. 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}.$	Вариант 4 1. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют. 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$
Вариант 5 1. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют. 2. Вычислить определитель	Вариант 6 1. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют. 2. Вычислить определитель

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$	$\begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}.$
Вариант 7 1. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют. 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$	Вариант 8 1. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют. 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$
Вариант 9 1. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют. 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 8 & 6 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$	Вариант 10 1. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют. 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 9 & 6 & 3 & 0 \\ 10 & 6 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}.$

Темы «Ранг матрицы. Обратная матрица»

Вариант 1 1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & -6 \\ 2 & -3 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 10 & -11 \end{pmatrix}.$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$	Вариант 2 1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -12 & -12 \\ 2 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & -9 & -8 \end{pmatrix}.$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$
Вариант 3 1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 6 & -9 & 21 & -3 & -12 \\ -4 & 6 & -14 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$	Вариант 4 1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & 19 & -4 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
Вариант 5 1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -7 & 34 & -16 \\ -3 & 0 & -2 \\ -2 & 11 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$	Вариант 6 1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -2 & -1 & -5 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Вариант 7 1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 4 & -6 & 13 & 18 \\ 2 & -5 & 13 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \\ 3 & -4 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$	Вариант 8 1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 4 & -6 & -3 & 13 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$
Вариант 9 1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$	Вариант 10 1. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$ 2. Для данной матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} и результат проверить умножением: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

Тема «Методы решения систем линейных уравнений»

Вариант 1 1. Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$ 2. Решить систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 13x_3 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 13x_3 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 2. \end{cases}$	Вариант 2 1. Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$ 2. Решить систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 11x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$
Вариант 3 1. Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$ 2. Решить систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 9x_3 = -1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$	Вариант 4 1. Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1. \end{cases}$ 2. Решить систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -1, \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$
Вариант 5 1. Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$ 2. Решить систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера $\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - 4x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$	Вариант 6 1. Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 3. \end{cases}$ 2. Решить систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 11x_2 - 7x_3 = 1, \\ 4x_1 + 14x_2 - 7x_3 = 1. \end{cases}$

Вариант 7 1. Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$ 2. Решить систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера $\begin{cases} 3x_1 + 14x_2 - 10x_3 = 1, \\ 4x_1 + 18x_2 - 11x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$	Вариант 8 1. Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$ 2. Решить систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера $\begin{cases} 4x_1 + 14x_2 - 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 11x_2 - 4x_3 = 1. \end{cases}$
Вариант 9 1. Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_5 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$ 2. Решить систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 8x_2 - 10x_3 = 0, \\ 4x_1 + 10x_2 - 11x_3 = 1. \end{cases}$	Вариант 10 1. Найти общее решение системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$ 2. Решить систему линейных уравнений матричным методом и методом Крамера $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 13x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 10x_3 = 1. \end{cases}$

Тема «Линейный оператор»

Вариант 1 1. Пусть $x = (x_1; x_2; x_3)$. Проверить является ли линейным оператор $\varphi(x) = (6x_1 - 5x_2 - 4x_3; -3x_1; x_2 + 2x_3)$. 2. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$	Вариант 2 1. Пусть $x = (x_1; x_2; x_3)$. Проверить является ли линейным оператор $\varphi(x) = (2x_1 - 5x_2; -x_1 + 3; x_2 + 4x_3)$. 2. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$
Вариант 3 1. Пусть $x = (x_1; x_2; x_3)$. Проверить является ли линейным оператор $\varphi(x) = (6x_1x_2 - 4x_3; -3x_1 + x_2; 2x_3)$. 2. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$	Вариант 4 1. Пусть $x = (x_1; x_2; x_3)$. Проверить является ли линейным оператор $\varphi(x) = (6x_1 - 4x_3; -3 + x_1; x_2 - 2x_3)$. 2. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$
Вариант 5 1. Пусть $x = (x_1; x_2; x_3)$. Проверить является ли линейным оператор $\varphi(x) = (5x_1 - x_2 + x_3; -3x_1 + x_2; x_2 - x_3)$. 2. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$	Вариант 6 1. Пусть $x = (x_1; x_2; x_3)$. Проверить является ли линейным оператор $\varphi(x) = (6 - 5x_2; -3x_1; x_2 + 2x_3)$. 2. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

Вариант 7 1. Пусть $x = (x_1; x_2; x_3)$. Проверить является ли линейным оператор $\varphi(x) = (6x_1^2 - 5; -x_1; x_2 + 2x_3)$. 2. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$	Вариант 8 1. Пусть $x = (x_1; x_2; x_3)$. Проверить является ли линейным оператор $\varphi(x) = (5x_2 - 4x_3; x_1; x_2 - 2x_3)$. 2. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$
Вариант 9 1. Пусть $x = (x_1; x_2; x_3)$. Проверить является ли линейным оператор $\varphi(x) = (4x_3; -3x_1 + x_2; x_2^2 + 2x_3)$. 2. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$	Вариант 10 1. Пусть $x = (x_1; x_2; x_3)$. Проверить является ли линейным оператор $\varphi(x) = (x_1 - 3x_2; -x_1; x_1 + 2x_3)$. 2. Найти собственные значения и собственные векторы оператора, заданного матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

Решение разноуровневых задач
ИДЗ по теме «Методы решения систем линейных уравнений»

Базовый уровень

1. Исследовать систему на совместность и число решений системы.
2. Решить систему методом Гаусса.

