

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ по дисциплине
«ПРАКТИКУМ ПО МЕТОДИКЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ»
для студентов направления подготовки
44.03.05 - Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
Направленность (профиль):
«Информатика и математика»

Ставрополь, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

- Методические особенности обучения алгебре в основной школе. Математические задачи. Сюжетные задачи и обучение работы с ними.
- Основные содержательно-методические линии школьного курса алгебры и начал анализа. Линия тождественных преобразований
- Основные содержательно-методические линии школьного курса алгебры и начал анализа. Функции
- Основные содержательно-методические линии школьного курса алгебры и начал анализа. Линия уравнений
- Основные содержательно-методические линии школьного курса алгебры и начал анализа . Линия неравенств.
- Методика обучения решению геометрических задач
- Обучение началам математического анализа в старшей школе

Введение

Целью изучения дисциплины «Практикум по методике обучения математике» является формирование компетенций бакалавров по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки).

В процессе изучения дисциплины формируются компетенции:

ПК-1 Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

Знать:

- общие вопросы организации учебной деятельности учащихся на уроках математики в средней школе;
- технологию конструирования учебной компетенции учащихся при обучении математике;
- методы и приемы решения математических задач;

Уметь:

- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни;
- решать задачи школьной математики, соответствующие программе основной школы, различными способами;
- формировать универсальные учебные действия обучающихся;

Владеть:

- образовательными технологиями обучения математике;
- технологиями организации деятельности учителя и учащихся при формировании универсальных учебных действий на уроках математики;
- технологиями отбора содержания математических задач при изучении конкретных тем школьного курса математики.

Тема. Методические особенности обучения алгебре в основной школе. Математические задачи. Сюжетные задачи и обучение работы с ними.

Вопросы:

1. Формирование УУД в процессе изучения темы «Действия со степенями и радикалами».
2. Формирование УУД в процессе изучения темы «Арифметические вычисления»
3. Провести анализ школьного курса алгебры 7-9 классов с целью проведения классификации текстовых задач курса.
4. Выделить основные типы задач и рассмотреть методы их решения.
5. Привести рекомендации для совершенствования подготовки учащихся при составлении модели (уравнений и их систем) по условию текстовых задач.

1. Материал для рассмотрения:

Выражениями в алгебре называют записи, состоящие из чисел и букв, соединенных знаками действий.

$\frac{3x}{4x+1}$; $a^2 - b^2 + c$; $\sqrt{x-2} + 9$; x^n – алгебраические выражения.

В зависимости от операций различают рациональные и иррациональные выражения.

Алгебраические выражения называют рациональными, если относительно входящих в него букв $a, b, c, \dots$ не выполняется никаких других операций, кроме операций сложения, умножения, вычитания, деления и возведения в целую степень.

Алгебраические выражения, содержащие операции извлечения корня из переменной или возведения переменной в рациональную степень, не являющуюся целым числом, называются иррациональными относительно этой переменной.

Тождественным преобразованием данного выражения называется замена одного выражения другим, тождественно равным ему на некотором множестве.

В основе тождественных преобразований рациональных и иррациональных выражений лежат следующие теоретические факты.

1. Свойства степеней с целым показателем:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n - \text{множителей}}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad a^1 = a;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \neq 0; \quad a^0 = 1, \quad a \neq 0;$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad a \neq 0;$$

$$a^n : a^m = a^{n-m}, \quad a \neq 0;$$

$$(a^n)^m = a^{nm}, \quad a \neq 0;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0;$$

$$(ab)^m = a^m b^m, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$$

2. Формулы сокращенного умножения:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3; \quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2);$$

где a, b, c – любые действительные числа;

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad \text{где } a \neq 0, \quad x_1 \text{ и } x_2 - \text{корни уравнения } ax^2 + bx + c = 0.$$

3. Основное свойство дроби и действия над дробями:

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}, \quad \text{где } b \neq 0, \quad c \neq 0;$$

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}; \quad \frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{ad \pm bc}{cd};$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

4. Определение арифметического корня и его свойства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0; \quad (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; \quad \sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \quad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a},$$

где a, b – неотрицательные числа, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$.

5. Типы текстовых задач, включённых в программу школьного курса
- задачи на движение,
 - работу,
 - на смеси и сплавы,
 - на разбавление,
 - на проценты,
 - на прогрессии,
 - на зависимость между компонентами арифметических действий и другие.

Практическое задание

Рассмотрите, какие универсальные учебные действия формируются при изучении следующего материала:

1. Представьте в виде многочлена $(a+b)(a-b+1)-(a-b)(a+b-1)$.

Решение:

$$(a+b)(a-b+1)-(a-b)(a+b-1)=(a+b)((a-b)+1)-(a-b)((a+b)-1)=$$

$$=a^2-b^2+a+b-a^2+b^2+a-b=2a.$$

При выполнении указанного преобразования использовали правила умножения и вычитания многочленов, формулу сокращенного умножения и приведение подобных слагаемых.

2. Разложите на множители: $c^8 - c^4 - 2c^2 - 1$.

Решение:

$$c^8 - c^4 - 2c^2 - 1 = c^8 - (c^4 + 2c^2 + 1) = c^8 - (c^2 + 1)^2 = (c^4 - c^2 - 1)(c^4 + c^2 + 1).$$

При выполнении преобразования использовали правило вынесения общего множителя за скобку и 2 формулы сокращенного умножения.

3. Сократите дробь:

$$\frac{x^{n+2} - 4x^{n+1} + 4x^n}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}.$$

Решение:

$$\frac{x^{n+2} - 4x^{n+1} + 4x^n}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} = \frac{x^n(x^2 - 4x + 4)}{(x^3 - 8) - (6x^2 - 12x)} = \frac{x^n(x-2)^2}{(x-2)(x^2 + 2x + 4) - 6x(x-2)} =$$

$$= \frac{x^n(x-2)^2}{(x-2)(x^2 - 4x + 4)} = \frac{x^n(x-2)^2}{(x-2)(x-2)^2} = \frac{x^n}{x-2}.$$

При выполнении преобразования использовали вынесение общего множителя за скобку, переместительный и сократительный законы, 2 формулы сокращенного умножения, действия над степенями.

4. Вынесите множитель из-под знака корня, если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$: $\sqrt{8a^2b^7c^9}$.

$$\text{Решение: } \sqrt{8a^2b^7c^9} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot b^6 \cdot b \cdot c^8 \cdot c} = \sqrt{4} \sqrt{2} \sqrt{a^2} \sqrt{b^6} \sqrt{b} \sqrt{c^8} \sqrt{c} =$$

$$= 2|a||b^3||c^4| \sqrt{2} \sqrt{b} \sqrt{c} = 2ab^3c^4 \sqrt{2bc} = 2\sqrt{2}ab^3c^4 \sqrt{bc}.$$

Использовали правила действий над корнями и определение модуля числа.

5. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{6} - \sqrt{24} - \sqrt{48} + \sqrt{108}}.$$

Решение:

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{6} - \sqrt{24} - \sqrt{48} + \sqrt{108}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}(1 - \sqrt{2} - \sqrt{8} - \sqrt{16} + \sqrt{36})} = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 4 + 6} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3 - 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{3(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{3 \cdot (-1)} = -\frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{3} = -\frac{\sqrt{2} + 2}{3}.$$

6. Упростите выражение:

$$A = \left(\frac{x-2y}{x^3+y^3} + \frac{y}{x^3-x^2y+xy^2} \right) : \frac{x^2+y^2}{x^3-xy^2} + \frac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x-2y}{x^3+y^3} + \frac{y}{x^3-x^2y+xy^2} \right) : \frac{x^2+y^2}{x(x^2-y^2)} + \frac{2y^2}{x^2(x+y)+y^2(x+y)} = \\ &= \frac{x^2-2xy+xy+y^2}{x(x+y)(x^2-xy+y^2)} \cdot \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{(x^2-xy+y^2)x(x^2-y^2)}{x(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+y^2)} + \\ &+ \frac{2y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{x-y}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{x^2-y^2+2y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{x^2-y^2+2y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \\ &= \frac{x^2+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{1}{x+y}. \end{aligned}$$

Использовали правила действий над алгебраическими дробями и формулы сокращенного умножения.

7. Упростить выражение:

$$A = \frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}}{a-b}.$$

Решение:

$$A = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}}{a-b} = \frac{a-\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}-2b-\sqrt{ab}}{a-b} = \frac{a-b}{a-b} = 1,$$

если $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$.

Использовали формулы сокращенного умножения, правила сложения дробей и умножения иррациональных выражений, тождество $\sqrt{b^2} = |b|$, определение модуля числа, понятие области допустимых значений переменных в выражении.

8. Вычислить

$$A = \sqrt{28-10\sqrt{3}} + \sqrt{28+10\sqrt{3}}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{28-10\sqrt{3}} + \sqrt{28+10\sqrt{3}} = \sqrt{25-10\sqrt{3}+3} + \sqrt{25+10\sqrt{3}+3} = \sqrt{(5-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(5+\sqrt{3})^2} = \\ &= |5-\sqrt{3}| + |5+\sqrt{3}| = 5-\sqrt{3}+5+\sqrt{3} = 10. \end{aligned}$$

Использовали операцию выделения полного квадрата, тождество $\sqrt{a^2} = |a|$ и определение модуля числа.

9. Докажите, что $a^3+b^3+c^3=3abc$, если $a+b+c=0$.

Доказательство:

Так как $a+b+c=0$, то $a+b=-c$ и $(a+b)^3=-c^3$ или $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=-c^3$ или $a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)$ или $a^3+b^3+c^3=-3ab(-c)$, т.е. $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Использовали условие и формулу суммы кубов.

Надо иметь в виду, что условия, связывающие переменные, могут быть заданы и в упражнениях первых двух типов.

Например.

10. Найдите $a^3 - \frac{1}{a^3}$, если $a - \frac{1}{a} = \frac{2}{3}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{Так как } a - \frac{1}{a} = \frac{2}{3}, \text{ то } \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 = \frac{8}{27} \quad \text{или} \quad a^3 - 3a + \frac{3}{a} - \frac{1}{a^3} = \frac{8}{27} \quad \text{или} \\ a^3 - \frac{1}{a^3} - 3\left(a - \frac{1}{a}\right) = \frac{8}{27} \quad \text{или} \quad a^3 - \frac{1}{a^3} - 3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \quad \text{или} \quad a^3 - \frac{1}{a^3} = 2\frac{8}{27}. \end{aligned}$$

Использовали условие, формулу куба разности двух выражений.

Изучить методику обучения решению текстовых задач с помощью составления таблиц

Одним из действенных методов решения основных типов задач является заполнение таблиц. Этот подход помогает разобраться в условии задачи, выделить основные компоненты рассматриваемого процесса и установить между ними математическую связь, что позволяет построить математическую модель, которую можно описать с помощью уравнений или их систем (в более сложных случаях неравенств). Рассмотрим возможную методику работы над задачей при составлении таблицы.

Первая из предлагаемых задач может быть решена без введения неизвестных. Поэтому процесс её решения поможет учащимся понять, что составление таблицы для решения задачи следует начать с внимательного чтения условия и определения основных компонентов протекающего процесса и формул их связывающих. Итак, читаем условие.

Задача 1. В помощь садовому насосу, перекачивающему 5 литров воды за 2 минуты, подключили второй насос, перекачивающий тот же объём воды за 3 минуты. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 25 литров воды? [3]

Выясняем, что эта задача на работу, поэтому вспоминаем, что основные компоненты работа, производительность и время связаны соотношением $A = Pt$. Здесь стоит проговорить с учениками, что эти элементы мы заносим в столбцы таблицы. Определяем по условию число участвующих в

описываемом процессе насосов, что определяет количество строк таблицы. После определения структуры таблицы (Таблица 1) переходим к её заполнению.

Таблица 1 – Решение задачи 1

	Производительность P , литров/мин	Время t , мин	Работа A , литров
I насос	$\frac{5}{2}$	2	5
II насос	$\frac{5}{3}$	3	5
I+II насосы	$\frac{5}{2} + \frac{5}{3} = \frac{15+10}{6} = \frac{25}{6}$	$\frac{15}{25/6} = 3,6$	15

Ответ

При заполнении таблицы читаем ещё раз условие задачи и вносим данные в соответствующие клетки. Далее заполняем оставшиеся пустыми клетки. В нашем случае последовательно отвечаем на следующие вопросы: «Как найти производительность, если известна работа и время?», «Как определить совместную производительность насосов?», «Как найти время, если известна работа и производительность?». Порядок заполнения таблицы показан стрелками. В рассмотренной задаче мы сразу в таблице получаем ответ.

В качестве второй задачи рассматриваем задачу, которая требует введения одного неизвестного и как следствие составление одного уравнения. Обратимся к условию.

Задача 2. Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы. Спустя один час, когда одному из них оставался 1 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун прошёл первый круг 5 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 2 км/ч меньше скорости второго. Ответ дайте в км/ч [3].

Прочитав условие, определяем, что задача на движение, её компоненты скорость, время и расстояние связаны соотношением $S = Vt$, обязательно надо проговорить в каких единицах будем их измерять, в рассматриваемом процессе участвуют два бегуна. Таким образом, мы определили структуру таблицы 2. При работе с этой задачей с учениками определяем, что время 5 минут обязательно надо перевести в часы.

Таблица 2 – Решение задачи 2

	Скорость V , км/ч	Время t , ч	Расстояние S , км
Первый бегун	$x - 2$	1	$x - 2$
Второй бегун	x	$1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$	$\frac{11}{12}x$
За 1 час первый прошёл на 1 км меньше, чем второй за 55 мин			$\frac{11}{12}x - (x - 2) = 1$

Далее выбираем неизвестную – скорость второго бегуна и начинаем заполнять таблицу. Процесс её заполнения показан стрелками. Выясняем на основе какого условия, можем составить уравнение (первому до окончания круга через час движения остался 1 км, а второй прошёл круг 5 минут назад).

Составленное уравнение $\frac{11}{12}x - (x - 2) = 1$ и считаем математической моделью данной задачи.

Продолжить работу по решению задач с помощью таблиц можно на следующей задаче.

