

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические указания

по выполнению практических работ
по дисциплине «Прикладная математика»
для студентов направления подготовки /специальности
21.04.02 Землеустройство и кадастры

Ставрополь 2026

Практическое занятие № 1

Тема: « ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ»

Пояснение к работе

Последовательность выполнения

1. Руководствуясь приведенным теоретическим материалом, ответить на следующие вопросы:

Как обозначаются множества и элементы множеств?

Какое множество называется конечным?

Какие существуют способы задания множеств?

Как определяется мощность множества?

2. Дать определение следующих понятий:

– множество и элементы множества;

– операции разности и объединения множеств;

– операции пересечения и дополнения;

– универсальное множество и булеан.

3. Перечислить основные тождества алгебры множеств.

4. Представить операции над множествами в виде диаграмм.

5. Выполнить задания для аудиторных занятий.

6. Выполнить задания для самостоятельной работы.

1.1. Начальные понятия теории множеств

Любое понятие дискретной математики можно определить с помощью понятия **множества**. Под множеством понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью. Объекты, которые образуют множество, будем называть **элементами** множества и обозначать малыми буквами латинского алфавита.

Множество и его элементы обозначаются следующим образом:

$A = \{ a_1, a_2, a_3 \}$ – множество, состоящее из трех элементов;

$A = \{ a_1, a_2, \dots \}$ – множество, состоящее из бесконечного числа элементов. Множество может состоять из элементов, которые сами являются множествами. Нужно различать элемент a и множество, состоящее из единственного элемента a .

Пример. Множество $A = \{1, 2\}$ состоит из двух элементов 1, 2; но множество $\{A\}$ состоит из одного элемента A .

Если элемент a принадлежит множеству A , это записывается следующим образом: $a \in A$. Если элемент a не принадлежит множеству A , то записывают так: $a \notin A$. Если какое-либо множество A включено в другое множество B , то используется запись $A \subset B$. Множество, содержащее конечное число элементов, называется конечным, если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется пустым и обозначается $\emptyset$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества: $\emptyset \subseteq A$, где A – любое множество. Таким образом, всякое множество содержит в качестве своих подмножеств пустое множество и само себя.

Пример. 1. Множество корней уравнения $\sin x = 2$ является пустым.

2. Пусть A_1 – множество простых чисел, A_2 – множество целых чисел, $a = 4$. Тогда $a \in A_2$, $a \notin A_1$.

Множество считается заданным, если каким-либо образом указано некоторое свойство, которым обладают все его элементы и не обладают никакие другие объекты.

Множество может быть задано различными способами: перечислением элементов (конечные множества) или указанием их свойств (при этом в обоих случаях при задании множеств используют фигурные скобки).

Примеры задания множеств. 1. Множество M цифр десятичного алфавита можно задать в виде: $M = \{0, 1, \dots, 9\}$ или $M = \{x \mid x - \text{целое}, 0 \leq x \leq 9\}$, где справа от вертикальной черты указывают свойство элементов этого множества. Множество M чётных чисел можно записать в виде: $M = \{x \mid x - \text{чётное число}\}$.

2. Если R – множество точек числовой прямой, то R^n – множество точек n -мерного арифметического пространства; в частности, R^2 – множество точек плоскости, R^3 – множество точек пространства трех измерений.

Для каждого множества M существует множество, элементами которого являются подмножества множества M и только они. Такое множество будем называть семейством множества M или булеаном этого множества и обозначать $B(M)$, а множество M будем называть универсальным (универсумом или пространством) и обозначать 1 или U . Множество M (универсальное) не должно быть уже объединения рассматриваемых множеств, т. е. оно должно быть равно или содержать объединение рассматриваемых множеств.

Пример. Пусть множество $A = \{1, 2\}$ состоит из двух элементов 1, 2. Тогда множество $B(A)$ включает в себя пустое множество $\emptyset$, два одноэлементных множества $\{1\}$ и $\{2\}$ и само множество $A = \{1, 2\}$, т. е.

$B(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Мы видим, что множество $B(A)$ состоит из четырех элементов ($4 = 2^2$).

Приведем стандартные обозначения для некоторых наиболее употребительных числовых множеств:

N – множество натуральных чисел (иногда его начинают с 1, иногда с 0; обычно это оговаривается);

P – простые числа;

Z – множество целых чисел (положительные, отрицательные и 0);

R – множество действительных чисел.

Очевидное соотношение: $N \subseteq Z \subseteq R$.

Рассмотрим методы получения новых множеств из уже существующих на примере пространства или множества U , определив в нём 4 операции над множествами A и B : объединение, пересечение, разность, дополнение.

1.2. Операции над множествами

Объединением A и B называется множество $A \cup B$, все элементы которого являются элементами хотя бы одного из множеств A или B :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ и / или } x \in B\}.$$

Из определения следует, что $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$. Аналогично определяется объединение нескольких множеств.

Пример. 1. Пусть $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Тогда $A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$.

2. Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3: $A = \{2, 4, 6, \dots\}$, $B = \{3, 6, 9, \dots\}$. Тогда $A \cup B$ – множество чисел, которые делятся на 2 или на 3: $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, \dots\}$.

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, все элементы которого являются элементами обоих множеств A и B : $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$. Из определения следует, что $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$ и $A \cap B \subseteq A \cup B$. Аналогично определяется пересечение нескольких множеств.

Пример. 1. Пусть $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Тогда $A \cap B = \{4, 6\}$.

2. Пусть A – множество чисел, которые делятся на 2, а B – множество чисел, которые делятся на 3: $A = \{2, 4, 6, \dots\}$, $B = \{3, 6, 9, \dots\}$. Тогда $A \cap B$ – множество чисел, которые делятся и на 2, и на 3: $A \cap B = \{6, 12, 18, \dots\}$.

Может оказаться, что множества не имеют ни одного общего элемента. Тогда говорят, что множества не пересекаются или что их пересечение – пустое множество.

Пример. Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$. Тогда $A \cap B \cap C = \emptyset$.

Разностью (относительным дополнением) множества B до множества A называется множество $A \setminus B$, все элементы которого являются элементами множества A , но не являются элементами множества B :

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Пример. 1. $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. $A \setminus B = \{5\}$, $B \setminus A = \{2\}$.

2. $A = \{2, 4, 6, \dots\}$, $B = \{3, 6, 9, \dots\}$. Тогда $A \setminus B$ – множество чисел, которые делятся на 2, но не делятся на 3, а $B \setminus A$ – множество чисел, которые делятся на 3, но не делятся на 2: $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \dots\}$. $B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, 27, \dots\}$.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A + B$: $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Пример. 1. $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. $A \setminus B = \{5\}$, $B \setminus A = \{2\}$, $A + B = \{2, 5\}$.

2. $A = \{2, 4, 6, \dots\}$, $B = \{3, 6, 9, \dots\}$, $A \setminus B = \{2, 4, 8, 10, 14, \dots\}$.
 $B \setminus A = \{3, 9, 15, 21, 27, \dots\}$, $A + B = \{2, 3, 4, 8, 9, \dots\}$.

Дополнением $\bar{M}$ множества M является множество

$$\bar{M} = \{m_i \mid m_i \notin M\}.$$

Пример. Заданы множества $A = \{1, 2, 5, 6\}$ и $B = \{2, 3, 4, 6\}$ на универсальном множестве $U = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$. Выполнить операции $\bar{A}$, $\bar{B}$.

Решение. В результате выполнения заданных операций получим следующие множества: $\bar{A} = \{3, 7\}$; $\bar{B} = \{1, 5, 7\}$.

Для конечных множеств существует понятие: мощность множества A – число его элементов. Обозначают мощность множества $|A|$.

Пример. $A = \{1, 2, 5, 6\}$, тогда мощность множества $|A| = n(A) = 4$; $|\emptyset| = 0$; $|\{\emptyset\}| = 1$.

Также справедливы следующие формулы: для любых множеств A и $B \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, то есть учитываются общие для обоих множеств элементы.

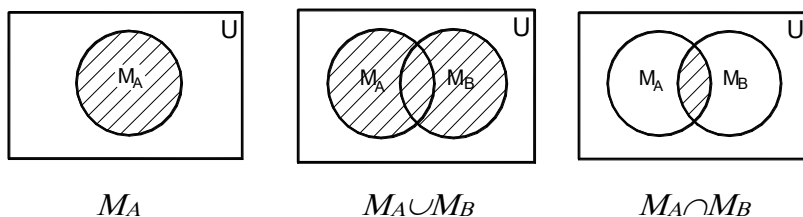
Пример. $A = \{1, 2, 3\}$ $|A| = 3$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $|B| = 5$, тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $|A \cup B| = 5$; $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ $|A \cap B| = 3$, то есть получим равенство: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ $5 = 3 + 5 - 3$.

Для конечного множества M мощность его булеана $|B(M)|$ равна $2^{|M|}$.

1.3. Применение диаграмм Эйлера-Венна при решении практических задач

Для наглядного представления множеств и отношений между ними используются диаграммы Эйлера-Венна. Универсальное множество изображают в виде прямоугольника, а множества, входящие в универсальное множество, в виде кругов внутри прямоугольника; элементу множества соответствует точка внутри круга (рис. 1).

С помощью диаграмм Эйлера-Венна удобно иллюстрировать операции над множествами. Результирующее множество каждой операции выделено штриховкой.



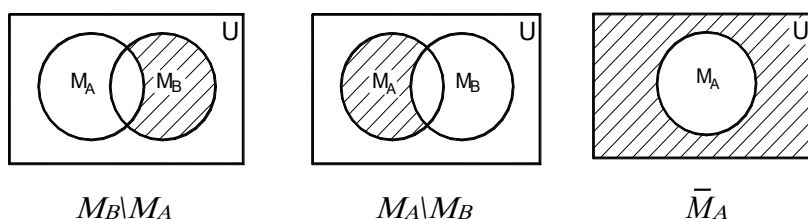


Рис. 1. Представление операций над множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна

Пример. Рассмотрим операцию дополнения множества, являющегося пересечением множеств M_A и M_B . Необходимо доказать, что её результат совпадает с объединением дополнений этих множеств:

Решение. $M = \overline{M_A \cap M_B} = \bar{M}_A \cup \bar{M}_B$.

В этом можно убедиться с помощью диаграмм Эйлера-Венна (рис. 2).

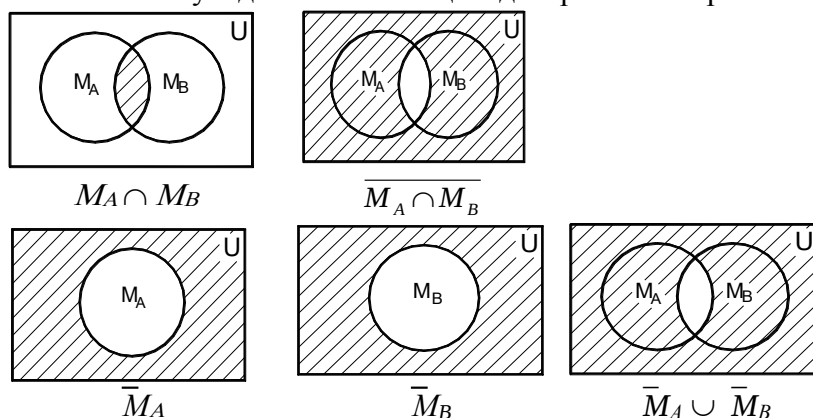


Рис. 2

Для любых подмножеств A , B и C универсального множества U выполняются следующие тождества (основные тождества алгебры множеств):

- | | |
|---|--|
| 1. $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность $\cup$). | 1'. $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность $\cap$). |
| 2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность $\cup$). | 2'. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность $\cap$). |
| 3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность $\cup$ относительно $\cap$). | 3'. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность $\cap$ относительно $\cup$). |
| 4. $A \cup \emptyset = A$ (свойство нуля). | 4'. $A \cap \emptyset = \emptyset$. |
| 5. $A \cup \bar{A} = U$ (свойство дополнения). | 5'. $A \cap \bar{A} = \emptyset$. |
| 6. $A \cup A = A$. | 6'. $A \cap A = A$. |
| 7. $A \cup U = U$ (свойство единицы). | 7'. $A \cap U = A$. |
| 8. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (закон де Моргана). | 8'. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (закон де Моргана). |
| 9. $A \cup (A \cap B) = A$ (закон поглощения). | 9'. $A \cap (A \cup B) = A$ (закон поглощения). |
| 10. $\bar{\bar{A}} = A$ (инволюция). | |
| 11. $A \setminus B = A \cap \bar{B}$. | |

Примеры. 1. Рассмотрим предположение о том, что произвольные множества A и B попарно эквивалентны: 1) $A \subset B$; 2) $A \cap B = A$; 3) $A \cup B = B$.

Решение. Докажем, что из первого предположения следует второе. Действительно, так как $A \cap B \subset A$, то достаточно показать, что в этом случае $A \subset A \cap B$. Но если $x \in A$, то $x \in B$, т. к. $A \subset B$ и, следовательно, $x \in A \cap B$.

Докажем, что из второго предположения следует третье. Так как $A \cap B = A$, то $A \cup B = (A \cap B) \cup B$. По закону поглощения (см. тождество 9) $B \cup (A \cap B) = B$. Отсюда, используя закон коммутативности, получаем $A \cup B = B$.

Докажем, что из третьего предположения следует первое. Так как $A \subset A \cup B$, а по условию третьего предположения $A \cup B = B$, то $A \subset B$.

Задания

Для аудиторных занятий

1. Записать множество M целых чисел x , которые делятся на три и находятся в интервале $3 \leq x \leq 15$. Записать двумя способами.
2. Записать множество A целых чисел x , которые делятся на 2 и на 3 и находятся в интервале $20 \leq x \leq 25$. Записать двумя способами.
3. Принадлежит ли x множеству M , если:
 - а) $M = \{2, 6, 8, \dots, 50\}$; $x = 35$;
 - б) $M = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, \dots, 100\}$; $x = 23$;
 - в) $M = \{-2, 2, -4, 4, \dots, 120\}$; $x = -30$.
 Записать приведенные множества с указанием свойств их элементов.
4. Доказать неравенство: $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\} \neq \{1, 2, 3\}$.
5. Какие из следующих выражений являются истинными и какие ложными:
 - а) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$; б) $1 \in \{\{1, 2\}\}$; в) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}\}$; г) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$.
6. Привести примеры таких множеств A, B, C , чтобы были истинными следующие высказывания:
 - а) $A \in B \wedge B \in C \wedge A \notin C$;
 - б) $A \in B \wedge B \in C \wedge A \in C$.
7. Какие из следующих множеств конечны и какие бесконечны:
 - а) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$;
 - б) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$;
 - в) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 / 24\}$.
8. Равны ли множества:
 - а) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 2 = 0\}$ и $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2x - 2 = 0\}$;
 - б) $\{x \in \mathbb{Z} \mid 4/x \wedge 15/x\}$ и $\{x \in \mathbb{Z} \mid 4/x \wedge 15/x\} \cap \{x \in \mathbb{Z} \mid 20/x \wedge 30/x\}$.
9. Перечислить элементы следующих множеств:
 - а) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$;
 - б) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$;
 - в) множество всех корней уравнения $x^2 + 6x + 9 = 0$.
10. Перечислить все элементы каждого из следующих множеств:
 - а) $\{x \mid x \subseteq \{1\}\}$; б) $\{x \mid x \subseteq \{1, 2, 3\}\}$;
 - в) $\{x \mid x \subseteq \{1, 2\}\}$; г) $\{x \mid x \subseteq \emptyset\}$.