Для определенной системы

3. Решить систему методом Крамера.

Повышенный уровень

4. Изменить систему таким образом, чтобы она была совместной (определенной и неопределенной), несовместной.
5. Определенную систему решить матричным методом.

Системы к индивидуальным домашним заданиям выбираются согласно номера варианта, выданного преподавателем (порядковый номер студента в журнале группы).

Системы к индивидуальным домашним заданиям.

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 18, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 = -10, \\ x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = -48. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 12, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 17, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - x_3 + 6x_4 = 8, \\ 2x_2 + 5x_4 = 9. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 12x_3 - 3x_4 = 27, \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 7. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x_1 - 7x_2 + 8x_3 + x_4 = 15, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 25, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 13x_4 = 11, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + 14x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 13. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 9, \\ 3x_1 + 14x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 9x_3 - 5x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 5. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 6x_2 + 21x_3 + 52x_4 = -8, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 256x_4 = -48. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x_1 + 16x_2 + 81x_3 + 265x_4 = -48, \\ 4x_2 + 18x_3 + 48x_4 = -10, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 29, \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + x_4 = 41, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 30, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 29, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 12, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 5x_4 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 16. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 16, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 11. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ x_1 - 12x_2 + 15x_3 + 5x_4 = 23, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -1, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 25, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 19, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

Вопросы для защиты ИДЗ.

1. Дайте определения системы линейных уравнений, однородной и неоднородной систем, решения системы.
2. Какая система называется совместной, а какая несовместной?
3. Дайте определение определенной и неопределенной систем.
4. Сформулируйте критерий совместности систем линейных уравнений.
5. Расскажите о методе Гаусса. Перечислите элементарные преобразования матрицы.
6. Когда, решая систему методом Гаусса, делаем вывод о несовместности системы; об определенности системы; о неопределенности системы?
7. Как найти общее решение системы, приведенной к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса?
8. В чем особенность применения метода Гаусса при решении однородной системы?
9. Как записать систему линейных уравнений в матричной форме?
10. Вспомните условия существования обратной матрицы и методы ее нахождения.
11. Изложите матричный метод решения систем линейных уравнений. Какие системы можно решать этим методом.
12. Расскажите о методе Крамера решения систем линейных уравнений. Каковы границы его применения?
13. Какие выводы можно сделать о числе решений однородной системы линейных уравнений.
14. Сделайте сравнительный анализ рассмотренных методов решения систем линейных уравнений.

Критерии оценивания компетенций

Оценка "**отлично**" выставляется, если студент выполнил задания как базового, так и повышенного уровня, все вычисления представлены в работе; при ответе на вопросы при защите работы показывает глубокое и всестороннее знание предмета, обязательной и дополнительной литературы, аргументировано и логически стройно излагает материал, пользуясь математической символикой.

Оценка «**хорошо**» ставится, если студент выполнил задания базового уровня, все вычисления представлены в работе; при ответе на вопросы при защите работы студент показывает знание предмета, обязательной литературы, знакомстве с дополнительной литературой, аргументировано излагает материал, умеет применять знания для анализа конкретных ситуаций, однако незначительно нарушает последовательность изложения материала, дает недостаточно полное, хотя и верное определение понятий.

Оценка «**удовлетворительно**» ставится, если студент решил систему линейных уравнений двумя методами, вычисления представлены в работе; при ответе на вопросы при защите работы показал, что он в основном знает предмет, обязательную литературу, может практиче-

ски применять свои знания, но программный материал излагает фрагментарно и непоследовательно, допускает отдельные ошибки и погрешности при применении математической символики и понятий.

Оценка **«неудовлетворительно»** ставится, если студент не выполнил ИДЗ, или работа не содержит необходимых вычислений; при защите работы не отвечает на предлагаемые ему вопросы или его ответ показывает, что не усвоено основное содержание предмета, допускаются грубые ошибки при формулировке теорем, определении основных понятий, неправильно используется математическая символика.

Описание шкалы оценивания

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным **55**. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает выполнение ИДЗ и собеседование по представленным вопросам. Допуском к собеседованию является правильное выполнение не менее 60% заданий ИДЗ.