Задача 3. Из городов A и B навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в B на 2 часа раньше,

чем велосипедист приехал в A , а встретились они через 45 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из B в A велосипедист? [3]

Прочитав условие задачи, первое на что можно обратить внимание, что задача распадается на две части – весь путь и движение до встречи. Поэтому смело можно вводить две неизвестные (выберем скорости) и составлять на основе каждой части задачи уравнение, т.е. математическая модель данной задачи будет представлять собой систему уравнений. Работу по заполнению таблицы 3 проводим, как и в предыдущих случаях. Следует проговорить с учащимися, что в этой задаче проще весь путь принять за 1, поэтому скорость будем измерять в единицах часть пути в час. Процесс заполнения таблицы показан стрелками.

Таблица 3 – Решение задачи 3

	Скорость V , часть пути/ч	Время t , ч	Расстояние S , часть пути
Велосипедист в A	y	$\frac{1}{y}$	1
Мотоциклист в B	x	$\frac{1}{x}$	1
Разница во времени на весь путь		$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 2$	
Мотоциклист до встречи	x	0,75	0,75 x
Велосипедист до встречи	y	0,75	0,75 y
Мотоциклист и велосипедист встретились			$0,75x + 0,75y = 1$

Объединяем составленные уравнения в систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 2 \\ 0,75x + 0,75y = 1 \end{cases}$$

При решении системы отмечаем, что нам надо найти $\frac{1}{y}$, поэтому из второго уравнения у школьников, даже имеющих высокие оценки, часто затруднения вызывают задачи на смеси-сплавы. Предлагаемая ниже задача трудна учащимся ещё и тем, что надо правильно определить при сравнении, какую из величин надо выбирать в качестве 100%.

Задача 4. Имеется сплав массой 112 кг, состоящий из никеля, меди и марганца. Масса никеля составляет 40% массы меди и марганца, а масса меди составляет 60% массы никеля и марганца. Сколько килограммов марганца содержится в сплаве? [3]

В этой задаче при составлении таблицы (Таблица 4) исходим из того, что перечисляем в столбцах все встречающиеся в условии комбинации веществ, смело вводим три неизвестные (можно было бы обойтись и двумя, если из первого предложения массу одного из веществ выразить через два других), а дальше по условию задачи начинаем составлять пропорции (свойство пропорции в таблице и показано стрелками). Здесь обязательно следует проговорить, например, так как масса никеля составляет 40% массы меди и марганца, то в качестве 100% берём массу меди и марганца.

Таблица 4 – Решение задачи 4

	сплав	медь	никель	марганец	медь +марганец	никель+ марганец
Масса, кг	112	x	y	z	$x+z$	$y+z$
		$112 = x + y + z$				
%			40		100	
пропорция			$100y = 40(x+z)$			
%		60				100
пропорция		$100x = 60(y+z)$				

выражаем x через y и подставляем в первое уравнение системы.

Задание. Подобрать текстовые задачи разных типов и привести составление математической модели задачи с помощью составления таблиц.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Гончарова М.А. Образовательные технологии в школьном обучении математике [Электронный ресурс] : учебное пособие / М.А. Гончарова, Н.В. Решетникова. — Электрон. Текстовые данные. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2014. — 267 с. — 978-5-222-21972-0. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/58966.html>
2. Галямова Э.Х. Методика обучения математике в условиях внедрения новых стандартов [Электронный ресурс] / Э.Х. Галямова. — Электрон. Текстовые данные. — Набережные Челны: Набережночелнинский государственный педагогический университет, 2016. — 116 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/64633.html>

Дополнительная литература:

1. Васильева Г.Н. Методика обучения математике. Часть 1 [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Г.Н. Васильева. — Электрон. Текстовые данные. — Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2015. — 66 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70636.html>
2. Васильева Г.Н. Методика обучения математике. Часть 2 [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Г.Н. Васильева. — Электрон. Текстовые данные. — Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2016. — 75 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70637.html>

Тема: Основные содержательно-методические линии школьного курса алгебры и начал анализа.

Линия тождественных преобразований.

Вопросы:

1. Числовые выражения и выражения с переменной.
2. Тождественные преобразования целых рациональных выражений.
3. Тождественные преобразования дробных рациональных выражений.
4. Тождественные преобразования иррациональных выражений.
5. Тождественные преобразования степенных и логарифмических выражений.
6. Тождественные преобразования тригонометрических выражений.

Типы упражнений на преобразование выражений

Существуют различные типы упражнений на тождественные преобразования выражений. Первый тип: явно указано то преобразование, которое необходимо выполнить.

Например.

1. Разложите на множители: $c^8 - c^4 - 2c^2 - 1$.

Решение:

$$c^8 - c^4 - 2c^2 - 1 = c^8 - (c^4 + 2c^2 + 1) = c^8 - (c^2 + 1)^2 = (c^4 - c^2 - 1)(c^4 + c^2 + 1).$$

При выполнении преобразования использовали правило вынесения общего множителя за скобку и 2 формулы сокращенного умножения.

2. Сократите дробь:

$$\frac{x^{n+2} - 4x^{n+1} + 4x^n}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{x^{n+2} - 4x^{n+1} + 4x^n}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} &= \frac{x^n(x^2 - 4x + 4)}{(x^3 - 8) - (6x^2 - 12x)} = \frac{x^n(x-2)^2}{(x-2)(x^2 + 2x + 4) - 6x(x-2)} = \\ &= \frac{x^n(x-2)^2}{(x-2)(x^2 - 4x + 4)} = \frac{x^n(x-2)^2}{(x-2)(x-2)^2} = \frac{x^n}{x-2}. \end{aligned}$$

При выполнении преобразования использовали вынесение общего множителя за скобку, переместительный и сократительный законы, 2 формулы сокращенного умножения, действия над степенями.

3. Вынесите множитель из-под знака корня, если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$: $\sqrt{8a^2b^7c^9}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \sqrt{8a^2b^7c^9} &= \sqrt{4 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot b^6 \cdot b \cdot c^8 \cdot c} = \sqrt{4} \sqrt{2} \sqrt{a^2} \sqrt{b^6} \sqrt{b} \sqrt{c^8} \sqrt{c} = \\ &= 2|a||b^3||c^4|\sqrt{2}\sqrt{b}\sqrt{c} = 2ab^3c^4\sqrt{2bc} = 2\sqrt{2}ab^3c^4\sqrt{bc}. \end{aligned}$$

Использовали правила действий над корнями и определение модуля числа.

4. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{6} - \sqrt{24} - \sqrt{48} + \sqrt{108}}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} - \sqrt{6} - \sqrt{24} - \sqrt{48} + \sqrt{108}} &= \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}(1 - \sqrt{2} - \sqrt{8} - \sqrt{16} + \sqrt{36})} = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 4 + 6} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3 - 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{3(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{3 \cdot (-1)} = -\frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{3} = -\frac{\sqrt{2} + 2}{3}. \end{aligned}$$

Второй тип упражнений – это упражнения, в которых явно указано то главное преобразование, которое необходимо выполнить. В таких упражнениях требование обычно сформулировано в одном из видов: упростить выражение, вычислить. При выполнении таких упражнений необходимо прежде всего выявить, какие и в каком порядке необходимо выполнить преобразования, чтобы выражение приняло более компактный вид, чем данное, или получился числовой результат.

Например

5. Упростите выражение:

$$A = \left(\frac{x-2y}{x^3+y^3} + \frac{y}{x^3-x^2y+xy^2} \right) : \frac{x^2+y^2}{x^3-xy^2} + \frac{2y^2}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x-2y}{x^3+y^3} + \frac{y}{x^3-x^2y+xy^2} \right) : \frac{x^2+y^2}{x(x^2-y^2)} + \frac{2y^2}{x^2(x+y)+y^2(x+y)} = \\ &= \frac{x^2-2xy+xy+y^2}{x(x+y)(x^2-xy+y^2)} \cdot \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{(x^2-xy+y^2)x(x^2-y^2)}{x(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+y^2)} + \\ &+ \frac{2y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{x-y}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{x^2-y^2+2y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{x^2-y^2+2y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \\ &= \frac{x^2+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{1}{x+y}. \end{aligned}$$

Использовали правила действий над алгебраическими дробями и формулы сокращенного умножения.

6. Упростить выражение:

$$A = \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}}{a-b}.$$

Решение:

$$A = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a - \sqrt{ab} + b)}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a-b)} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}}{a-b} = \frac{a - \sqrt{ab} + b + 2\sqrt{ab} - 2b - \sqrt{ab}}{a-b} = \frac{a-b}{a-b} = 1,$$

если $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a \neq b$.

Использовали формулы сокращенного умножения, правила сложения дробей и умножения иррациональных выражений, тождество $\sqrt{b^2} = |b|$, определение

модуля числа, понятие области допустимых значений переменных в выражении.

7. Вычислить

$$A = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} + \sqrt{28 + 10\sqrt{3}}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} + \sqrt{28 + 10\sqrt{3}} = \sqrt{25 - 10\sqrt{3} + 3} + \sqrt{25 + 10\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(5 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(5 + \sqrt{3})^2} = \\ &= |5 - \sqrt{3}| + |5 + \sqrt{3}| = 5 - \sqrt{3} + 5 + \sqrt{3} = 10. \end{aligned}$$

Использовали операцию выделения полного квадрата, тождество $\sqrt{a^2} = |a|$ и определение модуля числа.

Третий тип упражнений на тождественные преобразования – это упражнения, в которых требуется доказать справедливость данного равенства. При выполнении таких заданий можно либо левую часть преобразовывать к правой, либо правую к левой, либо одновременно преобразовывать левую и правую части, либо с помощью преобразований установить, что разность левой и правой частей равна нулю. При этом упражнения третьего типа могут быть двух видов: условные тождества (заданы условия, которым должны удовлетворять переменные в выражении) и безусловные (обычные).

Например.

8. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, если $a + b + c = 0$.

Доказательство:

Так как $a + b + c = 0$, то $a + b = -c$ и $(a + b)^3 = -c^3$ или $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3$ или $a^3 + b^3 + c^3 = -3ab(a + b)$ или $a^3 + b^3 + c^3 = -3ab(-c)$, т.е. $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Использовали условие и формулу суммы кубов.

Надо иметь в виду, что условия, связывающие переменные, могут быть заданы и в упражнениях первых двух типов.

Например.

9. Найдите $a^3 - \frac{1}{a^3}$, если $a - \frac{1}{a} = \frac{2}{3}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \text{Так как } a - \frac{1}{a} = \frac{2}{3}, \text{ то } \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 = \frac{8}{27} \text{ или } a^3 - 3a + \frac{3}{a} - \frac{1}{a^3} = \frac{8}{27} \text{ или} \\ a^3 - \frac{1}{a^3} - 3\left(a - \frac{1}{a}\right) = \frac{8}{27} \text{ или } a^3 - \frac{1}{a^3} - 3 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \text{ или } a^3 - \frac{1}{a^3} = 2 \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

Использовали условие, формулу куба разности двух выражений.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Гончарова М.А. Образовательные технологии в школьном обучении математике [Электронный ресурс] : учебное пособие / М.А. Гончарова, Н.В.

Решетникова. — Электрон. Текстовые данные. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2014. — 267 с. — 978-5-222-21972-0. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/58966.html>

3. Галямова Э.Х. Методика обучения математике в условиях внедрения новых стандартов [Электронный ресурс] / Э.Х. Галямова. — Электрон. Текстовые данные. — Набережные Челны: Набережночелнинский государственный педагогический университет, 2016. — 116 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/64633.html>

Дополнительная литература:

1. Васильева Г.Н. Методика обучения математике. Часть 1 [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Г.Н. Васильева. — Электрон. Текстовые данные. — Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2015. — 66 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70636.html>

2. Васильева Г.Н. Методика обучения математике. Часть 2 [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Г.Н. Васильева. — Электрон. Текстовые данные. — Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2016. — 75 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70637.html>

Линия функций.

Вопросы:

1. Понятие функции.
2. График функции.
3. Обратная функция.
4. Линейная функция.
5. Обратная пропорциональность.
6. Квадратичная функция.
7. Тригонометрические функции.
8. Показательная и логарифмическая функции.

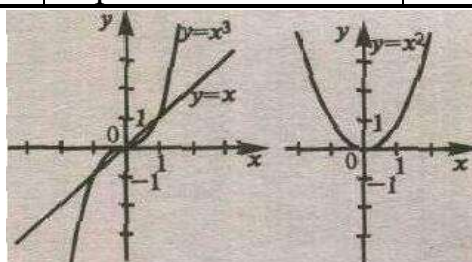
Справочный материал

Основные элементарные функции

1. Степенная функция

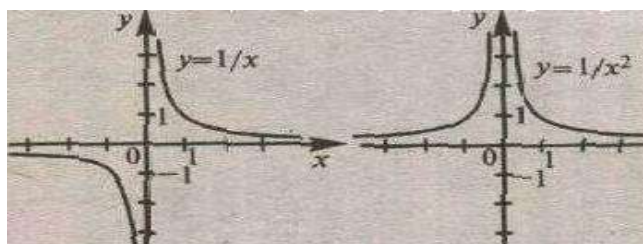
а) $y=x^n, n \in \mathbb{N}$

		если n - нечетно ($n=2k+1$)	если n - четно ($n=2k$)
1	область определения	$D(f) \in (-\infty; +\infty)$	$D(f) \in (-\infty; +\infty)$
2	область значений	$E(f) \in (-\infty; +\infty)$	$E(f) \in [0; +\infty)$
3	четность-нечетность	нечетная	четная
4	монотонность	возрастает на $(-\infty; +\infty)$	убывает на $(-\infty; 0]$, возрастает на $(0; \infty)$
5	периодичность	непериодическая	непериодическая
6	ограниченность	неограничена	ограничена снизу
7	наибольшие, наименьшие значения	нет	наименьшее значение (0,0)
8	точки пересечения с осями координат	(0,0)	(0,0)
9	график	кубическая парабола	парабола



