МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению практических работ
дисциплины «Теория систем и системный анализ»
для студентов направления подготовки
09.03.01 Информатика и вычислительная техника,
Направленность (профиль) «Программное обеспечение средств
вычислительной техники и автоматизированных систем»

Ставрополь 2026 г.

Приведены методические указания по выполнению практических работ по разделам дисциплины **Теория систем и системный анализ**: случайные процессы, линейное программирование, нелинейное программирование, решение минимаксных задач.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Информатика и вычислительная техника»

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....3

Практическое занятие №1. Исследование характеристик потоков требований в информационных системах 4

Практическое занятие №2. Методы решения задач линейного программирования 48

Практическое занятие №3. Транспортные задачи линейного программирования 65

Практическое занятие № 4. Оптимизация параметров систем методом нелинейного программирования.....86

Практическое занятие №5. Разработка и оптимизация моделей вычислительных ресурсов облачных технологий на основе пакета MS Exel. 104

Список литературы.....122

ВВЕДЕНИЕ

Общая теория систем является теоретической базой для построения технических систем и законов их развития. Системный анализ разрабатывает системную методологию решения сложных прикладных проблем, опираясь на принципы системного подхода и общей теории систем, развития и методологически обобщая концептуальный (идейный) и математический аппарат кибернетики, исследования операций и системотехники. Системный анализ представляет собой новое научное направление интеграционного типа, которое разрабатывает системную методологию принятия решений и занимает определенное место в структуре современных системных исследований. Приведены общие сведения об основах анализа и синтеза систем с целью повышения эффективности действующих и создаваемых информационных систем. Оптимизацией в самом широком смысле этого слова называется получение наилучших результатов в тех или иных условиях. Оптимальное управление является одной из наиболее активно разрабатываемых областей техники и нашло большое число применений в информационных системах, автоматизированных системах управления, энергетике и других отраслях промышленности. Современная теория управления решает задачи исследования многомерных систем, систем с ограничениями на фазовые переменные и управления, стохастических и больших систем с запаздыванием. Исходным положением современной теории управления является система уравнений состояния, описывающих поведение системы. При решении конкретной задачи оптимизации исследователь прежде всего должен выбрать метод, который приводил бы к конечным результатам, обеспечивающим получение оптимального значения критерия оптимальности. Выбор того или иного метода определяется постановкой задачи и используемой математической моделью объекта оптимизации. Для решения задачи оптимизации применяют в основном следующие методы: методы исследования функций классического анализа; линейное, нелинейное программирование; методы, основанные на использовании неопределенных множителей Лагранжа; вариационное исчисление; динамическое программирование; принцип максимума. Предлагаемые методы решения задач направлены на освоение некоторых методов линейного и нелинейного программирования и принципа максимума.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1.

Исследование характеристик потоков требований в информационных системах

Цель работы: исследовать характеристики и параметры систем массового обслуживания (СМО), включая потоки требований, эффективность работы информационных систем, а также применение методов линейного программирования и распределения ресурсов для оптимизации процессов обслуживания.

Задача: при исследовании операций в теории систем часто приходится сталкиваться с системами, предназначенными для многоразового использования при решении однотипных задач. Возникающие при этом процессы получили название процессов обслуживания, а системы – систем массового обслуживания (СМО).

Главная особенность процессов массового обслуживания – случайность. При этом имеются две взаимодействующие стороны – обслуживаемая и обслуживающая.

Примерами процессов этого типа являются:

1) обслуживание покупателей в сфере розничной торговли;
2) транспортное обслуживание;
3) медицинское обслуживание населения;
4) ремонт аппаратуры, машин, механизмов, находящихся в эксплуатации;
5) обработка документов в системе управления;
6) туристическое обслуживание.

Неотъемлемой частью системы массового обслуживания является узел обслуживания, через который осуществляется взаимодействие входного и выходного потоков заявок. В случае транспортного обслуживания каналом может считаться отдельная единица транспортного средства.

Таблица 1.1

Типы систем массового обслуживания

№ п/п	Параметры СМО		Тип СМО
	n	m	
1	1	0	Одноканальная, без очереди
2	n > 1	0	Многоканальная, без очереди
3	1	1 < m <∞	Одноканальная, с ограниченной очередью
4	n > 1	1 < m <∞	Многоканальная, с ограниченной очередью
5	1	m = ∞	Одноканальная, с неограниченной очередью
6	n > 1	m = ∞	Многоканальная, с неограниченной очередью

По числу обслуживающих каналов различают одноканальные и многоканальные СМО.

Находящиеся в СМО заявки могут либо ожидать обслуживания, либо находиться под обслуживанием. Часть заявок, ожидающих обслуживания, образует очередь.

В зависимости от целочисленного значения m используются следующие названия в классификации типов СМО:

1) m = 0 – без очереди;

2) m > 0 – с очередью.

Если число мест в очереди m является конечным, то в СМО могут происходить отказы в предоставлении обслуживания некоторым заявкам. В связи с этим СМО указанного типа называются системами с отказами. Отклоняются от обслуживания те заявки, в момент прихода которых все места в очереди случайно оказались занятыми, или, если m = 0, все каналы оказались занятыми. Считается, что заявка, получившая отказ в обслуживании, навсегда теряется для СМО. Таким образом, пропускная способность СМО этого типа всегда меньше 100 %.

Если m не ограничено, что иногда условно записывают как m = ∞, то

соответствующая СМО называется системой с ожиданием. В СМО данного типа пришедшая заявка при отсутствии возможности немедленного обслуживания ожидает обслуживания, какой бы длинной ни были очередь и продолжительность времени ожидания.

1.1. Примеры решения задач систем массового обслуживания

Требуется решить задачи 1–3. Исходные данные приведены в табл. 1.2–1.4.

Некоторые обозначения, применяемые в теории массового обслуживания, для формул:

n – число каналов в СМО;

λ – интенсивность входящего потока заявок $П_{вх}$;

v – интенсивность выходящего потока заявок $П_{вых}$;

μ – интенсивность потока обслуживания $П_{об}$;

ρ – показатель нагрузки системы (трафик);

m – максимальное число мест в очереди, ограничивающее длину очереди заявок;

i – число источников заявок;

$p_к$ – вероятность k-го состояния системы;

$p_о$ – вероятность простаивания всей системы, т. е. вероятность того, что все каналы свободны;

$p_{сист}$ – вероятность принятия заявки в систему;

$p_{отк}$ – вероятность отказа заявке в принятии ее в систему;

$p_{об}$ – вероятность того, что заявка будет обслужена;

A – абсолютная пропускная способность системы;

Q – относительная пропускная способность системы;

$\overline{N}_{оч}$ – среднее число заявок в очереди;

$\overline{N}_{об}$ – среднее число заявок под обслуживанием;

$\overline{N}_{сист}$ – среднее число заявок в системе;

$\overline{T}_{оч}$ – среднее время ожидания заявки в очереди;

$\overline{T}_{об}$ – среднее время обслуживания заявки, относящееся только к обслуженным заявкам;

$\overline{T}_{сист}$ – среднее время пребывания заявки в системе;

$\overline{T}_{ож}$ – среднее время, ограничивающее ожидание заявки в очереди;

$\overline{K}$ – среднее число занятых каналов.

Абсолютная пропускная способность СМО A – среднее число заявок, которое может обслужить система за единицу времени.

Относительная пропускная способность СМО Q – отношение среднего числа заявок, обслуживаемых системой в единицу времени, к среднему числу поступающих за это время заявок.

При решении задач массового обслуживания необходимо придерживаться нижеприведенной последовательности:

1) определение типа СМО по табл. 4.1;
2) выбор формул в соответствии с типом СМО;
3) решение задачи;
4) формулирование выводов по задаче.

Вариант выбирается следующим образом: две последние цифры зачетной книжки студента делятся с остатком на количество вариантов, представленных в таблицах. К остатку от деления прибавляется единица. Полученное число явится номером варианта для информации соответствующего вида.

Задание 1. В ИС поступают заявки с интенсивностью 0,9 заявки в час. Среднее время обслуживания одной заявки 0,7 часа. Определить показатели эффективности работы ИС: интенсивность потока обслуживаний, среднее число заявок в очереди, интенсивность нагрузки канала (трафик), вероятность, что канал свободен, вероятность, что канал занят, среднее число

заявок в системе, среднее время пребывания заявки в очереди, среднее время пребывания заявки в системе (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Исходные данные для решения задачи 1

Показатель	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	0,5	0,8	0,4	0,6	0,7	0,5	0,7	0,6	0,8	0,4
$\overline{T}_{об}$	0,3	0,5	0,6	0,9	0,2	0,2	0,4	0,8	0,3	0,5

Решение. ИС можно рассматривать как одноканальную СМО с неограниченным ожиданием (т. е. с очередью). Таким образом, параметры системы: число каналов n = 1, число мест в очереди m = ∞.

Интенсивность входящего потока $\lambda = 0{,}9$ в час, среднее время обслуживания одной заявки $\overline{T}_{об} = 0{,}7$ ч, интенсивность потока обслуживаний

$$\overline{T}_{об} = \frac{1}{\mu}, \tag{1.1}$$

$\mu = 1/0{,}7 = 1{,}429$. Таким образом, нагрузка системы

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \overline{T}_{об}, \tag{1.2}$$

$\rho = 0{,}9/1{,}429 = 0{,}63$, или $\rho = 0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}63$.

Среднее число заявок, ожидающих обслуживания,

$$\overline{N}_{оч} = \frac{\rho^2}{1-\rho}, \tag{1.3}$$

$\overline{N}_{оч} = 0{,}63^2/(1 - 0{,}63) = 1{,}073$.

Так как $\rho < 1$, то очередь не может бесконечно возрастать, значит, предельные вероятности существуют. Вероятность того, что ИС свободна p_0, рассчитывается по следующей формуле:

$$p_k = \rho^k(1 - \rho);\ k = 0,1,2\ldots$$

$$p_0 = 1 - \rho. \tag{1.4}$$

$p_0 = 1 – 0,63 = 0,37$, тогда вероятность того, что ИС занята $p_{зан} = 1 – – 0,37 = 0,63$.

Среднее число заявок (составов) в системе рассчитывается по следующей формуле:

$$\overline{N}_{сист} = \overline{N}_{оч} + \overline{N}_{об} = \frac{\rho}{1-\rho}, \qquad (1.5)$$

где $\overline{N}_{об} = \rho$; $\overline{N}_{сист} = 0,63/1 – 0,63 = 1,703$ или $\overline{N}_{сист} = 0,63 + 1,073 = 1,703$.

Среднее время пребывания заявки в очереди

$$\overline{T}_{оч} = \frac{\overline{N}_{оч}}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}, \qquad (1.6)$$

$\overline{T}_{оч} = 1,073/0,63 = 0,63^2/(0,9(1 – 0,63)) = 0,63/(1,429(1 – 0,63)) = 1,19$.

Среднее время пребывания заявки в системе (в ожидании обслуживания)

$$\overline{T}_{сист} = \overline{T}_{оч} + \overline{T}_{об} = \frac{1}{\lambda}\cdot\overline{N}_{сис} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}, \qquad (1.7)$$

$\overline{T}_{сист} = 0,7 + 1,19 = 0,63/(0,9(1 – 0,63)) = 1,703/0,9 = 1/(1,429(1 – 0,63)) = 1,89$.

Вывод. Очевидно, что скорость обслуживания заявок невысокая, так как время на ожидание обслуживания (1,19 ч) превышает время на обслуживание (0,7 ч). Для повышения эффективности работы необходимо уменьшить время обслуживания одной заявки или увеличить число ИС.

Задание 2. Интенсивность потока заявок в ИС $\lambda = 1,35$ заявки в мин. Средняя продолжительность обслуживания ИС одной заявки $\overline{T}_{об} = 2$ мин. Определить минимальное количество каналов ИС $n = n_{min}$, при котором очередь не будет расти до бесконечности, и соответствующие характеристики обслуживания при $n = n_{min}$ (вероятность того, что в ИС отсутствуют заявки, вероятность очереди, среднее число заявок находящихся в очереди, среднее время пребывания заявки в очереди, среднее число заявок,

находящихся в системе, среднее время пребывания заявки в системе, доля занятых обслуживанием каналов, абсолютная пропускную способность) (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Исходные данные для решения задачи 2

Показатель	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	1,37	1,62	1,42	1,83	1,75	1,55	1,4	1,65	1,7	1,3
$\overline{T}_{об}$	2,3	2	1	2,5	1,5	1,7	1,2	2,6	1	2,5

Указание. Прежде чем использовать формулы предельных вероятностей, необходимо быть уверенным в их существовании, ведь в случае, когда время $t \to \infty$, очередь может неограниченно возрастать. Доказано, что если $\rho < 1$, т. е. среднее число приходящих заявок меньше среднего числа обслуженных заявок (в единицу времени), то предельные вероятности существуют. Если $\rho \geq 1$, очередь растет до бесконечности. Очередь не будет возрастать до бесконечности при условии $\rho / n < 1$, т. е. при $n > \rho$.

Решение. $n > 1$, $m = \infty$, т. е. имеем многоканальную систему с неограниченной очередью. По условию $\lambda = 1{,}35$ (1/мин). Показатель нагрузки системы определяется по формуле (4.2): $\rho = 1{,}35 \cdot 2 = 2{,}7$.

Очередь не будет возрастать до бесконечности при условии $\rho / n < 1$, т. е. при $n > \rho = 2{,}7$. Таким образом, минимальное количество каналов $n_{min} = 3$.

Найдем характеристики обслуживания СМО при $n_{min} = 3$.

Вероятность того, что в узле расчета отсутствуют заявки, определяется по формуле

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \ldots + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1}, \qquad (1.8)$$

$p_0 = (1 + 2{,}7 + 2{,}7^2/2! + 2{,}7^3/3! + 2{,}7^4/3! \cdot (3 - 2{,}7))^{-1} = 0{,}025$, т. е. в среднем 2,5 % времени каналы будут простаивать.

Вероятность того, что в узле расчета будет очередь, определяется по

формуле

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} p_0, \quad (1.9)$$

$P_{оч} = (2{,}7^4/3!(3 - 2{,}7)) \cdot 0{,}025 = 0{,}735.$

Среднее число заявок, находящихся в очереди, определяется по формуле

$$\overline{N}_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}, \quad (1.10)$$

$\overline{N}_{оч} = (2{,}7^4/3 \cdot 3!(1 - 2{,}7/3)^2) \cdot 0{,}025 = 7{,}35.$

Среднее время ожидания в очереди определяется по формуле

$$\overline{T}_{оч} = \frac{1}{\lambda} \cdot \overline{N}_{оч}, \quad (1.11)$$

$\overline{N}_{оч} = 7{,}35/1{,}35 = 5{,}44$ мин.

Среднее число заявок в определяется по формуле

$$\overline{N}_{сист} = \overline{N}_{оч} + \rho, \quad (1.12)$$

$\overline{N}_{сист} = 7{,}35 + 2{,}7 = 10{,}05.$

Среднее время нахождения заявок в узле определяется по формуле

$$\overline{T}_{сист} = \frac{1}{\lambda} \cdot \overline{N}_{сис}, \quad (1.13)$$

$\overline{T}_{сист} = 10{,}05/1{,}35 = 7{,}44$ мин.