Предлагаемые студенту задания позволяют проверить компетенцию ОПК-1 Для подготовки к данному оценочному мероприятию необходимо прочитать лекционный материал, выполнить ИДЗ и сдать их на проверку не позднее чем за неделю до контрольного мероприятия, найти ответы на поставленные вопросы, изучить дополнительную литературу, установить взаимосвязи между изучаемыми понятиями, запомнить основные определения, свойства, теоремы, продумать, где они могут применяться. Рекомендуется готовиться к данному контрольному мероприятию в течение семестра, разбирая теоретические задания для оценки сформированности компетенций к каждому практическому занятию, вовремя выполняя индивидуальные домашние задания (ИДЗ). Эти задания предлагаются в УМК дисциплины «Высшая алгебра», представленном на кафедре высшей математики.

При подготовке к ответу студенту разрешается пользоваться своими тетрадями с ИДЗ, никакими другими справочными материалами пользоваться не разрешается. Для подготовки к ответу на каждый вопрос отводится время до 3-5 минут, в течение которого студент может записать план своего ответа. Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой дисциплины. При проверке усвоения этого материала производится выявление полноты, прочности усвоения студентами теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

При оценке в первую очередь учитываются показанные студентами знания и умения (их полноту, глубину, прочность, использование). Оценка также зависит от наличия и характера погрешностей. Среди погрешностей выделяют ошибки и недочеты. Погрешность считается

ошибкой, если она свидетельствует о том, что студент не овладел основными знаниями, умениями, указанными в программе.

К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или о отсутствии знаний не считающихся основными в соответствии с программой. Недочетами также являются: погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного студентом задания или способа его выполнения, неаккуратная запись, отсутствие пояснений.

Вопросы для коллоквиумов

по дисциплине «Высшая алгебра»

Коллоквиум 1

Базовый уровень

1. Дайте определение n -арной, унарной, бинарной, тернарной операций. Приведите примеры. Какая операция называется алгебраической?
2. Введите определения коммутативной, ассоциативной, обратимой алгебраических операций; нейтрального, симметричного, противоположного, обратного элементов; алгебраической системы, алгебры, модели.
3. Сформулируйте определение полугруппы, моноида, группы, абелевой группы. Какова взаимосвязь между этими понятиями? Приведите примеры перечисленных алгебраических структур.
4. Дайте определения кольца и поля. Чем отличаются эти алгебраические структуры? Приведите примеры колец и полей.
5. Какие способы построения множества натуральных чисел Вы знаете? Дайте аксиоматическое определение множества натуральных чисел. Объясните смысл каждой из аксиом Пеано.
6. Для чего в математике используется метод математической индукции (ММИ)? Перечислите основные этапы – доказательства с помощью ММИ.
7. Дайте определение множества целых чисел и укажите основные свойства этого числового множества.
8. Какие алгебраические операции выполнимы на рассматриваемом множестве, и какую алгебраическую структуру образует это множество относительно введенных операций?
9. Сформулируйте определение множества рациональных чисел и перечислите основные свойства этого множества.
10. Какие Вы знаете способы построения множества действительных чисел? Расскажите об одном из способов построения.
11. В каком отношении находятся рассмотренные выше числовые множества? Каково соотношение между этими числовыми множествами и точками числовой прямой?
12. Дайте определение матрицы, элементов матрицы; расскажите, как матрицы обозначаются, приведите примеры.
13. Введите понятия квадратной, диагональной, единичной, нулевой, ступенчатой, транспонированной, симметрической матриц, матрицы-строки и матрицы-столбца. Приведите примеры.
14. Когда говорят о размерах, а когда о размерности матрицы? Приведите примеры и введите соответствующие обозначения.
15. Дайте определение суммы двух матриц. Какие матрицы можно складывать? Приведите примеры.
16. Как умножить матрицу на число? Приведите пример.
17. Для каких двух матриц можно определить операцию произведения? Введите эту операцию, проиллюстрируйте ее на примере.
18. Как обозначаются определители? Расскажите о правилах вычисления определителей второго и третьего порядков. Как называют правило вычисления определителей третьего порядков?
19. Сформулируйте основные свойства определителей.
20. Введите понятия минора и алгебраического дополнения элемента определителя.
21. Сформулируйте теорему о вычислении определителя и следствие из нее.
22. Какие задачи привели к необходимости расширения поля действительных чисел до поля комплексных чисел?
23. Дайте определение поля комплексных чисел.
24. Какие формы записи комплексного числа Вы знаете? Дайте их определения.