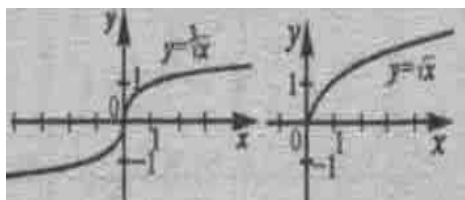
б) $y=x^{-n}, n \in \mathbb{N}$

		если n- нечетно ($n=2k+1$)	если n- четно ($n=2k$)
1	область определения	$(-\infty;0) \cup (0;\infty)$	$(-\infty;0) \cup (0;\infty)$
2	область значений	$(-\infty;0) \cup (0;\infty)$	$[0;\infty)$
3	четность-нечетность	нечетная	четная
4	монотонность	убывает на $(-\infty;0)$ и на $(0;\infty)$	возрастает на $(-\infty;0)$ и убывает на $(0;\infty)$
5	периодичность	непериодическая	непериодическая
6	ограниченность	не ограничена	ограничена снизу: $y>0$
7	наибольшие, наименьшие значения	нет	нет
8	точки пересечения с осями координат	нет	нет
9	график		



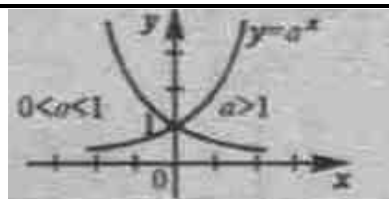
в) $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$

		если n- нечетно ($n=2k+1$)	если n- четно ($n=2k$)
1	область определения	$D(f) \in (-\infty; +\infty)$	$D(f) \in [0; \infty)$
2	область значений	$E(f) \in (-\infty; +\infty)$	$E(f) \in (0; \infty)$
3	четность-нечетность	нечетная	общего вида
4	монотонность	возрастает на $(-\infty; +\infty)$	возрастает на $[0; \infty)$
5	периодичность	непериодическая	непериодическая
6	ограниченность	нет	снизу
7	наибольшие, наименьшие значения	нет	$y=0$
8	точки пересечения с осями координат	$(0,0)$	$(0,0)$
9	график		



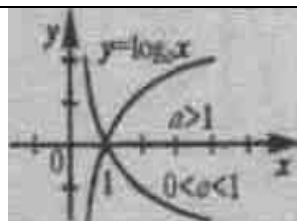
ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ $y=a^x$ ($a>0$. $a \neq 1$)

		$a>1$	$0<a<1$
1	область определения	$D(f) \in (-\infty; +\infty)$	$D(f) \in (-\infty; +\infty)$
2	область значений	$E(f) \in (0; \infty)$	$E(f) \in (-\infty; 0]$
3	четность-нечетность	общего вида	общего вида
4	монотонность	возрастает на $(-\infty; +\infty)$	убывает на $(-\infty; +\infty)$
5	периодичность	непериодическая	непериодическая
6	ограниченность	ограничена снизу: $y>0$	ограничена снизу: $y>0$
7	наибольшие, наименьшие значения	нет	нет
8	точки пересечения с осями координат	(0,1)	(0,1)
9	график		



ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ $y=\log_a x$ ($a>0$. $a \neq 1$)

		$a>1$	$0<a<1$
1	область определения	$D(f) \in -\infty; +\infty$	$D(f) \in (0; \infty)$
2	область значений	$E(f) \in (-\infty; +\infty)$	$E(f) \in (-\infty; +\infty)$
3	четность-нечетность	общего вида	общего вида
4	монотонность	возрастает на $(0; \infty)$	убывает на $(0; \infty)$
5	периодичность	непериодическая	непериодическая
6	ограниченность	не ограничена	не ограничена
7	наибольшие, наименьшие значения	нет	нет
8	точки пересечения с осями координат	(1,0)	(1,0)
9	график		



ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

$y = \sin x$

1	область определения	$D(f) \in (-\infty; +\infty)$
2	область значений	$E(f) \in [-1, 1]$
3	четность-нечетность	нечетная
4	монотонность	возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, убывает на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$
5	периодичность	период $T = 2\pi$
6	ограниченность	
7	наибольшие, наименьшие значения	
8	точки пересечения с осями координат	
9	график	

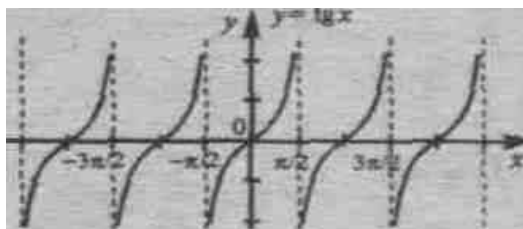
$y = \cos x$

1	область определения	$D(f) \in (-\infty; +\infty)$
2	область значений	$E(f) \in [-1, 1]$
3	четность-нечетность	четная
4	монотонность	возрастает на $[-\pi + 2\pi k, 2\pi k]$, убывает на $[2\pi k, \pi + 2\pi k]$
5	периодичность	период $T = 2\pi$
6	ограниченность	
7	наибольшие, наименьшие значения	
8	точки пересечения с осями координат	

9	график	
---	--------	--

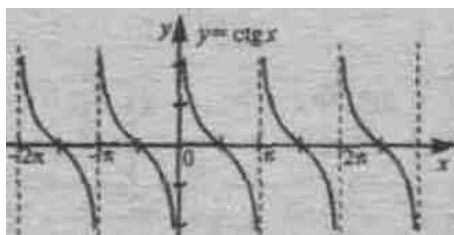
$$y = \operatorname{tg} x$$

1	область определения	$D(f) \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$
2	область значений	$E(f) \in (-\infty; +\infty)$
3	четность-нечетность	нечетная
4	монотонность	возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$
5	периодичность	период $T = \pi$
6	ограниченность	не ограничена
7	наибольшие, наименьшие значения	нет
8	точки пересечения с осями координат	$(\pi n, 0), n \in \mathbb{Z}$
9	график	



$$y = \operatorname{ctg} x$$

1	область определения	$D(f) \in (\pi n, \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$
2	область значений	$E(f) \in (-\infty; +\infty)$
3	четность-нечетность	нечетная
4	монотонность	убывает на $(\pi n, \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$
5	периодичность	период $T = \pi$
6	ограниченность	не ограничена
7	наибольшие, наименьшие значения	нет
8	точки пересечения с осями координат	$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n, 0\right), n \in \mathbb{Z}$
9	график	



Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Гончарова М.А. Образовательные технологии в школьном обучении математике [Электронный ресурс] : учебное пособие / М.А. Гончарова, Н.В. Решетникова. — Электрон. Текстовые данные. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2014. — 267 с. — 978-5-222-21972-0. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/58966.html>
2. Галямова Э.Х. Методика обучения математике в условиях внедрения новых стандартов [Электронный ресурс] / Э.Х. Галямова. — Электрон. Текстовые данные. — Набережные Челны: Набережночелнинский государственный педагогический университет, 2016. — 116 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/64633.html>

Дополнительная литература:

1. Васильева Г.Н. Методика обучения математике. Часть 1 [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Г.Н. Васильева. — Электрон. Текстовые данные. — Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2015. — 66 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70636.html>
2. Васильева Г.Н. Методика обучения математике. Часть 2 [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Г.Н. Васильева. — Электрон. Текстовые данные. — Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2016. — 75 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70637.html>

Линия уравнений

Вопросы:

1. Уравнения с одним и несколькими переменными.
2. Системы линейных уравнений.
3. Задачи на составление уравнений.
4. Рациональные и дробно-рациональные уравнения.
5. Уравнения с модулем.
6. Иррациональные уравнения.
7. Тригонометрические уравнения и системы уравнений.
8. Показательные уравнения и системы уравнений.
9. Логарифмические уравнения и системы уравнений.

1. Метод подстановки

- а) одно из уравнений системы преобразуется к виду, в котором одну из переменных выражают через другую,
б) полученное выражение подставляют во второе уравнение,
в) находят корни этого уравнения,
г) находят значения второй переменной.

Пример 1. Решить систему:
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{5x}} + \sqrt{\frac{5x}{x+y}} = \frac{34}{15}, \\ x+y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{12}{5x}} + \sqrt{\frac{5x}{12}} = \frac{34}{15}, \\ x+y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{6}{\sqrt{15x}} + \frac{\sqrt{15x}}{6} = \frac{34}{15}, \\ x+y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(\sqrt{15x})^2 - 68(\sqrt{15x}) + 180 = 0, \\ x+y=12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{15x} = 10, \\ \sqrt{15x} = \frac{18}{5}, \\ x+y=12 \end{cases}$$

Решив систему, получим две пары решений: $\left(\frac{20}{3}; \frac{16}{3}\right), \left(\frac{108}{125}; 11\frac{17}{125}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{20}{3}, \frac{16}{3}\right), \left(\frac{108}{125}, 11\frac{17}{125}\right)$.

Пример 2. Решить систему:
$$\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14, \\ x^2 + y^2 + xy = 84 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14, \\ (x + y)^2 - xy = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14, \\ (x + y - \sqrt{xy})(x + y + \sqrt{xy}) = 84 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \sqrt{xy} = 14, \\ (x + y - \sqrt{xy}) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2(x + y) = 20, \\ 2\sqrt{xy} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10, \\ \sqrt{xy} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 10, \\ xy = 16 \end{cases}$$

Дорешав систему, получим: $x = 8, y = 2, x = 2, y = 8$.

Ответ: (8;2), (2;8).

Пример 3. Решить систему:
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{x-y}{3}} = 14, & (1) \\ \sqrt{\frac{x+y}{8}} - \sqrt{\frac{x-y}{12}} = 3 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{x-y}{3}} = 14, \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+y}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-y}{3}} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \sqrt{\frac{x-y}{3}} = 14, & (1') \\ \sqrt{\frac{x+y}{2}} - \sqrt{\frac{x-y}{3}} = 6 & (2') \end{cases}$$

(1') + (2'):

$$2\sqrt{\frac{x+y}{2}} = 20;$$

$$\sqrt{\frac{x+y}{2}} = 10;$$

$$\frac{x+y}{2} = 100;$$

$$x = 200 - y.$$

Подставим в уравнение (1):

$$\sqrt{100} + \sqrt{\frac{200-2y}{3}} = 14;$$

$$\sqrt{\frac{200-2y}{3}} = 4;$$

$$200 - 2y = 48;$$

$$-2y = -152;$$

$$y = 76, \quad x = 124.$$

Проверка

$$(1): \sqrt{100} + \sqrt{\frac{48}{3}} = 14 \quad (\text{верно}),$$

$$(2): \sqrt{\frac{200}{8}} + \sqrt{\frac{48}{12}} = 3 \quad (\text{верно}).$$

Ответ: (124; 76).

2. Метод введения новых переменных

Это один из наиболее распространенных методов решения систем иррациональных уравнений и осуществляется одним из следующих способов:

а) вводится одна новая переменная только для одного уравнения системы,

б) вводятся две новые переменные сразу для обоих уравнений.

$$\text{Пример 4. Решить систему: } \begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2, \\ xy = 27 \end{cases}$$

Пусть $\sqrt[3]{x} = u$; $\sqrt[3]{y} = v$

$$\begin{cases} u - v = 2, \\ (uv)^3 = 27. \end{cases} \quad \begin{cases} u - v = 2, \\ uv = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} u = 2 + v, \\ (2 + v)v = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} u = 2 + v, \\ v^2 + 2v - 3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{cases} u = 2 + v, \\ v = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} u = 2 + v, \\ v = -3, \end{cases} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \begin{cases} u = 3, \\ v = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} u = -1, \\ v = -3, \end{cases} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 3, \\ \sqrt[3]{y} = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{x} = -1, \\ \sqrt[3]{y} = -3, \end{cases} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \begin{cases} x = 27, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = -27. \end{cases} \end{bmatrix}$$

Обе пары чисел удовлетворяют исходной системе уравнений.

Ответ: (27;1), (-1;-27).

Пример 5. Решить систему:
$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x + y} = 20, \\ x^2 + y^2 = 136 \end{cases}$$

Пусть $\sqrt{x + y} = t, \quad t \geq 0 (*)$

$$\begin{cases} t^2 + t = 20, \\ x^2 + y^2 = 136, \end{cases}$$

$$t^2 + t - 20 = 0,$$

$$\begin{cases} t_1 t_2 = -20, \\ t_1 + t_2 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} t_1 = -5, \\ t_2 = 4. \end{cases} \quad \text{не удовлетворяет условию (*)}$$

$$\sqrt{x + y} = 4,$$

$$x + y = 16,$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy,$$

$$\begin{cases} x + y = 16, \\ (x + y)^2 - 2xy = 136, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 16, \\ 16^2 - 2xy = 136, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 16, \\ xy = 60. \end{cases}$$

Решив систему, получим две пары решений: (6,10) и (10,6) каждая из которых удовлетворяет заданной системе.

Ответ: (6;10), (10;6).

Пример 6. Решить систему:
$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \\ x + y + xy = 9 \end{cases}$$

Первое уравнение подстановкой $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$, где $t > 0$, преобразуем к виду

$2t^2 - 3t - 2 = 0$, откуда $t_1 = 2, \quad t_2 = -\frac{1}{2}$. Т.к. $t > 0$, то второй корень является посторонним.

Решив систему $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} = 2, \\ x + y + xy = 9, \end{cases}$ найдем два ее решения $(4;1)$ и $\left(-9; -\frac{9}{4}\right)$, которые являются решениями исходной системы.

Ответ: $(4;1), \left(-9; -\frac{9}{4}\right)$.

Пример 7. Решить систему: $\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\frac{y+2}{2x-1}} = \frac{5}{2}, \\ x + y = 2. \end{cases}$

Пусть $\sqrt{\frac{2x-1}{y+2}} = t, t > 0$.

Тогда система примет вид: $\begin{cases} t = \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}}, \\ t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}, \\ x + y = 2. \end{cases} \quad (1)$

$$(1): t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2},$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0,$$

$$D = 25 - 16 = 9,$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4},$$

$$t_1 = 2, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Получим совокупность двух систем уравнений:

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}} = 2, \\ x+y=2, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} \frac{2x-1}{y+2} = 4, \\ x+y=2, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} 2x-1=4y+8, \\ x+y=2, \end{cases} \Rightarrow \right. \\
& \left[\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}} = \frac{1}{2}, \\ x+y=2, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} \frac{2x-1}{y+2} = \frac{1}{4}, \\ x+y=2, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} 8x-4=y+2, \\ x+y=2, \end{cases} \Rightarrow \right. \\
& \Rightarrow \left[\begin{cases} 2x-4y=9, \\ 4x+4y=8, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} x+y=2, \\ 6x=17, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} x=\frac{17}{6}, \\ y=-\frac{5}{6}, \end{cases} \right. \\
& \left[\begin{cases} 8x-y=6, \\ x+y=2, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} 9x=8, \\ x+y=2, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} x=\frac{8}{9}, \\ y=\frac{10}{9}. \end{cases} \right.
\end{aligned}$$

Обе пары чисел удовлетворяют исходной системе.