Для самостоятельной работы

1. Перечислить элементы следующих множеств:
 - а) множество четных чисел от 0 до 20 включительно;
 - б) множество всех двузначных чисел, делящихся на 5 и не делящихся на 10;
 - в) множество всех последовательностей, содержащих все числа 1, 2, 3, 4, 5 и только эти числа, в которых четные и нечетные числа чередуются.
2. Равны ли множества:
 - а) $\{2, 4, 5\}$ и $\{2, 4, 2, 5\}$; б) $\{1, 2\}$ и $\{\{1, 2\}\}$; в) $\{1, 2, 3\}$ и $\{3, 1, 2, 1\}$;
 - г) $\{1, 2, 3\}$ и $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.
3. Перечислить подмножества следующих множеств:
 - а) $\{\{1, 2\}, \{3\}, 4\}$; б) $\{\{5, 2\}\}$; в) $\{\{2\}, \{6\}, \{3\}\}$; г) $\{\{4, 6\}, \{1\}, 1\}$.
4. Вставить между множествами символ $\in$ или $\subset$ так, чтобы получилось истинное высказывание:
 - а) $\{1\} \{1, \{1, 2\}\}$; б) $\emptyset \{\emptyset\}$; в) $\emptyset \{\{\emptyset\}\}$; г) $\{1, 2\} \{1, 2, \{1, 2\}\}$.
5. Найти $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, \bar{A}, \bar{B}$:
 - а) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 5, 4\}, U = \{1, 2, \dots, 9\}$;
 - б) $A = \{x \mid x \text{ делится на } 2\}, B = \{x \mid x \text{ делится на } 3\}, U = \mathbb{N}$.

6. Доказать следующие тождества:
- а) $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$; е) $A \cap B = A \cap (A \cup B)$;
 $\cup B) \cap (A \cup \bar{B})$;
 б) $(A \cup B) \cap A = A \cap B$; ж) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
 в) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \cap C)$; з) $(A \setminus B) \cup (A \setminus \bar{B}) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
 г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$; и) $(A \setminus \bar{B}) \cup (B \setminus \bar{A}) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
 д) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$; к) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

7. Показать с помощью диаграмм Эйлера-Венна, какие из следующих утверждений верны:

- а) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$; в) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cap C)$;
 б) $(A \setminus B) \cup B = A$; г) $(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \subset B$.

8. Найти мощность множеств, мощность их булеанов и $|A \cup B|$ – мощность объединения множеств:

- а) $A = \{4, 5, 6\}, B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$; б) $A = \{1, 3, 5, 6\}, B = \{4, 5, 6, 7\}$;
 в) $A = \{3, 5, 7\}, B = \{2, 5, 6, 7, 9\}$; г) $A = \{1, 2, 3, 5\}, B = \{2, 4, 5, 6, 7\}$.

9. Вставить между множествами символ $\in$ или $\subseteq$ так, чтобы получилось истинное высказывание:

- а) $\{1\} \{1, \{1, 2\}\}$; г) $\emptyset \{1, 2, \{1\}, \{\emptyset\}\}$;
 б) $\{1, 2\} \{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$; д) $\emptyset \{\{\emptyset\}\}$;
 в) $\{1, 2\} \{1, 2, \{1, 2\}\}$; е) $\emptyset \{\emptyset\}$.

10. Привести пример множеств A, B, C , таких, чтобы выполнялись условия:

- а) $A \in B, B \notin C, A \subseteq C$;
 б) $A \in B, A \notin C, C \subseteq B$;
 в) $A \subseteq B, B \in C, A \notin C$.

Практическое занятие № 2

Тема: « Использование матричных методов для решения задач экономико-математического моделирования.»

Пояснение к работе

Последовательность выполнения

1. Руководствуясь приведенным теоретическим материалом, ответить на следующие вопросы:

- Какие вершины графа называются смежными?
- В чем заключается понятие инцидентности?
- Как задается матрица инцидентностей для орграфа?
- Какой граф называется псевдографом?
- Какой граф называется двудольным?

2. Дать определение следующих понятий:

- граф;
- изоморфизм;
- полный граф;
- подграф;
- ориентированный граф.

3. Выполнить задания для аудиторных занятий.

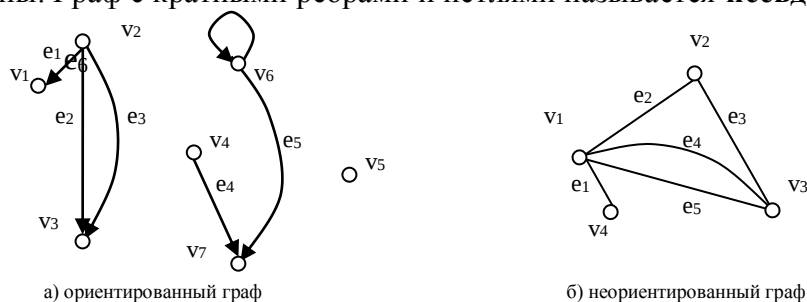
4. Выполнить задания для самостоятельной работы.

2.1. Элементы графа

Граф G – это совокупность двух множеств: непустого множества вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и множества ребер (дуг) $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Таким образом, $G = (V, E)$, $V \neq \emptyset$, $E \subset V \times V$.

Если (v_1, v_2) – упорядоченная пара (т. е. дуга), то v_1 называется началом, а v_2 – концом дуги e . Если $\{v_1, v_2\}$ – неупорядоченная пара, то ребро e называется неориентированным. Всякому графу G можно поставить в соответствие соотнесенный неориентированный граф G с теми же множествами V и E и инцидентностями, но все пары неупорядоченные. Такой граф называется ассоциированным. Вершина, не инцидентная ни одному ребру, называется изолированной. Вершина, инцидентная ровно одному ребру, и само это ребро называются концевыми или висячими. Ребро с совпадающими концами называется петлей. Две вершины, инцидентные одному и тому же ребру, называются смежными. Два ребра, инцидентные одной и той же вершине, называются смежными. Ребра, которым поставлена в соответствие одна и та же пара вершин, называются кратными или параллельными.

Граф, содержащий кратные ребра, называется **мультиграфом**. Неориентированное ребро графа эквивалентно двум противоположно направленным дугам, соединяющим те же самые вершины. Граф с кратными ребрами и петлями называется **псевдографом**.



Примеры:

Рис. 3

На рис. 3 изображены: ориентированный псевдограф, имеющий 7 вершин и 6 дуг, и неориентированный мультиграф, имеющий 4 вершины и 5 ребер. Проиллюстрируем некоторые введенные понятия.

Для орграфа (рис. 3а): $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ – вершины (узлы); v_5 – изолированная вершина; v_1, v_4 – концевые (висячие) вершины; v_2 и v_3 , v_2 и v_1 – пары соседних вершин; $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ – ориентированные ребра (дуги); e_2 и e_3 – параллельные (кратные) дуги; e_2 и e_1 – смежные дуги; e_6 – петля для орграфа.

Для графа (рис. 3б): v_1, v_2, v_3, v_4 – вершины; v_4 – концевая (висячая) вершина; v_2 и v_3 , v_2 и v_1 – пары соседних вершин; e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 – ребра (дуги); e_4 и e_5 – параллельные (кратные) ребра; e_2 и e_3 – смежные ребра; петель нет.

2.2. Способы задания графов

1. Перечисление (список) ребер графа с указанием их концов и добавлением списка изолированных вершин.

2. Матрица смежности $A = (a_{ij})$ определяется одинаково для ориентированного и неориентированного графов. Это квадратная матрица порядка n , где n – число вершин, у которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_i, v_j) \in E, \\ 0, & \text{если } (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$$

Матрицей инцидентности $B = (b_{ij})$ ориентированного графа называется матрица $(n \times m)$, где n – число вершин, m – число ребер, у которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ является концом дуги } e_j; \\ -1, & \text{если вершина } v_i \text{ является началом дуги } e_j; \\ 0, & \text{если вершина } v_i \text{ не инцидентна дуге } e_j. \end{cases}$$

Для неориентированного графа матрица инцидентности B задается следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j; \\ 0, & \text{если вершина } v_i \text{ не инцидентна ребру } e_j. \end{cases}$$

Петле соответствует элемент, равный 2.

Пример.

Матрицы смежности и инцидентности графа, изображенного на рис. 3а, имеют вид (рис. 4):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рис. 4

3. Для наглядности граф представляют в виде геометрического объекта: вершинам соответствуют различные выделенные точки в пространстве (на плоскости), ребрам – отрезки кривых, связывающие вершины.

Рассмотрим некоторые разновидности графов.

Неориентированный граф $G = (V, E)$ – **двудольный**, если множество его вершин V можно разбить на два такие подмножества V_1 и V_2 , что каждое ребро имеет один конец в V_1 , а другой в V_2 . Если же каждая из вершин класса V_1 связана ребром с каждой вершиной класса V_2 , то граф называется полным двудольным и обозначается $K_{m,n}$, где $m = |V_1|$, $n = |V_2|$. На рис. 5а изображен двудольный граф, на рис. 5б и 5в – полные двудольные графы $K_{3,2}$ и $K_{3,3}$.

Пример.

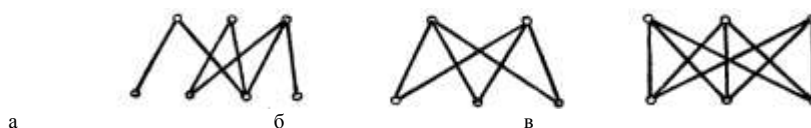


Рис. 5

Полным графом называется граф без кратных ребер (и иногда без петель), в котором любые две вершины соединены ребром (ориентированным или неориентированным). Полный неориентированный граф с n вершинами обозначается K_n . Очевидно, граф K_n содержит $n(n-1)/2$ ребер.

На рис. 6а, 6б и 6в изображены графы K_3 , K_4 , K_5 , соответственно. На рис. 6г также изображен полный граф.

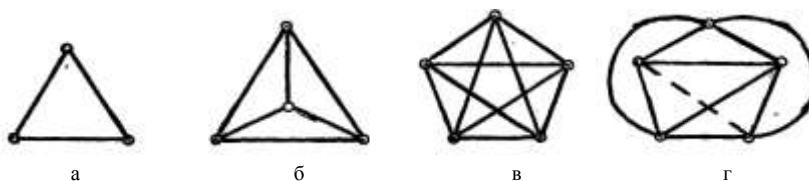
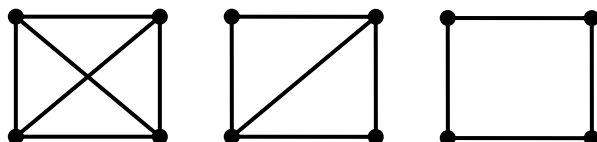


Рис. 6

2.3. Подграфы

Граф $G' = (V', E')$ называется подграфом графа $G = (V, E)$, обозначение: $G' \subseteq G$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ и для множеств V' и E' сохраняются инцидентности графа G . При этом, очевидно, каждое ребро из E' входит в подграф G' вместе со своими концами. Подграф называется **собственным**, если он отличен от самого графа.

Пример. Графы на рис. 7б и 7в являются подграфами графа на рис. 7а.



2.4. Изоморфизм графов

Два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ изоморфны, если между их вершинами существует взаимно однозначное соответствие $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ такое, что для любой пары вершин u, v из V_1 ребро $(u, v) \in E_1 \leftrightarrow$ ребро $(\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2$.

Пример. Графы, изображенные на рис. 8, являются изоморфными.



Рис. 8

Изоморфные графы отличаются только нумерацией вершин. Матрицы смежности двух изоморфных графов могут быть получены одна из другой перестановкой строк и столбцов. Чтобы узнать, являются ли два графа изоморфными, нужно произвести все возможные перестановки строк и столбцов матрицы смежности одного из графов. Если после какой-нибудь перестановки получится матрица смежности второго графа, то эти графы изоморфны. Чтобы убедиться, что графы не изоморфны, надо выполнить все $n!$ возможных перестановок строк и столбцов.

2.5. Степени вершин графа

Степенью вершины v графа G называется число $\delta(v)$ ребер графа G , инцидентных вершине v . Вершина графа, имеющая степень 0, называется **изолированной**, а степень 1 — **висячей**.

В случае неориентированного псевдографа считается, что вклад каждой петли, инцидентной некоторой вершине v , в $\delta(v)$ равен 2 (тогда как вклад любого другого ребра, инцидентного вершине v , равен 1).

Полустепенью исхода (захода) вершины v орграфа D называется число $\delta^+(v)$ ($\delta^-(v)$) дуг орграфа D , исходящих из вершины v (входящих в вершину v).

В случае ориентированного псевдографа вклад каждой петли, инцидентной некоторой вершине v , в $\delta(v)$ равен 1, как в $\delta^+(v)$, так и в $\delta^-(v)$.

Пример.

В графе G (рис. 3б) степень вершины v_1 равна четырем, т. е. $\delta(v_1) = 4$; вершина v_4 — висячая, так как $\delta(v_4) = 1$. В ориентированном псевдографе (рис. 3а) степень вершины v_6 равна трем, т. е. $\delta(v_6) = \delta^+(v_6) + \delta^-(v_6) = 2 + 1 = 3$; вершина v_1 — висячая, так как $\delta(v_1) = 1$, вершина v_5 — изолированная, так как $\delta(v_5) = 0$.

Задания

Для аудиторных занятий

1. Даны реализации графов (рис. 9). Какие это графы? Описать их основные характеристики. Привести примеры элементов графов.

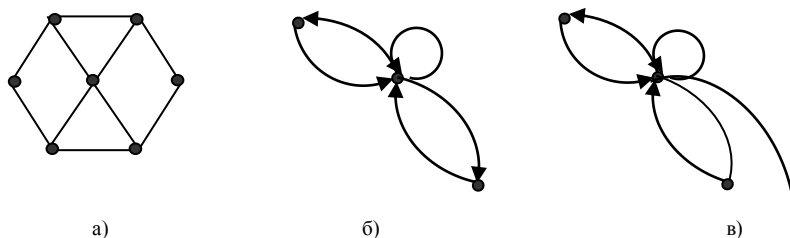


Рис. 9

2. Записать матрицы смежности и инцидентности для неориентированного графа (рис. 9а).