25. Определите следующие понятия: действительная и мнимая части комплексного числа, мнимая единица, коэффициент при мнимой части, сопряженное комплексное число, модуль и аргумент комплексного числа.
26. Как перевести комплексное число из алгебраической формы записи в тригонометрическую форму и обратно?
27. Определите действия сложения, вычитания, умножения и деления над комплексными числами в алгебраической форме. Докажите записанные Вами правила. Какое свойство сопряженных комплексных чисел используется при делении?
28. Определите действия умножения, деления, возведения в целую степень и извлечение корня n -ой степени ($n \in \mathbb{N}$) для комплексных чисел записанных в тригонометрической и показательных формах.
29. Какая матрица называется матрицей ступенчатого вида?
30. Дайте определение ранга матрицы.
31. Перечислите элементарные преобразования матрицы.
32. Как вычислить ранг матрицы с помощью элементарных преобразований?
33. Введите понятия линейно зависимых и линейно независимых строк (столбцов) матрицы. Какое еще можно дать определение ранга матрицы?
34. Определите понятия обратимая матрица, обратная матрица, вырожденная и невырожденная матрицы.
35. В каком случае определитель матрицы равен нулю?
36. Назовите условия обратимости матрицы.
37. Дайте определение минора и алгебраического дополнения.
38. Сформулируйте алгоритм нахождения обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.
39. Назовите элементарные преобразования матрицы. Расскажите, как найти обратную матрицу с помощью элементарных преобразований путем присоединения единичной матрицы.
40. Как решается вопрос об обратимости матрицы при применении метода элементарных преобразований для ее отыскания?
41. Как проверить правильность нахождения обратной матрицы?

Повышенный уровень

1. Какие способы построения множества натуральных чисел Вы знаете? Дайте аксиоматическое определение множества натуральных чисел. Объясните смысл каждой из аксиом Пеано.
2. Какие операции определены на множестве натуральных чисел? Перечислите свойства введенных операций. Какую алгебраическую структуру относительно введенных операций образует множество натуральных чисел?
3. Назовите причины расширения множества натуральных чисел до множества целых чисел.
4. Назовите основные свойства множества действительных чисел. Какую алгебраическую структуру образует множество действительных чисел относительно введенных в нем алгебраических операций?
5. Коммутативно ли умножение двух матриц?
6. Приведите пример использования матриц в области Вашей предметной деятельности.
7. Какие задачи приводят к понятиям определителей второго и третьего порядков.
8. Введите понятия члена определителя, перестановки, транспозиции. Как определить четность перестановки?
9. Дайте определение определителя n -го порядка? Докажите, что правило «треугольника» является частным случаем этого определения.
10. Какие способы геометрической интерпретации комплексных чисел Вы знаете?
11. Укажите роль корней n -ой степени из единицы и их геометрическую интерпретацию.

12. Докажите формулы для умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме.
13. Изложите метод окаймляющих миноров для нахождения ранга матрицы. На каких свойствах этот метод основан?
14. Выведите формулу нахождения обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.

Коллоквиум 2

Базовый уровень

Вопросы к коллоквиуму.

1. Дайте определения системы линейных уравнений, однородной и неоднородной систем, решения системы.
2. Какая система называется совместной, а какая несовместной?
3. Дайте определение определенной и неопределенной систем.
4. Сформулируйте критерий совместности систем линейных уравнений.
5. Расскажите о методе Гаусса. Перечислите элементарные преобразования матрицы.
6. Как найти общее решение системы, приведенной к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса?
7. Как записать систему линейных уравнений в матричной форме?
8. Вспомните условия существования обратной матрицы и методы ее нахождения.
9. Изложите матричный метод решения систем линейных уравнений. Какие системы можно решать этим методом.
10. Расскажите о методе Крамера решения систем линейных уравнений. Каковы границы его применения?
11. Дайте определение линейного пространства.
12. Введите понятие линейно зависимой и линейно независимой системы векторов. Дайте различные определения.
13. Докажите эквивалентность введенных вами определений.
14. Дайте определение базиса линейного пространства. Может ли базис линейного пространства содержать нулевой вектор?
15. Дайте определение размерности линейного пространства.
16. Дайте определение координат вектора линейного пространства в данном базисе.
17. Как выполняются основные операции над векторами в координатах?
18. Расскажите, как получить матрицу перехода от одного базиса к другому. Является ли эта матрица вырожденной или нет и почему?
19. Дайте определение фундаментальной системы решений однородной системы линейных уравнений.
20. Сформулируйте правило построения ФСР.
21. Дайте определение евклидова пространства.
22. Дайте определение длины вектора в евклидовом пространстве, приведите примеры.
23. Дайте определение нормированного вектора.
24. Как нормировать вектор?
25. Как определяется угол между двумя векторами евклидова пространства?
26. Какие векторы называются ортогональными?
27. Дайте определение ортогонального и ортонормированного базисов.
28. Расскажите о процессе ортогонализации. Выведите формулы.
29. Дайте определение линейного оператора.
30. Введите понятие матрицы линейного оператора.
31. Каким методом удобнее решать системы линейных уравнений для нахождения матрицы линейного оператора?
32. Введите понятия собственного вектора и собственного значения линейного оператора.

33. Запишите, как выглядит характеристическое уравнение для нахождения собственных значений линейного оператора?
34. Как найти собственные векторы линейного оператора?