Ответ: $\left(\frac{17}{6}; -\frac{5}{6}\right), \left(\frac{8}{9}; \frac{10}{9}\right).$

3. Метод алгебраических преобразований системы

Как и при решении рациональных систем, уравнения иррациональной системы можно складывать, вычитать, перемножать, делить одно на другое. Однако в иррациональных системах наиболее часто используется прием возведения одного или обоих уравнений системы в некоторую степень. Заметим, что если необходимо возводить в четную степень, то должна быть выполнена проверка или выписаны условия, при которых такое преобразование сохраняет равносильность.

Метод алгебраического сложения основан на утверждении: если в исходной системе одно из уравнений заменить уравнением, полученным в результате почленного сложения двух уравнений данной системы, а остальные оставить без изменения, то полученная система будет равносильной данной.

$$\begin{cases} (y^2 + y\sqrt{x} + x)\sqrt{x+y^2} = 65, & (1) \\ (y^2 - y\sqrt{x} + x)\sqrt{x+y^2} = 185 & (2) \end{cases}$$

Пример 8. Решить систему:

Решение. Сложим уравнения (1) и (2) и заменим им уравнение (2). Получим:

$$\begin{cases} (2y^2 + 2x)\sqrt{x+y^2} = 250, \\ (y^2 + y\sqrt{x} + x)\sqrt{x+y^2} = 65, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y^2 + x)\sqrt{x+y^2} = 125, \\ (y^2 + y\sqrt{x} + x)\sqrt{x+y^2} = 65, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+y^2} = 5, \\ (y^2 + y\sqrt{x} + x)5 = 65, \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 + x = 25, \\ 25 + y\sqrt{x} = 13, \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 + x = 25, \\ y\sqrt{x} = -12, \end{cases}$$

Пусть $\sqrt{x} = t, t \geq 0$

$$\begin{cases} y^2 + t^2 = 25, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} yt = -12, \end{cases} \quad (4)$$

К уравнению (3) прибавим уравнение (4), умноженное на 2
(3) + 2·(4):

$$\begin{array}{r} y^2 + t^2 = 25 \\ + \quad 2yt = -24 \\ \hline y^2 + 2yt + t^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (y+t)^2 = 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} (y+t)^2 = 1, \\ yt = -12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y+t=1, \\ yt=-12, \end{cases} \quad (*) \\ \begin{cases} y+t=-1, \\ yt=-12 \end{cases} \quad (**) \end{cases}$$

(*):

а)

$$\begin{cases} y = 4, \\ t = -3, \end{cases}$$

система не имеет решений,

т.к. $t \geq 0$.

б)

$$\begin{cases} y = -3, \\ t = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3, \\ \sqrt{x} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3, \\ x = 16. \end{cases}$$

(**):

а)

$$\begin{cases} y = -4, \\ t = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ x = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4, \\ x = 9. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3, \\ t = -4, \end{cases}$$

не удовлетворяет условию,

б) т.к. $t \geq 0$.

Ответ: (16; -3), (9; -4).

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}, & (1) \\ \sqrt{\frac{16x}{5y}} = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}, & (2) \end{cases}$$

Пример 9. Решить систему уравнений
(1) × (2)

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{20y}{x} \cdot \frac{16x}{5y}} = x+y-x+y, \\ \sqrt{\frac{20y}{x}} = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = 2y, \\ \sqrt{\frac{20 \cdot 4}{x}} = \sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 4, \\ \sqrt{\frac{80}{x}} = \sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4, \\ \frac{80}{x} = x+4+2\sqrt{x^2-16}+x-4, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 4, \\ \frac{80}{x} = 2x+2\sqrt{x^2-16}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4, \\ \frac{40}{x} = x+\sqrt{x^2-16}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4, \\ \frac{40}{x} - x = \sqrt{x^2-16}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 4, \\ \frac{1600}{x^2} - 80 + x^2 = x^2 - 16, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4, \\ \frac{1600}{x^2} = 64, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4, \\ x^2 = 25, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4, \\ x = 5, \\ y = 4, \\ x = -5, \end{cases} \text{ не удовлетворяет условию, т.к. } x+y \geq 0.$$

Ответ: (5,4).

$$\begin{cases} \frac{7}{\sqrt{x-7}} - \frac{4}{\sqrt{y+6}} = \frac{5}{3}, \\ \frac{5}{\sqrt{x-7}} + \frac{3}{\sqrt{y+6}} = 2\frac{1}{6} \end{cases}$$

Пример 10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{21}{\sqrt{x-7}} - \frac{12}{\sqrt{y+6}} = \frac{5}{3}, \\ \frac{20}{\sqrt{x-7}} + \frac{12}{\sqrt{y+6}} = \frac{26}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{41}{\sqrt{x-7}} = \frac{41}{3}, \\ \frac{5}{\sqrt{x-7}} + \frac{3}{\sqrt{y+6}} = \frac{13}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-7} = 3, \\ \frac{3}{\sqrt{y+6}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{x-7} = 3, \\ \sqrt{y+6} = 6; \end{cases}$$

откуда $x = 16, y = 30$.

Ответ: (16; 30).

Пример 11. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 341, \\ x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 330 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3 = 341, \\ \sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 330 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 - 3\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 341, \\ 3\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 990 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{y})^3 = 1331, \\ \sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 330 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 11, \\ \sqrt{x}\sqrt{y} = 30 \end{cases}$$

$$x = 25, y = 36$$

Решив систему, получим $x = 36, y = 25$.

Ответ: (25;36), (36;25).

Пример 12. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5, & (1) \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 1. & (2) \end{cases}$$

Умножив обе части уравнения (1) на выражение $\sqrt{7x+y} - \sqrt{2x+y}$, сопряженное левой части этого уравнения, получаем:

$$5x = 5(\sqrt{7x+y} - \sqrt{2x+y}) \text{ или } \sqrt{7x+y} = \sqrt{2x+y} + x \quad (3).$$

Из уравнений (3) и (2) следует, что:

$$\sqrt{2x+y} = 1 + y - x, \quad (4)$$

$$\sqrt{7x+y} = 1 + y. \quad (5)$$

Складывая почленно уравнения (4) и (5), получим
 $\sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 2 + 2y - x$ (6).

Из уравнений (6) и (1) находим:

$$2 + 2y - x = 5, \text{ откуда } x = 2y - 3.$$

$$\begin{cases} \sqrt{2x+y} = 1 + y - x, \\ x = 2y - 3, \end{cases} \text{ получаем:}$$

$$\sqrt{5y-6} = 4-y, \quad y \leq 4 \quad (*)$$

$$y^2 - 13y + 22 = 0,$$

$$y_1 = 2; \quad y_2 = 11 \text{ не удовлетворяет условию } (*),$$

$$x_1 = 1.$$

Проверка показывает, что пара (1;2) является решением системы.

ЗАМЕЧАНИЕ: легко убедиться в том, что «лобовое» решение, основанное на избавлении от корней в исходной системе с помощью возведения в квадрат связано с преодолением немалых трудностей.

$$\begin{cases} 10(x-y) - x^4 = 9, & (1) \\ \sqrt{y} + \sqrt{y-2x} = \sqrt{2}. & (2) \end{cases}$$

Пример 13. Решить систему уравнений

Из уравнения (2) имеем $\sqrt{y-2x} = \sqrt{2} - \sqrt{y}$. Возведем его в квадрат.

$$\text{Получим } \sqrt{2y} = x+1, \text{ откуда } y = \frac{(x+1)^2}{2}.$$

Подставим y в уравнение (1), получим

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0,$$

$$\text{откуда } x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = -2.$$

Найдя соответствующие значения y и выполнив проверку, убедимся, что решениями являются пары (1;2), (-1;0).

Ответ: (1;2), (-1;0).

Пример 14. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{17}{4}, & (1) \\ x(x+y) + \sqrt{x^2 + xy + 4} = 52. & (2) \end{cases}$$

Освобождаясь в уравнении (1) от иррациональности в знаменателях, получаем

$$\frac{4x^2 - 2y^2}{y^2} = \frac{17}{4},$$

откуда $x = \frac{5}{4}y$ и $x = -\frac{5}{4}y$.

В уравнении (2) положим $t = \sqrt{x^2 + xy + 4}$; тогда получим

$$t^2 + t - 56 = 0,$$

откуда $t_1 = 7$ и $t_2 = -8$. Отбрасывая корень $t_2 < 0$, получаем $x^2 + xy = 45$.

Решив две системы уравнений

$$\begin{cases} x = \frac{5}{4}y, \\ x^2 + xy = 45; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{5}{4}y, \\ x^2 + xy = 45; \end{cases}$$

найдем четыре решения, которые, как показывает проверка, удовлетворяют и исходной системе.

Ответ: (5;4), (-5;-4), (15;-12), (-15;12).

Пример 15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+4y}}{4y} + \frac{\sqrt[3]{3x+4y}}{3x} = -\frac{1}{72}, \\ \frac{\sqrt[3]{2x-y}}{y} - \frac{\sqrt[3]{2x-y}}{2x} = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Заметив, что $xy \neq 0$, запишем систему в виде

$$\begin{cases} (3x+4y)^{4/3} = -\frac{xy}{72}, & (1) \\ (2x-y)^{4/3} = -\frac{8}{3}xy. & (2) \end{cases}$$

Разделив почленно уравнения системы (1) и (2), получаем

$$\left(\frac{3x+4y}{2x-y} \right)^{4/3} = \frac{1}{16}.$$

откуда

$$\frac{3x+4y}{2x-y} = \frac{1}{8}, \quad x = -\frac{3}{2}y.$$

Подставив $x = -\frac{3}{2}y$ в уравнение (2) находим

$$(-4y)^{4/3} = 4y^2 \quad \text{или} \quad 4^4 y^y = 4^3 y^6$$

Так как $y \neq 0$, то $y^2 = 4$, $y_1 = 2$, $y_2 = -2$ и $x_1 = -3$, $x_2 = 3$

Ответ: (-3;2), (3;-2).

4. Метод приведения системы к совокупности более простых систем (метод разложения на множители)

Метод заключается в следующем:

если $f(x; y) = f_1(x; y) \cdot f_2(x; y) \cdot \dots \cdot f_n(x; y)$, то всякое решение системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x; y) \cdot f_2(x; y) \cdot \dots \cdot f_n(x; y) = 0, \\ q(x; y) = 0 \end{cases}$$

Является решением совокупности систем уравнений.

$$\begin{cases} \begin{cases} f_1(x; y) = 0, \\ q(x; y) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f_2(x; y) = 0, \\ q(x; y) = 0, \end{cases} \\ \dots \\ \begin{cases} f_n(x; y) = 0, \\ q(x; y) = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Пример 16. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5 \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ x^5 = 0, \end{cases} \right] &\Rightarrow \left[\begin{cases} -y + \sqrt{-4y^2} = 2, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow \right. \\ &\left[\begin{cases} x - y + \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2, \\ \sqrt{x^2 - 4y^2} = 0. \end{cases} \right] \Rightarrow \left[\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - 4y^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} x - y = 2, \\ x - 2y = 2, \\ x - y = 2, \\ x + 2y = 2, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} x = 4, \\ y = 2, \\ x = \frac{4}{3}, \\ y = -\frac{2}{3}. \end{cases} \right. \right. \end{aligned}$$

Ответ: $(4;2), \left(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Пример 17. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x\sqrt{(x+y)^2} = 3x, \\ x\left(\sqrt{(x-y)^2} - 1\right)^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(|x+y|-3)=0, \\ x(|x-y|-1)^2=0. \end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности систем:

$$\begin{cases} x=0, \\ x=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=0, \\ |x-y|-1=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=0, \\ |x+y|-3=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} |x+y|-3=0, \\ |x-y|-1=0. \end{cases}$$

$$(1) (0; y), y \in R.$$

$$(4) \begin{cases} |x+y|-3=0, \\ |x-y|-1=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y=3, \\ x-y=-1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=-1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x+y=-3, \\ x-y=1. \end{cases}$$

Из решений этих систем составим ответ.

Ответ: $(0; y)$, $(2; 1)$, $(1; 2)$, $(-2; -1)$, $(-1; -2)$.

5. Иррациональные системы, содержащие однородные уравнения (однородные системы)

При решении таких систем одним из методов является деление одного уравнения на другое, при условии, что делитель отличен от нуля. Случай, когда он обращается в нуль, рассматривается отдельно. Обратим внимание на следующее: если мы хотим внести под корень четной степени некоторую величину, то нужно отдельно рассматривать два случая: когда эта величина положительна и когда она отрицательна.

Итак, к однородным системам относятся:

а) системы двух уравнений, $\begin{cases} f(x; y) = c_1, \\ g(x; y) = c_2, \end{cases}$ в которых $f(x; y)$ и $g(x; y)$ - однородные многочлены, а c_1 и c_2 - некоторые числа, не равные нулю,

решаются подстановкой $t = \frac{x}{y}$ (или $t = \frac{y}{x}$), проверив, не является ли решением $x=0$. Поделив первое уравнение на второе, приведем к квадратному уравнению относительно t . Подставив в любое уравнение t , найдем x , а далее y .

б) если одно из уравнений системы - уравнение вида $f(x; y) = 0$, где $f(x; y)$ - однородный многочлен n -й степени, то $f(x; y) : x^n, t = \frac{y}{x}$. Решить $f(t) = 0$. Проверить пару $(0; 0)$.

Пример 18. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 2\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{y} = 3\sqrt[6]{xy}, \\ x - y = 63. \end{cases}$$

Заметим, что $xy \geq 0$, и пара (0;0) не удовлетворяет системе.