3. Записать матрицы смежности и инцидентности для ориентированного графа (рис. 9б).

4. Изобразить ассоциированный граф для заданного графа (рис. 9б).

5. Изобразить все попарно неизоморфные 4-вершинные графы без петель и кратных ребер. Записать для них матрицы смежности и инцидентности.

6. Построить все попарно неизоморфные 5-вершинные графы, не имеющие петель, кратных ребер и изолированных вершин.

7. Какое из двух утверждений верно: а) ориентированный граф является частным случаем неориентированного графа; б) неориентированный граф является частным случаем ориентированного графа.

8. Перечислить все возможные способы задания графов.

9. Всегда ли матрица смежности симметрична относительно главной диагонали?

10. Как по матрице смежности определить число ребер неориентированного графа?

Для самостоятельной работы

1. Как по матрице инцидентности, не рисуя граф, определить его матрицу смежности?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Может ли матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ быть матрицей смежности неориентированного графа?

3. Какие из следующих утверждений являются правильными: а) если матрица смежности несимметричная, то граф ориентированный; б) если граф неориентированный, то матрица смежности симметричная; в) если диагональные элементы матрицы смежности – нули, то граф неориентированный?

4. Записать матрицы смежности и инцидентности для ориентированного графа (рис. 9в).

5. Изобразить все попарно неизоморфные ориентированные псевдографы, содержащие: а) 2 вершины и 2 дуги; б) 3 вершины и 4 дуги; в) 4 вершины и 3 дуги.

6. Изобразить ассоциированный граф для заданного графа (рис. 9в).

7. Чему равны степени вершин для ориентированного и неориентированного графов?

8. Определить степени вершин орграфа (рис. 3а). Есть ли в заданном графе изолированные и висячие вершины?

9. Определить степени вершин в заданных графах (рис. 9).

10. Даны реализации графов (рис. 9). Какие это графы? Привести примеры смежных вершин и смежных ребер.

Практическое занятие № 3

Тема: «Балансовые модели.

Экономико-математическая модель межотраслевого баланса.»

Пояснение к работе

Последовательность выполнения

1. Руководствуясь приведенным теоретическим материалом, ответить на следующие вопросы:

- Бином Ньютона.
- Полиномиальные производящие функции.
- Экспоненциальные производящие функции.
- Метод включений и исключений.

2. Дать определение следующих понятий:

- сочетание;
- перестановка;
- размещения;

3. Выполнить задания для аудиторных занятий.

4. Выполнить задания для самостоятельной работы.

3.1. Комбинаторные задачи и методы их решения

Комбинаторные задачи связаны: а) с выбором из некоторой группы предметов тех, которые обладают заданными свойствами; б) с расположением этих предметов в определенном порядке; в) с расчетом числа возможных комбинаций. Ниже мы приводим примеры таких задач и обсуждаем способы их решения.

Задача 1. 90 дней майора Зимина

Майор Зимин ежедневно формирует наряд для поддержания общественного порядка в центре города Дрюкова. Наряд состоит из двух человек — старшего наряда и дежурного. В распоряжении майора находится 10 милиционеров. Чтобы избежать длительных контактов милиционеров с нарушителями правопорядка, майор составляет наряд каждый день по-разному. Сколько дней майор Зимин может спать спокойно (т.е. до тех пор, пока какой-нибудь наряд не повторится)?

Решение. Прежде всего, майор занумеровал личный состав числами 1, 2, ..., 10. Далее, поскольку майор был страстным болельщиком, он составил таблицу наподобие той, в которой отмечал результаты футбольного первенства:

дежурный старший	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

В клетках он проставил даты дежурств. Каждая клетка находится на пересечении некоторого столбца и некоторой строки, номера которых и определяют состав соответствующего наряда.

При этом пары вида (1,7) и (7,1) считаются разными, т.к. хотя в них люди одни и те же, но должности у них разные. Клетки (1,1), (2,2), ..., (10,10) заштрихованы потому, что один и тот же человек не может быть и старшим и дежурным одновременно.

Будучи от природы человеком весьма сообразительным, майор Зимин заметил, что в каждом из десяти столбцов записано 9 вариантов наряда, поэтому $9 \cdot 10 = 90$ дней он может спать спокойно.

Задача 2. Когда следствие ведут знатоки

В Стукове происходят два ЧП в день. На место происшествия отправляют оперативную группу из трех человек: следователя, оперативника и эксперта. В УВД несут службу 3 следователя, 2 оперативника и 3

эксперта. График их работы составляется таким образом, чтобы каждая очередная опергруппа отличалась от всех предыдущих (пока это будет возможно). Трое друзей — следователь Зубов, оперативник Прокопенко и эксперт Зульфия всегда добиваются успеха. Как часто эта группа попадает в график?

Решение. Будем перебирать всевозможные составы оперативной группы, учитывая, что следователя можно выбрать тремя способами (C_1, C_2, C_3), оперативника — двумя (O_1 и O_2), а эксперта — тремя способами ($\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$).

Составим так называемое *дерево*. Проведем из некоторой точки A три отрезка: AC_1, AC_2 и AC_3 , каждый из которых символизирует выбор следователя (рис. 5).

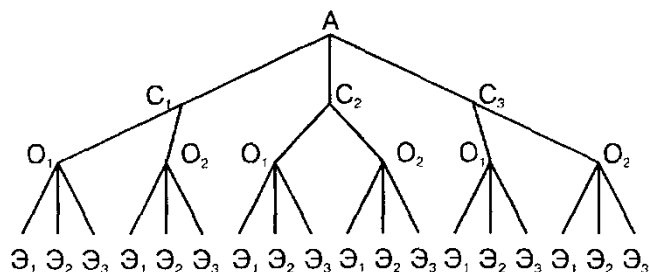


Рис. 5

Из концов этих отрезков проведем по два новых отрезка $C_1O_1, C_1O_2, C_2O_1, \dots, C_3O_2$, каждый из которых показывает, кто из оперативников включен в опергруппу.

Из концов последних отрезков проведем еще три отрезка с концами $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$, которые указывают на назначение в группу одного из трех экспертов. Изображенную на рисунке схему и называют деревом. Всякий путь вдоль ветвей этого дерева от его вершины A к какой-либо вершине $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ или $\mathcal{E}_3$ изображает состав одной из оперативных групп. Например, путь $AC_2O_1\mathcal{E}_3$ изображает оперативную группу, в которую включены следователь C_2 , оперативник O_1 и эксперт $\mathcal{E}_3$.

Чтобы найти число всех путей, перемножим число всех отрезков, выходящих из точки A , на число отрезков с началом в точках C_1, C_2, C_3 и на количество отрезков, проведенных из точек O_1 и O_2 . Полученное произведение $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ дает число всевозможных различных оперативных групп. Так как в день выезжают две группы, то через $18 : 2 = 9$ дней группы начнут повторяться. Итак, знатоки (Зубов, Прокопенко и Зульфия) встречаются на выездах раз в 9 дней.

Задача 3. Случай с адвокатом

У адвоката N из юридической фирмы «Брюковские адвокаты» произошла досадная неприятность с компьютером — сразу после включения оперативная система зависла и на экране монитора появилось сообщение:

«Привет! Я — компьютерный вирус «Загадка Сфинкса». Ты должен ответить на 12 вопросов, которые записаны с помощью дренеегипетских иероглифов. На каждый вопрос можно ответить только «да» или «нет». Если через 10 дней ты не сможешь правильно ответить на мои вопросы или попытаешься выключить компьютер — твой винчестер умрет».

В компьютере содержалась очень важная информация, восстановить, которую, в случае потери, было бы практически невозможно. Но адвокат N не поддался панике, а придумал два способа решения проблемы. Во-первых можно попробовать расшифровать иероглифы с помощью специального словаря. Адвокат выяснил, что такой словарь есть в брюковской библиотеке, но получить его можно будет только через 8 дней. Поэтому он решил действовать вторым способом: перебирать все возможные комбинации ответов «да» и «нет» на 12 непонятных вопросов, пока не обнаружится правильный вариант. Чтобы не сбиться, адвокат решил записывать каждую комбинацию ответов в виде следующей таблички:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
да	да	нет	да	да	да	нет	да	нет	нет	нет	нет

На составление очередной комбинации ответов и ввод ее в компьютер адвокат тратит одну минуту. Успел ли он сделать работу вовремя и спасти винчестер, если работал по 6 ч в сутки, а правильная комбинация оказалась последней?

Решение. Число комбинаций так велико, что составление таблицы (как в задаче 1) или графической схемы (как в задаче 2) было бы слишком трудоемким. Поэтому мы ограничимся только логическими рассуждениями.

Если бы вопрос был один, то на него было бы всего два варианта ответов: «да» и «нет». Если бы вопросов было два, то комбинаций ответов было бы 4: да-да, нет-нет, да-нет, нет-да. Если бы вопросов было три, то число комбинаций ответов было бы 8, т.к. к каждому из предыдущих четырех пришлось добавить либо «да», либо «нет» при ответе на третий вопрос. Таким образом, при добавлении одного вопроса число комбинаций ответов удваивается: четыре вопроса дают $8 \cdot 2 = 16$ комбинаций ответов, на пять вопросов получается $2^4 \cdot 2 = 2^5$ комбинаций и т.д., двенадцать вопросов дадут $2^{12} = 4096$ комбинаций.

Итак последняя — нужная — комбинация ответов появится через 4096 мин работы. Разделив на 60, мы получим 68 ч 16 мин, что при шестичасовом рабочем дне составляет более одиннадцати суток.

Мы обсудили три задачи, в каждой из которых занимались расчетом числа определенных комбинаций. На самом деле, все эти задачи решаются по одной и той же логической схеме. Сейчас мы запишем общие формулы для решения любых задач подобного типа.

В наиболее общем виде решение первой задачи выглядит так.

Пусть требуется выполнить последовательно два действия (например, первое действие — выбор старшего наряда, второе — выбор дежурного). Если первое действие выполняется t различными способами, а второе — n различными способами, то оба действия можно выполнить $t \cdot n$ различными способами. Это утверждение называется *правилом умножения*.

Задача 2 обобщается следующим образом: пусть требуется последовательно выполнить три действия, причем, первое действие может быть выполнено t способами, второе — n способами и третье — k способами. Тогда три действия можно выполнить $t \cdot n \cdot k$ способами.

Попробуйте сформулировать в общем виде аналогичную задачу для произвольного числа действий. Например, во второй задаче всего 12 действий и каждое из них выполняется двумя способами («да» и «нет»). Поэтому ответ будет $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2$ — всего 12 сомножителей, т.е. $2^{12} = 4096$.

Таблица и дерево, с помощью которых мы решали первые две задачи, описывают правило умножения в некоторой специфической форме.

Правило умножения — хотя и простой, но важный математический факт. Поэтому его необходимо строго доказать. Это будет сделано в следующем параграфе.

3.2. Метод математической индукции

Метод математической индукции является одним из наиболее универсальных методов проведения математических доказательств. Суть его заключается в следующем. Допустим, мы хотим доказать, что некоторое утверждение справедливо при любых значениях натурального числа n , содержащегося в формулировке этого утверждения. Например, что для любого натурального n справедливо следующее равенство:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

Легко проверить, что эта формула дает правильный результат при $n = 1, 2, 3, 4$. Но невозможно ее проверить для *всех* значений n , т.к. множество натуральных чисел бесконечно! Как же доказать, что утверждение верно для любых n , не проверяя этого непосредственно? Оказывается, что достаточно:

- проверить данное утверждение при $n = 1$;
- предположив, что оно верно при $n = k$, доказать, что оно верно при $n = k + 1$. В этом и заключается метод математической индукции.

В рассматриваемом примере формула (1) при $n = 1$ дает $1 = \frac{1(1+1)}{2}$, т.е. что сумма из одного слагаемого 1 равна единице. Таким образом, при $n = 1$ формула верна. Теперь предположим, что она верна при $n = k$, тогда справедливо равенство

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Докажем, что формула (1) верна при $n = k + 1$, т.е.

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Действительно, используя допущение, получаем

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим еще один пример. Докажем, что при любом натуральном показателе степени n число $8^n - 1$ делится на 7.

Доказательство. Проверим условия а) и б). Подставим в выражение $8^n - 1$ вместо n число 1. Тогда значение этого выражения будет равно $8 - 1 = 7$. Это число делится на 7, т.е. условие а) проверено. Теперь допустим, что $8^k - 1$ делится на 7. Покажем, что в таком случае $8^{k+1} - 1$ также делится на 7. Преобразуем последнее выражение так:

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 1 &= 8^{k+1} - 8^k + 8^k - 1 = 8^k(8 - 1) + (8^k - 1) = \\ &= 8^k \cdot 7 + (8^k - 1). \end{aligned}$$

В результате преобразований мы получили сумму двух слагаемых, каждое из которых делится на 7. Действительно, первое слагаемое имеет множитель 7, а второе делится на 7 по предположению индукции. Следовательно, сумма также делится на 7 и условие б) также проверено. Утверждение доказано.

Теперь докажем общее правило умножения (см. §1).

Теорема 1. Пусть требуется последовательно выполнить n действий, причем первое действие может быть выполнено m_1 способами, второе — m_2 способами и т.д., наконец, n -е действие — m_n способами. Обозначим через S_n число всех способов, которыми можно выполнить n действий. Тогда

$$S_n = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n. \quad (2)$$

Доказательство проведем методом математической индукции.

При $n = 1$ мы получаем одно действие, которое можно выполнить m_1 способами. Произведение (2) состоит в этом случае также из одного сомножителя m_1 . Следовательно, формула (2) при $n = 1$ верна.

Допустим, что формула (2) верна для $n = k$ действий:

$$S_k = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k. \quad (3)$$

Докажем, что она верна для $n = k + 1$ действий. Обозначим произвольный вариант выполнения k действий набором из k чисел. Например, набор (3, 1, 6, ..., 5) означает вариант, в котором первое действие выполнено третьим способом, второе действие — первым способом и так далее, наконец, k -е действие выполнено пятым способом. В случае, если выполняются $k + 1$ действий, каждый вариант записывается как набор из $k + 1$ чисел. Но всякий набор из $k + 1$ чисел получается добавлением одного числа к какому-либо набору из k чисел. Например, из одного набора (3, 1, 6, ..., 5) можно получить такие:

(3, 1, 6, ..., 5, 1), (3, 1, 6, ..., 5, 2), ..., (3, 1, 6, ..., 5, m_{k+1}),

т.е. всего m_{k+1} вариантов. Поэтому число всех способов выполнения $k + 1$ действий будет

$$S_{k+1} = S_k \cdot m_{k+1} = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k \cdot m_{k+1}.$$

Таким образом, условие б) индукции тоже выполняется. Теорема доказана.