Повышенный уровень

1. Когда, решая систему методом Гаусса, делаем вывод о несовместности системы; об определенности системы; о неопределенности системы?
2. В чем особенность применения метода Гаусса при решении однородной системы?
3. Какие выводы можно сделать о числе решений однородной системы линейных уравнений.
4. Сделайте сравнительный анализ рассмотренных методов решения систем линейных уравнений.
5. Могут ли два базиса линейного пространства L_n состоять из разного числа векторов?
6. Выведите формулу преобразования координат вектора при переходе от старого базиса к новому.
7. Как можно рассматривать ненулевое решение однородной системы линейных уравнений? Докажите, что множество n -мерных векторов, являющихся решениями системы линейных однородных уравнений, является линейным подпространством арифметического векторного пространства.
8. Какие условия необходимо проверить, чтобы доказать линейность оператора?
9. Зависит ли матрица линейного оператора от выбора базиса?

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка **"отлично"** выставляется, если студент при ответе на вопросы как базового так и повышенного уровня показывает глубокое и всестороннее знание предмета, обязательной и дополнительной литературы, аргументировано и логически стройно излагает материал, пользуясь математической символикой, может применять знания для анализа конкретных ситуаций, свободно ориентируется в межпредметных связях.

Оценка **«хорошо»** ставится, если при ответе на вопросы базовой части студент показывает знание предмета, обязательной литературы, знакомстве с дополнительной литературой, аргументировано излагает материал, умеет применять знания для анализа конкретных ситуаций, однако незначительно нарушает последовательность изложения материала, дает недостаточно полное, хотя и верное определение понятий.

Оценка **«удовлетворительно»** ставится, если студент при ответе на вопросы базовой части показал, что он в основном знает предмет, обязательную литературу, может практически применять свои знания, но программный материал излагает фрагментарно и непоследовательно, допускает отдельные ошибки и погрешности при применении математической символики и понятий, слабо ориентируется в межпредметных связях;.

Оценка **«неудовлетворительно»** ставится, если студент не отвечает на предлагаемые ему вопросы базовой или его ответ показывает, что не усвоено основное содержание предмета, обнаруживается незнание большей части учебного материала, допускаются грубые ошибки при формулировке теорем, определении основных понятий, неправильно используется математическая символика.

2. Описание шкалы оценивания

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным 55. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного	Рейтинговый балл (в % от максимального)
---------------------------------	---

задания	балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения данного оценочного мероприятия включает в себя устный опрос студентов в форме индивидуального собеседования на вопросы коллоквиума. Каждому студенту предлагается по одному вопросу из каждой темы. Сначала студент отвечает на вопросы базового уровня. При успешном ответе ему предлагается один-два вопроса из вопросов повышенного уровня, что позволяет преподавателю определить уровень владения материалом.

Предлагаемые студенту задания позволяют проверить компетенции ОПК-1. Для подготовки к данному оценочному мероприятию необходимо прочитать лекционный материал, найти ответы на поставленные вопросы, изучить дополнительную литературу, установить взаимосвязи между изучаемыми понятиями, запомнить основные определения, свойства, теоремы, продумать, где они могут применяться. Запомнить методы доказательства основных теорем, свойств и провести самостоятельно доказательство оставшихся положений, включённых в вопросы для подготовки к данному мероприятию. Рекомендуются готовиться к данному контрольному мероприятию в течение семестра, разбирая теоретические задания для оценки сформированности компетенций к каждому практическому занятию. Эти задания предлагаются в УМК дисциплины «Высшая алгебра», представленном на кафедре высшей математики.

При подготовке к ответу студенту не разрешается пользоваться никакими справочными материалами. Для подготовки к ответу даётся время на подготовку до 10-15 минут, в течение которого студент может записать план своего ответа, основные формулы, план доказательства теорем. Для подготовки к ответу на вопросы повышенного уровня предлагается дополнительное время.

Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой дисциплины. При проверке усвоения этого материала производится выявление полноты, прочности усвоения студентами теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

При оценке в первую очередь учитываются показанные студентами знания и умения (их полноту, глубину, прочность, использование). Оценка также зависит от наличия и характера погрешностей. Среди погрешностей выделяют ошибки и недочеты. Погрешность считается ошибкой, если она свидетельствует о том, что студент не овладел основными знаниями, умениями, указанными в программе.

К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или о отсутствии знаний не считающихся основными в соответствии с программой. Недочетами также являются: погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного студентом задания или способа его выполнения, неаккуратная запись, небрежная формулировка основных определений, теорем, свойств.