а) $x \neq 0, y > 0$:

$$2\sqrt[3]{\frac{x}{y}} - 3\sqrt[6]{\frac{x}{y}} - 2 = 0.$$

$$\sqrt[6]{\frac{x}{y}} = t, \quad t \geq 0.$$

$$2t^2 - 3t - 2 = 0.$$

$$t_1 = 2, \quad t_2 = -\frac{1}{2} \quad (\text{не удовлетворяет условию } t \geq 0)$$

$$\sqrt[6]{\frac{x}{y}} = 2, \quad \frac{x}{y} = 64, \quad x = 64y, \quad 64y - y = 63, \quad 63y = 63, \quad y = 1, \quad x = 64.$$

б) $x \neq 0, y < 0$:

$$2\sqrt[3]{\frac{x}{y}} - 3\sqrt[6]{\frac{x}{y}} - 2 = 0.$$

$$\sqrt[6]{\frac{x}{y}} = t, \quad t \geq 0.$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0.$$

$$t_1 = -2 \quad (\text{не удовлетворяет условию } t \geq 0), \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\sqrt[6]{\frac{x}{y}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{64}, \quad 64x = y, \quad x - 64x = 63, \quad x = -1, \quad y = -64.$$

Ответ: (64;1), (-1;-64)

Пример 19. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 - y\sqrt{xy} = 36, \\ y^2 - x\sqrt{xy} = 72. \end{cases} \quad (1)$$

(1) ÷ (2)

$$\frac{x^2 - y\sqrt{xy}}{y^2 - x\sqrt{xy}} = \frac{1}{2}, \quad \text{т.к. } y \neq 0, \quad \text{то}$$

а)

$$\frac{\frac{x^2}{y^2} - \sqrt{\frac{x}{y}}}{1 - \frac{x}{y} \sqrt{\frac{x}{y}}} = \frac{1}{2}, \quad y > 0$$

б)

$$\frac{\frac{x^2}{y^2} + \sqrt{\frac{x}{y}}}{1 + \frac{x}{y} \sqrt{\frac{x}{y}}} = \frac{1}{2}, \quad y < 0$$

Пусть $\sqrt{\frac{x}{y}} = t, \quad t \geq 0$

$$\frac{t^2 - t}{1 - t^3} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{t(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{1}{2}$$

$$t = -\frac{1}{2} \quad (\text{не удовлетворяет условию } t \geq 0)$$

нет решений

$$\frac{t^2 + t}{1 + t^3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{t(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{1}{2}$$

Вернемся к замене:

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{x}{y} = \frac{1}{4}, \quad y = 4x, \quad x = \frac{y}{4}.$$

Подставим в (2):

$$y^2 - \frac{y}{4} \sqrt{\frac{y}{4}} y = 72,$$

$$y^2 - \frac{y}{4} \sqrt{\frac{y^2}{4}} = 72,$$

$$y^2 - \frac{y}{4} \cdot \frac{|y|}{2} = 72, \quad \text{т.к. } y < 0, \text{ то}$$

$$y^2 - \frac{y^2}{8} = 72, \quad \frac{7}{8} y^2 = 72, \quad y^2 = 72 \cdot \frac{8}{7},$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{72 \cdot 8}{7}} \quad \text{с учетом } y < 0, \quad y = -\frac{24}{\sqrt{7}} = -\frac{24\sqrt{7}}{7}, \quad x = -\frac{6\sqrt{7}}{7}.$$

Ответ: $\left(-\frac{6\sqrt{7}}{7}; -\frac{24\sqrt{7}}{7}\right).$

5. Функциональные и графические методы

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 1, & (1) \quad x \geq 0 \\ \sqrt{y} + \sqrt{x+1} = 1. & (2) \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Пример 20. Решить систему уравнений

Оценивая на области определения системы левую часть первого уравнения, находим: $\sqrt{x} \geq 0, \sqrt{y+1} \geq 1, \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y+1} \geq 1$.

Уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда, когда $\sqrt{x} = 0$ и $\sqrt{y+1} = 1$. Откуда $x = 0$ и $y = 1$.

ПРОВЕРКА: уравнению (2) эта пара также удовлетворяет.

Ответ: (0;0).

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} = 1, & (1) \\ \sqrt{x^3 - 3y^2} - 7y^2 + 5x = 6. & (2) \end{cases}$$

Пример 21. Решить систему уравнений

Из уравнения (1) следует, что $x - y^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq y^2 + 1 \Rightarrow x \geq 1$.

Оценивая на множестве $x \geq 1$ каждое слагаемое в левой части уравнения (1) имеем:

$$\sqrt{x} \geq 1, y^2 \geq 0, \sqrt{x - y^2 - 1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \geq 1.$$

Т.е. уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{x} = 1, y^2 = 0, \sqrt{x - y^2 - 1} = 0.$$

Тогда $x = 1, y = 0$. Проверкой убеждаемся, что эта пара удовлетворяет уравнению (2).

Ответ: (1;0).

$$\begin{cases} \sqrt{9 - 6x + x^2} - y = 3, \\ 2x - y - 3 = 0. \end{cases}$$

Пример 22. Пусть $(x_0; y_0)$ решение системы

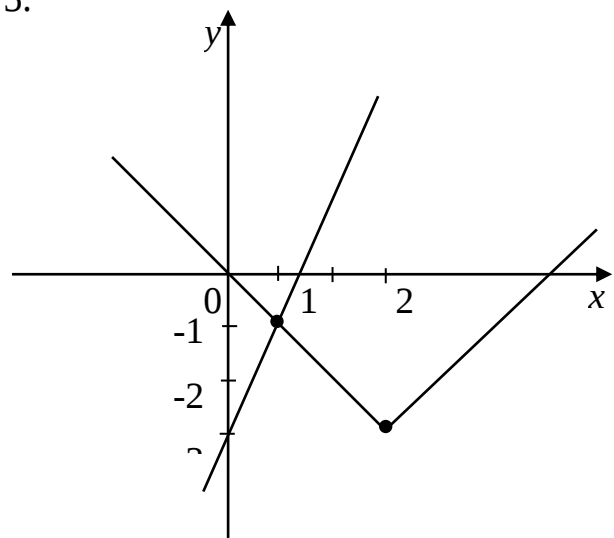
Найти $x_0 + y_0$.

$$\begin{cases} y = \sqrt{(x-3)^2} - 3, \\ y = 2x - 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = |x-3| - 3, \\ y = 2x - 3. \end{cases}$$

Графически находим, что решением системы является пара (1;-1).

Тогда $x_0 + y_0 = 1 + (-1) = 0$.

Ответ: 0.



Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Гончарова М.А. Образовательные технологии в школьном обучении математике [Электронный ресурс] : учебное пособие / М.А. Гончарова, Н.В. Решетникова. — Электрон. Текстовые данные. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2014. — 267 с. — 978-5-222-21972-0. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/58966.html>
2. Галямова Э.Х. Методика обучения математике в условиях внедрения новых стандартов [Электронный ресурс] / Э.Х. Галямова. — Электрон. Текстовые данные. — Набережные Челны: Набережночелнинский государственный педагогический университет, 2016. — 116 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/64633.html>

Дополнительная литература:

1. Васильева Г.Н. Методика обучения математике. Часть 1 [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Г.Н. Васильева. — Электрон. Текстовые данные. — Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2015. — 66 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70636.html>
2. Васильева Г.Н. Методика обучения математике. Часть 2 [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Г.Н. Васильева. — Электрон. Текстовые данные. — Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2016. — 75 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70637.html>

Линия неравенств.

Вопросы:

1. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Функциональные неравенства.
2. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Понятие равносильности неравенств.
3. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Рациональные неравенства.
4. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Метод интервалов.
5. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Иррациональные неравенства.
6. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Неравенства с модулем.
7. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Неравенства с параметрами.
8. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Тригонометрические неравенства .
9. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Показательные и логарифмические неравенства.

Рациональные неравенства.

Неравенства вида $P_m(x) \vee 0$ или $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \vee 0$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ - многочлены, $\vee$ - один из знаков неравенства $\leq, \geq, <, >$, относят к числу рациональных. Универсальным методом решения рационального неравенства является *метод интервалов*. Квадратное неравенство можно также решать с помощью графика квадратичной функции.

Заметим, что дробно-рациональное неравенство можно всегда свести к решению рационального неравенства, так как

- неравенство $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} > 0$ равносильно неравенству $P_m(x) \cdot Q_n(x) > 0$;

- неравенство $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} < 0$ равносильно неравенству $P_m(x) \cdot Q_n(x) < 0$;
- неравенство $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \geq 0$ равносильно системе $\begin{cases} P_m(x) \cdot Q_n(x) > 0 \\ P_m(x) = 0 \end{cases}$;
- неравенство $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \leq 0$ равносильно системе $\begin{cases} P_m(x) \cdot Q_n(x) < 0 \\ P_m(x) = 0 \end{cases}$.

Рассмотрим алгоритм метода интервалов.

1. Свести неравенство к стандартному виду, т.е. к виду

$$(x - a_1)^{\alpha_1} \cdot (x - a_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (x - a_k)^{\alpha_k} \vee 0 \text{ или}$$

$$\frac{(x - a_1)^{\alpha_1} \cdot (x - a_2)^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot (x - a_k)^{\alpha_k}}{(x - b_1)^{\beta_1} \cdot (x - b_2)^{\beta_2} \cdot \dots \cdot (x - b_s)^{\beta_s}} \vee 0,$$

где $\vee$ - один из знаков неравенства $\leq, \geq, <, >$.

2. На числовой прямой отмечаем точки a_i и b_j ($i = 1, 2, \dots, k$; $j = 1, 2, \dots, s$), являющиеся нулями числителя и знаменателя дроби. Заметим, что нули знаменателя всегда выколотые, а нули числителя для строгого неравенства выколотые, а для нестрогого – закрашенные.

3. Разбиваем отмеченными точками числовую прямую на интервалы.

4. В крайнем правом промежутке всегда ставим знак «+» и движемся по числовой прямой справ налево. Если переходим через корень a_i (b_j) нечетной кратности, то знак при переходе через эту точку меняем. При переходе через корень четной кратности знак сохраняем. Заметим, что на кратность корня указывает степень α_i (или β_j).

5. Выписываем ответ. При решении нестрогого неравенства особое внимание обращаем на закрашенные точки, так как при переходе через корень четной кратности знак не изменяется и в ответе можно потерять отдельно стоящие точки.

Для решения рационального неравенства, содержащего знак модуля, необходимого модуль раскрыть, пользуясь либо алгебраическим, либо геометрическим определением модуля.

Заметим, что неравенство $|f(x)| < a$ равносильно системе неравенств $-a < f(x) < a$, а неравенство $|f(x)| > a$ равносильно совокупности неравенств

$$\begin{cases} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{cases}.$$

Если неравенство содержит несколько знаков модуля, то целесообразно найти нули подмодульных выражений, разбить этими точками числовую прямую на промежутки и раскрыть знаки модуля на каждом из полученных промежутков.

При решении иррациональных неравенств используются те же приемы, что и при решении иррациональных уравнений, основная задача которых состоит в сведении иррациональных неравенств к рациональным. Выполняя преобразования, следует обратить внимание на то, что возводить в четную степень можно только неравенство обе части которого имеют один знак (если обе части неравенства неотрицательны, то знак неравенства сохраняется; если обе части неравенства неположительны, то знак неравенства меняется на противоположный). Иррациональное неравенство стремимся свести к виду $\sqrt{f(x)} \vee g(x)$, где $\vee$ - один из знаков неравенства $\leq, \geq, <, >$. Для решения этих иррациональных неравенств справедливы следующие теоремы о равносильных преобразованиях.

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \\ g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Теорема 1.

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}.$$

Теорема 2.

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq g^2(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Теорема 3.

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Теорема 4.

Замечание 1. Теоремы 1-4 можно распространить для любых корней четной степени.

Замечание 2. Для неравенств вида $\sqrt[2k+1]{f(x)} \vee g(x)$ возводим обе части неравенства в степень $2k + 1$ без дополнительных ограничений.

Решение показательных и логарифмических неравенств опирается на свойства показательной и логарифмической функций. Вспомним, что если функция возрастающая, то большему значению аргумента соответствует большее значение функции, а если функция убывающая, то большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Отсюда можно привести следующие теоремы о равносильных преобразованиях при решении показательных и логарифмических неравенств.

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases}.$$

Теорема 1.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}.$$

Теорема 2.

Задание. Изучите разобранные примеры решения комбинированных неравенств. Перечислите УУД при их решении.

Пример 1. Решите неравенство $\sqrt{\log_5(x+2)} > \log_{\frac{1}{5}} \frac{5}{x+2}$.

Решение. Неравенство является комбинированным, так как под знаком квадратного корня содержится логарифмическая функция. Проведем следующие преобразования:

$$\sqrt{\log_5(x+2)} > -\log_5 \frac{5}{x+2}, \quad \sqrt{\log_5(x+2)} > -1 + \log_5(x+2).$$

Пусть $\log_5(x+2) = t$, тогда получаем иррациональное неравенство

$\sqrt{t} > -1 + t$. Применяем теорему о равносильном преобразовании при решении иррационального неравенства:

$$\left[\begin{array}{l} -1+t \geq 0 \\ t > (-1+t)^2 \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} t \geq 1 \\ 1-3t+t^2 < 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} -1+t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} t < 0 \\ t \geq 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{l} 1 \leq t < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ 0 \leq t < 1 \end{array} \right], \quad 0 \leq t < \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Возвращаемся к переменной x :

$$0 \leq \log_5(x+2) < \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad \log_5 1 \leq \log_5(x+2) < \log_5 5^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}},$$

$$1 \leq x + 2 < 5^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, -1 \leq x < -2 + 5^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.$$

$$x \in \left[-1; -2 + 5^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \right).$$

Ответ.

$$\log_{\frac{1}{2}} |\cos x| \cdot \log_5 (x - 9) < 0$$

Пример 2. Решите неравенство

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} |\cos x| < 0 \\ \log_5 (x - 9) > 0 \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} |\cos x| > 0 \\ \log_5 (x - 9) < 0 \end{cases} \right], \text{ представляем правые части неравенств в виде логарифмов:}$$

$$\left[\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} |\cos x| < \log_{\frac{1}{2}} 1 \\ \log_5 (x - 9) > \log_5 1 \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} |\cos x| > \log_{\frac{1}{2}} 1 \\ \log_5 (x - 9) < \log_5 1 \end{cases} \right].$$

Используя теорему о равносильных преобразованиях в логарифмическом

$$\text{неравенстве, получаем} \quad \left[\begin{cases} |\cos x| > 1 \\ x - 9 > 1 \end{cases} \right. \quad \left[\begin{cases} 0 < |\cos x| < 1 \\ 0 < x - 9 < 1 \end{cases} \right].$$

Очевидно, что первая система решений не имеет. Тогда остается система

$$\begin{cases} 0 < |\cos x| < 1 \\ 9 < x < 10 \end{cases} \quad \text{Следовательно} \quad \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ |\cos x| < 1 \\ 9 < x < 10 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ 9 < x < 10 \end{cases}.$$

Выясним, при каких $n \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство $9 < \frac{\pi n}{2} < 10$.