3.3. Размещения, перестановки, сочетания

При решении комбинаторных задач мы имеем дело с комбинациями из некоторых предметов. Эти комбинации могут отличаться одна от другой числом предметов, их составом или порядком.

Пример 1. Пять бойцов сержанта Сбруева

В отделении сержанта Сбруева проходят службу 5 новобранцев: Белкин, Пенкин, Фенькин, Свечкин и Овечкин. В свободное от нарядов время сержант обучает их, как рассчитаться по порядку. По команде «В одну шеренгу становись!» солдаты выстраиваются справа от Сбруева и по команде «По порядку номеров рассчитайсь!» производят расчет: «первый-второй-третий-четвертый-пятый». После этого сержант перестраивает новобранцев по-новому и расчет повторяется. Сколько раз может Сбруев повторить это упражнение, используя только разные способы построения солдат?

Решение. Договоримся указывать порядок расположения солдат первыми буквами их фамилий. Например, комбинация ПСОФБ означает, что первым является Пенкин, вторым — Свечкин и т.д. Все комбинации отличаются одна от другой порядком букв и называются *перестановками* из пяти букв. Нам нужно найти число всех таких перестановок. Сначала мы выведем общую формулу, а потом закончим обсуждение примера.

Пусть дано множество из n элементов. Занумеруем все элементы каким-нибудь способом от 1 до n (в случае с новобранцами $n = 5$). Ясно, что занумеровать можно многими способами.

Определение. Перестановкой из n элементов называется всякий способ нумерации этих элементов.*

* Более подробно о перестановках будет сказано в гл. VIII «Математические структуры».

Теорема 2. Число всех различных перестановок из n элементов равно $n!$

Доказательство. Всякую перестановку из n элементов можно получить с помощью n действий: первое действие — выбор первого элемента, второе действие — выбор второго элемента, и т.д., наконец, n -е действие — выбор элемента с номером n .

Первый элемент можно выбрать n различными способами; второй выбирается из оставшихся $n - 1$ элементов, поэтому число всех способов выполнения второго действия будет $n - 1$. После выбора второго элемента их останется $n - 2$, следовательно, число способов, которыми можно выполнить третье действие, будет $n - 2$. Таким образом, число способов, которыми выполняется очередное действие, будет на единицу меньше предыдущего. Следовательно, четвертое действие можно выполнить $(n - 2)$ способами, пятое — $(n - 4)$ способами и т.д., наконец, последнее действие — одним способом.

По правилу умножения (теорема 1) число всех способов выполнения действий, т.е. число всех перестановок, равно $n(n - 1)(n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$. Теорема доказана.

Число всех перестановок из n элементов обозначают P_n . Согласно теореме 1 его можно найти по формуле

$$P_n = n!. \quad (4)$$

Например, в случае с новобранцами ($n = 5$) мы получим $P_5 = 5! = 120$.

Пример 2. Однажды утром

Однажды утром по улицам города Дрюкова на высокой скорости пронеслась машина. Она сбила зазевавшегося поросенка и скрылась в неизвестном направлении. Возвращавшийся из ресторана житель N , заметил номер автомобиля. Но когда появилась милиция, он с перепугу вспомнил только, что номер четырехзначный, все цифры разные, причем первая цифра 1, а последняя 4. Сколько автомобилей должна проверить автоинспекция?

Решение. Второй и третьей цифрами номера могут быть любые две из следующих: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Выбрав любую пару цифр, автоинспектор получит номер какого-либо автомобиля. Например, пара 5, 7 дает номер 1574. Эти же цифры но в другом порядке дают номер 1754. Следовательно, нужно перебрать столько номеров сколько будет всевозможных комбинаций из восьми перечисленных цифр по две с учетом их порядка. Такие комбинации называют *размещениями*. В данном случае мы ищем число размещений из восьми цифр по две.

Определение. Размещением из n элементов по k называется всякая перестановка из k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n .

Число всех размещений из n элементов по k обозначается A_n^k .

Теорема 3. Число всех размещений из n элементов по k вычисляется по формуле

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}_{k \text{ сомножителей}}. \quad (5)$$

Эта теорема доказывается так же, как и теорема 2. Каждое размещение можно получить с помощью k действий. Первое действие — выбор первого элемента — осуществляется n способами, второе действие — выбор второго элемента — $(n-1)$ способами, и т.д., наконец, последнее действие — выбор k -того элемента — $(n-k+1)$ способами. По правилу умножения число всех размещений будет $n(n-1) \cdots (n-k+1)$, что и требовалось доказать.

Вернемся к примеру 2. Согласно формуле (5) автоинспекция должна проверить $A_8^2 = 8 \cdot 7 = 56$ автомобилей.

Пример 3. День Брюквы

Согласно древнему обычаю, самый главный праздник в Брюкове — День Брюквы, проводится за счет средств городского бюджета и празднуется столько дней, сколько депутатов проголосует за то, чтобы праздник состоялся. Из десяти депутатов «за» проголосовали семь.

Каково число всех возможных вариантов голосования?

Решение. Мы должны найти число всех возможных групп из семи депутатов. Здесь порядок выбора не играет никакой роли, поэтому рассматриваемые комбинации отличаются одна от другой только составом лиц. Комбинации такого типа называются *сочетаниями*.

Определение. Сочетанием из n элементов по k называется всякая совокупность k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n элементов.

Число всех сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k . В примере 3 нужно найти C_{10}^7 .

Теорема 4. Число всех сочетаний из n элементов по k вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}. \quad (6)$$

Доказательство. Возьмем какое-нибудь сочетание из n элементов по k

$$\underbrace{(a, b, c, \dots, f)}_{k \text{ букв}}.$$

Переставляя эти элементы всевозможными способами, получим $k!$ всех размещений из n по k одного и того же состава. Таким образом, из одного сочетания получается $k!$ размещений. Следовательно, из C_n^k сочетаний получится $C_n^k \cdot k!$ размещений, т.е.

$$A_n^k = C_n^k \cdot k!.$$

Отсюда, с учетом формулы (5) получаем:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k},$$

что и требовалось доказать.

В примере 3 было $n = 10$, $k = 7$, поэтому число всех вариантов голосования присяжных равно

$$C_{10}^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 120.$$

Задания

Для аудиторных занятий

1. В забеге участвовало 5 спортсменов. Сколькими способами можно предсказать распределение первых трех мест, если известно, что эти спортсмены всегда показывают разные результаты?
2. Замок сейфа открывается, если набрана правильная комбинация из четырех цифр от 0 до 9. Преступник пытается открыть сейф и набирает шифр наудачу. Найдите наибольшее возможное число безуспешных попыток.
3. Некто написал 6 новогодних поздравлений своим друзьям, затем взял 6 разных конвертов и разложил открытки по конвертам наудачу. Каково число всех возможных комбинаций?
4. Абонент забыл две последние цифры номера телефона и набирает их наудачу. Каково наибольшее возможное число безуспешных попыток абонента?
5. Семеро терпеливых стоят в очереди в кассу. Сколькими способами можно составить очередь?
6. В колоде 36 карт. Наудачу вынимают 3 карты. Каково число всех возможных комбинаций? Сколько троек содержат по крайней мере один туз? Сколько троек содержат только один туз? Сколько раз попадется комбинация дама—семерка—туз?
7. Выпишите все перестановки из букв a, b, c .
8. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 7, 2, 4, 9, если каждая цифра используется в записи числа только один раз?
9. Проверьте равенство $P_6 = 6P_5$.
10. Что больше: P_7 или 2^7 ?
11. С помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 закодируйте буквы А, В, Д, Е, Л, О, С, Т, Ы, заменив каждую букву какой-нибудь цифрой, и зашифруйте слово СЛЕДОВАТЕЛЬ. Каково число возможных вариантов кода?
12. На трех карточках написаны буквы P, A, K . Сколько различных слов можно составить, если словом считается любой набор из двух букв? Запишите эти слова.
13. В домоуправлении трудится 6 человек. Поступило распоряжение о премировании трех сотрудников (различными суммами). Сколькими способами можно это сделать?
14. На железнодорожной ветке Дрюково—Стуково имеется 10 станций. В течение дня с каждой станции на каждую другую выехало в точности по одному пассажиру. Сколько билетов было куплено в этот день?
15. Сколькими способами можно выбрать из семи разных книг какие-либо четыре и подарить их четырём милиционерам, занявшим первые четыре призовых места на конкурсе «Настоящий мужчина города Брюкова»?
16. Студенты одной группы должны сдать 5 экзаменов в течение восемнадцати дней. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов, если в один день разрешается сдавать не более одного экзамена?
17. В течение дня из Брюкова в Стуково отправляется 8 автобусов. Разведенные супруги гражданин N и гражданка M не хотят ехать в одном автобусе. Сколькими способами они могут отправиться в разных автобусах?
18. В группе 30 студентов. Сколькими способами можно выбрать 6 делегатов для переговоров с администрацией института по вопросу о свободной продаже пива в студенческом буфете?
19. Сколькими способами можно поставить три пешки на белые клетки шахматной доски?
20. Для участия в соревнованиях тренер отбирает 5 спортсменов из двенадцати. Сколькими способами он может составить команду?
21. На окружности выбрано 7 точек. Сколько можно построить треугольников с вершинами в этих точках?
22. На карточке спортлото 36 клеток. Играющий должен отметить 4. Каково число всех возможных вариантов?

Числа сочетаний C_n^k обладают многими важными свойствами. Некоторые из них понадобятся нам в дальнейшем. Например,

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \quad (7)$$

Доказательство. Если из n элементов выбрать k элементов, то останется $n - k$ элементов. Следовательно, каждому сочетанию из n элементов по k соответствует определенное сочетание из n элементов по $n - k$. Поэтому число тех и других сочетаний одинаково. Доказательство закончено.

Формула (7) сокращает вычисления, например:

$$C_{10}^7 = C_{10}^{10-7} = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Заметим, что формулы (4)–(6) допускают более широкое толкование. По определению полагают $0! = 1$, $A_n^0 = 1$, $C_n^0 = 1$.

Числа C_n^k также называют *биномиальными коэффициентами*, с их помощью записывается так называемая *формула бинома Ньютона*:

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \\ + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n.$$

Эту формулу можно доказать, например, методом математической индукции. Попробуйте сделать это самостоятельно.

Для самостоятельной работы

1. Анкета по изучению общественного мнения содержит 10 вопросов, на каждый из которых отвечающий дает один из трех ответов: «да», «нет», «не знаю». Найти число всех различных способов заполнения анкеты.
2. Одна из воюющих сторон захватила в плен 12 солдат, а вторая 14. Сколькими способами можно обменять 5 военнопленных?
3. В партии из ста деталей имеется 10 бракованных. Наудачу выбирают 4 детали. Сколькими способами можно это сделать? Сколько будет четверок, не содержащих бракованных деталей? Найдите отношение числа последних к числу первых.

Практическое занятие № 4

Тема: « Основы математического программирования.»

Пояснение к работе

Последовательность выполнения

1. Руководствуясь приведенным теоретическим материалом, ответить на следующие вопросы:

- Как реализуется табличное представление булевой функции?
- Что является важнейшей интерпретацией теории булевых функций?
- Какие существуют элементарные булевы функции двух переменных?
- Как задается функция вектором ее значений?
- Какие булевы функции называются равными?
- Какая система булевых функций называется полной?

2. Дать определение следующих понятий:

- булева функция;
- фиктивная и существенная переменная;
- булева алгебра (алгебра логики).

3. Записать булеву функцию в виде произвольного отображения.

4. Выполнить задания для аудиторных занятий.

5. Выполнить задания для самостоятельной работы.

4.1. Основные определения

Булевой функцией $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется произвольная функция n переменных, аргументы которой $x_1, x_2, \dots, x_n$ и сама функция f принимают значения 0 или 1, т. е. $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}$. Булева функция от n переменных – это произвольное отображение вида $f: \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

Одной из важнейших интерпретаций теории булевых функций является теория переключательных функций. Первоначально математический аппарат теории булевых функций был применен для анализа и синтеза релейно-контактных схем с операциями последовательного и параллельного соединения контактов.

Любая булева функция может быть представлена таблицей, в левой части которой перечислены все наборы переменных (2^n), а в правой части – значения функции. Для формирования столбца значений переменных удобен лексикографический порядок, в соответствии с которым каждый последующий набор значений получается из предыдущего прибавлением 1 в двоичной системе счисления.

Функций одной переменной четыре. Из них выделим функцию “отрицание x ” (обозначается $\neg x$). Булевых функций двух переменных – 16. Те из них, которые имеют специальные названия (элементарные функции), представлены в табл. 2.

Таблица 2

$x_1 \quad x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \& x_2;$ $x_1 \wedge x_2$	$x_1 \supset x_2;$ $x_1 \rightarrow x_2$	$x_1 \sim x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 x_2$
0 0	0	0	1	1	0	1	1
0 1	1	0	1	0	1	0	1
1 0	1	0	0	0	1	0	1
1 1	1	1	1	1	0	0	0
Названия	дизъюнкция	конъюнкция	импликация	эквивалентность	сложение по модулю 2	стрелка Пирса	штрих Шеффера

Остальные функции специальных названий не имеют и могут быть выражены через перечисленные выше функции.

4.2. Формулы логики булевых функций

Формула логики булевых функций определяется индуктивно следующим образом:

1. Любая переменная, а также константы 0 и 1 есть формула.
2. Если A и B – формулы, то $\neg A$, $A \vee B$, $A \& B$, $A \supset B$, $A \sim B$ есть формулы.

3. Ничто, кроме указанного в пунктах 1–2, не есть формула.

Пример. Построим таблицу значений функции $f(x_1, x_2, x_3) = \neg(x_2 \supset \neg x_3) \sim (\neg x_1 \vee x_2)$.

Табл. 3 представляет последовательное вычисление этой функции.

Таблица 3

x_1	x_2	x_3	$\neg x_3$	$x_2 \supset \neg x_3$	$\neg(x_2 \supset \neg x_3)$	$\neg x_1$	$\neg x_1 \vee x_2$	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0	1	1

Формула так же, как и таблица, может служить способом задания функции. Этот способ аналогичен аналитическому способу задания функций действительной переменной. При этом применяются следующие соглашения:

- а) вначале выполняются операции в скобках (внешние скобки у формул опускаются);
- б) считается, что связка $\neg$ сильнее любой двухместной связки;
- в) связка $\&$ сильнее любой другой двухместной связки.