Вопросы к экзамену

Базовый уровень

Вопросы (задача, задание) для проверки уровня обученности

Знать

1. Определение бинарного соответствия и бинарного отношения.
2. Свойства отношений. Отношения эквивалентности и порядка.
3. Функциональные соответствия и отображения, их типы.
4. Алгебраические операции и алгебраические системы.
5. Алгебры с одной операцией: полугруппы, группы.
6. Алгебра с двумя операциями: кольцо, поле.
7. Множество натуральных чисел, аксиомы Пеано.
8. Метод математической индукции и его роль.
9. Кольцо целых чисел.
10. Поле рациональных чисел.
11. Определение поля комплексных чисел.
12. Алгебраическая форма записи комплексного числа, действия над комплексными числами в алгебраической форме.
13. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.
14. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
15. Матрицы, основные определения.
16. Действия над матрицами.
17. Определение определителя квадратной матрицы.
18. Свойства определителей.
19. Миноры и алгебраические дополнения.
20. Вычисление определителя n -го порядка.
21. Ранг матрицы, его вычисление с помощью элементарных преобразований.
22. Обратная матрица. Нахождение обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.
23. Вычисление обратной матрицы путем присоединения единичной.
24. Системы линейных уравнений. Основные определения.
25. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
26. Критерий совместности систем линейных уравнений.
27. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
28. Метод Крамера решения систем линейных уравнений.
29. Линейное пространство.
30. Линейная зависимость векторов. Базис и размерность линейного пространства.
31. Связь между координатами векторов в различных базисах.
32. Линейные подпространства, линейная оболочка.
33. Скалярное произведение векторов. Евклидово пространство.
34. Основные метрические понятия.
35. Ортогональный и ортонормированный базисы. Процесс ортогонализации.
36. Определение линейного оператора, примеры.
37. Матрица линейного оператора.
38. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора, их нахождение.

Уметь,
владеть

1. Является ли бинарной алгебраической операцией умножение вектора на скаляр в трёхмерном евклидовом пространстве?

2. Образуется ли группа по умножению множество матриц вида $\begin{pmatrix} 2\alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \neq 0, \alpha \in R, \beta \in R$?
3. Образуется ли группа по умножению множество всех степеней числа 2 с целыми показателями?

4. Образуется ли группа по умножению множество чисел вида $b + c\sqrt{3}$, где b и c рациональные числа, не равные нулю одновременно.
5. Определить является ли кольцом по отношению к обычным операциям сложения и умножения множество чисел вида $0, 1^2, 2^2, \dots, n^2, \dots$.
6. Является ли полем относительно сложения и умножения множество чисел вида $b + c\sqrt{3}$, где b и c целые числа?
7. С помощью метода математической индукции докажите равенства

$$\frac{1}{1 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(7n-6) \cdot (7n+1)} = \frac{n}{7n+1}$$

8. Вычислить в алгебраической форме $\frac{1+2i}{1-3i}$
9. Вычислить в алгебраической форме $(1+4i) \cdot (1+3i)$
10. Вычислите, предварительно переводя числа в тригонометрическую форму $(1+i) \cdot (2-2i)$;
11. Вычислите, предварительно переводя числа в тригонометрическую форму $(1-i)^{15}$

12. Выполните действия над матрицами:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^T + 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

13. Найдите произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

14. Вычислите $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{5} \\ 2+\sqrt{5} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$

15. Вычислите определитель третьего порядка по правилу «треугольника»:

$$\begin{vmatrix} 4 & -5 & 6 \\ 2 & 4 & -3 \\ 12 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

16. Вычислите определитель
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 6 \\ -4 & 3 & 2 & 6 \\ 7 & 5 & -2 & 4 \end{vmatrix},$$

17. С помощью элементарных преобразований вычислите ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 10 & 3 \\ 10 & 18 & 22 & 17 \\ 4 & 8 & 10 & 7 \\ 0 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix};$$

18. Найдите обратные матрицы для данных матриц с помощью алгебраических дополнений: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$

19. Путем присоединения единичной матрицы найдите обратные матрицы для данных матриц: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

20. Решите систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

21. Решите систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 13x_3 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 13x_3 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 2. \end{cases}$$

22. Решите систему линейных уравнений методом
$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 13x_3 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 13x_3 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 2. \end{cases}$$

23. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5. \end{cases}$$

24. Выяснить вопрос о линейной зависимости системы векторов $a_1 = [3, -6, 10], a_2 = [2, -5, 8], a_3 = [1, -3, 5].$

25. Найти базис и ранг системы векторов $a = [3, 1, 1, 1], b = [1, 1, 3, 1], c = [1, 3, 1, 1], d = [-1, 1, 5, 1]$ и выразить через базис остальные векторы системы.

26. Решить матричное уравнение $X \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
27. Найти размерность и базис
 $L = L(a_1 = [1, 1, 1, 1], a_2 = [1, 2, 1, 3], a_3 = [1, 1, 1, 3], a_4 = [1, 1, 2, 2])$
28. $B = \{e_1, e_2\}$ -базис пространства $L_2(R)$. Убедиться, что скалярное произведение векторов в $L_2(R)$ можно задать формулой
 $(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$, где $x = (x_1, x_2)_B, y = (y_1, y_2)_B$
29. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства $L = L(c_1 = (1, 1, -1, -2), c_2 = (1, 1, -2, -3), c_3 = (3, 9, 3, 1))$.
30. Операторы ϕ задан так, что для любого вектора $x = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$
 $\phi(x) = [2\alpha_3 - 3\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_2]$. Установите, является ли он линейным.
31. Найдите матрицу линейного оператора $\varphi(x) = [2\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1, \alpha_2]$ в базисе $B = \{e_1 = [3, 4, 1], e_2 = [0, -1, 2], e_3 = [2, 0, 1]\}$.
32. Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