Получаем $\frac{18}{\pi} < n < \frac{20}{\pi}$. Учитывая, что $\frac{18}{\pi} \approx 5,73, \frac{20}{\pi} \approx 6,37$ и $n \in \mathbb{Z}$, находим $n = 6$.

При $n = 6$ величина $x = \frac{\pi n}{2} = \frac{\pi \cdot 6}{2} = 3\pi \in (9; 10)$. Тогда получаем окончательное решение $x \in (9; 3\pi) \cup (3\pi; 10)$.

Ответ. $x \in (9; 3\pi) \cup (3\pi; 10)$.

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Гончарова М.А. Образовательные технологии в школьном обучении математике [Электронный ресурс] : учебное пособие / М.А. Гончарова, Н.В. Решетникова. — Электрон. Текстовые данные. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2014. — 267 с. — 978-5-222-21972-0. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/58966.html>
2. Галямова Э.Х. Методика обучения математике в условиях внедрения новых стандартов [Электронный ресурс] / Э.Х. Галямова. — Электрон. Текстовые данные. — Набережные Челны: Набережночелнинский государственный педагогический университет, 2016. — 116 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/64633.html>

Дополнительная литература:

1. Васильева Г.Н. Методика обучения математике. Часть 1 [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Г.Н. Васильева. — Электрон. Текстовые данные. — Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2015. — 66 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70636.html>

2. Васильева Г.Н. Методика обучения математике. Часть 2 [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Г.Н. Васильева. — Электрон. Текстовые данные. — Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2016. — 75 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70637.html>

Тема: Методика обучения решению геометрических задач

Особенности изучения геометрических фигур на плоскости

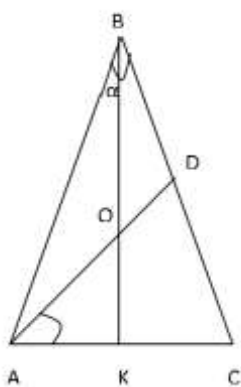
Вопросы для рассмотрения на лабораторной работе

1. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Условия параллельности и перпендикулярности прямых
2. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Треугольник. Соотношения в треугольнике
3. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Четырехугольники
4. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Окружность

Задание 1. Изучите решения ниже приведенных задач и перечислите УУД при их решении.

1. В равнобедренном треугольнике с углом α при вершине проведена медиана к боковой стороне. Найти угол между медианой и основанием.

Решение.



Пусть $\triangle ABC$ – равнобедренный, $AB=BC$,

$\angle ABC = \alpha$, $BD=DC$, AD – медиана.

Найдем $\angle DAC$.

Проведем медиану BK , $BK \cap AD = O$.

Пусть $AC=a$, тогда $AK = \frac{a}{2}$, $\angle ABK = \frac{\alpha}{2}$,

т.к. медиана в равнобедренном треугольнике является и биссектрисой, и высотой.

$$BK = \frac{AK}{\operatorname{tg} \angle ABK} = \frac{\frac{a}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

$$BK = \frac{AK}{\operatorname{tg} \angle ABK} = \frac{\frac{a}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \quad \text{По свойству медиан} \quad OK = \frac{1}{3} BK = \frac{a}{6 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\operatorname{tg} \angle OAK = \frac{OK}{AK} = \frac{a}{6 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} : a = \frac{a}{6a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{6 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{6} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Из $\triangle OAK$:

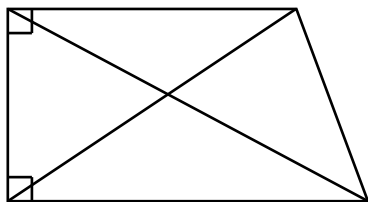
$$\operatorname{tg} \angle OAK = \frac{OK}{AK} = \frac{a}{6 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} : a = \frac{a}{6a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{6 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{6} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \quad \text{Тогда,}$$

$$\angle DAC = \angle OAK = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{6} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$\angle DAC = \angle OAK = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{6} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \quad \text{Ответ:} \quad \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{6} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{6} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right).$$

Четырехугольники

Задание 6. В прямоугольной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а отношение оснований равно k . Найти отношение диагоналей трапеции.



Решение: Пусть $BC = a$, тогда $AD = ka$; пусть $OC = x$, тогда из

$\triangle COB, \angle O = 90^\circ, OB = \sqrt{a^2 - x^2}$, $\triangle OBC$ подобен $\triangle OAD$ так как их стороны лежат на одних или параллельных прямых, следовательно:

B

A

D

C

O

Дано: $ABCD$ - трапеция

$$AD \parallel BC, \angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$$

$$\frac{AD}{BC} = k, AC \perp BD = O$$

Найти: $\frac{BD}{AC} - ?$

$$\frac{BO}{OD} = \frac{OC}{OA} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{OD} = \frac{a}{ka}, \text{ то есть } OD = k\sqrt{a^2 - x^2} \frac{x}{OA} = \frac{a}{ka}, OA = kx.$$

Из треугольника ABC :

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (AO + OC)^2 - BC^2 = (kx + x)^2 - a^2 = (k+1)^2 x^2 - a^2 \quad (1)$$

Из треугольника ABD :

$$\begin{aligned} AB^2 &= BD^2 - AD^2 = (BO + OD)^2 - AD^2 = (\sqrt{a^2 - x^2} + k\sqrt{a^2 - x^2})^2 - (ka)^2 = \\ &= (k+1)^2 (a^2 - x^2) - k^2 a^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем уравнение:

$$(k+1)^2 x^2 - a^2 = (k+1)^2 (a^2 - x^2) - k^2 a^2,$$

$$(k+1)^2 x^2 - (k+1)^2 (a^2 - x^2) = a^2 - k^2 a^2,$$

$$(k+1)^2 (x^2 - a^2 + x^2) = a^2 (1 - k^2),$$

$$2x^2(k+1)^2 = a^2(1-k) + a^2(1+k),$$

$$2x^2(k+1)^2 = a^2(1-k+k+1),$$

$$2x^2(k+1) = 2a^2, \quad x^2(k+1) = a^2. \quad \text{Отсюда} \quad x = \sqrt{\frac{a^2}{k+1}} = \frac{a}{\sqrt{k+1}}$$

Выражаем искомое выражение:

$$\frac{BD}{AC} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + k\sqrt{a^2 - x^2}}{x + kx} = \frac{(1+k)\sqrt{a^2 - x^2}}{(1+k)x} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Если $x = \frac{a}{\sqrt{k+1}}$, то

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{k+1}} = \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)} = a\sqrt{\frac{k+1-1}{k+1}} = a\sqrt{\frac{k}{k+1}}$$

Находим отношение диагоналей:

$$\frac{BD}{AC} = \frac{a\sqrt{\frac{k}{k+1}}}{\frac{a}{\sqrt{k+1}}} = \sqrt{\frac{k}{k+1}} \cdot \sqrt{k+1} = \sqrt{k}.$$

Ответ: Диагонали относятся как $\sqrt{k}:1$.

Площади

3. В равнобедренной трапеции длины оснований равны a и b ($a > b$). Диагональ перпендикулярна одной из боковых сторон.

Найти площадь трапеции

Дано : $ABCD$ – трапеция

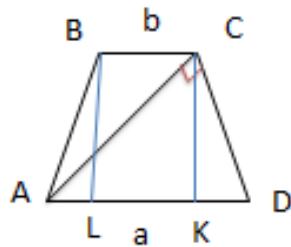
$AB = CD, BC \parallel AD$

$AD = a, BC = b, a > b,$

$AC \perp CD.$

Найти S трапеции

Решение:



$$S_{\text{трап.}} = \frac{1}{2}(AD + BC)CK, \text{ где } CK \perp AD$$

по свойству высоты, опущенный из прямого угла

$$CK^2 = AK \times KD, \quad KD = \frac{(AD - CD)}{2} = \frac{a - b}{2},$$

$$AK = BC + AL = b + \frac{a - b}{2} = \frac{2b + a - b}{2} = \frac{a + b}{2},$$

$$\text{тогда } CK^2 = \frac{a + b}{2} \times \frac{a - b}{2} = \frac{a^2 - b^2}{4}, \text{ т.е. } CK = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}$$

$$S_{\text{трап.}} = \frac{1}{2}(a + b) \times \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2} = \frac{(a + b)\sqrt{a^2 - b^2}}{4}.$$

$$\text{Ответ : } S_{\text{трап.}} = \frac{(a + b)\sqrt{a^2 - b^2}}{4}$$

4. Найдите площадь ромба $ABCD$, если радиусы окружностей описанных около треугольников ABC и ABD равны соответственно R и r .

Дано:

$ABCD$ – ромб

$AC \perp BD$

$AC \cap BD = O$

$AL = LB$

$LO_1 \perp AB$

$O_1 \in BD$

O_1 - центр окружности,
описанной около $\triangle ABC$

$O_1A = O_1B = O_1C = R$

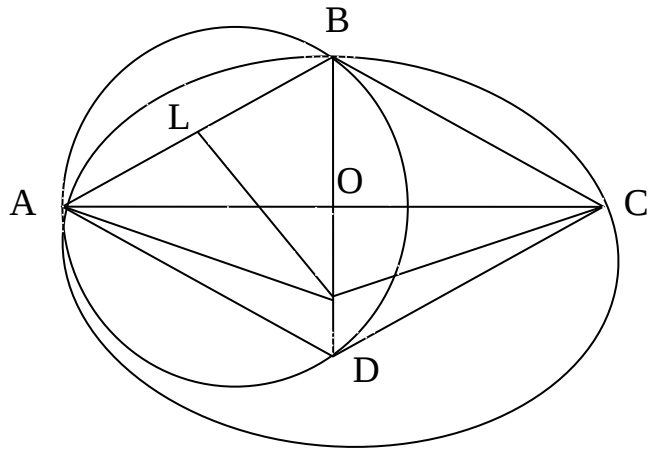
$LO_1 \cap AO = O_2$

O_2 - центр окружности,
описанной около $\triangle ABD$

$O_2A = O_2D = O_2B = r$

Найти:

$S_{ABCD} - ?$



Решение:

Пусть $AB = BC = CD = AD = a$, $\angle ABC = \angle ADC = \alpha$, тогда

$$\angle BAD = \angle BCD = \pi - \alpha \Rightarrow \angle ABO = \frac{\alpha}{2}; \angle BAO = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}.$$

По теореме синусов радиус описанной окружности

$$\triangle ABC : R = \frac{BC}{2 \sin \angle BAO} = \frac{a}{2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}};$$

для

$$\Delta ABD: r = \frac{AD}{2 \sin \angle ABO} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

для

$$\frac{R}{r} = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{a} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$a = 2R \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

Площадь ромба найдем по формуле площади параллелограмма

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = a^2 \sin \alpha = 4R^2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \alpha = \\ &= 4R^2 \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{8R^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{8R^2 \cdot \frac{R}{r}}{\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)^2} = \frac{8R^3}{r \left(\frac{r^2 + R^2}{r^2}\right)} = \\ &= \frac{8R^3 \cdot r^4}{r(r^2 + R^2)} = \frac{8R^3 \cdot r^3}{r^2 + R^2} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: площадь ромба равна } \frac{8R^3 \cdot r^3}{r^2 + R^2}.$$

Задание 2. Рассмотрите типы задач по планиметрии, предлагаемых на ОГЭ и ЕГЭ, используя сайты

<https://alexlarin.net>

<https://sdamgia.ru/>

<https://math-ege.sdamgia.ru/>

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Гончарова М.А. Образовательные технологии в школьном обучении математике [Электронный ресурс] : учебное пособие / М.А. Гончарова, Н.В. Решетникова. — Электрон. Текстовые данные. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2014. — 267 с. — 978-5-222-21972-0. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/58966.html>

2. Галямова Э.Х. Методика обучения математике в условиях внедрения новых стандартов [Электронный ресурс] / Э.Х. Галямова. — Электрон. Текстовые данные. — Набережные Челны: Набережночелнинский государственный педагогический университет, 2016. — 116 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/64633.html>

Дополнительная литература:

1. Васильева Г.Н. Методика обучения математике. Часть 1 [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Г.Н. Васильева. — Электрон. Текстовые данные. — Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2015. — 66 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70636.html>
2. Васильева Г.Н. Методика обучения математике. Часть 2 [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Г.Н. Васильева. — Электрон. Текстовые данные. — Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2016. — 75 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70637.html>

Особенности изучения геометрических тел в пространстве

Вопросы:

1. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Многогранники.
2. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Объем многогранника.
3. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Комбинации многогранников.
4. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Фигуры вращения.
5. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Комбинация фигур вращения и многогранников.
6. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Перпендикулярные прямые и плоскости.
7. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Построение сечений, перпендикулярных прямой или плоскости.
8. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Угол между прямой и плоскостью.
9. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Расстояние от точки до плоскости.
10. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Расстояние между прямыми и плоскостями.
11. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Двугранный угол.
12. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Угол между плоскостями.
13. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Применение метода координат при решении задач.
14. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы

Задание 1. Решите следующие задачи

1. Найдите диагональ куба, если его объем равен
а) 216; б) 64.

2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 4 см.

Двугранные углы при основании равны $\frac{\pi}{3}$. Найдите полную поверхность этой пирамиды.

3. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α . Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ . Найдите объем этой пирамиды, если

а) $c = 6$ см, $\alpha = 45^\circ$, $\varphi = 60^\circ$;

б) $c = 2$ см, $\alpha = 60^\circ$, $\varphi = 30^\circ$;

4. Высота боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равна 10 см.