Кроме того, имея в виду стандартное расположение наборов, булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$ удобно задавать вектором ее значений: $\tilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^n-1})$, где координата α_i равна значению функции $f(\tilde{x}^n)$ на наборе $\tilde{\beta}$, имеющем номер i ($i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$).

4.3. Фиктивные и существенные переменные

Фиктивные переменные. Переменная x_i ($1 \leq i \leq n$) функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется фиктивной переменной, если значение функции не зависит от значения этой переменной, т. е. для любых значений переменных $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Переменная x_i ($1 \leq i \leq n$) функции $f(x_1, \dots, x_n)$ называется существенной переменной, если можно указать наборы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$, соседние по i -ой компоненте, что $f(\tilde{\alpha}) \neq f(\tilde{\beta})$, т. е. $f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$.

Булевы функции f и g называются равными, если их существенные переменные соответственно равны и на каждом наборе значений этих переменных функции f и g принимают равные значения.

Замечание: при решении практических задач иногда вместо удаления фиктивных переменных в одной из функций, наоборот, добавляют фиктивные переменные к множеству переменных другой функции.

Пример. Функции $f_1 = x \oplus y$, $f_2 = xy \oplus z$, $f_3 = x \oplus y \oplus z \oplus 1$, $f_4 = xy \oplus yz \oplus zx$, реализованные формулами, задать векторами своих значений.

Решение. 1. Составим вначале таблицу истинности для f_1, f_2, f_3, f_4 (табл. 4).

Таблица 4

(x, y, z)	f_1	f_3	xy	f_2	yz	zx	f_4
0 0 0	0	1	0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	1	0	0	0
0 1 0	1	0	0	0	0	0	0
0 1 1	1	1	0	1	1	0	1
1 0 0	1	0	0	0	0	0	0
1 0 1	1	1	0	1	0	1	1
1 1 0	0	1	1	1	0	0	1
1 1 1	0	0	1	0	1	1	1

2. Тогда функции f_1, f_2, f_3, f_4 задаются следующими векторами своих значений: $f_1(\tilde{x}^3) = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$; $f_2(\tilde{x}^3) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$; $f_3(\tilde{x}^3) = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0)$; $f_4(\tilde{x}^3) = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$.

3. $f_2 \neq f_4$, т. к. $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0) \neq (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$ (в таблице не совпадают значения в столбцах, соответствующих этим функциям).

1. Выписываем $f(0, 0, 0) = f(0, 1, 1) = f(1, 0, 1) = f(1, 1, 0) = 1$ и $f(0, 0, 1) = f(0, 1, 0) = f(1, 0, 0) = f(1, 1, 1) = 0$. Определим, какой переменной является x . Сравнивая значения функции на всех парах наборов, соседних по переменной x , видим, что $f(0, y, z) \neq f(1, y, z)$, x – существенная переменная. Аналогично устанавливаем, что y и z являются существенными переменными.

10.4. Полные системы булевых функций

Как известно, алгеброй называют систему, включающую в себя некоторое непустое множество объектов с заданными на нем функциями (операциями), результатами применения которых к объектам данного множества являются объекты того же множества.

Булевой алгеброй или алгеброй логики называется двухэлементное множество $B = \{0, 1\}$ вместе с операциями конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Система булевых функций $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ называется полной, если любая булева функция может быть выражена в виде суперпозиции этих функций. Все логические операции могут быть выражены через операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Поэтому система функций $\{\neg, \&, \vee\}$ является полной. Также полными являются следующие системы функций: а) $\{\neg, \vee\}$; б) $\{\neg, \&\}$; в) $\{\neg, \supset\}$.

Полнота систем $\{\neg, \vee\}$ и $\{\neg, \&\}$ следует из полноты системы $\{\neg, \&, \vee\}$, а также законов де Моргана и двойного отрицания, следствием которых является возможность выразить конъюнкцию через дизъюнкцию и наоборот: $A \& B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$; $A \vee B \equiv \neg(\neg A \& \neg B)$. Поэтому система $\{\neg, \&, \vee\}$ может быть сокращена на одну функцию.

Полнота системы $\{\neg, \supset\}$ следует из полноты системы $\{\neg, \vee\}$ и равносильности, позволяющей выразить импликацию через отрицание и дизъюнкцию: $A \supset B \equiv \neg A \vee B$.

Пусть дан класс функций B (т. е. конечное или бесконечное множество функций), объединенных по общему признаку. Замыканием этого класса (обозначение – $[B]$) будем называть множество всех суперпозиций функций из класса B . Класс B будем называть замкнутым, если его замыкание совпадает с ним самим $B = [B]$.

Рассмотрим классы функций, которые являются замкнутыми.

Класс T_0 – класс функций, сохраняющих константу 0. $f(\tilde{x}^n) \in T_0 \Leftrightarrow f(0, \dots, 0) = 0$.

Класс T_1 – класс функций, сохраняющих константу 1. $f(\tilde{x}^n) \in T_1 \Leftrightarrow f(1, \dots, 1) = 1$.

Класс S – класс самодвойственных функций. $f(\tilde{x}^n) \in S \Leftrightarrow f(\tilde{x}^n) = f^*(\tilde{x}^n)$.

Функция $\overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$ называется двойственной к $f(\tilde{x}^n)$, обозначается $f^*(\tilde{x}^n)$, т. е. $f^*(\tilde{x}^n) = \overline{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}$.

Класс M – класс монотонных функций. $f(\tilde{x}^n) \in M \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \Sigma_2^n$, таких, что $\alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)$.

На множестве наборов значений переменных Σ_2^n введем отношение порядка $\leq$, называемое отношением предшествования (отношением сравнимости), следующим образом: $\alpha \leq \beta$, если $\alpha_i \leq \beta_i$, $i = \overline{1, n}$.

Класс L – класс линейных функций.

$f(\tilde{x}^n) \in L \Leftrightarrow f(\tilde{x}^n) = \bigoplus_{i=1}^n a_i x_i \oplus a_0$ – представима полиномом Жегалкина не выше первой степени.

Теорема Поста. Система функций полна тогда и только тогда, когда она не находится ни в одном из пяти важнейших замкнутых классов, а именно S, M, L, T_0, T_1 .

Пример. Исследовать полноту системы $A = \{f_1 = x \oplus y, f_2 = xy \oplus z, f_3 = x \oplus y \oplus z \oplus 1, f_4 = xy \oplus yz \oplus zx\}$ (табл. 4).

Решение. Результаты исследования на принадлежность функций каждому из пяти классов отображены в критериальной таблице (табл. 5).

Таблица 5

	T_0	T_1	L	S	M
f_1	+	–	+	–	–
f_2	+	–	–	–	–

f_3	-	-	+	+	-
f_4	+	+	-	+	+

а) $f_1, f_2, f_4 \in T_0$, т. к. $f_1(0, 0) = 0 \oplus 0 = 0$, $f_2(0, 0) = 0 \wedge 0 \oplus 0 = 0$, $f_4(0, 0, 0) = 0 \wedge 0 \oplus 0 \wedge 0 \oplus 0 \wedge 0 = 0$; $f_3 \notin T_0$, т. к. $f_3(0, 0, 0) = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$;

б) $f_1, f_2, f_3 \notin T_1$, т. к. $f_1(1, 1) = 1 \oplus 1 = 0$, $f_2(1, 1) = 1 \wedge 1 \oplus 1 = 0$, $f_3(1, 1, 1) = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0$; $f_4 \in T_1$, т. к. $f_4(1, 1, 1) = 1 \wedge 1 \oplus 1 \wedge 1 \oplus 1 \wedge 1 = 1$;

в) $f_1, f_3 \in L$, т. к. $f_1 = x \oplus y$, $f_3 = x \oplus y \oplus z \oplus 1$ – представимы полиномом Жегалкина первой степени; $f_2, f_4 \notin L$, т. к. $f_2 = xy \oplus z$, $f_4 = xy \oplus yz \oplus zx$ – представимы полиномом Жегалкина второй степени;

г) $f_3, f_4 \in S$, т. к. $f_3^*(\tilde{x}^3) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}) = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0) = f_3(\tilde{x}^3)$, $f_4^*(\tilde{x}^3) = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}) = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1) = f_4(\tilde{x}^3)$;

$f_1, f_2 \notin S$, т. к. $f_1^*(\tilde{x}^3) = (\bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0}) = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1) \neq f_1(\tilde{x}^3)$,

$f_2^*(\tilde{x}^3) = (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}) = (1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1) \neq f_2(\tilde{x}^3)$;

д) $f_1, f_2, f_3 \notin M$, т. к. $f_1: (0, 0, 1, 1) \not\leq (1, 1, 0, 0)$, $f_2: (0, 1, 0, 1) \not\leq (0, 1, 1, 0)$, $f_3: (1, 0, 0, 1) \not\leq (0, 1, 1, 0)$; $f_4 \in M$, т. к. $f_4: (0, 0, 0, 1) \leq (0, 1, 1, 1)$; $(0, 0) \leq (0, 1)$ и $(0, 1) \leq (1, 1)$; $0 \leq 0$ и $0 \leq 1$, и $1 \leq 1$.

Вывод: система функций A является полной, т. к. в каждом из столбцов критериальной таблицы есть хотя бы один « $\rightarrow$ ».

Задания

Для аудиторных занятий

1. Построив таблицы для соответствующих функций, записать их в векторной форме. Выяснить, эквивалентны ли формулы f и g :

а) $f = x \vee y \sim x$ и $g = (x \rightarrow y) \wedge y$; б) $f = x(y \rightarrow z)$ и $g = x \rightarrow (y | zx)$.

2. С помощью табличного представления задать значения следующих булевых функций:

а) $f(\tilde{x}^2) = (x_2 \rightarrow x_1)(x_2 \downarrow x_2)$; б) $f(\tilde{x}^2) = (x_2 \sim x_1)(x_1 | x_2)$;

в) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_3 \cdot (x_3 \rightarrow x_2)$;

г) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \rightarrow (x_1 \cdot x_2 | \bar{x}_3) \oplus (x_2 \rightarrow x_1) \cdot \bar{x}_3$.

3. С помощью векторного представления задать значения следующих булевых функций:

а) $f(\tilde{x}^2) = ((x_2 \vee x_1) \rightarrow x_1 \cdot x_2) \oplus (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_2 \rightarrow x_2)$;

б) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \rightarrow x_2 x_3) \cdot (x_2 \rightarrow x_1 x_3) \vee (x_1 \sim x_2)$.

4. Указать все фиктивные переменные у функции f :

а) $f(\tilde{x}^3) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$; б) $f(\tilde{x}^3) = (0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$;

в) $f(\tilde{x}^3) = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 1)$;

г) $f(\tilde{x}^4) = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$;

д) $f(\tilde{x}^4) = (0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$.

5. Указать все фиктивные и существенные переменные у функции f :

а) $f(\tilde{x}^2) = (x_2 \rightarrow x_1)(x_2 \downarrow x_2)$; б) $f(\tilde{x}^2) = (x_2 \sim x_1)(x_1 | x_2)$;

в) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_3 \cdot (x_3 \rightarrow x_2)$;

г) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \rightarrow (x_1 \cdot x_2 | \bar{x}_3) \oplus (x_2 \rightarrow x_1) \cdot \bar{x}_3$.

6. Перечислить существенные переменные у следующих функций:

а) $f(\tilde{x}^2) = ((x_2 \vee x_1) \rightarrow x_1 \cdot x_2) \oplus (x_1 \rightarrow x_2)(x_2 \rightarrow x_2)$;

б) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \rightarrow x_2 x_3) \cdot (x_2 \rightarrow x_1 x_3) \vee (x_1 \sim x_2)$.

7. Какие значения принимает булева функция двух переменных для $x_1 \oplus x_2$? Как называется эта функция?

8. Выяснить, является ли самодвойственной и монотонной функция f :

$f = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_3 x_2$.

9. Выяснить, полна ли система функций:

$A = \{xy, x \vee y, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$.

Для самостоятельной работы

1. Построив таблицы для соответствующих функций, записать их в векторной форме. Выяснить, эквивалентны ли формулы f и g :

а) $f = xy \rightarrow x$ и $g = xy \rightarrow y$; б) $f = xy \wedge z$ и $g = x \rightarrow (y \mid zx)$.

2. С помощью табличного представления задать значения следующих булевых функций:

а) $f(\tilde{x}^2) = (x_2 \sim x_1)(x_2 \downarrow x_2)$; б) $f(\tilde{x}^2) = (x_2 \rightarrow x_1)(x_1 \mid x_2)$;

в) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \rightarrow \neg x_3 \cdot (x_3 \rightarrow x_2)$;

г) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \mid \bar{x}_3) \oplus (x_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_3) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1) \cdot \bar{x}_3$.

3. Указать все фиктивные переменные у функции f :

а) $f(\tilde{x}^3) = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1)$; б) $f(\tilde{x}^3) = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0)$;

в) $f(\tilde{x}^3) = (1, 0, 1, 1, 0, 1, 1)$; г) $f(\tilde{x}^4) = (1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1)$; д) $f(\tilde{x}^4) = (1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0)$.

4. Указать все фиктивные и существенные переменные у функции f :

а) $f(\tilde{x}^2) = (x_2 \sim x_1)(x_2 \downarrow x_2)$; б) $f(\tilde{x}^2) = (x_2 \rightarrow x_1)(x_1 \mid x_2)$;

в) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_3 \cdot \neg(x_3 \sim x_2)$;

г) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \sim x_2 \vee \bar{x}_3) \rightarrow (x_1 \cdot x_2 \mid \bar{x}_3) \oplus (x_2 \rightarrow x_1) \cdot \bar{x}_3$.

5. Перечислить существенные переменные у следующих функций.

а) $f(\tilde{x}^2) = ((x_2 \sim x_1) \rightarrow x_1 \cdot x_2) \oplus (x_1 \rightarrow x_2)(x_2 \rightarrow x_2)$;

б) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \sim x_2 x_3) \cdot (x_2 \rightarrow x_1 x_3) \vee (x_1 \sim x_2)$.

6. С помощью векторного представления задать значения следующих булевых функций:

а) $f(\tilde{x}^2) = (x_2 \rightarrow x_1 \cdot x_2) \wedge (x_1 \rightarrow x_2) \oplus (x_2 \rightarrow x_2)$;

б) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \rightarrow x_2 \oplus x_3) \cdot (x_2 \rightarrow x_1 \vee x_3) \vee (x_1 \sim x_2)$.

7. Какие значения принимает булева функция двух переменных для $x_1 \oplus x_2$? Как называется эта функция?

8. Выяснить, является ли самодвойственной и монотонной функция f

$f = x_1 \rightarrow x_2 \vee x_1 x_2 \sim 1$.