Повышенный уровень

Вопросы (задача, задание) для проверки уровня обученности

Знать

1. Примеры бинарного соответствия и бинарного отношения.
2. Привести примеры отношения эквивалентности и порядка.
3. Функциональные соответствия и отображения, определять их типы.
4. Сечения в поле рациональных чисел, определение поля действительных чисел.
5. Геометрическая интерпретация модуля и аргументы комплексного числа.
6. Показательная форма записи комплексного числа.
7. Действия над комплексными числами в показательной форме.
8. Вычисление ранга матрицы методом окаймления миноров.
9. Матричные уравнения.
10. Однородная система линейных уравнений, условие существования ненулевых решений.
11. Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
12. Связь между координатами векторов в различных базисах.

Уметь,

Владеть

1. Является ли бинарной алгебраической операцией нахождение среднего арифметического двух целых чисел?
2. Определить является ли группой множество невырожденных квадратных матриц 3-го порядка относительно операции сложения.
3. Образуется ли группа по умножению множество матриц вида $\begin{pmatrix} 2\alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \neq 0, \alpha \in R, \beta \in R$?

4. Определить является ли кольцом по отношению к операциям сложения и умножения множество матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ где α и β рациональные числа

5. Является ли полем относительно сложения и умножения множество чисел вида $b + c\sqrt{3}$, где b и c рациональные числа?

6. Доказать, что для любого натурального n $(6^{2n} + 3^{n+2} + 3^2) : 11$

7. Докажите неравенство с помощью метода математической индукции

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1;$$

8. Вычислить в алгебраической форме $\frac{i^8 - 3i^{11}}{1 + 2i^{19}}$

9. Вычислите, предварительно переведя числа в тригонометрическую форму $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$

10. Даны комплексные числа $z_1 = -5 + 5i\sqrt{3}$, $z_2 = 3i$. Представьте их в показательной форме, найдите частные $\frac{z_2}{z_1}$ и результат представьте в алгебраической форме.

11. Выполните действия над матрицами: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -4 \end{pmatrix}^2$

12. Найдите произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если они существуют:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 8 & -2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & -4 \end{pmatrix};$$

13. Решите неравенство: $\begin{vmatrix} x-1 & x & 2 \\ -1 & 1 & -x \\ 2 & 1 & x+1 \end{vmatrix} \leq 2$.

14. Вычислите определитель, предварительно получив максимально возможное число нулей в каком-либо столбце или какой-либо строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -3 & -5 & -7 & -9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & -7 \end{vmatrix}.$$

15. Методом окаймляющих миноров найдите ранги следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & -2 \\ 9 & 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

16. Решите матричное уравнение: $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$

17. Исследуйте и решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 7 \end{cases}.$$

18. Найдите фундаментальную систему решений системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

19. Найти фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

20. Пользуясь теоремой Крамера, выяснить имеет ли система уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0 \\ 5x_1 + 21x_3 + 13x_4 = 3 \end{cases} \quad \text{единственное решение.}$$

21. При каких a система уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = a \end{cases}$ имеет единственное решение?

22. При каких a система уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = a \end{cases}$ несовместна?

23. Является ли линейным подпространством в действительном пространстве матриц 3-го порядка подмножество, образованное всеми вырожденными матрицами?

24. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства

$$L = L(c_1 = (1, -1, -1, -1), c_2 = (5, -2, 0, -1), c_3 = (3, 4, 2, 1), c_4 = (4, -1, 1, 0)).$$

25. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования φ , заданного в некотором базисе матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

1. Критерии оценивания компетенций

Оценка «отлично» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает материал; свободно справляется с задачами, вопросами и другими видами применения знаний как базового так и повышенного уровня; использует в ответе дополнительный материал все предусмотренные программой задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному; анализирует полученные результаты; проявляет самостоятельность при выполнении заданий.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено полностью, необходимые практические компетенции в основном сформированы, все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения достаточно высокое, при ответе на вопрос или решении задачи повышенного уровня возможны некоторые затруднения, хотя основное содержание этих заданий студенту известно. Студент твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопрос.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если теоретическое содержание курса освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, большинство предусмотренных программой заданий базового уровня выполнено, но в них имеются ошибки, при ответе на поставленный вопрос студент допускает неточности, недостаточно правильные формулировки, наблюдаются нарушения логической последовательности в изложении программного материала.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями выполняет практические работы, необходимые практические компетенции не сформированы, большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному.