Среднее число каналов, занятых обслуживанием, определяется по формуле

$$\overline{K} = \overline{N}_{об} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho, \quad (1.14)$$

$\overline{K} = 2{,}7.$

Коэффициент (доля) занятых обслуживанием каналов

$\overline{K} = \rho/n = 2{,}7/3 = 0{,}9.$

Абсолютная пропускная способность узла А = 1,35 (1/мин), или 81 (1/ч), т. е. 81 заявка в час.

Вывод. Анализ характеристик обслуживания свидетельствует о значительной перегрузке узла при наличии трех каналов.

Задание 3. На ИС имеется два выходных порта. Интенсивность поступления заявок в ИС составляет 0,4 заявки в минуту. Среднее время обслуживания одной заявки – 2 минуты. Приходящая заявка отправляется на другую станцию, если в очереди на обслуживание стоят более трёх заявок. Оценить эффективность работы выходных портов ИС: вероятность, что выходные порты свободны, вероятность, что заявка останется без обслуживания, относительную пропускную способность, абсолютную пропускную способность, среднее число заявок, ожидающих обслуживания, среднее число заявок в системе, среднее время пребывания заявки в очереди, среднее время пребывания заявки в системе (табл. 1.4).

Таблица 1.4

Исходные данные для решения задачи 3

Показатель	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
λ	0,5	0,9	0,5	0,3	0,6	0,8	0,9	0,4	0,6	0,5
$\overline{T}_{об}$	2	1	1,5	1,4	1,3	1,2	1,5	2	1,9	1,4

Решение. По условию задачи n = 2, m = 3, т. е. ИС представляет собой многоканальную систему с ограниченной очередью. Интенсивность потока обслуживаний определяется по формуле (4.1):

$\mu = 1/2 = 0{,}5.$

Интенсивность нагрузки канала (трафик) определяется по формуле

(4.2):

$\rho = 0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8$.

Вероятность того, что выгрузочный порт свободен, определяется по формуле

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \ldots + \frac{\rho^{n+1}\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^m}{n \cdot n!\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)}\right)^{-1}, \qquad (1.15)$$

$p_0 = 0{,}431$.

Вероятность того, что заявка будет отправлена на другую станцию, определяется по формуле

$$p_{отк} = p_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0, \qquad (1.16)$$

$p_{отк} = 0{,}009$.

Относительная пропускная способность определяется по формуле

$$Q = 1 - p_{отк}, \qquad (1.17)$$

$Q = 1 - 0{,}009 = 0{,}991$.

Абсолютная пропускная способность определяется по формуле

$$A = \lambda Q, \qquad (1.18)$$

$A = 0{,}4 \cdot 0{,}991 = 0{,}396$, т. е. в среднем в минуту обслуживается 0,4 заявки.

Среднее число заявок, ожидающих обслуживания, определяется по формуле

$$\overline{N}_{оч} = \frac{\rho^{n+1} p_0 \left(1 - \left(m + 1 - m\frac{\rho}{n}\right)\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}{n \cdot n!\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}, \qquad (1.19)$$

где $\overline{N}$ оч= 0,21.

Среднее время ожидания обслуживания определяется по формуле (4.11): $\overline{T}_{оч}$ = 0,21/0,4 = 0,524.

Среднее число занятых выходных портов (среднее число заявок под обслуживанием) определяется по формуле

$$\overline{k} = \rho\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right), \qquad (1.20)$$

$\overline{k}$ = 0,77.

Среднее число заявок, находящихся у выходных портов определяется по формуле

$$\overline{N}_{сист} = \overline{N}_{оч} + \overline{k}, \qquad (1.21)$$

$\overline{N}_{сист}$ = 0,21 + 0,77 = 0,98.

Среднее время пребывания заявки у выходного порта определяется по формуле (4.14): $\overline{T}_{сис}$ = 1,564/0,4 = 3,908.

Вывод. Среднее время пребывания заявки в ожидании обслуживания на другой станции невелико. Это говорит о нормальной работе выходных портов.

1.2. Исследование параметров неординарных потоков требований

Потоком требований (событий) называется последовательность однородных требований, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени. Примеры: поток вызовов на телефонной станции; прибытие поездов на станцию; поток сбоев ЭВМ; поток заявок на проведение регламентных работ в вычислительном центре и т.п.

Потоки требований имеют такие свойства, как стационарность, ординарность и отсутствие последействия.

Свойство стационарности означает, что с течением времени вероятностные характеристики потока не меняются. Поток можно назвать

стационарным, если для любого числа k требований, поступивших за промежуток времени длиной д*t*, вероятность поступления требований зависит только от величины промежутка и не зависит от его расположения на оси времени.

Свойство ординарности означает практическую невозможность группового поступления требований. Поэтому поток требований можно назвать ординарным тогда, когда вероятность поступления двух или более требований за любой бесконечно малый промежуток времени Δt есть величина бесконечно малая более высокого порядка, чем $\triangle$t.

Свойство отсутствия последействия означает независимость вероятностных характеристик потока от предыдущих событий. Иными словами, вероятность поступления *k* требований в промежуток $[t_1,t_2]$ зависит от числа, времени поступления и длительности обслуживания требований до момента t_1.

К основным характеристикам случайного потока относят ведущую функцию и интенсивность.

Ведущая функция случайного потока $\overline{x}(0,t)$ есть математическое ожидание числа требований в промежутке *[0,* t). Функция $\overline{x}(0,t)$ - неотрицательная, неубывающая и в практических задачах теории распределения информации непрерывна и принимает только конечные значения.

Интенсивностью λ потока событий называется среднее число (математическое ожидание числа) событий, приходящееся на единицу времени. Для стационарного потока $\lambda = const$; для нестационарного потока интенсивность в общем случае зависит от времени: $\lambda = \lambda(t)$.

Потоки требований различают по многим видам, но мы рассмотрим наиболее встречающиеся, а именно простейшие потоки и их модификации, потоки Пальма и потоки Эрланга.

Простейшие потоки. Если поток требований обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последствия, то такой поток

называется простейшим (или пуассоновским) потоком требований.

Вероятность поступления k требований за промежуток времени t в пуассоновском потоке определяется из выражения

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Интервал времени T между двумя соседними событиями простейшего потока имеет показательное распределение

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \ (при\ t>0),$$

где $\lambda = 1/\ M\ [T\ ]$ - величина, обратная среднему значению интервала T.

Математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение промежутка Т:

$$M = \int_0^\infty tp(t)dt = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda,$$

$$D = \int_0^\infty t^2 p(t)dt - M^2 z = \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2,$$

$$\sigma = \sqrt{D} = 1/\lambda.$$

Полученное совпадение величин M и σ характерно для показательного распределения. Это свойство на практике используют как критерий для первоначальной проверки соответствия гипотезы о показательном распределении полученным статистическим данным.

Пример. По шоссе мимо наблюдателя движется в одном направлении простейший поток машин. Известно, что вероятность отсутствия машин в течение 5 минут равна 0,5. Требуется найти вероятность того, что за 10 мин мимо наблюдателя пройдет не более двух машин.

Решение. Примем за единицу времени 5 мин. В задаче требуется найти

$$P_{\le 2}(2) = P_0(2) + P_1(2) + P_2(2) = e^{-\lambda 2} + \frac{(2\lambda)}{1!} e^{-\lambda 2} + \frac{(2\lambda)^2}{2!} e^{-\lambda 2}.$$

Из условия следует $P_0(1) = 0{,}5$, т.е. $e^{-\lambda} = 0{,}5$, следовательно, $\lambda = \ln 2$. Таким образом, в предыдущее уравнение подставляем λ и получим $P_{s2}(2) = 0{,}84$.

Простейший поток с возможной нестационарностью. Простейшим потоком с возможной нестационарностью (нестационарным простейшим потоком) является поток, обладающий свойствами ординарности, отсутствием последействия и имеющий в каждый момент времени t конечное мгновенное значение параметра λ(t).

Мгновенная интенсивность нестационарного простейшего потока $\lambda(t)$ определяется как предел отношения среднего числа событий, которые произошли за элементарный интервал времени $(t, t + \triangle t)$, к длине $\triangle t$ этого интервала, когда $\triangle t \to 0$. Среднее число событий, наступающих в интервале времени m, следующем непосредственно за моментом t_0, равно $\Lambda(t_0, t) = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \lambda(t)dt$. Если поток событий стационарный, то $\Lambda(t_0, \tau) = \Lambda(\tau) = \lambda\tau$.

$$P_k(t_0, \tau) = \frac{(\Lambda(t_0, \tau))^n}{k!} e^{-\Lambda(t_0, \tau)} .$$

Тогда вероятность наступления k требований для рассматриваемого вида потока будет

Пример. Рассмотрим простейший поток с нестационарным параметром, изменяющийся по закону λ(t) = 1 + 0,5sin(6πt). Параметр является периодическим, его период равен 1/3. Найти вероятность отсутствия требований на отрезке [1,5].

Решение. Длина отрезка равна 4. Вычислим среднее число событий, наступающих в интервале времени $\tau = 4$

$$\Lambda(1,4) = \int_1^5 (1 + 0,5\sin(6\pi z))dz = 4 \text{, тогда } P_0(1,4) = e^{-4} = 0,0183 .$$

Простейший поток с возможной неординарностью. Простейший поток с возможной неординарностью обладает свойствами стационарности и отсутствием последействия. Требования в таком потоке могут поступать не по одному, а сразу группами (пакетами). В этом случае все требования, приходящие одновременно, объединяются в пакеты, вероятность поступления двух или более числа пакетов за промежуток времени t есть величина, бесконечно малая по отношению к t. Каждый пакет, исходя из

определения, содержит ходя бы одно требование.

Вероятность поступления k требований для потока с возможной неординарностью с учетом вероятности p_m нахождения m требований в пакете

$$P_k(t) = e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{k}\left[\frac{(\lambda t)^n}{n!}\sum_{\sum_{j=1}^{n} m_j = k}\prod_{j=1}^{n} p_{mj}\right], \text{ при } \sum_{\sum_{j=1}^{n} m_j = k}\prod_{j=1}^{n} p_{mj} = \begin{cases} 1, \textit{если } \text{к} = 0, \\ 0, \text{если к} \geq 1. \end{cases}$$

Простейшие потоки с возможным последействием. Поток, имеющий конечное значение

параметра и обладающий свойствами стационарности и ординарности является простейшим потоком с возможным последействием. Условная вероятность поступления некоторого числа требований на заданном промежутке времени t такого потока вычисляется при предположении о предыстории потока (о поступлении требований до этого промежутка времени) и может отличаться от безусловной вероятности того же события.

Вероятность поступления требований k за данный промежуток времени t для потока с возможным последействием будет выглядеть следующим образом

$$P_k(t) = -\lambda\int_0^t (\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x))dx,$$

где $\varphi_к(t)$ - функция Пальма-Хинчина.

Функция $\varphi_k(t)$ представляет собой вероятность поступления k требований за время t при условии, что в начальный момент этого промежутка t поступает хотя бы одно (а в силу ординарности потока ровно одно) требование (это начальное требование не входит в число $к$ требований за время t).

Потоки Пальма. Ординарный поток событий называется потоком Пальма (или рекуррентным потоком, или потоком с ограниченным последействием), если интервалы времени $T_1, T_2, \ldots$ между

последовательными событиями представляют собой независимые, одинаково распределенные случайные величины.

В связи с одинаковостью распределений $\boldsymbol{T}_1$,T_2,... поток Пальма всегда стационарен. Простейший поток является частным случаем потока Пальма; в нем интервалы между событиями распределены по показательному закону.

Потоки Эрланга. Потоком Эрланга n-го порядка называется поток событий, получающийся «прореживанием» простейшего потока, когда сохраняется каждая n-я точка (событие) в потоке, а все промежуточные выбрасываются.

Интервал времени между двумя соседними событиями в потоке Эрланга n-го порядка представляет собой сумму n независимых случайных величин T_1, T_2, ..., $T_к$, имеющих показательное распределение с параметром λ:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i \ .$$

Закон распределения случайной величины T называется законом Эрланга n-го порядка и имеет плотность

$$f_n(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)} e^{-\lambda t} \ \ (при\ t>0).$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины T соответственно равны:

$$m_t = n/\lambda \ ; \ D_t = n/\lambda^2 \ ; \ \sigma_t = \sqrt{n/\lambda} \ .$$

Для потоков Эрланга n-го порядка вероятность поступления k требований за промежуток времени t равняется

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{l=(n+1)(k-1)}^{(n+1)(k+1)} \frac{(\lambda t)^l}{l!} \left(1 - \left| \frac{l}{n+1} - k \right| \right),$$

для k>0. При k=0 $P_0(t) = e^{-\lambda t} \sum_{l=0}^{n+1} \frac{(\lambda t)^l}{l!} \left(1 - \frac{l}{n+1}\right)$.

Суммирование и разъединение простейших потоков. При объединении нескольких независимых простейших потоков образуется также простейший поток с параметром, равным сумме параметров исходных

потоков. При разъединении поступающего простейшего потока с параметром λ на *n* направлений так, что каждое требование исходного потока с вероятностью p_i $(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1)$ поступает на *i-е* направление, поток i-го направления также будет простейшим с параметром λp_i. Эти свойства простейшего потока широко используются на практике, поскольку значительно упрощают расчеты стационарного оборудования и информационных сетей.

Показательный закон распределения времени обслуживания. Временем обслуживания называется время, затрачиваемое каждым узлом обслуживания на одно требование.

Время обслуживания характеризует пропускную способность каждого узла обслуживания, не связано с оценкой качества обслуживания и является случайной величиной.

Это объясняется неидентичностью узлов обслуживания и различием в спросе на обслуживание отдельных требований. Например, поступающие на ремонт вагоны имеют не исправности самого различного характера, попадают в различные ремонтные бригады, поэтому время на обслуживание для различных вагонов не будет одинаковым.

Во многих задачах теории массового обслуживания закон распределения времени обслуживания предполагается показательным и описывается выражением

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}.$$

Параметр μ характеризует среднюю скорость обслуживания требований.

Варианты заданий 4-5

№ варианта				
	№ задачи	№ задачи	Число каналов	Число каналов
1	9	7	5	7
2	1	16	2	6
3	3	10	3	5
4	5	17	4	4
5	4	30	5	3
6	6	9	6	2
7	7	29	4	1
8	8	1	3	4
9	9	16	2	3
10	11	27	7	5
11	10	3	5	6
12	12	31	4	7
13	27	8	2	4
14	30	26	5	3
15	13	33	2	5
16	26	4	4	2
17	28	11	5	4
18	29	7	6	1
19	14	15	3	7
20	24	18	1	4
21	12	5	2	2
22	15	14	3	4
23	18	28	4	5
24	25	12	6	2
25	16	22	7	1
26	30	34	3	5
27	8	13	1	7
28	23	39	2	3
29	17	23	3	5
30	24	19	4	6
31	17	38	5	7
32	25	35	4	2
33	5	24	2	4
34	21	37	1	5
35	9	21	6	6
36	22	36	4	4
37	18	25	3	1
38	20	32	6	3

ЗАДАНИЕ

1. Дан пуассоновский поток с параметром 2 мин$^{-1}$. Найти вероятность того, что длина интервала между соседними требованиями составляет от 1 до 2 минут.

2. Производится наложение («суперпозиция») двух простейших потоков с интенсивностями λ_1 и λ_2. Будет ли поток, получившийся в результате наложения, простейшим, и если да, то с какой интенсивностью?