9. Выяснить, полна ли система функций:

$A = \{xy, x \vee y, x \oplus y, xy \vee yz \vee zx\}$.

Тема: « Линейное программирование.»

Пояснение к работе

Последовательность выполнения

1. Руководствуясь приведенным теоретическим материалом, ответить на следующие вопросы:

- Какой предикат называется n -местным?
- Какой предикат является высказыванием?
- Какие операции можно выполнять над предикатами?
- Что представляет собой область действия квантора?
- Из чего состоит алфавит логики предикатов?
- Какие переменные в формуле логики предикатов называются свободными?
- Какое выражение называется предикатной формулой?

2. Дать определение следующих понятий:

- предикат;
- квантор общности;
- квантор существования.

3. Выполнить задания для аудиторных занятий.

4. Выполнить задания для самостоятельной работы.

5.1. Предикаты

Предикатом $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется функция, переменные которой принимают значения из некоторого множества M , а сама функция принимает два значения: I (истинное) и L (ложное), то есть

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n): M_n \rightarrow \{I, L\}.$$

Предикат от n аргументов называют n -местным предикатом. Множество M значений переменных определяется математическим контекстом. Например, основное соотношение элементарной геометрии на плоскости – точки x, y, z лежат на одной прямой – выражается предикатом $L(x, y, z)$, где в качестве значений x, y, z рассматриваются конкретные точки.

Предикаты обозначаются большими буквами латинского алфавита. Иногда бывает удобно указывать число переменных у предикатов. В таких случаях у символов предикатов пишут верхний индекс, который и указывает число аргументов, например: $P^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n -местный предикат. Высказывания считаются нуль-местными предикатами.

Над предикатами на M как подмножествами M_T можно производить логические операции и получать новые предикаты. Операции над предикатами – суть операции над соответствующими отношениями: конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация и др. Состав переменных и предметная область предиката, полученного в результате операции, определяются при этом естественным образом.

Пример.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) \& Q(y_1, y_2, \dots, y_n) = R(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n), x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \dots, x_n \in M_n, y_1 \in N_1, y_2 \in N_2, \dots, y_n \in N_n.$$

Среди переменных x_j, y_j могут быть совпадающие значения, так же как и среди множеств M_j и N_j .

Примеры. 1. Пусть $R(X, Y) = P(X) \& Q(Y)$, $X \in M$, $Y \in N$, двуместный предикат $R(X, Y)$ имеет область определения $S = M \cdot N$.

2. $R(X) = P(X) \& Q(X)$, $X \in M$, $Y \in M$, но X и Y – разные предметные переменные; область определения двуместного предиката $R(X, Y)$ – множество $S = M^2$.

3. $R(X) = P(X) \& Q(X)$: у предикатов $P(X) \& Q(X)$ – общая предметная область и одинаковая переменная; $R(X)$ – одноместный предикат на M .

Существуют и другие операции над предикатами. Если $P\{X, Y\}$ – двуместный предикат, то фиксирование одной переменной превращает его в одноместный предикат. Пусть, например, $P(X, Y)$: "число X делится на число Y ", определенный на множестве пар натуральных чисел N , кроме пар $(X, 0)$. Тогда $P(X, 5)$ – одноместный предикат на N , истинный для всех чисел, кратных 5. $P(60, Y)$ – одноместный предикат на N , кроме $Y = 0$, истинный для всех делителей числа 60, т. е. для элементов множества $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$. Заметим, что если зафиксировать значения всех переменных, то предикат превращается в истинное или ложное высказывание, которое можно считать 0-местным предикатом.

5.2. Кванторы

Для предикатов определяются две специфические операции, называемые навешиванием кванторов, которые превращают одноместный предикат $P(x)$ в 0-местный:

Квантор общности, или всеобщности, – высказывание: "для всех x выполнено $P(x)$ ", обозначение $\forall x: P(x)$.

Квантор существования – высказывание: "существует x , для которого выполнено $P(x)$ ", обозначение $\exists x: P(x)$.

Процедура навешивания кванторов применима не только к одноместным, но и к предикатам большей местности. Рассмотрим трехместный предикат $P(x, y, z)$; он является истинным для некоторых троек (x, y, z) . Предикату P можно сопоставить выражения с кванторами $\forall x: P(x, y, z)$ и $\exists x: P(x, y, z)$; первое означает: "для всякого x выполнено $P(x, y, z)$ ", второе – "существует x такой, что выполнено $P(x, y, z)$ ".

Пусть, например, $P(x, y, z) = 3x - 2y > z$ с предметной областью – множеством действительных чисел R , область истинности предиката P – полупространство по одну сторону от плоскости $3x - 2y = z$. Ему можно сопоставить выражения:

$$Q_1(x, y) = \forall z: 3x - 2y > z \text{ и } Q_2(x, y) = \exists z: 3x - 2y > z.$$

Полученные двуместные предикаты зависят от y и z , но не зависят от x . Этот факт выражается так: переменная x в указанных предикатах связана квантором, а переменные y, z – свободные. Связанные (свободные) переменные – это переменные, на которые навешены (соответственно, не навешены) кванторы: $\forall$ или $\exists$.

Область действия квантора – выражение, на которое навешивается квантор.

5.3. Предикатные формулы

На языке предикатов можно составить гораздо более сложные предложения, чем на языке логики высказываний. Определим понятие формулы логики предикатов. Предикатная формула (формула логики предикатов) – формула, содержащая знаки булевых операций и кванторов. Алфавит логики предикатов:

- символы предметных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.
- символы предикатов $P_1, P_2, \dots, P_n$;
- логические символы $\neg, \&, \vee, \supset, \sim$;
- символы кванторов $\exists$ и $\forall$;
- скобки и запятая.

Предикатные переменные будем обозначать через x, y, z , а символы предикатов – через P, S, Q, R и т. д. Предикатной формулой (одновременно определяются понятия свободных и связанных переменных) называется выражение, построенное по следующим правилам:

1. Если P – символ предиката, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – символы переменных (не обязательно различных), то $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – предикатная формула; все ее переменные – свободные, связанных переменных нет.

2. Если A – формула, то $(\neg A)$ тоже формула. Свободные и связанные переменные этой формулы – это свободные и связанные переменные формулы A .

3. Если A, B – формулы, причем нет таких предметных переменных, которые были бы связаны в одной формуле и свободны в другой, тогда

$$(A \& B), (A \vee B), (A \supset B), (A \sim B)$$

есть формулы, в которых свободные переменные формул A и B остаются свободными, а связанные переменные формул A и B остаются связанными.

4. Если A – формула, содержащая свободную переменную x , то выражения

$$(\forall x) A(x) \text{ и } (\exists x) A(x)$$

тоже предикатные формулы; в каждой из них переменная x переходит из множества свободных в множество связанных, т. е. число свободных переменных уменьшается, а число связанных увеличивается на 1. При этом формула A называется областью действия квантора $\forall x$ и областью действия $\exists x$.

5. Слово в алфавите логики предикатов является формулой только в том случае, если это следует из правил 1–4.

По определению формулы никакая переменная не может быть одновременно свободной и связанной. В формуле должны быть правильным образом расставлены скобки, определяющие области действия кванторов и порядок выполнения логических и кванторных операций.

Пример 1. $\forall x_1 \exists x_2: P(x_1, x_2, x_3) \supset \forall x_1: P(x_1, x_4) -$

формула, в которой x_1, x_2 – связанные, а x_3, x_4 – свободные переменные.

Пример 2. Выражение $\exists x_1 \forall x_2: P_1(x_4, x_3) \& P_2(x_4, x_2)$ не является формулой.

Задания

Для аудиторных занятий

1. Определить истинность следующих высказываний для $x, y \in N$:

$$\forall x \forall y: x < y; \exists x \exists y: x < y; \forall y \exists x: x < y; \exists y \forall x: x < y.$$

2. Среди следующих предложений указать высказывания, предикаты и те, которые ими не являются:

а) если целое число k делится на 4, то оно делится и на 2;

б) каждое целое число, делящееся на 4, делится на 2;

в) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

г) $x^2 + 2$.

3. Среди следующих высказываний указать истинные:

а) если x_1, x_2 – действительные корни уравнения $2x^2 + 42x + 446 = 0$, то $x_1 + x_2 = -21$;

б) если натуральное число x делится на 3, то 2^x делится на 8.

4. Заполнить истинностную таблицу для каждой из следующих формул логики высказывания:

а) $(p \vee q) \wedge ((p \rightarrow q) \rightarrow r)$; б) $(p \vee q \rightarrow r)$.

5. На примере предикатов $P(x): x > 2$ и $Q(y): y < 5$ построить предикаты $P(x) \& Q(x)$, $P(x) \vee Q(x)$, $P(x) \rightarrow Q(x)$, $Q(x) \rightarrow P(x)$, $P(x) \vee Q(y)$, $P(x) \& Q(y)$, $P(x) \rightarrow Q(y)$, $P(y) \& Q(x)$.

6. Пусть $P(x)$ означает предикат « x делится на два», $Q(x)$ – предикат « x делится на 3». Что в этом случае означает предикат $P(x) \& Q(x)$? Какой из предикатов $(\forall x)(P(x) \& Q(x))$; $(\exists x)(P(x) \& Q(x))$ является истинным или ложным?

7. Пусть $P(x)$ означает предикат « $x = y$ ». Он принимает значение И тогда и только тогда, когда $x = y$. При каких значениях x и y предикат $\neg P(2)(x, x) \supset P(2)(x, y)$ принимает значение И?

8. Перечислить свободные и связанные переменные в каждой из следующих формул:

а) $(\forall x) P(x)$; б) $(\forall x) P(x) \rightarrow P(y)$; в) $(\exists x) (A(x) \wedge B(x))$.

9. Примем следующие обозначения для предикатов: $P(x)$ – « x – простое число», $E(x)$ – « x – четное число», $D(x, y)$ – « y делится на x », $I(x, y)$ – « x равно y ». Перевести на обычный язык:

а) $P(7)$; б) $(\exists x) (E(x) \wedge D(6, x))$.

10. Используя только предикаты x/y и $x = y$, записать при помощи логических символов следующие предикаты от переменных, принимающих натуральные значения:

а) x имеет ровно два различных простых делителя; б) a и b – простые числа-близнецы.

Для самостоятельной работы

1. Определить истинность следующих высказываний для $x, y \in \mathbb{N}$:

$\forall x \forall y: x > y$; $\exists x \exists y: x > y$; $\forall y \exists x: x > y$; $\exists y \forall x: x > y$.

2. Среди следующих предложений указать высказывания, предикаты и те, которые ими не являются:

а) если целое число k делится на 8, то оно делится и на 12;

б) каждое целое число, делящееся на 8, делится на 12;

в) $n^3 - n$ делится на 3;

г) $x^2 > 2$.

3. Среди следующих высказываний указать истинные:

а) существует действительное число x , такое, что $x^2 + 2x - 3 = 0$;

б) если в четырехугольнике диагонали перпендикулярны, то это ромб.

4. Заполнить истинностную таблицу для каждой из следующих формул логики высказывания:

а) $(p \rightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q$; б) $\neg p \vee q \rightarrow p \wedge q$.

5. Перечислить свободные и связанные переменные в каждой из следующих формул:

а) $(\forall y) P(x) \vee B(y)$; б) $(\forall x) (\forall y) P(x) \rightarrow P(y)$; в) $(\exists x) (P(x) \vee A(x))$.

6. Примем следующие обозначения для предикатов: $P(x)$ – « x – простое число», $E(x)$ – « x – четное число», $D(x, y)$ – « y – делится на x ». Перевести на обычный язык:

а) $E(2) \wedge P(2)$; б) $(\forall x) (D(2, x) \rightarrow E(x))$.

7. Прочитайте следующие высказывания о целых положительных числах. Какие из них истинные, а какие ложные? Приняты обозначения: $P(x)$ – « x – простое число», x/y – « y делится на x », $x \nmid y$ – « y не делится на x »:

а) $(\forall x) (P(x) \rightarrow 2 \nmid x)$; б) $(\exists x) (\forall y) (x/y)$; в) $(\forall x) (\exists y) (P(y) \wedge y/x)$.

8. Каждое из следующих высказываний записать при помощи логических символов, определить, истинно оно или ложно:

а) существует такое целое x , что $x^2 - 4 = 0$;

б) существует единственное положительное число x , для которого $x^2 - 4 = 0$;

в) для любого действительного числа x существует такое действительное число y , что $y^2 = x$.

9. Используя только предикаты x/y и $x = y$, записать при помощи логических символов следующие предикаты от переменных, принимающих натуральные значения:

а) x – простое число; б) a и b – взаимно простые числа.

10. Пусть $P(x)$ означает предикат « x делится на 3», $Q(x)$ – предикат « x делится на 5». Что в этом случае означает предикат $P(x) \wedge Q(x)$? Какой из предикатов $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$; $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$ является истинным или ложным?

Тема: « Оптимальные экономико-математические модели.»

Пояснение к работе

Последовательность выполнения

1. Руководствуясь приведенным теоретическим материалом, ответить на следующие вопросы:

- Какой предикат называется n -местным?
- Какой предикат является высказыванием?
- Какие операции можно выполнять над предикатами?
- Что представляет собой область действия квантора?
- Из чего состоит алфавит логики предикатов?
- Какие переменные в формуле логики предикатов называются свободными?
- Какое выражение называется предикатной формулой?

2. Дать определение следующих понятий:

- предикат;
- квантор общности;
- квантор существования.

3. Выполнить задания для аудиторных занятий.

4. Выполнить задания для самостоятельной работы.

6.1 Конечные автоматы

Регулярные выражения, введенные ранее, служат для описания регулярных множеств. Для распознавания регулярных множеств служат конечные автоматы.

Недетерминированный конечный автомат (НКА) - это пятерка $M = (Q, T, D, q_0,$

$F)$, где

- (1) Q - конечное множество состояний;
- (2) T - конечное множество допустимых входных символов (входной алфавит);
- (3) D - функция переходов (отображающая множество $Q \times (T \cup \{e\})$ во множество подмножеств множества Q), определяющая поведение управляющего устройства;
- (4) $q_0 \in Q$ - начальное состояние управляющего устройства;
- (5) $F \subseteq Q$ - множество заключительных состояний.