2. Описание шкалы оценивания

Промежуточная аттестация в форме экзамена предусматривает проведение обязательной экзаменационной процедуры и оценивается 40 баллами из 100. Минимальное количество баллов, необходимое для допуска к экзамену, составляет 33 балла. Положительный ответ студента на экзамене оценивается рейтинговыми баллами в диапазоне от **20** до **40** ($20 \leq S_{\text{экз}} \leq 40$), оценка **меньше 20** баллов считается неудовлетворительной.

Шкала соответствия рейтингового балла экзамена 5-балльной системе

Рейтинговый балл по дисциплине	Оценка по 5-балльной системе
35 – 40	Отлично
28 – 34	Хорошо
20 – 27	Удовлетворительно

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным **55**. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

3. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения **экзамена** осуществляется в соответствии с Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования в СКФУ.

В экзаменационный билет включаются 3 вопроса: два теоретических вопроса и задача. В билете представлены вопросы как базового уровня, так и повышенного уровня.

Для подготовки по билету отводится 30-40 минут.

При подготовке к ответу студенту разрешается пользоваться калькулятором, телефонами, планшетами и иными справочными материалами. На экзамене имеется таблица индексов, которой могут пользоваться студенты при условии, что предложенная им задача предполагает её использование.

Содержание и объем материала, подлежащего проверке, определяется программой дисциплины. При проверке усвоения этого материала производится выявление полноты, прочности усвоения студентами теории и умения применять ее на практике в знакомых и незнакомых ситуациях.

Оценка на экзамене выставляется в соответствии с соответствующим критерием.

При оценке в первую очередь учитываются показанные студентами знания и умения (их полноту, глубину, прочность, использование). Оценка также зависит от наличия и характера погрешностей. Среди погрешностей выделяют ошибки и недочеты. Погрешность считается ошибкой, если она свидетельствует о том, что студент не овладел основными знаниями, умениями, указанными в программе.

К недочетам относятся погрешности, свидетельствующие о недостаточно полном или недостаточно прочном усвоении основных знаний и умений или об отсутствии знаний не считающихся основными в соответствии с программой. Недочетами также являются: погрешности, которые не привели к искажению смысла полученного студентом задания или способа его выполнения, неаккуратная запись.

Ответ на теоретический вопрос считается безупречным, если по своему содержанию полностью соответствует вопросу, содержит все необходимые теоретические факты и обоснованные выводы, а устное изложение и письменная запись ответа математически грамотна и отличается последовательностью и аккуратностью.

Решение задачи считается безупречным, если правильно выбран способ решения, само решение сопровождается необходимыми объяснениями, верно выполнены нужные вычисления и преобразования, получен верный ответ, последовательно и аккуратно записано решение.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины
Перечень основной и дополнительной литературы, необходимой для освоения
дисциплины (модуля)

Перечень основной литературы:

- [illegible]

Перечень дополнительной литературы:

- 1 Кочетова, Ю. В. Алгебра. Конечномерные пространства. Линейные операторы : курс лекций / Ю.В. Кочетова, Е.Е. Ширшова ; Министерство образования и науки Российской Федерации ; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский педагогический государственный университет». -

Москва : МПГУ; Издательство «Прометей», 2013. - 80 с. - <http://biblioclub.ru/>. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7042-2454-9

- [illegible]

Перечень учебно-методического обеспечения самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

- 1 Высшая алгебра : учебное пособие (курс лекций) : направление подготовки 03.03.02 Физика; Профили подготовки "Физика конденсированного состояния вещества", "Физика Земли и планет". Бакалавриат / авт.-сост. В. В. Бондарь и др. ; ФГАОУ ВО Сев.-Кав. федер. ун-та. - Ставрополь : СКФУ, 2018. - 154 с. : ил.
- 2 Бондарь, В. В. (СКФУ). Математика (алгебра и геометрия) : учебное пособие / В.В. Бондарь, О.Д. Роженко ; ФГАОУ ВПО Сев.-Кав. федер. ун-та, Ч. 1. - Ставрополь : СКФУ, 2016. - 226 с. - Печатается по решению УМС СКФУ
- 3 Методические рекомендации по организации самостоятельной работы по дисциплине «Высшая алгебра» (электронный вариант)
- 4 Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Высшая алгебра» Высшая алгебра» (электронный вариант)

**Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»,
необходимых для освоения дисциплины (модуля):**

- 1 <http://www.allmath.ru/> Вся математика – высшая математика, прикладная математика, математические методы в экономике, финансовая математика.
- 2 <http://www.exponenta.ru/> Образовательный математический сайт.
- 3 <http://www.math.ru/> Ресурс содержит книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни ученых и др.
- 4 <http://www.mathedu.ru/> Интернет-библиотека.
- 5 <http://www.Math-Net.ru/> Общероссийский математический портал представляет собой современную информационную систему, представляющую российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России. Основные разделы: журналы, персоналии, организации, конференции, семинары, видеотека, библиотека.
- 6 <http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту (тесты по математике on-line).
- 7 <http://www.mcsme.ru/> Московский центр непрерывного математического образования.