3. Производится случайное прореживание простейшего потока событий с интенсивностью λ; каждое событие, независимо от других, с вероятностью p сохраняется в потоке, а с вероятностью l-p выбрасывается. Каким будет поток, получающийся в результате прореживания простейшего потока?

4. Поток машин, идущих по шоссе в одном направлении, представляет собой простейший поток с интенсивностью 2 машины в минуту. Человек выходит на шоссе, чтобы остановить первую попавшуюся машину, идущую в данном направлении. Найти закон распределения времени T, в течение которого ему придется ждать машину; определить математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

5. Поток машин, идущих по шоссе в одном направлении, представляет собой простейший поток с интенсивностью 4 машины в минуту. Шоссе имеет развилку в два направления. Вероятность движения машин в первом направлении равна 0,12, а во втором - 0,88. Определить интенсивности движения автомобилей в обоих направлениях.

6. Рассмотрим простейший поток с нестационарным параметром, изменяющимся по закону . $\lambda(t) = 1 + 0{,}5\cos(6\pi t)$. Параметр является периодическим, его период равен 1/3. Найти вероятность отсутствия требований на отрезке [1;9].

7. Компьютерный класс связан с каналом Интернет через 10-канальный концентратор. Интенсивности передачи данных по каждому из 10 каналов равны соответственно 540 бит/с, 120 бит/с, 40 бит/с, 170 бит/с, 350 бит/с, 60 бит/с, 742 бит/с, 153 бит/с, 500 бит/с, 100 бит/с. Поток данных подчиняется

пуассоновскому закону распределения. Определить интенсивность передачи данных в канале Интернет.

8. Рассмотрим простейший поток с нестационарным параметром, изменяющимся по закону M(t) = 1 + 0,5 sin(6^t) . Параметр является периодическим, его период равен 1/4. Найти вероятность поступления одного, двух и трех требований.

9. Для простейшего потока с нестационарным параметром, определяемым равенством $\lambda(t) = 3 + 2^{-t}$, найти вероятность поступления двух требований на промежутке времени [3;8].

10. По железной дороге мимо наблюдателя движется в одном направлении простейший поток поездов. Известно, что вероятность отсутствия поездов в течение 10 минут равна 0,8. Требуется найти вероятность того, что за 20 мин мимо наблюдателя пройдет не более трех поездов.

11. Производится случайное прореживание простейшего потока событий с интенсивностью $\lambda = 4$; каждое событие, независимо от других, с вероятностью $p=0,6$ сохраняется в потоке, а с вероятностью $1-p$ выбрасывается. Каким будет поток, получающийся в результате прореживания простейшего потока?

12. Рассмотрим простейший поток с нестационарным параметром, изменяющимся по закону $\lambda(t) = 2 + 0,5 \sin(4\pi t)$. Параметр является периодическим, его период равен 1/3. Найти вероятность отсутствия требований на отрезке [1;5].

13. Дан пуассоновский поток с параметром 1 мин $^{-1}$. Найти вероятность того, что длина интервала между соседними требованиями составляет от 2 до 4 минут.

14. Поток машин, идущих по шоссе в одном направлении, представляет собой простейший поток с интенсивностью 8 машин в минуту. Шоссе имеет развилку в три направления. Вероятность движения машин в первом направлении равна 0,12, во втором - 0,68, в третьем - 20. Определить

интенсивности движения автомобилей во всех направлениях.

15. Поток машин, идущих по шоссе в одном направлении, представляет собой простейший поток с интенсивностью 6 машин в минуту. Человек выходит на шоссе, чтобы остановить первую попавшуюся машину, идущую в данном направлении. Найти закон распределения времени *T,* которое ему придется ждать; определить его математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение.

16. Для простейшего потока с нестационарным параметром, определяемым равенством $\lambda(t) = 7 - 5^{-t}$, найти вероятность поступления двух требований на промежутке времени [1;10].

17. В пункт текущего отделочного ремонта вагонов поступают требования на ремонт. Поток требований можно считать простейшим с интенсивностью $\lambda = 0{,}307$. Найти вероятность того, что за час не поступит ни одного требования (вагона) на ремонт.

18. Время обслуживания для аппаратов некоторой системы массового обслуживания распределено по показательному закону $F(t) = 1 - e^{-1,5t}$, где t - время в минутах. Найти вероятность того, что обслуживание продлится не более 15 мин.

19. Для простейшего потока с нестационарным параметром, определяемым равенством $\lambda(t) = 3 + 2^{-2t}$, найти вероятность поступления двух требований на промежутке времени [2;6].

20. В пункт текущего отделочного ремонта вагонов поступает требование на ремонт. Поток требований можно считать простейшим с интенсивностью $A = 0{,}517$. Найти вероятность того, что за час поступит одного требование (вагон) на ремонт.

21. Время обслуживания для аппаратов некоторой системы массового обслуживания распределено по показательному закону $F(t) = 1 - e{\sim}^{0,5t}$, где t - время в минутах. Найти вероятность того, что обслуживание продлится не более 5 мин.

22. Производится случайное прореживание простейшего потока

событий с интенсивностью λ = 0,7; каждое событие, независимо от других, с вероятностью $p=0,75$ сохраняется в потоке, а с вероятностью $1-p$ выбрасывается. Каким будет поток, получающийся в результате прореживания простейшего потока?

23. Производится разбиение случайного простейшего потока событий с интенсивностью A = 4,9 на три потока. Вероятности попадания событий в тот или иной поток соответственно равны $p_1=0,2$, $p_2=0,54$, $p_3=0,26$. Определить интенсивности каждого получившегося потока в результате разбиения.

24. Время обслуживания для аппаратов некоторой системы массового обслуживания распределено по показательному закону $F(t) = 4 - e^{-1,6t}$, где t - время в минутах. Найти вероятность того, что обслуживание продлится не более 8 мин.

25. В пункт текущего отделочного ремонта вагонов поступают требования на ремонт. Поток требований можно считать простейшим с интенсивностью A = 0,617 . Найти вероятность того, что за час поступит одно требование (вагон) на ремонт.

26. Производится разбиение случайного простейшего потока событий с интенсивностью λ = 1,6 на 2 потока. Вероятности попадания событий в тот или иной поток соответственно равны $p_1=0,44$, $p_2=0,56$. Определить интенсивности каждого получившегося в результате разбиения потока.

27. Компьютерный класс связан с каналом Интернет через 5-канальный концентратор. Интенсивности передачи данных по каждому из 10 каналов равны соответственно 541 бит/с, 110 бит/с, 44 бит/с, 171 бит/с, 356 бит/с. Поток данных подчинятся пуассоновскому закону распределения. Определить интенсивность передачи данных в канале Интернет.

28. Рассмотрим простейший поток с нестационарным параметром, изменяющимся по закону $\lambda(t) = 2 + 0,5\sin(4\pi t)$. Параметр является периодическим, его период равен 1/3. Найти вероятность отсутствия требований на отрезке [4;9].

29. На вокзал прибывает пуассоновский поток поездов, в среднем 2

поезда за 5 минут. Найти вероятность того, что за 15 минут прибудут 3 поезда.

30. Время обслуживания для аппаратов некоторой системы массового обслуживания распределено по показательному закону $F(t) = 1 - e^{-4,5t}$, где t - время в минутах. Найти вероятность того, что обслуживание продлится не более 20 мин.

1.3. Исследование характеристик систем массового обслуживания

Классификация систем массового обслуживания. Большинство задач на железнодорожном транспорте связано с системами массового обслуживания.

Системы, в которых, с одной стороны, возникают массовые запросы (требования) на выполнение каких-либо видов услуг, а, с другой стороны, происходит удовлетворение этих запросов, называются системами массового обслуживания.

Система массового обслуживания включает следующие элементы: источник требований, входящий поток требований, очередь, обслуживающее устройство (обслуживающий аппарат, канал обслуживания), выходящий поток требований.

Системы массового обслуживания классифицируют по разным признакам. Одним из признаков является ожидание требования начала обслуживания. В соответствии с этим признаком системы подразделяются на следующие виды:

1) системы массового обслуживания с потерями (отказами);

2) системы массового обслуживания с ожиданием;

3) системы массового обслуживания с ограниченной длиной очереди;

4) системы массового обслуживания с ограниченным временем ожидания.

Системы массового обслуживания, у которых требования, поступающие в момент,

когда все приборы обслуживания заняты, получают отказ и теряются,

называются системами с потерями или отказами.

Системы массового обслуживания, у которых возможно появление как угодно длинной очереди требований к обслуживающему устройству, называются системами с ожиданием.

Системы массового обслуживания, допускающие очередь, но с ограниченным числом мест в ней, называются системами с ограниченной длиной очереди.

Системы массового обслуживания, допускающие очередь, но с ограниченным сроком пребывания каждого требования в ней, называются системами с ограниченным временем ожидания.

По числу каналов обслуживания СМО делятся на одноканальные и многоканальные.

По месту нахождения источника требований СМО делятся на разомкнутые, когда источник находится вне системы, и замкнутые, когда источник находится в самой системе. К последнему виду относится, например, станочный участок, в котором станки являются источником неисправностей, а следовательно, и требований на их обслуживание.

Одной из форм классификации систем массового обслуживания является кодовая (символьная) классификация Д. Кендалла. При этой классификации характеристику системы записывают в виде трех, четырех или пяти символов, например A | B | S, где A — тип распределения входящего потока требований, B — тип распределения времени обслуживания, S — число каналов обслуживания.

Для экспоненциального распределения принимают символ M, для любого (произвольного) распределения - символ G. Запись M | M | 3 означает, что входящий поток требований пуассоновский (простейший), время обслуживания распределено по экспоненциальному закону, в системе имеется три канала обслуживания.

Четвертый символ указывает допустимую длину очереди, а пятый — порядок отбора (приоритета) требований.

Уравнение Колмогорова для вероятностей состояний. Системы, представляемые в виде непрерывной цепи Маркова, обычно исследуют с помощью уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.

Плотностью вероятности перехода λ_{ij} из состояния *Si* в состоянии *Sj* называется предел отношения вероятности этого перехода за время Δt к длине промежутка Δt, когда последний стремится к нулю:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t},$$

где P_{ij} ($\triangle$t) - вероятность того, что система, находившаяся в момент *t* в состоянии S_i, за время $\triangle$t перейдет в состояние *Sj*.

Марковская непрерывная цепь называется однородной, если плотность вероятностей λ_{ij} не зависит от времени *t*, в противном случае она называется неоднородной.

Для однородных Марковских непрерывных цепей, характеризующих процессы гибели и размножения, уравнения Колмогорова имеют вид:

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{dP_i}{dt} = -\lambda_{i-1,i}P_{i-1}(t) - (\lambda_{i,i-1} + \lambda_{i,i+1})P_i(t) + \lambda_{i+1,i}P_{i+1}(t),$$

$$(i = 1,2,\dots,n),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

где P_i (t) - вероятность состояния *Si*, когда в системе находится *i* требований в момент времени *t*; n +1- общее число возможных состояний $So, Si, \dots, S_n$.

При гипотезе о стационарном режиме работы системы (вероятности состояний не зависят от времени) уравнения Колмогорова принимают вид:

$$-\lambda_{01}P_0 + \lambda_{10}P_1 = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\lambda_{i-1,i}P_{i-1} - (\lambda_{i,i+1} + \lambda_{i,i+1})P_i + \lambda_{i+1,i}P_{i+1} = 0,$$

$$(i = 1,2,\dots,n).$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

В большинстве практических задач оказывается допустимой гипотеза о стационарном режиме работы системы. Поэтому могут быть использованы уравнения Колмогорова второго вида.

Математические модели систем массового обслуживания, приводимые ниже, соответствуют уравнениям Колмогорова для стационарного режима работы системы при условиях простейшего потока входящих требований и экспоненциального закона распределения времени обслуживания.

Системы массового обслуживания с отказами. СМО с отказами является такая система, в которой приходящие для обслуживания требования, в случае занятости всех каналов обслуживания, сразу ее покидают.

Вероятности состояний системы определяются из выражения

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0,$$

где $k = 1,2\ldots,N$, N – общее число каналов; $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ – нагрузка; λ - интенсивность входящего потока требований, μ - интенсивность (производительность) одного канала (прибора) обслуживания, а вероятность отсутствия требований P_0 определяется из выражения

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{N} \frac{\rho^i}{i!} \right]^{-1}.$$

К основным характеристикам качества обслуживания рассматриваемой СМО относятся:

Вероятность отказа

$$P_{отк} = P_N = \frac{\rho^N / N!}{\sum_{i=0}^{N} \rho^i / i!}.$$

Среднее число занятых узлов обслуживания $M_{зан} = p(1 - P_N)$.

Среднее число свободных узлов обслуживания $M_{св} = N - M_{зан}$.

В системах с отказами события отказа и обслуживания составляют

полную группу событий, отсюда $P_{отк} + P_{обс} = 1$.

Относительная пропускная способность определяется по формуле

$$Q = P_{обс} = 1 - P_{отк} = 1 - P_N .$$

Абсолютная пропускная способность СМО с отказами равняется

$$A = \lambda P_{обс} .$$

Коэффициент занятости узлов обслуживания определяется отношением средним числом занятых каналов к общему числу каналов

$$K_з = \frac{M_{зан}}{N} .$$

Пример. В вычислительный центр коллективного пользования с тремя ЭВМ поступают заказы от предприятий на вычислительные работы. Если работают все три ЭВМ, то вновь поступающий заказ не принимается, и предприятие вынуждено обратиться в другой вычислительный центр. Пусть среднее время работы с одним заказом составляет 3 часа. Интенсивность потока заявок 0,25 ч$^{-1}$. Найти вероятность отказа и среднее число занятых ЭВМ.

Имеем: m=3, λ=0,25 ч$^{-1}$, $t_{обс}$=3 ч. Находим:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{обс} = 3 \cdot 0{,}25 = 0{,}75 ,$$

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{3} \frac{\rho^i}{i!} \right]^{-1} = \left[1 + 0{,}75 + \frac{0{,}75^2}{2!} + \frac{0{,}75^3}{3!} \right]^{-1} = [2{,}1]^{-1} ,$$

$$P_{отк} = \frac{\rho^N}{N!} P_0 = \frac{0{,}75^3}{3!} \cdot \frac{1}{2{,}1} = 0{,}033 ,$$

$$M_{зан} = \rho(1 - P_N) = 0{,}75(1 - 0{,}033) = 0{,}72525 .$$

Таким образом, $P_{отк}$ = 0,033; $M_{зан}$ = 0,72525 ЭВМ.

Система массового обслуживания с ограниченной длиной очереди. СМО с ограниченной длиной очереди является такая система, в которой требование, поступающее на обслуживание, покидает систему, если заняты все каналы обслуживания, и в накопителе заняты все места.