Боковая грань наклонена к плоскости основания под углом $\frac{\pi}{3}$. Определите полную поверхность этой пирамиды.

5. Равнобокая трапеция, периметр которой равен 48 см, а острый угол 60° , расположена в плоскости α . Точка M , одинаково удаленная от всех сторон трапеции, находится на расстоянии 3 см от плоскости α . Найдите расстояние от точки M до сторон трапеции.

6. Диагонали ромба равны 12 см и 16 см. Точка M , равноудаленная от сторон ромба, находится на расстоянии 2 см от плоскости ромба. Найдите расстояние от точки M до сторон ромба.

7. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если

а) косинус двугранного угла при основании равен $\frac{1}{3}$, боковое ребро равно $\frac{6}{\sqrt[6]{2}}$;

б) котангенс угла между боковым ребром и высотой равен $\sqrt{2}$, апофема равна $\frac{6}{\sqrt[6]{6}}$;

8. Вершина конуса и окружность, ограничивающая его основание, находятся на сфере. Длина образующей конуса равна 8 см, радиус сферы равен 8 см. Найдите радиус основания этого конуса.

9. В конус, образующие которого наклонены к плоскости основания под углом 60^0 , вписан шар. Найдите отношение объема шара к объему конуса.

10. Площадь основания конуса равна площади поверхности вписанного в него шара. Определите тангенс угла между образующей и высотой конуса.

Задание 2. Изучите типы заданий по стереометрии, предлагаемые на ЕГЭ.

используя сайты

<https://alexlarin.net>

<https://sdamgia.ru/>

<https://math-ege.sdamgia.ru/>

Рекомендуемая литература:

Основная литература:

1. Гончарова М.А. Образовательные технологии в школьном обучении математике [Электронный ресурс] : учебное пособие / М.А. Гончарова, Н.В. Решетникова. — Электрон. Текстовые данные. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2014. — 267 с. — 978-5-222-21972-0. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/58966.html>
2. Галямова Э.Х. Методика обучения математике в условиях внедрения новых стандартов [Электронный ресурс] / Э.Х. Галямова. — Электрон. Текстовые данные. — Набережные Челны: Набережночелнинский государственный педагогический университет, 2016. — 116 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/64633.html>

Дополнительная литература:

1. Васильева Г.Н. Методика обучения математике. Часть 1 [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Г.Н. Васильева. — Электрон. Текстовые данные. — Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2015. — 66 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70636.html>
2. Васильева Г.Н. Методика обучения математике. Часть 2 [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Г.Н. Васильева. — Электрон. Текстовые данные. — Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2016. — 75 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70637.html>

Тема Обучение началам математического анализа в старшей школе.

Производная и ее приложения.

Вопросы:

1. Какие задачи, приводящие к понятию производной, Вам известны?
2. Дайте определение производной функции в точке.
3. Как найти производную функции $y=f(x)$ по определению?
4. В чем состоит механический смысл производной?
5. Чему равна производная:
а) постоянной; б) алгебраической суммы дифференцируемых функций;
в) произведения двух дифференцируемых функций; г) дроби; д) сложной функции; е) обратной функции?
10. Запишите формулы для нахождения производных основных элементарных функций.
1. Дайте определение возрастающей и убывающей функции на некотором промежутке.
2. Как найти интервалы монотонности функции?
3. Дайте определения экстремумов функции.
4. Определите наибольшее и наименьшее значения функции.
5. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
6. Какие точки называются критическими?
7. Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.
8. Как ведется исследование функции на экстремум с помощью второй производной?
9. Укажите порядок исследования функции на возрастание и убывание и экстремумы.
10. Как найти наибольшее и наименьшее значение функции? Укажите порядок решения этой задачи.
11. Определите понятия выпуклость и вогнутость графика функции.
12. Какую точку называют точкой перегиба?
13. Как найти интервалы выпуклости и вогнутости функции?
14. Как определить точки перегиба?
15. Что называется асимптотой кривой $y = f(x)$?
16. Как найти асимптоту $y = ax + b$ кривой $y = f(x)$, т.е. как найти a и b ?
17. По какой схеме следует проводить исследование функции и построение ее графика?
18. Для решения каких вопросов исследования функции и построения ее графика:
а) не нужны теория пределов и дифференциальное исчисление?

- б) необходимо уметь вычислять пределы?
- в) нужна первая производная?
- г) нужна вторая производная?

Перечень основной литературы:

1. Берсенева, О.В. Обучение математике с позиции системно-деятельностного подхода. Технологический аспект Электронный ресурс: учебно-методическое пособие / О.В. Тумашева / О.В. Берсенева. - Саратов : Ай Пи Эр Медиа, 2018. - 99 с. - Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks. - ISBN 978-5-4486-0054-8
2. Зыкова, Т. В. Проектное обучение, разработка и методика использования электронных обучающих курсов по математике: учебное пособие / Т.В. Зыкова, Т.В. Сидорова, В.А. Шершнева; Министерство образования и науки Российской Федерации ; Сибирский Федеральный университет. - Красноярск : Сибирский федеральный университет, 2014. - 116 с. : табл., схем. - <http://biblioclub.ru/>. - Библиогр. в кн. - ISBN 978-5-7638-3094-1
3. Основные методы решения тригонометрических уравнений: Практикум по дисциплине «Дополнительные главы школьного курса математики» для студентов, обучающихся по направлению «Педагогическое образование», магистерская программа «Теория и методика математического образования в условиях профильного обучения» / сост. Н. В. Лобанова. - Волгоград : Волгоградский государственный социально-педагогический университет, 2016. - 32 с. - Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks.
4. Смирнова, Е. С. Методика обучения математике. Система оценки качества математического образования Электронный ресурс / Смирнова Е. С. : учебно-методическое пособие. - Кострома : КГУ им. Н.А. Некрасова, 2020. - 54 с. - ISBN 978-5-8285-1082-5, экземпляров неограничено

Перечень дополнительной литературы:

1. Бобрович, Т.А. Методика преподавания общепрофессиональных и специальных предметов и дисциплин Электронный ресурс : учебно-методическое пособие / В.Д. Соломахин / Т.А. Бобрович. - Методика преподавания общепрофессиональных и специальных предметов и дисциплин, 2022-08-04. - Минск : Республиканский институт профессионального образования (РИПО), 2016. - 24 с. - Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks. - ISBN 978-985-503-563-4, экземпляров неограничено

2. Избранные вопросы методики преподавания математики в вузе Электронный ресурс : Учебное пособие. Направление подготовки 050100 – «Педагогическое образование», профиль «Математика. Информатика» (очное отделение), «Математика» (заочное отделение), магистерская программа «Математическое образование» / Л. П. Латышева [и др.]. - Пермь : Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2013. - 208 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-85218-678-2
3. Избранные вопросы методики преподавания математики Электронный ресурс : сборник научных трудов / М. Птушкина / А. Мадонов / Ю. Мишина / Е. Артемова / В. Азаров / Е. Самошкина / А. Нартова / Э. Джафарова / А. Фофлина ; ред. Л.О. Денищева. - Москва : Московский городской педагогический университет, 2013. - 76 с. - Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks.
4. Кучугурова, Н.Д. Интенсивный курс общей методики преподавания математики Электронный ресурс : учебное пособие / Н.Д. Кучугурова. - Москва : Московский педагогический государственный университет, 2014. - 152 с. - Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks. - ISBN 978-5-4263-0169-6
5. Практикум по методике преподавания математики : учебное пособие / сост. В. Ю. Сафонова ; сост. О. Ю. Глухова. - Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2012. - 96 с. - <http://biblioclub.ru/>, экземпляров неограничено
6. Шмакова,, А. П. Методика преподавания математики в начальных классах : учебное пособие / А. П. Шмакова, Н. В. Сидорова. - Методика преподавания математики в начальных классах, Весь срок охраны авторского права. - Электрон. дан. (1 файл). - Ульяновск : Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова, 2020. - 79 с. - электронный. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 2227-8397, экземпляров неограничено

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по организации и проведению самостоятельной работы по дисциплине
«ПРАКТИКУМ ПО МЕТОДИКЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ»

для студентов направления подготовки

44.03.05 - Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность (профиль):

«Информатика и математика»

Ставрополь, 2026

Введение

Целью изучения дисциплины «Практикум по методике обучения математике» является формирование компетенций бакалавров по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки).

В процессе изучения дисциплины формируются компетенции:

Код, формулировка компетенции	Код, формулировка индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций, индикаторов
ПК-1 Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	ИД-1 ПК-1 Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета)	Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (математика)
	ИД-2 ПК-1 Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО	Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к математическому образованию
	ИД-3 ПК-1 Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные	Демонстрирует навыки применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике

В результате изучения дисциплины студенты должны:

Знать:

- общие вопросы организации учебной деятельности учащихся на уроках математики в средней школе;
- структурные компоненты универсальных учебных действий;
- технологию конструирования учебной компетенции учащихся при обучении математике;

- методы и приемы решения математических задач;

Уметь:

- использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни;
- решать задачи школьной математики, соответствующие программе основной школы, различными способами;
- формировать универсальные учебные действия обучающихся;

Владеть:

- образовательными технологиями обучения математике;
- технологиями организации деятельности учителя и учащихся при формировании универсальных учебных действий на уроках математики;
- технологиями отбора содержания математических задач при изучении конкретных тем школьного курса математики.

Содержание самостоятельной работы

Собеседование 1

Вопросы для изучения:

1. Формирование УУД в процессе изучения темы «Действия со степенями и радикалами».
2. Формирование УУД в процессе изучения темы «Арифметические вычисления»
3. Провести анализ школьного курса алгебры 7-9 классов с целью проведения классификации текстовых задач курса.
4. Выделить основные типы задач и рассмотреть методы их решения.
5. Привести рекомендации для совершенствования подготовки учащихся при составлении модели (уравнений и их систем) по условию текстовых задач.
6. Числовые выражения и выражения с переменной.
7. Тождественные преобразования целых рациональных выражений.
8. Тождественные преобразования дробных рациональных выражений.
9. Тождественные преобразования иррациональных выражений.
10. Тождественные преобразования степенных и логарифмических выражений.
11. Тождественные преобразования тригонометрических выражений.
12. Понятие функции.
13. График функции.
14. Обратная функция.
15. Линейная функция.
16. Обратная пропорциональность.
17. Квадратичная функция.
18. Тригонометрические функции.
19. Показательная и логарифмическая функции.

Собеседование 2.

Вопросы для изучения:

1. Уравнения с одним и несколькими переменными.
2. Системы линейных уравнений.
3. Задачи на составление уравнений.

4. Рациональные и дробно-рациональные уравнения.
5. Уравнения с модулем.
6. Иррациональные уравнения.
7. Тригонометрические уравнения и системы уравнений.
8. Показательные уравнения и системы уравнений.
9. Логарифмические уравнения и системы уравнений.
10. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Функциональные неравенства.
11. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Понятие равносильности неравенств.
12. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Рациональные неравенства.
13. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Метод интервалов.
14. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Иррациональные неравенства.
15. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Неравенства с модулем.
16. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Неравенства с параметрами.
17. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Тригонометрические неравенства .
18. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Показательные и логарифмические неравенства.

Собеседование 3

Вопросы для изучения:

1. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Условия параллельности и перпендикулярности прямых
2. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Треугольник. Соотношения в треугольнике
3. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Четырехугольники
4. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Окружность
5. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Многогранники.
6. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы
Объем многогранника.

7. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Комбинации многогранников.
8. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Фигуры вращения.
9. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Комбинация фигур вращения и многогранников.
10. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Перпендикулярные прямые и плоскости.
11. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Построение сечений, перпендикулярных прямой или плоскости.
12. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Угол между прямой и плоскостью.
13. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Расстояние от точки до плоскости.
14. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Расстояние между прямыми и плоскостями.
15. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Двугранный угол.
16. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Угол между плоскостями.
17. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Применение метода координат при решении задач.
18. Формирование универсальных учебных действий при изучении темы Применение векторов при решении задач.

Примерные вопросы к экзамену

1. Методические особенности обучения алгебре в основной школе.
2. Классификация задач: задачи на движение, задачи на работу, задачи на смеси и сплавы, задачи на проценты, задачи на прогрессии
3. Математические утверждения. Теорема.
4. Работа с теоремой, её доказательством.
5. Условие и заключение в теореме, типы теорем, анализ и синтез в доказательстве, метод математической индукции в доказательстве.
6. Основные содержательно-методические линии школьного курса алгебры и начал анализа.
7. Числовая линия. Линия тождественных преобразований.
8. Линия функций.
9. Линия уравнений и неравенств.
10. Теоретико-числовая линия.

11. Основные содержательно-методические линии школьного курса геометрии.
12. Линия отношений, линия фигур.
13. Линия измерений и геометрических построений.
14. Задачи на вычисление и доказательство.
15. Построение чертежа.
16. Анализ условия, поиск решения, обоснование решения, анализ полученного результата.
17. Особенности изучения геометрических фигур на плоскости
18. Особенности изучения геометрических тел в пространстве
19. Производная и ее приложения.
20. Первообразная и интеграл.
21. Изучение элементов теории вероятностей и математической статистики.

Литература:

Основная:

1. Гончарова М.А. Образовательные технологии в школьном обучении математике [Электронный ресурс] : учебное пособие / М.А. Гончарова, Н.В. Решетникова. — Электрон. Текстовые данные. — Ростов-на-Дону: Феникс, 2014. — 267 с. — 978-5-222-21972-0. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/58966.html>
2. Галямова Э.Х. Методика обучения математике в условиях внедрения новых стандартов [Электронный ресурс] / Э.Х. Галямова. — Электрон. Текстовые данные. — Набережные Челны: Набережночелнинский государственный педагогический университет, 2016. — 116 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/64633.html>

Дополнительная:

1. Васильева Г.Н. Методика обучения математике. Часть 1 [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Г.Н. Васильева. — Электрон. Текстовые данные. — Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2015. — 66 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70636.html>
2. Васильева Г.Н. Методика обучения математике. Часть 2 [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / Г.Н. Васильева. — Электрон. Текстовые данные. — Пермь: Пермский государственный гуманитарно-педагогический университет, 2016. — 75 с. — 2227-8397. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/70637.html>

Методические указания по изучению дисциплины для студентов

Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на практических и лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

Самостоятельная работа включает в себя:

- ☐ подготовку к аудиторным занятиям (лекциям, практическим занятиям) и выполнение соответствующих заданий;
- ☐ самостоятельную работу над отдельными модулями (темами) дисциплины в соответствии с рабочей программой;
- ☐ написание рефератов, докладов;
- ☐ подготовку к практическим занятиям и выполнение предусмотренных ими заданий;
- ☐ подготовку ко всем видам аттестаций;
- ☐ подготовку презентаций по темам (части темы).