Работа конечного автомата представляет собой некоторую последовательность шагов, или тактов. Такт определяется текущим состоянием управляющего устройства и входным символом, обозреваемым в данный момент входной головкой. Сам шаг состоит из изменения состояния и, возможно, сдвига входной головки на одну ячейку вправо. Недетерминизм автомата заключается в том, что, во-первых, находясь в некотором состоянии и обозревая текущий символ, автомат может перейти в одно из, вообще говоря, нескольких возможных состояний, и, во-вторых, автомат может делать переходы по e (пустому символу). Таким образом, для обозначения функции переходов можно пользоваться записью

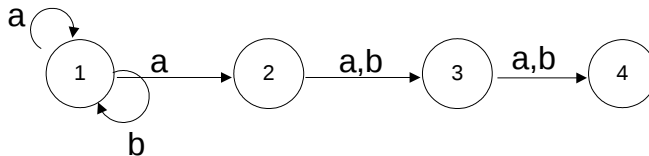
$$D(q, a) = \{p\}, \text{ где } a \in T, a \in p \in Q \text{ и } q \in Q.$$

Конечный автомат может быть изображен графически в виде диаграммы, представляющей собой ориентированный граф, в котором каждому состоянию соответствует вершина, а дуга, помеченная символом $a \in T$, соединяет две вершины p и q , если $p \in D(q, a)$. На диаграмме выделяются начальное и заключительные состояния (в примерах ниже, соответственно, входящей стрелкой и двойным контуром).

Пример НКА

Требуется построить НКА, который распознает язык $L(r)$, где $r=(a|b)^*a(a|b)(a|b)$
 $M = \{\{1,2,3,4\},\{a,b\},D,1,\{4\}\}$

$D(1,b) = \{1\}$
 $D(1,a) = \{1,2\}$
 $D(2,a) = \{3\}$
 $D(2,b) = \{3\}$
 $D(3,a) = \{4\}$
 $D(3,b) = \{4\}$



Важным частным случаем недетерминированного конечного автомата является детерминированный конечный автомат, который на каждом такте работы имеет возможность перейти не более чем в одно состояние и не может делать переходы по ϵ . Пусть $M = (Q, T, D, q_0, F)$ - НКА. Будем называть M **детерминированным конечным автоматом (ДКА)**, если выполнены следующие два условия:

(1) $D(q, \epsilon) = \emptyset$ для любого $q \in Q$, и

(2) $D(q, a)$ содержит не более одного элемента для любых $q \in Q$ и $a \in T$.

Так как функция переходов ДКА содержит не более одного элемента для любой пары аргументов, для ДКА мы будем пользоваться записью $D(q, a) = p$ вместо $D(q, a) = \{p\}$, как это делали для НКА.

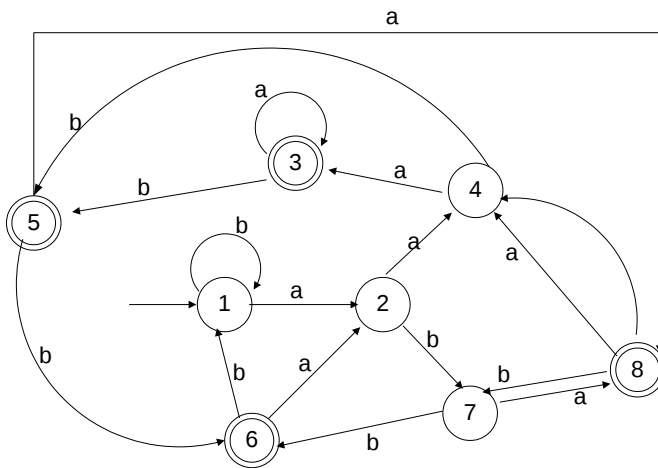
Пример ДКА

Требуется построить ДКА, который распознает язык $L(r)$, где $r=(a|b)^*a(a|b)(a|b)$

$M = \{\{1,2,3,4,5,6,7,8\},\{a,b\},D,1,\{3,5,6,8\}\}$

$D(1,a) = 2$
 $D(1,b) = 1$
 $D(2,a) = 4$
 $D(2,b) = 7$
 $D(3,a) = 3$
 $D(3,b) = 5$
 $D(4,a) = 3$
 $D(4,b) = 5$
 $D(5,a) = 8$
 $D(5,b) = 6$
 $D(6,a) = 2$
 $D(6,b) = 1$
 $D(7,a) = 8$
 $D(7,b) = 6$
 $D(8,a) = 4$

$$D(8,b) = 7$$



Наиболее распространенные задачи, которые решают с использованием конечных автоматов, представлены ниже

1. дана запись числа, надо определить делится ли оно нацело на k ?
2. выделение лексем
3. текстовый поиск (шаблоны)
4. шаблоны файлов

Пример моделирования ДКА

Вход: Входная строка x , завершаемая символом конца файла **eof**, и ДКА D со стартовым состоянием s_0 и множеством заключительных состояний F .

Выход: «Да», если D допускает x , и «нет» в противном случае.

Метод: К входной строке x применяется алгоритм, приведенный ниже. Функция $move(s, c)$ дает состояние, в которое осуществляется переход из состояния s при входном символе c . Функция $nextchar$ возвращает очередной символ строки x .

```

s := s0;
c := nextchar;
while c ≠ eof do begin
    s := move(s, c);
    c := nextchar;
end;
if s ∈ F then
    return «Да»
else return «нет»

```

6.2. Построение НКА по регулярному выражению.

Сейчас рассмотрим алгоритм построения НКА на основе регулярного выражения. Имеется множество вариаций этого алгоритма, и здесь будет представлен простейший вариант, который не только **прост в реализации**, но и **синтаксически управляемый**. Построенный НКА $N(r)$, где r – регулярное выражение, должен обладать следующими свойствами

1. $N(r)$ имеет количество состояний, превышающее количество символов и операторов в r не более чем в 2 раза.
2. $N(r)$ имеет ровно одно начальное и одно заключительное состояния.

3. Каждое состояние $N(r)$ имеет либо один исходящий переход для символа из входного алфавита, либо не более двух исходящих переходов по пустому символу.

Надо отметить, что НКА, который обладает выше перечисленными свойствами, эффективен для дальнейшего преобразования его в ДКА с использованием технологии, так называемой «отложенным вычислением переходов», что еще называют «ленивым» вычислением.

Вход: Регулярное выражение над алфавитом T .

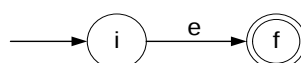
Выход: НКА N , допускающий $L(r)$ и удовлетворяющий свойствам 1-3.

Метод:

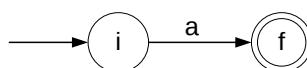
Строим НКА как композицию НКА для более простых выражений.

Комбинирование выполняется по правилам, представленным ниже.

1. Для ε строим НКА. i – новое начальное состояние, f – новое заключительное состояние. Это НКА распознает язык $\{\varepsilon\}$

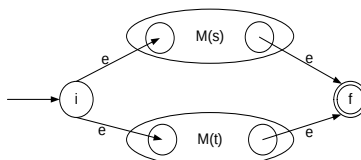


2. Для $a \in T$ строим НКА. i – новое начальное состояние, f – новое заключительное состояние. Это НКА распознает язык $\{a\}$



Пусть $M(s)$ и $M(t)$ представляют собой НКА для регулярных выражений s и t .

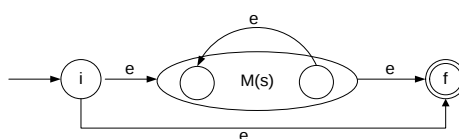
3. Для регулярного выражения $s|t$ строим НКА $M(s|t)$. i – новое начальное состояние, f – новое заключительное состояние. Этот НКА распознает язык $L(s) \cup L(t)$.



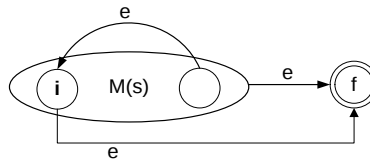
4. Для регулярного выражения st строим НКА $M(st)$. Здесь начальное состояние НКА $M(s)$ становится новым начальным состоянием $M(st)$, заключительное состояние $M(t)$ становится заключительным состоянием $M(st)$. А конечное состояние $M(s)$ и начальное состояние $M(t)$ объединяются. Этот НКА распознает язык $L(s)L(t)$.



5. Для регулярного выражения s^* строим НКА $M(s^*)$. i – новое начальное состояние, f – новое заключительное состояние. Этот НКА распознает язык $L(s^*)$.



Для завершения описания построения надо отметить, что возникает желание модифицировать построение, предложенное в п.5, следующим образом



Здесь экономится начальное состояние, т. е. новым начальным состоянием объявляется начальное состояние НКА $M(s^*)$. Однако при таком подходе построения итерации нарушается свойство 3, которому должен удовлетворять получаемый НКА. Так, например, если нужно построить итерацию от объединения. Т.е. хотим получить НКА по регулярному выражению $(s | t)^*$.

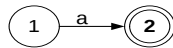


Построим объединение, а потом по нему итерацию. Получится НКА, который имеет более 2-х переходов по пустому символу.

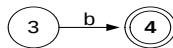
Пример построения НКА по регулярному выражению

Требуется построить НКА по регулярному выражению $r = (ab)^*a^*ba$

1. Построим НКА по регулярному выражению $r = a$ (правило 2)



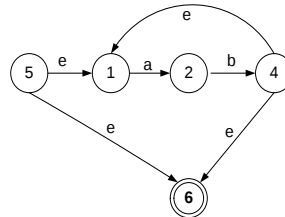
2. Построим НКА по регулярному выражению $r = b$ (правило 2)



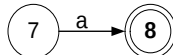
3. Построим НКА по регулярному выражению $r = ab$ (правило 4)



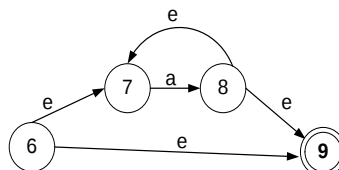
4. Построим НКА по регулярному выражению $r = (ab)^*$ (правило 5)



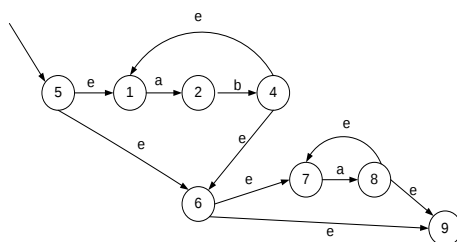
5. Построим НКА по регулярному выражению $r = a$ (правило 2)



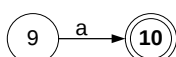
6. Построим НКА по регулярному выражению $r = (a)^*$ (правило 5)



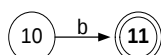
7. Построим НКА по регулярному выражению $r = (ab)^*a^*$ (правило 4)



8. Построим НКА по регулярному выражению $r = a$ (правило 2)



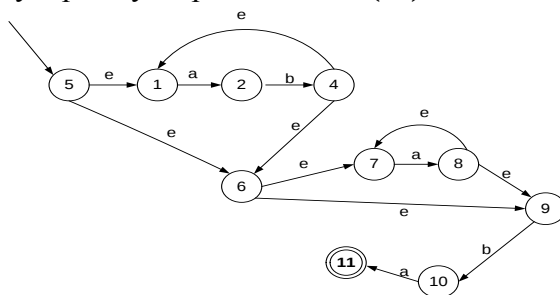
9. Построим НКА по регулярному выражению $r = b$ (правило 2)



10. Построим НКА по регулярному выражению $r = ab$ (правило 4)



11. Построим НКА по регулярному выражению $r = (ab)^*a^*ba$



6.3. Построение ДКА по НКА.

Рассмотрим алгоритм для преобразования НКА в ДКА, распознающий тот же язык, что и НКА. Этот алгоритм часто называют построение подмножеств.

В таблице переходов НКА каждая запись представляет собой множество состояний. В таблице переходов ДКА – единственное состояние. Общая идея преобразования НКА в ДКА состоит в том, что каждое состояние ДКА соответствует множеству состояний НКА. ДКА использует свои состояния для отслеживания всех возможных состояний, в которых НКА может находиться после чтения очередного входного символа. Таким образом, после чтения входного потока $a_1a_2...a_n$ ДКА находится в состоянии, которое представляет подмножество T состояний НКА, достижимых из начального состояния НКА по пути, помеченному как $a_1a_2...a_n$. Количество состояний ДКА может оказаться экспоненциально зависящим от количества состояний НКА, но на практике этот наихудший случай встречается редко.

Для построения алгоритма понадобятся вспомогательные функции, описанные ниже.

$\varepsilon - \text{closure}(s)$ (ε – замыкание(s)) – множество состояний НКА, достижимых из s только по ε -переходам.

$\varepsilon - \text{closure}(T)$ (ε – замыкание(T)) – множество состояний НКА, достижимых из s из T только по ε -переходам.

$\text{move}(T, a)$ – множество состояний НКА, в которые имеется переход из какого-либо состояния s из T по входному символу a .

Алгоритм построения ДКА по НКА.

Вход: НКА N.

Выход: ДКА D, допускающий тот же язык.

Метод: Данный алгоритм строит таблицу Dtran для D. Каждое состояние ДКА является множеством состояний НКА, и мы строим Dtran так, чтобы D «параллельно» моделировал все возможные перемещения N по данной входной строке.

Изначально $\varepsilon - \text{closure}(s_0)$ является единственным состоянием в Dstates и непомечено;

while в Dstates имеется непомеченное состояние T **do begin**

 пометить T;

for каждый входной символ a **do begin**

$U := \varepsilon - \text{closure}(\text{move}(T, a))$;

if $U \notin \text{Dstates}$ **then**

 Добавить U как непомеченное состояние в Dstates;

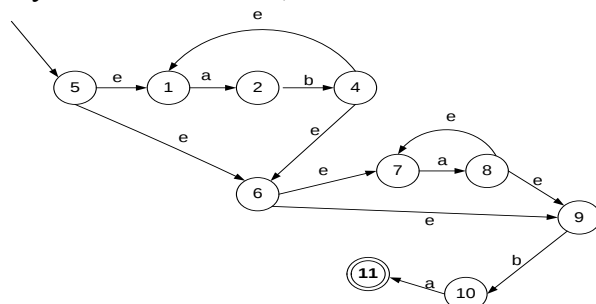
$\text{Dtran}[T, a] := U$;

end

end

Пример построения ДКА по НКА

Пусть имеется НКА,



по нему надо построить ДКА.

Каждый шаг построения, выполненного выше описанному алгоритму, представлен в таблице.

(T,x)	move	$\varepsilon - \text{closure}(\text{move}(T, x))$	состояние
(A,a)	{2,8}	{2,7,8,9}	B
(A,b)	{10}	{10}	C
(B,a)	{8}	{7,8,9}	D
(B,b)	{4,10}	{1,4,6,7,9,10}	E
(C,a)	{11}	{11}	F
(C,b)			
(D,a)	{8}	{7,8,9}	D
(D,b)	{10}	{10}	C
(E,a)	{2,8,11}	{2,7,8,9,11}	G
(E,b)	{10}	{10}	C
(F,a)			
(F,b)			
(G,a)	{8}	{7,8,9}	D

(G,b)	{4,10}	{1,4,6,7,9,10}	E
-------	--------	----------------	---

В результате работы алгоритма получен ДКА

$M = \{\{A,B,C,D,E,F,G\}, \{a,b\}, D, \{\}, \{\}\}$,

Где множество **D** представлено в таблице ниже, а множество начальных и завершающих состояний читателю предлагается определить самостоятельно.