Вероятности состояний $S_0, S1, ..., S_N$ находят по формуле

$$P_k = \frac{\rho^k}{k!} P_0 \text{, где } (k = 1,2,\ldots,\mathrm{N}).$$

Вероятности состояний $S_{N+1}, S_{N+2}, \ldots, S_{N+l}$ определяют с помощью формулы

$$P_k = \frac{\rho^k}{N^{k-N} N!} P_0 \text{, где } (k = N+1,\ldots,N+l),$$

l – максимальная длина очереди

Вероятность $P0$ подсчитывают по формуле $P_0 = \left[\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \sum_{k=N+1}^{N+l} \frac{\rho^i}{N^{k-N} N!} \right]^{-1}.$

В большинстве практических задач должно соблюдаться отношение $\frac{\rho}{N} < 1$, тогда выражение для P_0 можно переписать в следующем виде

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N \cdot N!} \frac{1 - (\frac{\rho}{N})^l}{1 - \frac{\rho}{N}} \right]^{-1}.$$

Вероятность отказа в обслуживании определяется из выражения

$$P_{отк} = P_{N+l} = \frac{\rho^N}{N!} \left(\frac{\rho}{N} \right)^l P_0.$$

Среднее число каналов, занятых в обслуживании, и коэффициент занятости определяются:

$$M_{зан} = \sum_{k=1}^{N} k P_k + N \sum_{i=1}^{l} P_{N+i}; \quad K_з = \frac{M_{зан}}{N}.$$

Среднее число свободных аппаратов и коэффициент простоя определяются:

$$M_0 = N - M_{зан}; \quad K_0 = \frac{M_0}{N}.$$

Средняя длина очереди определяется с помощью выражения:

$$M_{оч} = \sum_{k=1}^{l} k P_{N+k} = \frac{\rho^N}{N!} P_0 \sum_{k=1}^{l} k \left(\frac{\rho}{N} \right)^k.$$

Пример. На автозаправочной станции установлены три колонки для выдачи бензина. Около станции находится площадка на три машины для их ожидания в очереди. На станцию прибывает в среднем две машины в минуту. Среднее время заправки одной машины 1мин. Требуется определить вероятность отказа и среднюю длину очереди.

Имеем: $N=3$, $l=3$, $\lambda=2мин^{-1}$, $\overline{T}_{обс}=1мин$, $\mu=1/\overline{T_{обс}}=1мин^{-1}$. Находим: $\rho=\lambda/\mu=2/1=2$, $\rho/N=2/3$, тогда

$$P_0=\left[\sum_{k=0}^{N}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{p^{N+1}}{N\cdot N!}\frac{1-(\rho/N)^l}{1-\rho/N}\right]^{-1}=\left[1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\frac{2^4}{3\cdot 3!}\cdot\frac{1-(2/3)^3}{1-2/3}\right]^{-1}\approx 0{,}122,$$

$$P_{отк}=P_{N+l}=\frac{\rho^{N+l}}{N^l\cdot N!}P_0=(\frac{\rho}{N})^l\frac{p^N}{N!}P_0=(2/3)^3\frac{2^3}{3!}\cdot 0{,}122=0{,}048,$$

$$M_{ож}=\frac{P_0\rho^N}{N!}\sum_{i=1}^{l}i(\frac{\rho}{N})^i=\frac{0{,}122\cdot 2^3}{3!}\left[2/3+2(2/3)^2+3\cdot(2/3)^3\right]=0{,}35.$$

Таким образом, $P_{отк}=0{,}048$, $M_{ож}=0{,}35$ машины.

Системы массового обслуживания с ожиданием. СМО с ожиданием аналогична системе массового обслуживания с ограниченной длиной очереди при условии, что граница очереди отодвигается в бесконечность. Вероятность состояний СМО с ожиданием находят по формулам:

$$P_k=\frac{\rho^k}{k!}P_o,\ \text{для}\quad (k=1,2,\ldots,N),$$

$$P_k=\frac{\rho^k}{N!N^{k-N}}P_o,\ \text{для}\quad (k=N+1,\ldots,N+k,\ldots,N+\infty).$$

При $\rho/N>1$ наблюдается явление «взрыва» - неограниченный рост средней

длины очереди, поэтому для определения P_0 должно выполняться ограничивающее условие $\rho/N<1$, и с учетом его запишем выражение:

$$P_o=\left[\sum_{k=0}^{N}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)}\right]^{-1}.$$

К основным характеристикам качества обслуживания СМО с ожиданием относят:

Вероятность наличия очереди *Роч*, т.е. вероятность того, что число требований в системе больше числа узлов:

$$P_{оч}=\frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)}P_0.$$

Вероятность занятости всех узлов системы $P_{зан}$:

$$P_{зан}=\frac{\rho^N}{(N-1)!(N-\rho)}P_0.$$

Среднее число требований в системе M_{TP}:

$$M_{TP}=P_0\left(\rho\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^{N+1}(N+1-\rho)}{(N-1)!(N-\rho)^2}\right).$$

Средняя длина очереди $M_{оч}$:

$$M_{оч} = \frac{\rho^{N+1} P_0}{(N-1)!(N-\rho)^2}.$$

Среднее число свободных каналов обслуживания $M_{св}$:

$$M_{св} = P_0 \sum_{k=1}^{N} k \frac{\rho^k}{(N-k)!}.$$

Среднее число занятых каналов обслуживания $M_{зан}$:

$$M_{зан} = N - M_{св}.$$

Коэффициент простоя K_0 и коэффициент загрузки K_3 каналов обслуживания системы:

$$K_0 = \frac{M_{св}}{N};\ K_з = \frac{M_{зан}}{N}.$$

Среднее время ожидания начала обслуживания $T_{ож}$ для требования, поступившего в систему:

$$T_{ож} = \frac{\rho^N}{\mu(N-1)!(N-\rho)^2} P_0.$$

Общее время, которое проводят в очереди все требования, поступившие в систему за единицу времени $T_{оож}$:

$$T_{оож} = \frac{\rho^{N+1}}{(N-1)!(N-\rho)^2} P_0.$$

Среднее время $T_{тр}$, которое требование проводит в системе обслуживания:

$$T_{тр} = T_{ож} + \mu^{-1}.$$

Суммарное время, которое в среднем проводят в системе все требования, поступившие за единицу времени $T_{стр}$:

$$T_{стр} = T_{оож} + \rho.$$

Пример. В порту имеется два причала для разгрузки грузовых судов. Интенсив-

ность потока судов равна 0,8 судов в сутки. Среднее время разгрузки одного судна составляет 2 сут. Предполагается, что очередь ожидающих разгрузки судов может быть неограниченной длины.

Найти среднее время пребывания судна в порту.

Имеем: $m=2$, $\lambda=0,8\ сут^{-1}$, $\mu = 1/\overline{T_{обс}} = 0,5 сут^{-1}$, $p = \lambda/\mu = 0,8/0,5 = 1,6$.

Находим:

$$P_o = \left[\sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{N+1}}{N!(N-\rho)}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{1,6}{1!} + \frac{1,6^2}{2!} + \frac{1,6^3}{2!(2-1,6)}\right]^{-1} = 0,11;$$

$$M_{ож} = \frac{P_0 \rho^{m+1}}{m \cdot m!} \cdot \frac{1}{(1-\rho/m)^2} = \frac{0,11 \cdot 1,6^3}{2 \cdot 2 \cdot (1-0,8)^2} = 2,8;$$

$$\overline{T_{ож}} = M_{ож} / \lambda = 3,5.$$

Итак, $\overline{T}_{ож} = 3,5$ сут.

Система массового обслуживания с ограниченным временем ожидания. В системах массового обслуживания с ограниченным временем ожидания время ож $\overline{t_{ож}}$ ия в очереди каждого требования ограничено случайной величиной $t_{ож}$, среднее значение которого

Величина, обратная среднему времени ожидания, означает среднее количество требований, покидающ $\overline{t_{ож}}$ чередь в единицу времени, вызванное появлением в очереди одного требования: $v = 1/$.

При наличии в очереди k требований интенсивность потока покидающих очередь требований составляет kv.

Для дальнейшего рассмотрения СМО с ограниченным временем ожидания введем новый параметр означающий среднее число требований, покидающих систему необслуженными, приходящиеся на среднюю скорость обслуживания требований.

Формулы для определения вероятностей состояний такой системы имеют вид:

$$P_k = \frac{\rho_k}{k!} P_0, \text{ при } k = 1,2,\ldots,N;$$

$$P_k = \frac{\rho^N}{N!} \cdot \frac{\lambda^l}{\prod_{i=1}^{l}(N+i\beta)} l\beta = \frac{\nu}{\mu}, = N+1,\ldots,N+l,\ldots,$$

где $\prod_{i=1}^{l}(N+i\beta)$ - произведение сомножителей $N+i\beta$.

Вероятность P_0 определяют по формуле

$$P_0 = \left[\sum_{k=1}^{N} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^N}{N!} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\lambda^l}{\prod_{i=1}^{l}(N+i\beta)} \right]^{-1}.$$

В практических задачах сумму бесконечного ряда вычислить достаточно просто, так как члены ряда быстро убывают с увеличением номера.

Средняя длина очереди:

$$M_{оч} = \frac{\rho^N}{N!} P_0 \sum_{l=1}^{\infty} l \frac{\lambda^l}{\prod_{i=1}^{l} (N + i\beta)}.$$

Вероятность отказа:

$$P_{отк} = \frac{\beta}{\rho} M_{оч}.$$

Среднее число занятых каналов обслуживания и коэффициент загрузки:

$$M_{зан} = \sum_{k}^{N} kP_k + N \sum_{l=1}^{\infty} P_{N+l};$$

$$K_з = \frac{M_{зан}}{N}.$$

Среднее число свободных каналов обслуживания и коэффициент простоя:

$$M_{св} = N - M_{зан}; \; K_0 = \frac{M_{зан}}{N}.$$

Относительная пропускная способность:

$$Q = 1 - P_{отк}.$$

Пример. В пункте химчистки имеется три аппарата для чистки. Интенсивность потока посетителей λ=6 посетителей в час. Интенсивность обслуживания посетителей одним аппаратом μ=3 посетителей в час. Среднее количество посетителей, покидающих очередь, не дождавшись обслуживания, ν=1 посетитель в час. Найти абсолютную пропускную способность пункта.

Имеем: $m=3$, $\lambda=6$, $\mu=3$, $\nu=1$. Находим: $p = \lambda / \mu = 6 / 3 = 2$,

$$P_0 = \left[1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^3}{3!} \times \left(\frac{6}{3 \cdot 3 + 1} + \frac{6^2}{(3 \cdot 3 + 2 \cdot 1)}\right)\right]^{-1} = 0{,}13.$$

Вероятность занятости всех приборов равна $P_{зан} = 1 - P_0 = 0{,}87$. Тогда абсолютная пропускная способность может быть получена как произведение:

$\boldsymbol{A = NP_{зан}} = 3 \bullet 0{,}87 = 2{,}61$. Таким образом, $A = 2{,}61$ посетителя в час.

Замкнутые системы массового обслуживания. В замкнутых системах массового обслуживания источник требований находится внутри системы, и интенсивность потока требований зависит от состояния самой системы.

Чаще всего потоком требований в такой системе является поток неисправностей от некоторой группы работающих устройств. Пусть имеется m работающих устройств, которые могут выходить из строя за счет неисправностей. Имеется также N приборов (каналов) обслуживания этих требований. В качестве таких каналов могут выступать и люди. Обычно предполагают, что $N < m$.

Обозначим через S_0 состояние, при котором все устройства работают, а приборы обслуживания не заняты; S_1 - состояние, при котором одно устройство вышло из строя и обслуживается одним прибором обслуживания; S_N — N устройств не работают и все приборы заняты обслуживанием; S_m - все устройства не работают, из них N обслуживаются и m - N и ждут обслуживания.

$$P_k = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(m-j)}{k!}\rho^k P_0 \quad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

$$P_k = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(m-j)}{N!N^{k-N}}\rho^k P_0 \quad (k = N+1, N+2, \ldots, m),$$

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{N}\frac{\prod_{j=0}^{k-1}(m-j)}{k!}\rho^k + \sum_{k=N+1}^{m}\frac{\prod_{j=0}^{k-1}(m-j)}{N!N^{k-N}}\rho^k\right]^{-1}.$$

Вероятности состояний замкнутой системы определяются следующими зависимостями:

Средняя длина очереди:

$$M_{оч} = \sum_{k=N+1}^{m}\frac{(k-N)m!}{N^{k-N}N!(m-k)!}\rho^k P_0 .$$

Коэффициент простоя требований в СМО:

$$K_{пр} = \frac{M_{оч}}{m}.$$

Среднее число требований в СМО:

$$M = \left(\sum_{k=1}^{N} k C_m^k \rho^k + \sum_{k=N+1}^{m} k \frac{m!}{N^{k-N} N!(m-k)!} \rho^k \right) P_0,$$

где C_m^k - коэффициент бинома Ньютона.

Среднее число свободных каналов и коэффициент простоя каналов K_0 :

$$M_{св} = \sum_{k=0}^{N} (N-k) C_m^k \rho^k P_0 \; ; \; K_0 = \frac{M_{св}}{N}.$$

Вероятность занятости каналов обслуживания:

$$P_з = 1 - P_0.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$A = \mu P_з.$$

Пример. Рабочий обслуживает группу из трех станков. Каждый станок останавливается в среднем два раза в час. Процесс наладки занимает в среднем 10 мин. Определить абсолютную пропускную способность наладки рабочим станков.

Имеем: n=1, m=3, λ=2, $Тобс$=1/6, μ=6. Находим: ρ = λ /μ = 1/ 3 ,

$$P_0 = \left[1 + m\rho + \frac{m(m-1)}{1!1^1} \rho^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1!1^2} \rho^3 \right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 2 \cdot (1/3)^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1/3)^3 \right]^{-1} = 0{,}346.$$

Определяем вероятность того, что рабочий будет занят обслуживанием:

$$P_з = 1 - P_0 = 1 - 0{,}346 = 0{,}654.$$

Если рабочий занят обслуживанием, то он обслуживает 6 станков в час. Следовательно, абсолютная способность находится как произведение:

$$A = \mu P_з = 6 \cdot 0{,}654 = 4.$$

Таким образом, A=4 станка в час.

Задание 6.

1. В справочной службе вокзала железной дороги стоит телефон с

пятью каналами. Приходящий вызов получает отказ тогда, когда все каналы заняты. Пусть среднее время занятости одного канала составляет 1 минуту. Интенсивность поступающих вызовов составляет 0,1 мин$^{-1}$. Требуется найти вероятность отказа и относительную пропускную способность.

2. На железнодорожной станции находятся три кассы для продажи билетов на поезда дальнего следования. Когда все кассы заняты, пассажиры встают в очередь. Длина очереди не может превышать 50 человек. Среднее время обслуживания в одной кассе составляет 5 минут. Пассажиры прибывают на станцию для покупки билетов в среднем по два человека в минуту. Найти вероятность отказа и общее количество человек (требований), находящихся в системе.

3. Для условия задачи 1 найти вероятность обслуживания вызова, а также вероятность поступления одного вызова.

4. На железнодорожной станции имеется пять путей для обслуживания прибывающих железнодорожных составов. Интенсивность прибытия железнодорожных составов равна 15 составов в час. Среднее время обслуживания одного состава 20 минут. Предполагается, что очередь ожидающих обслуживания поездов может быть неограниченной длины. Найти вероятность занятости всех пяти путей железнодорожной станции и среднее время обслуживания состава.

5. Программист обслуживает вычислительный центр из 50 вычислительных машин (ВМ). В среднем ВМ дает сбой 0,05 час$^{-1}$. Процесс наладки занимает в среднем 45 минут. Требуется определить абсолютную пропускную способность наладки ВМ программистом.

6. В локомотивном депо обслуживается 100000 железнодорожных вагонов. Каждый вагон в среднем подлежит ремонту один раз в два года. На ремонт вагона затрачивается в среднем 5 дней. Найти вероятность того, что депо занято обслуживанием вагонов.