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на практических и семинарских занятиях. Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы знаний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

- а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;

б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение саморегулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой.

Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

Работоспособность - способность человека к труду с высокой степенью напряженности в течение определенного времени. Различают внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организация рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться информацией;
- величина умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н. Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;
- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп работы;
- привычная последовательность и систематичность деятельности;
- правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменой дела. В течение дня работоспособность изменяется. Наиболее плодотворным является утреннее время (с 8 до 14 часов), причем максимальная работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем послеобеденное - (с 16 до 19 часов) и вечернее (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1-1,5 часа нужны перерывы по 10 - 15 мин, через 3 - 4 часа работы отдых должен быть продолжительным - около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда.

Физически здоровый молодой человек, обладающий хорошей подготовкой и нормальными способностями, должен, будучи студентом, отдавать учению 9-10 часов в день (из них 6 часов в вузе и 3 - 4 часа дома). Любой предмет нельзя изучить за несколько дней перед экзаменом. Если студент в году работает систематически, то он быстро все вспомнит, восстановит забытое. Если же подготовка шла аврально, то у студента не будет даже общего представления о предмете, он забудет все сданное.

Следует взять за правило: учиться ежедневно, начиная с первого дня семестра.

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них - это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Чтобы выполнить весь объем самостоятельной работы, необходимо заниматься по 3 - 5 часов ежедневно. Начинать самостоятельные внеаудиторные занятия следует с первых же дней семестра, пропущенные дни будут потеряны безвозвратно, компенсировать их позднее усиленными занятиями без снижения качества работы и ее производительности невозможно. Первые дни семестра очень важны для того, чтобы включиться в работу, установить определенный порядок, равномерный ритм на весь семестр. Ритм в работе - это ежедневные самостоятельные занятия, желательно в одни и те же часы, при целесообразном чередовании занятий с перерывами для отдыха. Вначале для того, чтобы организовать ритмичную

работу, требуется сознательное напряжение воли. Как только человек втянулся в работу, принуждение снижается, возникает привычка, работа становится потребностью.

Если порядок в работе и ее ритм установлены правильно, то студент изо дня в день может работать, не снижая своей производительности и не перегружая себя. Правильная смена одного вида работы другим позволяет отдыхать, не прекращая работы.

Таким образом, первая задача организации внеаудиторной самостоятельной работы – это составление расписания, которое должно отражать время занятий, их характер (теоретический курс, практические занятия, графические работы, чтение), перерывы на обед, ужин, отдых, сон, проезд и т.д. Расписание не предопределяет содержания работы, ее содержание неизбежно будет изменяться в течение семестра. Порядок же следует закрепить на весь семестр и приложить все усилия, чтобы поддерживать его неизменным (кроме исправления ошибок в планировании, которые могут возникнуть из-за недооценки объема работы или переоценки своих сил).

При однообразной работе человек утомляется больше, чем при работе разного характера. Однако не всегда целесообразно заниматься многими учебными дисциплинами в один и тот же день, так как при каждом переходе нужно вновь сосредоточить внимание, что может привести к потере времени. Наиболее целесообразно ежедневно работать не более чем над двумя-тремя дисциплинами.

Начиная работу, не нужно стремиться делать вначале самую тяжелую ее часть, надо выбрать что-нибудь среднее по трудности, затем перейти к более трудной работе. И напоследок оставить легкую часть, требующую не столько больших интеллектуальных усилий, сколько определенных моторных действий (черчение, построение графиков и т.п.).

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование

умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

Изучение дисциплины следует начинать с проработки рабочей программы, особое внимание, уделяя целям и задачам, структуре и содержанию курса.

При подготовке к занятиям студент должен просмотреть конспекты лекций, рекомендованную литературу по данной теме; подготовиться к ответу на контрольные вопросы.

Успешное изучение курса требует от студентов посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления основной и дополнительной литературой.

Запись лекции – одна из форм активной самостоятельной работы студентов, требующая навыков и умения кратко, схематично, последовательно и логично фиксировать основные положения, выводы, обобщения, формулировки. Культура записи лекции – один из важнейших факторов успешного и творческого овладения знаниями. Последующая работа над текстом лекции воскрешает в памяти ее содержание, позволяет развивать аналитическое мышление. В конце лекции преподаватель оставляет время (5-10 минут) для того, чтобы студенты имели возможность задать уточняющие вопросы по изучаемому материалу.

Лекции имеют в основном обзорный характер и нацелены на освещение наиболее трудных и дискуссионных вопросов, а также призваны способствовать формированию навыков работы с научной литературой. Предполагается также, что студенты приходят на лекции, предварительно проработав соответствующий учебный материал по источникам, рекомендуемым программой.

Работа с конспектом лекций предполагает просмотр конспекта в тот же день после занятий, пометку материала конспекта, который вызывает затруднения для понимания. Попробуйте найти ответы на затруднительные вопросы, используя рекомендуемую литературу. Если самостоятельно не удалось разобраться в материале, сформулируйте вопросы и обратитесь за помощью к преподавателю на консультации или ближайшей лекции. Регулярно отводите время для повторения пройденного материала, проверяя свои знания, умения и навыки по контрольным вопросам.

Как слушать лекцию.

1. Выделяйте основные положения. Нельзя понять и запомнить все, что говорит лектор, однако можно выделить основные моменты. Для этого необходимо обращать внимание на вводные слова, словосочетания, фразы, которые используются, как правило, для перехода к новым положениям, выводам и обобщениям.

2. Старайтесь поэтапно (в момент завершения вопроса, подвопроса, тезиса и т.п.) анализировать и обобщать материал. Это готовит базу для его экономной, свернутой записи.

3. Старайтесь опережать речь лектора, предугадать дальнейшее содержание. С каждым случаем удачи улучшается понимание и запоминание отдельных положений лекции. Даже при неудачах качество восприятия лекции повышается, т.к. вы имеете возможность сравнить ваши предложения и утверждения лектора.

4. Будьте постоянно готовы слушать лекцию до конца, не поддавайтесь соблазну «отдохнуть» на длинной лекции.

Как правильно записывать лекцию.

1. Подготовьте специальную тетрадь для записи лекций: оставьте поля (для вопросов, мелких пометок и рисунков, собственных замечаний и т.д.), оставляйте при записи между строчками интервал (для дополнений, подчеркиваний и т.п.).

2. Не пишите лекцию дословно, подробно записывайте основную информацию, а дополнительные и вспомогательные сведения - очень кратко.

3. Применяйте систему условных сокращений:

а) сокращение общепринятых вспомогательных слов: так как, например (т.к., напр.), так далее (т.д.), таким образом, главным образом (т.о., гл.обр.), смотри (см), может быть (м.б.), так называемый (т.н.), какой-либо (к-л.), который (кт. или ктр.), несколько (неск.), чтобы (чбы.) и т.д.

б) аббревиатуры для ключевых слов курса, например, теория и методика развития математических представлений у детей дошкольного возраста (ТМРМП), формирование математических представлений (ФМП) и другие.

4. При записи и работе над конспектом лекции используйте условные знаки:

I - прочитать ещё раз, Y – важно, Z - законспектировать ! – смело, ? – непонятно, S – слишком сложно, A – согласен, N - ново и др.

Как работа с книгой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют

такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Различают два вида чтения; первичное и вторичное. Первичное - это внимательное, неторопливое чтение, при котором можно остановиться на трудных местах. После него не должно остаться ни одного непонятого слова. Содержание не всегда может быть понятно после первичного чтения.

Задача вторичного чтения - полное усвоение смысла целого (по счету это чтение может быть и не вторым, а третьим или четвертым).

Правила самостоятельной работы с литературой.

Как уже отмечалось, самостоятельная работа с учебниками и книгами (а также самостоятельное теоретическое исследование проблем, обозначенных преподавателем на лекциях) – это важнейшее условие формирования у себя научного способа познания. Основные советы здесь можно свести к следующим:

- Составить перечень книг, с которыми Вам следует познакомиться; «не старайтесь запомнить все, что вам в ближайшее время не понадобится, – советует студенту и молодому ученому Г. Селье, – запомните только, где это можно отыскать» (Селье, 1987. С. 325).

- Сам такой перечень должен быть систематизированным (что необходимо для семинаров, что для экзаменов, что пригодится для написания курсовых и дипломных работ, а что Вас интересует за рамками официальной учебной деятельности, то есть что может расширить Вашу общую культуру...).

- Обязательно выписывать все выходные данные по каждой книге (при написании курсовых и дипломных работ это позволит очень сэкономить время).

- Разобраться для себя, какие книги (или какие главы книг) следует прочитать более внимательно, а какие – просто просмотреть.

- При составлении перечней литературы следует посоветоваться с преподавателями и научными руководителями (или даже с более подготовленными и эрудированными сокурсниками), которые помогут Вам

лучше сориентироваться, на что стоит обратить большее внимание, а на что вообще не стоит тратить время...

- Естественным, все прочитанные книги, учебники и статьи следует конспектировать, но это не означает, что надо конспектировать «все подряд»: можно выписывать кратко основные идеи автора и иногда приводить наиболее яркие и показательные цитаты (с указанием страниц).

- Если книга – Ваша собственная, то допускается делать на полях книги краткие пометки или же в конце книги, на пустых страницах просто сделать свой «предметный указатель», где отмечаются наиболее интересные для Вас мысли и обязательно указываются страницы в тексте автора (это очень хороший совет, позволяющий экономить время и быстро находить «избранные» места в самых разных книгах).

- Если Вы раньше мало работали с научной литературой, то следует выработать в себе способность «воспринимать» сложные тексты; для этого лучший прием – научиться «читать медленно», когда Вам понятно каждое прочитанное слово (а если слово незнакомое, то либо с помощью словаря, либо с помощью преподавателя обязательно его узнать), и это может занять немалое время (у кого-то – до нескольких недель и даже месяцев); опыт показывает, что после этого студент каким-то «чудом» начинает буквально заглатывать книги и чуть ли не видеть «сквозь обложку», стоящая это работа или нет...

- «Либо читайте, либо перелистывайте материал, но не пытайтесь читать быстро... Если текст меня интересует, то чтение, размышление и даже фантазирование по этому поводу сливаются в единый процесс, в то время как вынужденное скорочтение не только не способствует качеству чтения, но и не приносит чувства удовлетворения, которое мы получаем, размышляя о прочитанном», – советует Г. Селье (Селье, 1987. – С. 325-326).

- Есть еще один эффективный способ оптимизировать знакомство с научной литературой – следует увлечься какой-то идеей и все книги просматривать с точки зрения данной идеи. В этом случае студент (или молодой ученый) будет как бы искать аргументы «за» или «против» интересующей его идеи, и одновременно он будет как бы общаться с авторами этих книг по поводу своих идей и размышлений... Проблема лишь в том, как найти «свою» идею...

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того насколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют четыре основные установки в чтении научного текста:

1. информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)

2. усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)

3. аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)

4. творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких видов чтения:

1. библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;

2. просмотровое – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;

3. ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;

4. изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;

5. аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;

2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;
3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;
4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;
5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;
2. Выделите главное, составьте план;
3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;
4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.
5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

Как готовиться к практическим занятиям

Для того чтобы практические занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций,

задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных сигналов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удастся, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

Как готовиться к экзаменам и зачетам

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин завершается экзаменом. Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

Экзаменационная сессия - это серия экзаменов, установленных учебным планом. Между экзаменами интервал 3-4 дня. Не следует думать, что 3-4 дня достаточно для успешной подготовки к экзаменам.

В эти 3-4 дня нужно систематизировать уже имеющиеся знания. На консультации перед экзаменом студентов познакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

Требования к организации подготовки к экзаменам те же, что и при занятиях в течение семестра, но соблюдаться они должны более строго. Во-первых, очень важно соблюдение режима дня; сон не менее 8 часов в сутки, занятия заканчиваются не позднее, чем за 2-3 часа до сна. Оптимальное время занятий, особенно по математике - утренние и дневные часы. В перерывах между занятиями рекомендуются прогулки на свежем воздухе, неустойчивые занятия спортом. Во-вторых, наличие хороших собственных конспектов лекций. Даже в том случае, если была пропущена какая-либо лекция, необходимо во время ее восстановить (переписать ее на кафедре), обдумать, снять возникшие вопросы для того, чтобы запоминание материала было осознанным. В-третьих, при подготовке к экзаменам у студента должен быть хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Здесь можно эффективно использовать листы опорных сигналов.

Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Правила подготовки к зачетам и экзаменам:

- Лучше сразу сориентироваться во всем материале и обязательно расположить весь материал согласно экзаменационным вопросам (или вопросам, обсуждаемым на семинарах), эта работа может занять много времени, но все остальное – это уже технические детали (главное – это ориентировка в материале!).

- Сама подготовка связана не только с «запоминанием». Подготовка также предполагает и переосмысление материала, и даже рассмотрение альтернативных идей.

- Готовить «шпаргалки» полезно, но пользоваться ими нельзя. Главный смысл подготовки «шпаргалок» – это систематизация и оптимизация знаний по данному предмету, что само по себе прекрасно – это очень сложная и важная для студента работа, более сложная и важная, чем простое поглощение массы учебной информации. Если студент самостоятельно подготовил такие «шпаргалки», то, скорее всего, он и экзамены сдавать будет более уверенно, так как у него уже сформирована общая ориентировка в сложном материале.

- Как это ни парадоксально, но использование «шпаргалок» часто позволяет отвечающему студенту лучше демонстрировать свои познания (точнее – ориентировку в знаниях, что намного важнее знания «запомненного» и «тут же забытого» после сдачи экзамена или зачета).

- Сначала студент должен продемонстрировать, что он «усвоил» все, что требуется по программе обучения, и лишь после этого он вправе высказать иные, желательно аргументированные точки зрения.