состояние	a	b
A={1,5,6,7,9}	B	C
B={2,7,8,9}	D	E
C={10}	F	
D={7,8,9}	D	C
E={1,4,6,7,9,10}	G	C
F={11}		
G={2,7,8,9,11}	D	E

Задание на занятие:

1. Представить конечный автомат различными способами задания.
Задать КА моделирующий работу грузового лифта в трёхэтажном магазине. Состояния автомата соответствуют пребыванию лифта на этажах, входными сигналами являются сигналы нажатия кнопок на этажах, а так же сигнал о том, что ни одна из кнопок не нажата. Выходные сигналы соответствуют движению лифта вверх, вниз и останов. При отсутствии сигналов лифт должен возвращаться на первый этаж. Считается, что одновременно не может быть нажато более одной кнопки и, до прибытия лифта на требуемый этаж, его состояние не меняется.
2. Провести анализ КА по заданной последовательности входных сигналов $\{x_1, x_0, x_3, x_2, x_0, x_2, x_1, x_0, x_3\}$ и начальном состоянии a_1 .
3. Определить характерные типы состояний автомата

	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇
a ₁	x_0 / y_1	0	0	0	$x_1 / y_0 \vee x_2 / y_1$	0	0
a ₂	0	$x_1 / y_1 \vee x_2 / y_0$	0	0	0	0	x_0 / y_0
a ₃	0	x_0 / y_1	0	0	0	x_2 / y_0	x_1 / y_1
a ₄	0	$x_1 / y_0 \vee x_2 / y_1$	0	x_0 / y_0	0	0	0
a ₅	$x_0 / y_1 \vee x_1 / y_0 \vee x_2 / y_0$	0	0	0	0	0	0
a ₆	0	0	x_1 / y_0	x_1 / y_0	0	0	x_2 / y_1
a ₇	0	0	0	$x_0 / y_1 \vee x_2 / y_0$	0	0	x_1 / y_0

Практическое занятие № 7-8-9

Тема: Решение задач оптимизации.

Тема: Математическая модель транспортной задачи.

Тема: Модели прогнозирования экономических процессов.

Решение задач по вариантам.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации

по организации самостоятельной работы обучающихся
по дисциплине «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»
для студентов направления подготовки /специальности
21.04.02 Землеустройство и кадастры
шифр и наименование направления подготовки/ специальности

Ставрополь 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	38
1. Цель и задачи освоения дисциплины	38
2. Место дисциплины в структуре образовательной программы	38
3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате изучения дисциплины	38
4. Структура и содержание дисциплины (модуля)	Ошибка! Закладка не определена.
5. Организационно-методические рекомендации по освоению дисциплины	39
6. Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов	40
7. Содержание самостоятельной работы	41
7.1. Примерная тематика заданий для самостоятельной работы студентов	42
8. План-график выполнения СРС	42
9. Организация контроля знаний студентов	43
9.1 Формы контроля знаний студентов	43
9.2. Рекомендации по подготовке к экзамену	44
10. Рекомендации по работе с литературой и источниками	44
11. Перечень рекомендуемой литературы	46
11.3. Методическая литература:	
11.4. Интернет – ресурсы:	

Введение

1. Цель и задачи освоения дисциплины

Цели освоения дисциплины «Прикладная математика»:

- сформировать у студентов в систематизированной форме понятия об основных математических структурах: множествах, комбинаторных объектах, графах, логических функциях, дискретных автоматах;
- изучить методы решения тождеств с множествами, комбинаторных задач, экстремальных задач теории графов, логических функций.

Задачи курса:

- изучить наиболее часто применяемые методы решения задач теории множеств, комбинаторики, теории графов, математической логики, дискретных автоматов;
- применять методы прикладной математики для решения задач возникающих в процессе математического моделирования явлений конкретной предметной области;
- использовать языки высокого уровня для разработки программ реализации вычислительных алгоритмов прикладной математики.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина относится к базовой части общенаучного цикла. Ее освоение происходит в 1 семестре.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате изучения дисциплины

3.1. Наименование компетенций

№ п/п	Содержание компетенции	Шифр
<u>Общепрофессиональные компетенции</u>		<u>ОПК-(№)</u>
1.	Способен осуществлять поиск, обработку и анализ информации для принятия решений в научной и практической деятельности	ОПК-3
2.	Способен определять методы, технологии выполнения исследований, оценивать и обосновывать результаты научных разработок в землеустройстве, кадастрах и смежных областях	ОПК-4

5.2. Структура и компонентный состав компетенции

Способен осуществлять поиск, обработку и анализ информации для принятия решений в научной и практической деятельности	Способы задания множеств, основные операции над ними, отношения между элементами множеств, их свойства и виды отношений; отображения и функции, виды отображений, основные операции над отображениями; основные понятия комбинаторики, методы решения комбинаторных задач; основные понятия теории графов, методы решения экстремальных задач на графах; способы представления логических функций, законы и аксиомы булевой алгебры, методы минимизации и синтеза логических функций; способы задания конечных автоматов, анализ и синтез автоматов, методы минимизации полных и неполных автоматов.
Способен определять методы, технологии выполнения исследований, оценивать и обосновывать результаты научных разработок в землеустройстве, кадастрах и смежных областях	Применение положения и методов прикладной математики для анализа и решения задач, относящихся к темам дисциплины. Владение методологией и навыками решения научных и практических задач

4. Организационно-методические рекомендации по освоению дисциплины

Самостоятельная работа студентов является важнейшим условием формирования научного способа познания. Она проводится накануне каждого практического занятия и включает изучение необходимого для выполнения практической работы теоретического материала, а также подготовку отчета по выполненным на практическом занятии заданиям.

Подготовленный материал оформляется в виде отчета.

Самостоятельные занятия (СЗ) являются одной из активных форм обучения.

Самостоятельные занятия по дисциплине «Прикладная математика» имеют целью:

- закрепить и углубить знания, полученные студентами на лекциях и в процессе лабораторных занятий;

- привить практические навыки при создании цифровых схем.

Самостоятельные занятия проводятся в специализированных аудиториях, оборудованных СВТ и возможностью пользования Интернет-ресурсами.

Предлагаемые методические рекомендации содержат информацию для студентов, необходимую при подготовке и проведении практических занятий по дисциплине «Прикладная математика».

5. Методические указания по выполнению самостоятельной работы студентов

Методические указания должны включать следующие разделы:

- цель работы;
- задание, которое должно быть выполнено студентом в результате проведения самостоятельной работы;
- варианты индивидуальных заданий;
- основные теоретические положения, необходимые для выполнения задания, они должны быть краткими и содержать ссылки на литературу, в которой эти положения изложены в объеме, достаточном для выполнения самостоятельной работы;
- этапы выполнения задания с указанием конкретных сроков выполнения каждого из этапов и всего задания в целом;
- требования к оформлению графической и текстовой части самостоятельной работы;
- пример выполнения одного из вариантов задания и оформления отчета;
- библиографический список использованных источников

6. Содержание самостоятельной работы

Наименование разделов и тем дисциплины, их краткое содержание; вид самостоятельной работы представлено в таблице 2.

Таблица 2 – Наименование разделов и тем дисциплины, их краткое содержание; вид самостоятельной работы

№	Наименование разделов и тем дисциплины, их краткое содержание; вид самостоятельной работы	Форма контроля
1.	Тема 1. Множества и отношения 1. Подготовка к практическим занятиям 2. Самостоятельное решение задач	Отчет о выполнении самостоятельной работы
2.	Тема 2. Графы 1. Подготовка к практическим занятиям 2. Самостоятельное решение задач	Отчет о выполнении самостоятельной работы
3.	Тема 3. Комбинаторика 1. Подготовка к практическим занятиям 2. Самостоятельное решение задач	Отчет о выполнении самостоятельной работы
4.	Тема 4. Математическая логика 1. Подготовка к практическим занятиям 2. Самостоятельное решение задач	Отчет о выполнении самостоятельной работы
5.	Тема 5. Конечные автоматы 1. Подготовка к практическим занятиям 2. Самостоятельное решение задач	Отчет о выполнении самостоятельной работы

Наименование тем дисциплины, цель, форма контроля, задания, требования к оформлению, перечень литературных источников представлен в таблице 3.

Таблица 3 – Наименование тем дисциплины, цель, форма контроля, задания и требования к оформлению самостоятельной работы

Название темы	Цель	Форма контроля СРС	Задания для СРС	Требования к оформлению результатов в СРС	Рекомендуемая литература
Подготовка к практическим занятиям	изучить методов	индивидуальное собеседование	Сформулировать ответы на контрольные вопросы к практическим занятиям	письменно ответить на контрольные вопросы к практическим занятиям	

			ким занятиям	ким занятиям	
Предмет и задачи на графах	Изучить предмет и задачи на графах	индивиду альное собеседов ание	сформулир овать и письменно ответить на вопросы для контроля владения компетенц иями данного раздела программ ы	краткий конспект теоретичес кого материала и ответы на вопросы для контроля владения компетенц иями	
Математ ические модели	Изучить математ ические модели				
Логическ ие элементы	Изучить логичес кие элемент ы				

6.1. Примерная тематика заданий для самостоятельной работы студентов

Примерная тематика заданий:

1. Алгоритмы моделирования и прогнозирования пробок г. Ставрополя
2. Задача о освежении Библиотеки.
3. Дерево отрезков и его применение.
4. Задачи на графах и пути их решения.

7. План-график выполнения СРС

№ №	Название темы	Срок сдачи результатов, неделя
1	Предмет и задачи	5
2	Математические модели.	7
3	Способы построения графов	9
4	Минимизация логических функций.	11

5	Конечные автоматы	13
---	-------------------	----

8. Организация контроля знаний студентов

8.1 Формы контроля знаний студентов

Контроль и оценка знаний, умений и навыков студентов осуществляется на практических занятиях, консультациях, при сдаче экзамена. В ходе контроля знаний преподаватель оценивает понимание студентом содержания дисциплины «Прикладная математика», его способность анализировать и проектирования цифровые схемы.

Контроль знаний студентов может осуществляться в следующих формах:

- текущий контроль знаний;
- итоговый контроль знаний.

Текущий контроль знаний студента имеет целью: дать оценку работы каждого студента по усвоению им учебного материала, выявить недостатки в его подготовке и оказать практическую помощь в их устранении;

Основными формами текущего контроля знаний студента являются:

- устный контрольный опрос;
- защита практической работы;
- проверка конспектов лекций;
- проверка конспектов по теме, вынесенной на самостоятельное изучение.

Устный контрольный опрос студентов проводится на лекциях (и лабораторных занятиях). По его результатам преподаватель оценивает качество подготовки студента к занятию.

На практических занятиях знания и практические навыки студентов оцениваются по 4-балльной системе. Полученные оценки выставляется в журнале.

При проверке конспектов дается анализ качества их ведения. Отмечаются допущенные ошибки, в рецензии преподавателя оценивается качество конспектирования учебного материала, даются рекомендации по улучшению качества конспектирования изучаемого материала.

8.2. Рекомендации по подготовке к экзамену

Подготовка к экзамену начинается с начала изучения дисциплины.

Необходимо посещать все лекции и практические занятия.

Экзамен, как итоговый контроль знаний студентов имеет целью проверить и оценить учебную работу студентов, уровень полученных знаний и практических навыков.

Экзамен проводится в 1 семестре после защиты всех практических работ в объеме учебной программы.

9. Рекомендации по работе с литературой и источниками

Изучение литературы и источников необходимо начинать с прочтения соответствующих глав учебных изданий, учебных пособий или литературы, рекомендованной в качестве основной или дополнительной по дисциплине «Прикладная математика», которые прямо или косвенно относятся к изучаемой теме.

При изучении литературы и источников студенту рекомендуется вести краткий конспект. Однако не следует переписывать все содержание изучаемой темы, нужно выписывать лишь основные идеи и главные мысли. В отдельных случаях, когда встречаются важные определения, понятия, необходимый фактический материал и примеры, статистическая информация, имеющие отношение к изучаемой теме, необходимо выписать их в виде цитат с полным указанием библиографических источников.

Конспектирование рекомендуемой литературы и источников необходимо вести с распределением собранных материалов по отдельным

главам и параграфам согласно учебно-тематическому плану. Необходимо выписывать все выходные данные по используемой литературе и источникам.

Основой технологии интенсификации обучения на платформе цифровых образовательных технологий являются учебно-иллюстрационные материалы (опорный конспект) по дисциплине «Прикладная математика».

Работа с учебно-иллюстрационными материалами имеет следующие этапы.

1. Изучение теоретических основ учебного материала в аудитории: изложение преподавателем изучаемого материала студентам с объяснением по опорному конспекту;

2. Самостоятельная работа: индивидуальная работа студентов по опорному конспекту; фронтальное закрепление по блокам опорного конспекта.

3. Первое повторение - воспроизведение содержания заданной темы опорного конспекта по памяти.

4. Устное проговаривание материала опорного конспекта – необходимый этап внешне речевой деятельности при усвоении учебного материала.

5. Второе повторение – взаимопрос и взаимопомощь студентов друг другу.

Применение учебно-иллюстрационных материалов позволяет обобщить сложный по содержанию материал, активизировать мыслительную деятельность студентов.

Необходимо помнить, что главное для студента в самостоятельной работе с рекомендуемой литературой и источниками – это формирование своего индивидуального стиля, который может стать основой в будущей профессиональной деятельности.

10. Перечень рекомендуемой литературы

Основная

1. Асанов, М. О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы Электронный ресурс / Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В. В. : учебное пособие. - 3-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2020. - 364 с. - ISBN 978-5-8114-4998-9, экземпляров неограничено
2. Гутова, С. Г. Дискретная математика и математическая логика Электронный ресурс / Гутова С. Г., Каган Е. С. - Кемерово : КемГУ, 2019. - 285 с. - ISBN 978-5-8353-2550-4, экземпляров неограничено

Дополнительная

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [в 2 ч.] / Дмитрий Письменный, Ч. 2. – 11-е изд. – М. : Айрис пресс, 2015. – 256 с. : ил. – ISBN 978-5-8112-6044-7
2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [в 2 ч.] / Дмитрий Письменный, Ч. 1. – 14-е изд. – М. : Айрис пресс, 2015. – 288 с. : ил. – ISBN 978-5-8112-6045-4
3. Бесов, О.В. Лекции по математическому анализу : учебник / О.В. Бесов. - Москва : Физматлит, 2014. - 476 с. : схем., ил. - ISBN 978-5-9221-1506-3 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275467>