7. Сервис-центр занимается посреднической деятельностью по продаже железнодорожных билетов и осуществляет часть своей деятельности по 3

телефонным линиям. В среднем в сервис-центр поступает 75 звонков в час. Среднее время обслуживания каждого звонка составляет 2 минуты. Определить вероятность того, что ни один канал не занят, а также вероятность отказ.

8. Преподаватель производит прием экзамена у группы студентов из 23 человек, пришедших в течение одной минуты. Время приема экзамена у одного студента в среднем составляет 20 мин. Студенты, ждущие приема экзамена, находятся в очереди. Определить среднее время ожидания студентом приема экзамена.

9. Для условия задачи 7 определить вероятность занятости одного и двух каналов телефонной линии.

10. В вагоне-ресторане интенсивность обслуживания клиентов в среднем составляет 20 человек в час. Обслуживанием клиентов занимаются два официанта, при этом среднее время обслуживания одного клиента составляет 10 минут. Среднее количество клиентов, покинувших очередь, не дождавшихся обслуживания, составляет 2 человека в час. Определить абсолютную пропускную способность вагона-ресторана.

11. Для условия задачи 7 определить абсолютную пропускную способность сервисного центра.

12. В читальный зал государственной библиотеки, которая имеет 30 посадочных мест, приходят посетители с интенсивностью 20 человек в час. Время пребывания каждого посетителя в среднем составляет 2 часа. Определить вероятность отказа посетителю в читальном зале и среднее число занятых посадочных мест.

13. Абонентский отдел библиотеки обслуживают 3 библиотекаря. Время обслуживания одним библиотекарем читателя в среднем составляет 5 минут. Интенсивность посещения читателями библиотеки составляет 4 человека в минуту. Если в момент прихода читателя все библиотекари заняты, то он встает в очередь. Требуется определить среднее число читателей, ожидающих начала обслуживания и время их пребывания в

очереди.

14. Поток заданий в 4-процессорном компьютере является простейшим с интенсивностью 1000 заданий в минуту. Среднее время обработки задания каждым процессором составляет 3 секунды. Если при поступлении задания все процессоры заняты, то задание помещается в очередь (очередь не ограничена). Требуется определить среднюю длину очереди и среднее число занятых процессоров.

15. В компьютерном классе установлен один принтер, скорость печати которого в среднем составляет 2 страницы в минуту. Печать начинается сразу после поступления файла на порт принтера. Среднее время между поступлениями файлов на принтер составляет 1 минуту. Если в момент поступления файла на печать принтер занят, то задания выстраиваются в неограниченную очередь. Требуется определить среднюю длину очереди и общее время пребывания файлов в очереди, если каждый файл в среднем содержит по 5 страниц.

16. На базу данных (БД) сервера железной дороги поступает 10 запросов в секунду. Среднее время обработки каждого запроса составляет 1 секунду. Запрос, поступивший в момент обработки предыдущего запроса, становится в очередь. Определить вероятность наличия очереди и суммарное время, которое проведут запросы до обслуживания.

17. На железнодорожной станции расположена гостиница, в которой имеется 20 мест. Посетитель в случае занятости мест уходит в другую гостиницу. Среднее время снятия гостиницы клиентом составляет 8 часов. Интенсивность потока поступления клиентов составляет 5 человек в час. Определить вероятность отказа и абсолютную пропускную способность данной гостиницы.

18. На телефонной станции железной дороги имеются три линии. Вызов, поступивший, когда все линии заняты, получает отказ. Поток вызовов является пуассоновским с интенсивностью 0,5 вызовов в минуту. Время обслуживания распределено по экспоненциальному закону и в среднем

продолжительность разговора составляет 3 минуты. Найти вероятность отказа, относительную и абсолютную пропускные способности и долю свободного времени, приходящегося в среднем на каждую линию.

19. Четырехканальный концентратор имеет буфер емкостью 10 Мб. Пакеты данных поступают на концентратор с интенсивностью 51 пакетов в секунду. Пакеты, поступившие в момент, когда заняты все каналы, выстраиваются в очередь в буфере обмена, если он занят - получают отказ. Средняя скорость одного канала 256 Кб в секунду. Определить абсолютную пропускную способность канала концентратора при среднем размере пакета 2 Кб.

20. Два рабочих обслуживают группу из четырех станков. Остановка рабочего станка происходит в среднем через 30 минут. Время работы и время наладки распределено по экспоненциальному закону. Найти среднюю долю свободного времени для каждого рабочего и среднее время работы станка.

21. Для условия задачи 19 определить вероятность отказа передачи пакета и среднее число свободных каналов концентратора, если средний размер сообщения составляет 5 Кб.

22. Рассмотрим две рядом стоящие телефонные кабины, общая очередь перед которыми не бывает более трех человек («лишние» уходят к другим кабинам). Поток людей, желающих позвонить по телефону, является простейшим и имеет интенсивность 15 человек в час. Время, проводимое людьми в кабине, распределено по экспоненциальному закону и составляет в среднем 3 минуты. Найти среднюю долю времени, когда свободна одна кабина; вероятность того, что человеку придется искать другую кабину.

23. Для условия задачи 20 найти заданные характеристики системы, в которой два рабочих всегда обслуживают станок вместе, причем с двойной интенсивностью.

24. В буфете железнодорожной станции обслуживают клиентов два продавца. Интенсивность обслуживания одним продавцом составляет 0,5 человека в минуту. Посетители приходят в буфет со средним интервалом в 1

минуту. Если в момент прихода клиента все продавцы заняты, клиент встает в очередь, которая не может превышать 5 человек. Посетитель, не попавший в очередь, уходит в другой буфет. Определить вероятность отказа посетителю в обслуживании и среднее время ожидания в очереди.

25. Железнодорожный пропускной таможенный пункт состоит из трех линий досмотра. Время досмотра одного железнодорожного состава на линии досмотра в среднем составляет 4 часа. Интенсивность прибывающих составов составляет 2 состава в час. В случае занятости всех линий досмотра прибывший состав ставится на запасной путь. Определить абсолютную пропускную способность таможенного пункта и среднее время простоя линий досмотра.

26. Железнодорожная сортировочная горка, на которую подается простейший поток составов с интенсивностью 2 состава в час, представляет собой СМО с неограниченной очередью. Время обслуживания (роспуска) состава на горке имеет показательное распределение со средним значением времени 20 мин. Найти среднее число составов в очереди, среднее время пребывания состава в СМО, среднее время пребывания состава в очереди.

27. Автозаправочная станция (АЗС) имеет две колонки. Площадка возле нее допускает одновременное ожидание не более четырех машин. Поток машин, прибывающий на станцию, простейший с интенсивностью 1 машина в минуту. Время обслуживания автомашины распределено по показательному закону со средним значением 2 минуты.

Найти для АЗС финальные вероятности состояния для 1, 2,3 и 4-х машин, абсолютную пропускную способность и вероятность отказа в обслуживании.

28. Имеется двухканальная простейшая СМО с отказами. На ее вход поступает поток заявок с интенсивностью 4 заявки в час. Среднее время обслуживания одной заявки 0,8 ч. Каждая обслуженная заявка приносит доход в 4 рубля. Содержание каждого канала обходится 2 руб. в час. Решить: выгодно или не выгодно в экономическом отношении увеличить число

каналов СМО до трех, если доход от заявок находится из соотношения $D=Ac$, где c - доход от обслуженной заявки, A - абсолютная пропускная способность СМО.

29. В зубоврачебном кабинете три кресла, а в коридоре имеются три стула для ожидания приема. Поток клиентов распределен по простейшему закону с интенсивностью 12 клиентов в час. Время обслуживания клиента распределено показательно со средним значением 20 минут. Если все три стула в коридоре заняты, клиенты в очередь не становятся. Определить среднее число клиентов, обслуживаемых кабинетом за час, среднюю долю обслуженных клиентов из числа пришедших и среднее время, которое клиент проведет в коридоре и в кабинете.

30. Билетную кассу с одним окошком представим, как СМО с неограниченной очередью. Касса продает билеты в пункты А и В; пассажиров, желающих купить билет в пункт А, приходит в среднем трое за 20 минут, а в пункт В - двое за 20 минут. Поток пассажиров можно считать простейшим. Кассир в среднем обслуживает трех пассажиров за 10 минут. Время обслуживания распределено по показательному закону. Установить, существуют ли финальные вероятности состояний СМО, и если да - вычислить первые три из них. Найти среднее число заявок в СМО, среднее время пребывания заявки в системе и среднее число заявок в очереди.

31. Железнодорожная касса имеет два окошка, в каждом из которых продаются билеты в два пункта: Москву и Петербург. Продажа билетов в оба направления одинакова по интенсивности, которая равна 0,45 пассажиров в минуту. Среднее время обслуживания пассажира (продажи ему билета) 2 минуты. Поступило рационализаторское предложение: для уменьшения очередей (в интересах пассажиров) сделать обе кассы специализированными. В первой продавать билеты только в Петербург, а во второй - только в Москву. Считать все потоки событий простейшими. Требуется проверить разумность этого предложения.

32. Рассматривается простейшая двухканальная СМО с

«нетерпеливыми» заявками. Интенсивность потока заявок 3 заявки в час; среднее время обслуживания одной заявки 1 час; средний срок, в течение которого заявка «терпеливо» стоит в очереди, равен 0,5 ч. Подсчитать финальные вероятности состояний, ограничиваясь теми, которые не меньше 0,001. Найти относительную и абсолютную пропускные способности.

33. Ремонтный мастер обслуживает группу из 8-ми кассовых автоматов по продаже билетов в пригородные поезда. Наблюдения показали, что в среднем автомат требует вмешательства мастера раз в 2 ч. Поток требований на ремонт - простейший. Устранение неполадок в автомате занимает в среднем 6 мин, причем время ремонта есть величина случайная, распределенная по показательному закону. Определить коэффициент простоя мастера и среднюю длину очереди автоматов на обслуживание.

34. АТС имеет 6 линий связи. Поток требований на переговоры - простейший с интенсивностью один вызов в минуту. Среднее время переговоров - 3 мин. Закон распределения времени показательный. Определить вероятность отказа и коэффициент загрузки линий связи.

35. На станции метро 5 кассовых аппаратов. Из наблюдений установили, что к этим пяти аппаратам подходят в среднем 60 человек в минуту. Время обслуживания будем считать распределенным по показательному закону, со средним временем обслуживания 4 сек. Найти вероятность того, что все аппараты свободны и среднее число людей, находящихся у аппаратов.

36. В камеру хранения вокзала, состоящую из 5-ти секций, поступает простейший поток требований в среднем 2 требования в минуту. Время обслуживания распределено по показательному закону и составляет в среднем 2 минуты. Время ожидания в очереди составляет в среднем 4 минуты и распределено по показательному закону. Определить среднюю длину очереди, среднее число занятых секций и относительную пропускную способность системы.

37. В железнодорожной поликлинике в кабинете флюорографии

проходят прием в среднем 2 человека в минуту. Время приема распределено по показательному закону. Поток посетителей простейший с интенсивностью 5 человек в минуту. Очередь посетителей, ожидающих приема, не ограничена. Определить среднюю длину очереди и абсолютную пропускную способность кабинета флюорографии.

38. Железнодорожная сортировочная горка, на которую подаются простейший поток составов с интенсивностью 2 состава в час, представляет собой СМО с неограниченной очередью. Время обслуживания (роспуска) состава на горке имеет показательное распределение со средним значением времени 15 мин. Найти среднее число составов в очереди, среднее время пребывания состава в очереди, а также абсолютную пропускную способность сортировочной горки.

1.4. Исследование характеристик систем массового обслуживания

Задание 7. Построить график распределения *Pk* для *N*-канальной СМО с отказами, если на вход системы поступает простейший поток требований с интенсивностью $\lambda = 10\frac{m}{N_n N}$

И обслуживание требований производится с интенсивностью $\nu = 5\frac{m}{N_n N}$,

где *m*–последняя цифра года (если она равна 0, то подставляем 10),

N–количество каналов обслуживания,

Nn –номер по списку. Число каналов обслуживания определяется из таблицы 1.

Пример. Для СМО с отказами график распределения *Pk*, построенный в системе MathCad, показан на рис.1.

$\lambda := 8 \qquad \nu := 5 \qquad N := 7$

$\rho := \frac{\lambda}{\nu} \qquad \rho = 1.6$

$P0 := \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{\rho^{i}}{i!} \right)^{-1} \qquad P0 = 0.202$

$k := 1 .. N \qquad P(k) := \frac{\rho^{k}}{k!} \cdot P0$

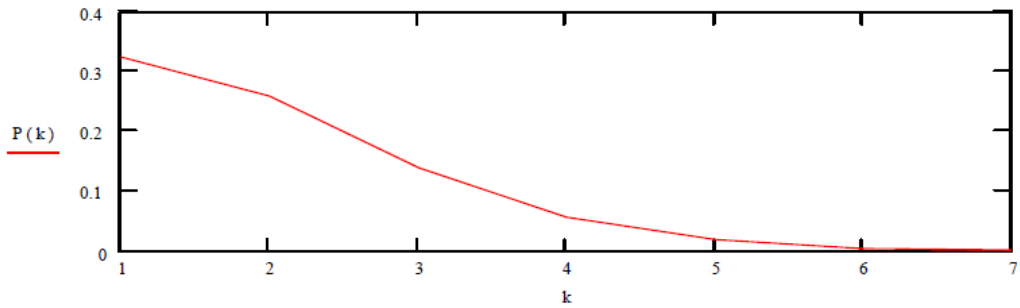


Рис. 1. График вероятностей P_k

Определить характеристики качества обслуживания для СМО с отказами:

1. Вероятность отказа *Ротк*.
2. Среднее число занятых узлов *Мзан*.
3. Среднее число свободных узлов *Мсв*.
4. Относительную пропускную способность *Q*.
5. Абсолютную пропускную способность *A*.
6. Коэффициент занятости узлов *Кз*.

Задание 8.

Построить график вероятности состояний *Pk*, для *N*-канальной СМО с ожиданием, если на вход поступает простейший поток требований с нтенсивностью $\lambda = 15\frac{m}{N_n N}$

и обслуживание требований производится с интенсивностью $\nu = 5\frac{m}{N_n N}$,

где *Nn* – номер по списку, *m* – последняя цифра года (если она равна 0, то подставляем 10), *N* – число каналов обслуживания. Число каналов обслуживания определяется из таблицы 1.

Пример. Для СМО с ожиданием график распределения *Pk*, построенный в системе MathCad, показан на рис.2.

$\lambda := 30 \qquad \nu := 4 \qquad N := 8$

$$\rho := \frac{\lambda}{\nu} \qquad \rho = 7.5$$

$$P0 := \left[\sum_{i=0}^{N} \frac{\rho^{i}}{i!} + \frac{\rho^{N+1}}{N! \cdot (N - \rho)} \right]^{-1} \qquad P0 = 2.032 \times 10^{-4}$$

$k := 1 .. 50$

$$P(k) := \frac{\rho^{k}}{N! \cdot N^{k-N}} \cdot P0$$

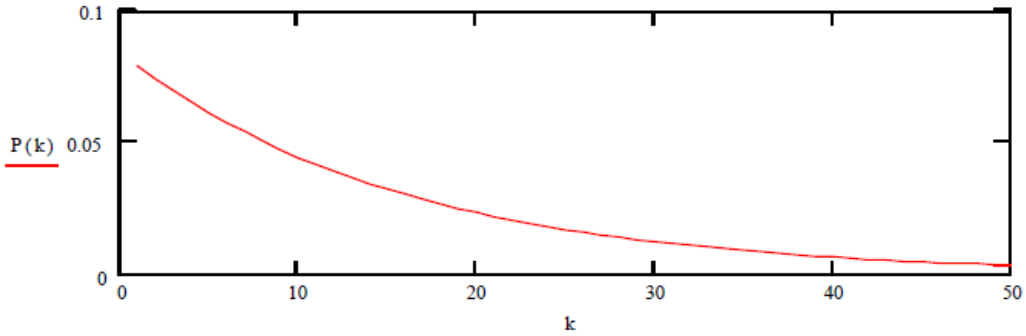


Рис. 2. График вероятностей P_k

Определить характеристики качества обслуживания.

1. Вероятность наличия очереди *Pk.*

2. Вероятность занятости всех узлов системы *Рзан*.

3. Среднее число требований в системе *МТР*.

4. Среднюю длину очереди *Моч*.

5. Среднее число свободных узлов *Мсв*.

6. Среднее число занятых узлов *Мзан*.

7. Среднее время ожидания *Тож*.

8. Общее время пребывание требований в очереди за единицу времени *Тоож*.

9. Среднее время пребывания требования в системе *Ттр*.

10. Суммарное время, которое проводят все требования за единицу времени *Тстр*.

11. Абсолютную пропускную способность *А*.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №2.

Методы решения задач линейного программирования

Цель работы: ознакомиться с симплексным методом линейного программирования.

Задание: используя симплексный метод научиться решать задачи линейного программирования, освоить методику решения одно- и многопродуктовой транспортной задачи в среде Microsoft Office Excel.

Значительное число планово-производственных задач имеет выражение критерия оптимальности в виде линейной функции от входящих в него переменных. При этом на указанные переменные могут быть также наложены некоторые ограничения в форме линейных равенств или неравенств.

Примером подобных задач является задача отыскания такого распределения ограниченного количества сырья между различными производствами, когда общая стоимость получаемой продукции максимальна.

Другим примером служит транспортная задача, когда необходимо так организовать доставку товаров из различных складов к нескольким пунктам назначения, чтобы затраты на перевозку были минимальными.

Решение этих задач, математическая формулировка которых сводится к требованию максимизации или минимизации критерия оптимальности, заданного в виде линейной функции независимых переменных с линейными ограничениями на них составляет задачу **линейного программирования**.

В задачах линейного программирования критерий оптимальности представляется в виде

$$R = \sum_{j=1}^{n} c_i x_i \,, \qquad (2.1)$$

где c_j $(j = 1,2,..., n)$ – заданные постоянные коэффициенты, среди которых могут быть и равные нулю.

На значения переменных x_j $(j = 1,2,..., n)$ налагаются дополнительные условия, заданные в виде равенств и неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \le b_i \ , \ i = 1,2,..., m_1; \qquad (2.1а)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \ge b_i \ , \ i = m_1 + 1, m_1 + 2,..., m_2; \qquad (2.1б)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_i \ , \ i = m_2 + 1, m_2 + 2,..., m. \qquad (2.1в)$$

При этом предполагается x_j ³ 0 $(j = 1,2,..., n)$, т.к. в большинстве экономических задач независимые переменные, имеющие конкретный физический смысл (единицу продукции, цены и т.д.), не могут быть отрицательными величинами.

Будем также считать, что все величины b_i в ограничениях (1.2) отличны от нуля и положительны.

Число ограничений типа равенств $(m - m_2)$ не должно превышать число переменных x_j $(j = 1,2,..., n)$. Общее же число неравенств может быть произвольным. Коэффициенты $a_{i,j}$ в соотношениях (1.2) принимаются действительными числами, положительными или отрицательными, среди которых могут быть и равные нулю.

Оптимальным решением задачи линейного программирования, или как еще называют, оптимальным планом является совокупность неотрицательных значений переменных

x_j $(j = 1,2,..., n)$, которая удовлетворяет соотношениям (2.2) и обеспечивает в зависимости от постановки задачи максимальное или минимальное значение линейной функции (2.1).

2.1 Сведение задачи с ограничениями типа неравенств к задаче с ограничениями типа равенств

В задачах линейного программирования ограничения типа неравенств могут быть представлены в виде равенств введением новых переменных, называемых дополнительными. Для этого в каждом соотношении (2.1а) прибавим к левой части дополнительную переменную x_{n+I} , которая превращает неравенство в равенство.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j + x_{n+i} = b_i, i = 1,2, \dots, m_1, \qquad (2.2)$$

При этом все дополнительные переменные положительны. Для неравенств (2.2б), можно также записать, учитывая положительность дополнительных переменных

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j - x_{n+i} = b_i, i = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_2, \qquad (2.3)$$

Тогда система ограничений (2.2) может быть записана в виде

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{i,j}x_j - x_{n+i} = b_i, i = 1, 2, \dots, m, \qquad (2.4)$$

Любое решение системы уравнений (2.3), состоящее из n + m неотрицательных значений переменных x_i (j = 1,2,..., n + m) называется допустимым решением.

Допустимое решение, в котором m составляющих отличны от нуля называется допустимым базисным решением или планом.

Задача отыскания оптимального решения заключается в переборе только базисных решений системы (2.3).

Процедурой последовательного улучшения плана или построения базисного решения является **симплексный метод**.

2.2 Симплексный метод решения задачи линейного программирования

Симплексный метод позволяет по известному базисному решению построить другое базисное решение, для которого значение линейной формы больше, чем для исходного.

Для вывода основных соотношений симплексного метода запишем систему уравнений (2.3) в векторной форме

$$\sum_{j=1}^{n+m} A_j x_j = B \qquad (2.5)$$

Где A_j и B – векторы.

$$A_j = \begin{vmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \dots \\ a_{m,j} \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} b_1 \\ b \\ \dots \\ b_m \end{vmatrix}, j = 1,2,\dots,n+m \qquad (2.6)$$

Предположим, что известно какое-нибудь базисное решение системы, в котором m значений x j отличны от нуля

$x_j = 0$, $j = 1,2,\dots,n$.

$x_j = \lambda_j^{(0)} \neq 0$, $j = n+1, n+2,\dots,n+m$.

Ненулевые значения x_j удовлетворяют векторному уравнению

$$\sum_{j=1}^{n+m} A_j \lambda_j^{(0)} = B \qquad (2.5)$$

Векторы A_j $(j = n+1, n+2, \dots, n+m)$ могут быть приняты в качестве базиса m-мерного пространства, поэтому любой небазисный вектор A_k (k = 1,2,…,n) можно разложить по векторам базиса.

$$\sum_{j=n+1}^{n+m} A_j x_{j,k} \qquad (2.6)$$

Умножим уравнение (2.6) на произвольную положительную константу θ и вычтем это уравнение из (2.5).

$$\theta A^k \sum_{j=n+1}^{n+m} A_j x_{j,k}$$

$$\sum_{j=1}^{n+m} A_j \lambda_j^{(0)} - \theta \sum_{j=n+1}^{n+m} A_j x_{j,k} = B - \theta A^k$$

или

$$\theta A^k - \sum_{j=n+1}^{n+m} A_j \left(\lambda_j^{(0)} - \theta x_{j,k}\right) = B \qquad (2.7)$$

Величина θ – произвольная, поэтому ее выберем настолько малой, что независимо от знака скобках будет всегда положительно

$$y_j = \lambda_j^{(0)} - \theta x_{j,k} > 0, \text{т. к. } \lambda_j^{(0)} > 0, j = n+1, \dots, n+m; k = 1,2, \dots, n$$

Обозначим $y_k = \theta$, $k = 1,2,\dots,n$.

При Ѳ =0 имеем исходное базисное решение. Поэтому для получения другого базисного решения, отличного от исходного, необходимо взять Ѳ > 0 .

Если коэффициенты $x_{j,k}$ вектора A_k отрицательны, то получить новое базисное решение невозможно. В этом случае вместо вектора A k следует взять любой другой вектор и разложить его по векторам базиса и т.д. до тех пор пока не будет найдено разложение какого-либо вектора, содержащего хотя бы один положительный коэффициент $x_{j,s}$.

Пусть не все $x_{j,k}$ $(j = n+1, n+2, \dots, n+m)$ в разложении вектора A k отрицательны. Тогда при непрерывном возрастании величины Ѳ от Ѳ = 0 первой обратится в нуль та переменная $y_{n+\ell}$ ($1 < \ell < m$), для которой

отношение $\lambda_j^{(0)}/x_{n+1,k}$ будет минимально среди всех других отношений. Значение Θ нужно выбрать равным этому минимальному отношению

$$\theta_{n+\ell,k} = \min_{(n+1 \le j \le n+m)} \frac{\lambda_j^{(0)}}{x_{j,k}} > 0$$

Допустим, что минимальное значение $\lambda_j^{(0)}/x_{j,k}$ получается при $\ell = 1$, т.е.

$$\theta = \theta_{n+\ell,k} = \frac{\lambda_{n+1}^{(0)}}{x_{n+1,k}} > 0$$

Тогда при данном Θ значение переменной $y_{n+1} = 0$, другие

$y_j > 0$ $(j = k, n+2, \ldots, n+m)$.

Поэтому вместо исходного базисного решения получим новое

$$\left.\begin{aligned} \lambda_j^{(1)} &= 0, j = 1,2,\ldots,n; \\ \lambda_k^{(1)} &= \theta, k = 1,2,\ldots,n; \\ \lambda_{n+1}^{(0)} &= \lambda_{n+1}^{(0)} - \theta x_{n+1,k} = 0; \\ \lambda_j^{(1)} &= \lambda_j^{(0)} - x_{j,k} > 0, j = n+2, n+3, \ldots, n+m. \end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$

На основе нового базисного решения (2.8) уравнение (2.7) будет записано в виде

$$A_k \lambda_k^{(1)} + \sum_{j=n+2}^{n+m} A_j \lambda_j^{(1)} = B \quad (2.9)$$

Сравнивая полученное уравнение (2.9) с (2.7), получим, что вектор A_{n+1} заменен на вектор A_k и новое базисное решение (2.8) удовлетворяет уравнению (2.9).

Таким образом, изложенная процедура позволяет находить при известном базисном решении другое базисное решение, отличающееся от исходного одним базисным вектором.

Как же меняется значение критерия оптимальности при переходе от одного базисного решения к другому? Подставим исходное базисное решение в выражение критерия

$$R^{(0)} = \sum_{j=n+1}^{n+m} c_j \lambda_j^{(0)}$$

Число членов под знаком суммы сократилось за счет того, что в исходном базисном решении n членов равно нулю.

Для первого базисного решения значение критерия равно

$$R^{(1)} = \mathrm{c}_k \theta - \sum_{j=n+1}^{n+m} c_i x_{i,k} \, .$$

Найдем приращение критерия ΔR

$$\Delta \mathrm{R} = R^{(1)} - R^{(0)} = \theta \left(c_k - \sum_{j=n+1}^{m} c_i x_{i,k} \, . \right)$$

Величина ΔR > 0 , если выполняется условие

$$c_k > \sum_{j=n+1}^{m} c_i x_{j,k} \, . \qquad (2.10)$$

Если же ΔR< 0 , то значение критерия уменьшается при переходе к новому базисному решению.

Вопрос о целесообразности перехода к новому базисному решению следует решать проверкой условия (2.10) еще до выбора Ѳ , для чего необходимо знать лишь коэффициенты $x_{j,k} \left(1 \le k \le n\right)$ в разложении вектора $A_k \left(1 \le k \le n\right)$ по векторам базиса $A_j \left(j = n+1, n+2, \ldots, n+m\right)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №3.

Транспортная задача линейного программирования

3.1. Постановка транспортной задачи

Транспортная модель используется при разработке плана перевозок одного вида продукции из нескольких пунктов отправления в пункты назначения . При построении модели используются:

1) величины, характеризующие объем производства в каждом исходном пункте и спрос в каждом пункте назначения;

2) стоимость перевозки единицы продукции из каждого исходного пункта в каждый пункт назначения.

Поскольку рассматривается только один вид продукции, потребности пунктов назначения могут удовлетворяться за счет нескольких исходных пунктов. Цель построения модели состоит в определении количества продукции, которое следует перевезти из каждого исходного пункта в каждый пункт назначения с тем, чтобы суммарные транспортные расходы были минимальными.

Обозначим количество продукции, производимой в пункте i, через a i ; количество продукции, потребляемой в пункте j, – через b j ; стоимость перевозки единицы продукции из i в j – через ci, j ; через x i, j – количество продукции, перевозимой из исходного пункта в пункт назначения. Тогда задача линейного программирования в общем виде формулируется следующим образом: минимизировать

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} x_{j,k} \qquad (3.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{j,k} = a_j, i = 1,2, \dots, m; \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{j,k} = b_j, i = 1,2, \dots, n; \quad (3.3)$$

Из представленной модели видно, что суммарный объем производства равен суммарному спросу. Такая модель называется сбалансированной транспортной моделью.

Задача 1. Заводы автомобильной фирмы расположены в трех городах: Г1, Г2 и Г3. Основные центры распределения (магазины) расположены в городах Р1 и Р2. Объемы производства указанных трех заводов равняются 1000, 1500 и 1200 автомобилей ежеквартально.

Величины квартального спроса в центрах распределения составляют соответственно 2300 и 1400 автомобилей. Стоимости перевозки одного автомобиля между заводами и центрами распределения приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

	Р1	Р2
Г1	80	215
Г2	100	108
Г3	102	68

Поскольку суммарный объем производства автомобилей (1000+1500+1200=3700) равен суммарному спросу (2300+1400=3700), данная модель является сбалансированной транспортной моделью, и соответствующая задача линейного программирования с ограничениями в виде равенств формулируется следующим образом: минимизировать

$$z = 80x_{11} + 215x_{12} + 100x_{21} + 108x_{22} + 102x_{31} + 68x_{32}$$

при ограничениях

$x_{11} + x_{12} = 1000$;

$x_{21} + x_{22} = 1500$;

$x_{31} + x_{32} = 1200$;

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2300$;

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1400$;

$x_{I,j} \geq 0$; I = 1,2,…,m; j = 1,2,…,n.

Таблица 3.2

	Магазин 1	Магазин 2	Объем производства
Завод 1	80 x_{11}	215 x_{12}	1000
Завод 2	100 x_{21}	108 x_{22}	1500
Завод 3	102 x_{31}	68 x_{32}	1200
Спрос	2300	1400	

Более компактный способ представления транспортной модели связан с использованием транспортной таблицы. Транспортная таблица (табл. 2.2) имеет вид матрицы, в которой строки соответствуют исходным пунктам, а столбцы – пунктам назначения. В правом верхнем углу каждой ячейки транспортной таблицы (i, j) расположены коэффициенты стоимости $c_{i,j}$.

Задача 2. Изменим условия задачи 1, предположив, что завод 2 производит не 1500, а 1300 автомобилей (табл. 3.3). Это приведет к дисбалансу, поскольку суммарный объем производства (3500) не равен суммарному спросу (3700).

Таблица 3.3

	Магазин 1	Магазин 2	Объем производства
Завод 1	80	215	1000
Завод 2	100	108	1300
Завод 3	102	68	1200
Фиктивный завод	0	0	200
Спрос	2300	1400	

В этом случае необходимо видоизменить транспортную модель таким образом, чтобы недостаток автомобилей (3700 – 3500=200) оптимально распределялся между центрами распределения. Поскольку спрос превышает объем производства, можно ввести дополнительный фиктивный завод ФЗ с производительностью 200 автомобилей.

Т. к. на самом деле фиктивного завода не существует, т.е. никакие перевозки из него не производятся, то соответствующая стоимость перевозки равна нулю. Эту ситуацию можно рассмотреть и по-другому, считая, что каждая единица недопоставленной продукции облагается штрафом. В этом случае транспортные расходы на единицу продукции равны штрафу за единицу продукции, недополученную в том или ином центре распределения.

Задача 3. Вновь изменим условия задачи 1, предположив, что объем производства превышает спрос из-за падения спроса на автомобили в магазине 1 до 1900 штук. В табл. 3.4 представлена модель с фиктивным центром распределения:

Таблица 3.4

	Магазин 1	Магазин 2	Фиктивный магазин ФМ	Объем производства
Завод 1	80	215	0	1000
Завод 2	100	108	0	1500
Завод 3	102	68	0	1200
Спрос	1900	1400	400	

Автомобили, поступающие с некоторого завода в фиктивный центр распределения, представляют избыток производства на этом заводе. Соответствующая стоимость перевозки одного автомобиля равна нулю. Однако можно назначить штраф за хранение автомобиля на складе, тогда стоимость перевозки одного автомобиля станет равной стоимости его хранения.

Задача 4. Теперь рассмотрим пример, когда нужно перевезти несколько видов продукции, т.е. многопродуктовую транспортную модель. Пусть фирма производит автомобили четырех различных марок, которые для простоты будем обозначать как М1, М2, М3 и М4. Завод 1 производит автомобили марок М3 и М4; завод 2 – автомобили М1, М2 и М4; завод 3 – автомобили М1 и М2.

Таблица 3.5

	М1	М2	М3	М4	Всего
Объем производства					
Завод 1	0	0	700	300	1000
Завод 2	500	600	0	400	1500
Завод 3	800	400	0	0	1200
Спрос					
Магазин 1	700	500	500	600	2300
Магазин 2	600	500	200	100	1400

В табл. 3.5. приведены данные по объемам выпуска разных заводов и по величине спроса в центрах распределения для автомобилей каждой марки.

Для того, чтобы учесть многопродуктовый характер задачи, изменим транспортную модель (табл. 3.6).

Таблица 3.6

		Магазин 1				Магазин 2				Объем
		М1	М2	М3	М4	М1	М2	М3	М4	
Завод 1	М3	М	М	80	М	М	М	215	М	700

Завод 1	М4	М	М	М	80	М	М	М	215	300
Завод 2	М1	100	М	М	М	108	М	М	М	500
Завод 2	М2	М	100	М	М	М	108	М	М	600
Завод 2	М4	М	М	М	100	М	М	М	108	400
Завод 3	М1	102	М	М	М	68	М	М	М	800
Завод 3	М2	М	102	М	М	М	68	М	М	400
Спрос		700	500	500	600	600	500	200	100	

Вместо того, чтобы рассматривать каждый завод как один исходный пункт, разобьем его на несколько пунктов в соответствии с числом марок автомобилей, выпускаемых этим заводом. Аналогично поступим и с пунктами назначения, т.е. будем считать, что каждый из них состоит из четырех отделов, соответствующих четырем маркам автомобилей. В результате получим семь исходных пунктов и восемь пунктов назначения.

Заметим, что некоторые маршруты в таблице недопустимы, поскольку автомобили различных марок не могут заменять друг друга. Этим маршрутам в таблице соответствует очень высокая стоимость перевозки М (например, 999).

3.2. Алгоритм решения транспортной задачи

1. Выполнить проектирование таблицы, т. е. ввести в рабочий лист исходные данные согласно образцу (табл. 3.7).

2. В ячейке F3 необходимо записать выражение для целевой функции как результат вычисления с использованием функции СУММПРОИЗВ(B$4:C$6;D4:E6) с помощью *Мастера функций*.

3. В ячейку A10 ввести выражение для левой части ограничения по условию вывоза всей продукции из первого пункта: =B4+C4 и скопировать эту формулу в ячейки A11:A12. В ячейку A13 записать выражение для левой части ограничения по условию удовлетворения спроса в первом пункте: =B4+B5+B6, в ячейку A14 – выражение для левой части ограничения по условию удовлетворения спроса во втором пункте: =C4+C5+C6. В ячейку F10

ввести число 0, которое будет использовано для ввода условий неотрицательности переменных $x_{i,j}$.

Таблица 3.7

	A	B	C	D	E	F
1	Транспортная задача					
2	Предложения и спрос			Коэффициенты стоимости		Целевая функция
3		Магазин 1	Магазин 2	Магазин 1	Магазин 2	
4	Завод 1	0	0	80	215	
5	Завод 2	0	0	100	108	
6	Завод 3	0	0	102	68	
7						
8	Ограничения					
9	Лев. часть	Знак	Прав. часть	Лев. часть	Знак	Прав. часть
10	0	=	1000	$x_{i,j}$	>=	0
11	0	=	1500	$x_{i,j}$	цел	
12	0	=	1200			
13	0	=	2300			
14	0	=	1400			

4. Воспользуемся командами Сервис, Поиск решения для решения задачи оптимизации, предварительно установив курсор в ячейку F3, предназначенную для целевой функции. Появляется диалоговое окно Поиск решения, в котором надо установить значения в следующие окна ввода:

- Установить целевую ячейку – щелкнуть по ячейке F3 (если курсор предварительно уже был установлен на этой ячейке, адрес F3 здесь появится автоматически).

- Равной минимальному значению – нажать соответствующую кнопку.

• Изменяя ячейки – протащить мышь по ячейкам B4:C6, предназначенным для хранения результата вычислений, т.е. неизвестных значений переменных x i, j .

• Ограничения – нажать кнопку Добавить и в появившемся диалоговом окне ввести ограничения, используя сформированные ранее выражения и числа в ячейках A10:C14. Кроме этих ограничений требуется ввести условия неотрицательности и целочисленности независимых переменных x i, j , используя адреса ячеек B4:C6, отведенных для записи вычисляемых значений x i, j . После ввода последнего ограничения нажать кнопку ОК.

5. Нажать кнопку Параметры, появится новое диалоговое окно Параметры поиска решения. Здесь надо установить флажок Линейная модель, что обеспечит применение симплекс-метода. При решении большинства задач значения остальных параметров можно использовать по умолчанию.

6. Нажать кнопку ОК, вновь появится окно Поиск решения, здесь нажать кнопку Выполнить. Появится диалоговое окно Результаты поиска решения, нажать кнопку ОК и проанализировать полученные результаты.

3.3. Порядок выполнения работы

1. Изучить симплексный метод.

2. Получить задание у преподавателя.

3. Разработать математическую модель задачи, т. е. записать выражения для функции цели и ограничений на независимые переменные.

4. Решить транспортную задачу в среде Microsoft Office Excel.

5. Подготовить ответы на контрольные вопросы.

Работа в лаборатории

1. Выполнение работы в среде Microsoft Office Excel.

2. Обработка и анализ результатов выполненной задачи.

Содержание отчета о работе

1. Постановка задачи. Задание.

2. Рабочий лист в среде Microsoft Office Excel с исходными данными и результатами выполненной задачи.

3. Основные выводы и заключения

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте задачу линейного программирования в общем виде.

2. Что такое оптимальный план?

3. Как осуществляется сведение задачи с ограничениями типа неравенств к задаче с ограничениями типа равенств?

4. Расскажите основные идеи симплекного метода.

5. Сформулируйте транспортную задачу.

6. В какомслучае транспортная модель является сбалансированной, а в каком нет?

7. Расскажите, каким образом решается транспортная задача в среде Microsoft Office Excel.

8. Решите задачу симплексным методом, рассматривая в качестве исходного плана план $\lambda^{(0)}$.

Задача 1.

$$R = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -1; \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3; \\ \lambda^{(0)} = (1,1,0). \end{cases}$$

Задача 2.

$$R = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3,4; \\ \lambda^{(0)} = (0,0,1,1). \end{cases}$$

Задача 3.

$$R = 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4; \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3,4; \\ \lambda^{(0)} = (1,0,0,1). \end{cases}$$

Задача 4.

$$R = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3,4; \\ \lambda^{(0)} = (0,0,1,1). \end{cases}$$

Задача 5.

$$R = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 - x_4 = 1; \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3,4; \\ \lambda^{(0)} = (1,0,1,0). \end{cases}$$

Задача 6.

$$R = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_i \geq 0, i = 1,2,3,4; \\ \lambda^{(0)} = (0,1,0,1). \end{cases}$$

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №4

Оптимизация параметров системы методами нелинейного программирования

4.1. Основные методы нелинейного программирования.

Задание: решить задачу оптимизации идеального смешения различными методами нелинейного программирования. Задача решается с помощью ЭВМ. При разработке программы использовать языки программирования СИ по выбору студента. Для решения задачи использовать 4 метода:

1) метод наискорейшего спуска;
2) метод сканирования;
3) метод случайных направлений с обратным шагом;
4) метод “шагов по оврагу”.

Математическая формулировка задачи оптимизации часто может быть представлена как задача отыскания наибольшего или наименьшего значения функции нескольких переменных

$$R = R(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (4.1)$$

где функция R является количественной оценкой представляющего интерес качества объекта оптимизации.

На независимые переменные x_j $(j = 1,2,..., n)$ в общем случае можно наложить ограничения в виде равенств:

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0,\ i = 1,2,..., m \qquad (4.2а)$$

или неравенств:

$$\phi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0,\ i = 1,2,..., k \qquad (4.2б)$$

или же тех и других одновременно.

Для случая, когда аналитический вид соотношений (4.1) и (4.2) известен и не слишком сложен и если, в особенности, число независимых переменных n невелико, всегда можно с бóльшим или меньшим успехом использовать для решения оптимальной задачи аналитические методы, по крайней мере для того, чтобы свести ее решение к решению системы конечных уравнений.

Особые трудности возникают тогда, когда соотношение (3.1), определяющее значение критерия оптимальности для заданной совокупности значений независимых переменных x_j, не может быть записано в явном виде. Наличие ограничений (3.2), которые могут быть заданы как трудновычислимые функции независимых переменных, еще более затрудняют отыскание оптимального решения и требует использования специальных приемов решения.

Задачи такого типа, т.е. с нелинейными и трудновычислимыми соотношениями, определяющими критерий оптимальности (4.1) и ограничения (4..2), являются предметом рассмотрения специального раздела математики – нелинейного программирования.

Как правило, решение задач нелинейного программирования могут быть найдены только численными методами, поэтому возникает необходимость применения вычислительной техники.

В большинстве своем методы нелинейного программирования могут быть охарактеризованы как многошаговые методы или методы последовательного улучшения начального решения.

Большинство методов нелинейного программирования используют идею движения в n-мерном пространстве в направлении оптимума. При этом из некоторого исходного или промежуточного состояния $x^{(k)}$ осуществляется переход в следующее состояние $x^{(k+1)}$ изменением состояния $x^{(k)}$ на величину $\Delta x^{(k)}$, называемую шагом

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} \qquad (4.3)$$

Очевидно, что для случая поиска минимума целевой функции R(x) должно выполняться условие

$$R(x^{(k+1)}) < R(x^{(k)}),$$

иначе перевод в состояние $x^{(k+1)}$ нецелесообразен.

Значительное число методов нелинейного программирования в соответствии со способом определения шага $\Delta x^{(k)}$ можно отнести к одному из трех основных классов:

1) градиентные методы;

2) безградиентные методы детерминированного поиска;

3) методы случайного поиска.

Градиентные методы

Градиентные методы поиска оптимума целевой функции основаны на использовании двух основных свойств градиента функции.

1. Градиент функции $\nabla R(x)$ – это вектор, который в каждой точке области определения функции R(x) направлен по нормали к поверхности уровня, проведенной через эту точку.

Проекции градиента $\nabla R(x)$ на оси координат равны частным производным функции R(x) по соответствующим переменным, т.е.

$$\nabla R(x) = \left(\frac{\partial R}{\partial x_1}, \frac{\partial R}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial R}{\partial x_n}\right) \qquad (4.4)$$

2. Направление градиента характеризует направление наибольшего возрастания функции.

К градиентным методам относятся: метод релаксации, градиента, наискорейшего спуска и ряд других.

Рассмотрим некоторые из градиентных методов.

Метод градиента

В этом методе спуск производится в направлении наибыстрейшего изменения целевой функции, что, естественно, ускоряет процесс поиска оптимума.

Поиск оптимума производится в два этапа. На первом этапе находятся значения частных производных по всем независимым переменным, которые определяют направление градиента в рассматриваемой точке. На втором этапе осуществляется шаг в направлении, обратном направлению градиента (при поиске минимума целевой функции).

При выполнении шага одновременно изменяются значения всех независимых переменных. Каждая из них получает приращение пропорциональное соответствующей составляющей градиента по данной оси.

Формульная запись алгоритма может иметь вид:

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} - h\frac{\partial R\left(x^{(k)}\right)}{\partial\, x_i}, j = 1,2,\dots,n. \qquad (4.5)$$

В этом случае величина шага $\Delta x^{(k)}$ при постоянном значении параметра h изменяется автоматически с изменением величины градиента и при приближении к оптимуму уменьшается.

Другая формульная запись алгоритма имеет вид:

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} - h^k \frac{\dfrac{\partial R\left(x^{(k)}\right)}{\partial\, x_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial R\left(x^{(k)}\right)}{\partial\, x_i}\right)^2}}, j = 1,2,\dots,n. \qquad (4.6)$$

В этом алгоритме используется нормализованный вектор градиента, указывающий лишь направление наискорейшего изменения целевой функции, но не указывает скорости изменения по этому направлению.

В стратегии изменения шага $h^{(k)}$ в этом случае используется то, что градиенты и $\nabla R(x^{(k-1)})$ и $\nabla R(x^{(k)})$ отличаются по направлению. Изменение шага поиска производится в соответствии с правилом:

$$h^{(k+1)} = \left| \begin{array}{c} 2h^k, \alpha^k < \alpha_{min}; \\ h^k, \alpha_{min} < \alpha^k < \alpha_{max}; \\ \frac{1}{3}h^k, \alpha^k > \alpha_{max}. \end{array} \right. \tag{4.7}$$

где $\alpha^{(k)}$ – угол поворота градиента на k-ом шаге, определяемый выражением

$$cos\alpha^{(k)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial R\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_j} \frac{\partial R\left(x^{(k-1)}\right)}{\partial x_j}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial R\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_j}\right)^2 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial R\left(x^{(k-1)}\right)}{\partial x_j}\right)^2}} \tag{4.8}$$

α_{min} , α_{max} – допустимые пределы угла поворота градиента.

Характер поиска оптимума в методе градиента показан на рис. 4.1.

Момент окончания поиска можно найти проверкой на каждом шаге соотношения

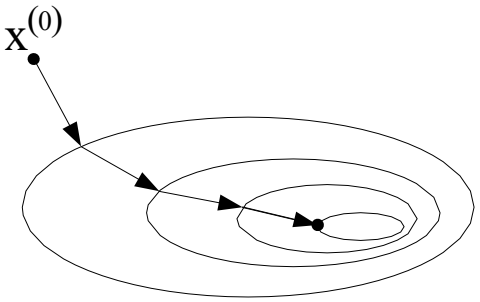


Рис. 4.1. Характер движения к оптимуму в методе градиента с большой величиной шага

Недостатком градиентного метода является то, что при его использовании можно обнаружить только локальный минимум целевой функции. Для того, чтобы найти у функции другие локальные минимумы, необходимо производить поиск из других начальных точек.

Другим недостатком этого метода является значительный объем вычислений, т.к. на каждом шаге определяются значения всех частных производных оптимизируемой функции по всем независимым переменным.

Метод наискорейшего спуска

При применении метода градиента на каждом шаге нужно определять значения частных производных оптимизируемой функции по всем независимым переменным. Если число независимых переменных значительно, тогда объем вычислений существенно возрастает и время поиска оптимума увеличивается.

Сокращения объема вычислений можно добиться используя метод наискорейшего спуска.

Сущность метода заключается в следующем. После того как в начальной точке будет найден градиент оптимизируемой функции и тем самым определено направление ее наибыстрейшего убывания в указанной точке, в данном направлении делается шаг спуска (рис. 4.2).

Если значение функции в результате этого шага уменьшилось, производится очередной шаг в том же направлении, и так до тех пор, пока в этом направлении не будет найден минимум, после чего вычисляется градиент и определяется новое направление наибыстрейшего убывания целевой функции.

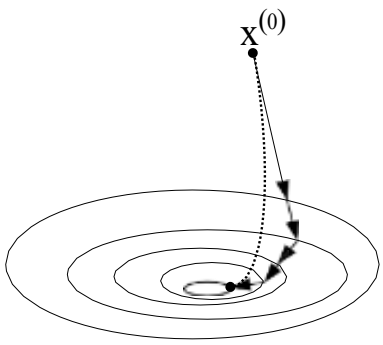


Рис. 4.2. Характер движения к оптимуму в методе наискорейшего спуска (–) и методе градиента ( )

В сравнении с методом градиента метод наискорейшего спуска оказывается более выгодным из-за сокращения объема вычислений.

Важной особенностью метода наискорейшего спуска является то, что при его применении каждое новое направлении движения к оптимуму ортогонально предшествующему. Это объясняется тем, что движение в одном направлении производится до тех пор, пока направление движения не окажется касательным к какой-либо линии постоянного уровня.

В качестве критерия окончания поиска может использоваться то же условие, что и в рассмотренном выше методе.

Кроме того, можно также принять условие окончания поиска в форме соотношения

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j^{(A)} - x_j^{(B)})^2} \leq \varepsilon \ ,$$

где $x_j^{(A)}$ и $x_j^{(B)}$– координаты начальной и конечной точек последнего отрезка спуска. Этот же критерий может использоваться в сочетании с контролем значений целевой функции в точках x $^{(A)}$ и x $^{(B)}$

$$\left|R\left(x^{(A)}\right) - R\left(x^{(B)}\right)\right| \leq \varepsilon,$$

Совместное применение условий окончания поиска оправдано в тех случаях, когда оптимизируемая функция имеет резко выраженный минимум.

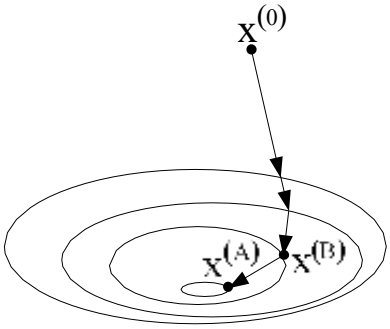


Рис. 4.3. К определению окончания поиска в методе наискорейшего спуска

В качестве стратегии изменения шага спуска можно использовать методы изложенные выше (4.7).

Алгоритм решения задачи методом наискорейшего спуска

Пусть требуется найти минимум целевой функции

$R = R(x),\ x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ x \in X.$

1. Выбирается начальная точка поиска $x^{(0)} \in X$.

2. Определяется значение целевой функции в начальной точке $R(x^{(0)})$.

3. В исходной точке функции $x^{(0)}$ и вычисляется градиент целевой функции (3.4).

Находится направление наискорейшего возрастания функции.

4. В направлении антиградиента делается шаг спуска

$$x^{(1)} = x^{(0)} - h\frac{\partial R(x^{(0)})}{\partial x}$$

5. Рассчитывается значение целевой функции в точке $x^{(1)}$

$R^{(1)} = R\left(x^{(1)}\right)$

6. Сравниваются значения целевой функции в точке $x^{(1)}$ и начальной точке поиска $x^{(0)}$.

Если $R^{(1)} < R^{(0)}$, то выполненный шаг считается правильным и новое значение $R^{(1)}$ запоминается совместно с координатами точки $x^{(1)}$.

Если же $R^{(1)} < R^{(0)}$, то необходимо изменить начальную точку поиска $R^{(1)} < R^{(1)}$, либо уменьшить величину рабочего шага h.

7. Затем делается новый шаг в том же направлении и так до тех пор, пока не будет найден минимум в этом направлении.

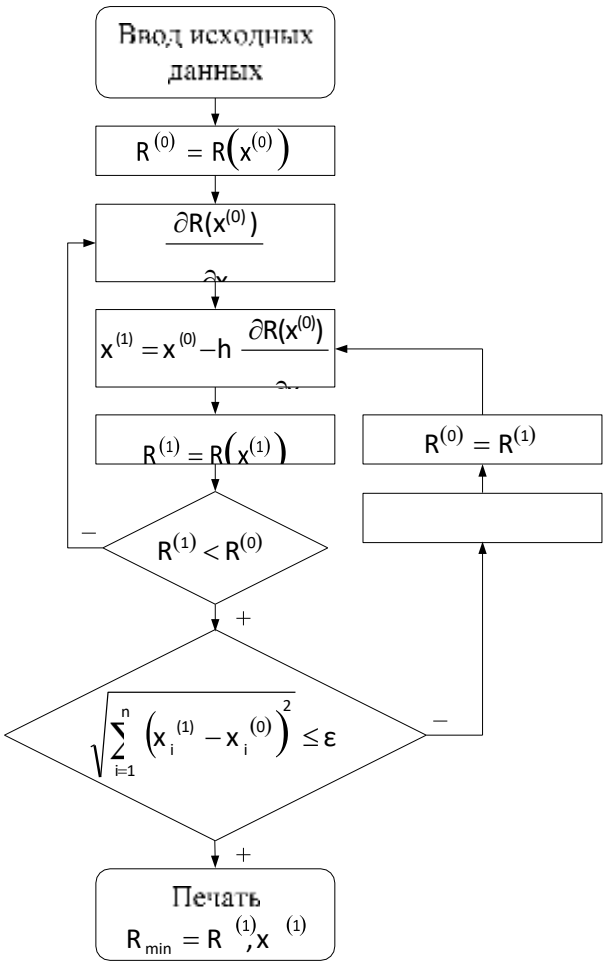
Если в некоторой точке $x^{(k)}$ $R^{(k)} > R^{(k-1)}$, то в точке x (k-1) вычисляется градиент целевой функции и определяется новое направление наибыстрейшего убывания функции.

8. Критерием окончания поиска является выполнение условия

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})^2} \leq \varepsilon,$$

которое проверяется после каждого удачного шага.

Блок-схема алгоритма решения задачи методом наискорейшего спуска



Безградиентные методы детерминированного поиска

Нахождение производных при наличии трудновычисляемого критерия оптимальности в случае градиентных методов связано с необходимостью выполнения значительного объема вычислений, что приводит к существенному увеличению времени поиска, особенно при большом числе независимых переменных.

Безградиентные методы используют в процессе поиска информацию, получаемую не при анализе производных, а от сравнительной оценки критерия оптимальности в результате выполнения очередного шага. Некоторые из этих методов целесообразно применять в сочетании с градиентными методами, что позволяет иногда построить довольно эффективные алгоритмы для решения задач нелинейного программирования.

Кроме того, безградиентные методы наиболее пригодны для оптимизации действующих промышленных и лабораторных установок в условиях отсутствия математического описания объекта оптимизации.

К безградиентным методам детерминированного поиска относятся: метод локализации экстремума функции, метод

«золотого сечения», метод поиска с использованием чисел Фибоначчи, метод Гаусса-Зейделя, метод сканирования. Рассмотрим один из этих методов – метод сканирования.

Метод сканирования

Метод сканирования заключается в последовательном просмотре значений критерия оптимальности в ряде точек, принадлежащих области изменения независимых переменных, и нахождении среди этих точек такой, в которой критерий оптимальности имеет минимальное (максимальное) значение. Точность метода определяется тем, насколько “густо” располагаются выбранные точки в допустимой области изменения независимых переменных.

Основным достоинством этого метода является то, что при его использовании с достаточно малым шагом изменения, по каждой из переменных гарантируется отыскание глобального оптимума.

Другое достоинство – независимость от вида оптимизируемой функции.

К недостаткам метода относится необходимость вычисления критерия для большого числа точек. Последнее обстоятельство существенно ограничивает возможности использования метода сканирования.

Практически этим методом могут решаться задачи, для которых число независимых переменных не превышает 2-3, кроме того, расчет одного значения критерия не требует большого объема вычислений.

Для сокращения объема вычислений используется алгоритм с переменным шагом сканирования.

Алгоритм метода сканирования с переменным шагом

Рассмотрим случай, когда число независимых переменных равно двум, задана область изменения независимых переменных:

$a_1 \le x_1 \le b_1$, $a_2 \le x_2 \le b_2$.

1. В качестве первого приближения минимального значения целевой функции примем $R^{(0)} = 100000$.

2. Определяем начальный шаг сетки переменных

$$\Delta x_1^{(0)} = k^r \Delta x_1,$$

$$\Delta x_2^{(0)} = k^r \Delta x_2,$$

где Δx_1 , Δx_2 – точность определения оптимума, r – число этапов уточнения поиска, на которых шаг поиска уменьшается в k раз.

3. Разбиваем область изменения независимых переменных с шагом $\Delta x_1^{(0)}$, $\Delta x_2^{(0)}$ на совокупность точек, значение целевой функции в которых вполне определяют ее поведение.

4. Определяем значение целевой функции в узлах сетки переменных. Пусть $x_1 = a_1$. Для каждого значения x_2 из интервала $[a_2, b_2]$ при $x_1 = a_1$ определяем значение целевой функции.

Изменяем значение переменной x_1 на шаг $x_1^{(0)}$ и при новом значении $x_1 = x_1 + \Delta x_1^{(0)}$ для каждого значения x_2 из интервала $[a_2, b_2]$ вычисляем значение целевой функции.

Аналогичным образом исследуем весь диапазон изменения переменных.

Находим значение целевой функции в узлах сетки переменных.

5. В результате грубого поиска определяем узел (c_1, c_2), в котором значение целевой функции наименьшее (наибольшее).

6. Определяем область изменения независимых переменных, в пределах которой будем уточнять значение оптимума целевой функции.

$$a_1 = c_1 - \Delta x_1^{(0)},\ a_2 = c_2 - \Delta x_2^{(0)},$$

$$b_1 = c_1 + \Delta x_1^{(0)},\ b_2 = c_2 + \Delta x_2^{(0)}.$$

7. Производим сканирование новой области с меньшим шагом

$\Delta x_1^{(1)} - \frac{\Delta x_1^{(0)}}{k}$

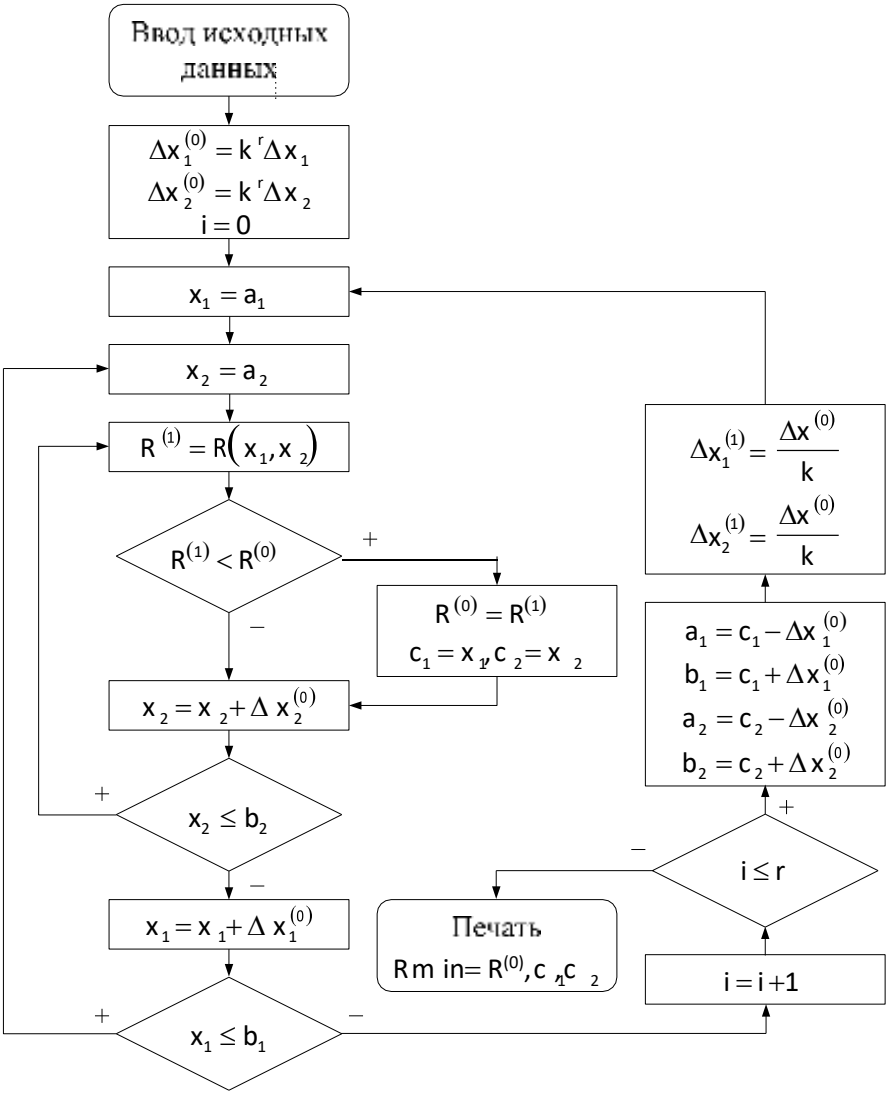
$\Delta x_2^{(1)} - \frac{\Delta x_2^{(0)}}{k}$

где $\Delta x_1^{(1)}$, $\Delta x_2^{(1)}$– шаг уточнения, с которым исследуется новая область.

8. Определяем значения целевой функции в узлах новой сетки переменных вышеизложенным способом.

Находим узел, в котором значение целевой функции наименьшее (наибольшее). Если более не предусмотрено этапов уточнения, то найденное значение целевой функции будет оптимальным.

Блок – схема алгоритма решения задачи методом сканирования



Методы случайного поиска

Основная идея методов случайного поиска заключается в том, чтобы перебором случайных совокупностей значений независимых переменных найти оптимум целевой функции или направление движения к нему. Общим для всех методов случайного поиска является применение случайных чисел в процессе поиска. Введем понятие случайного вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$,

определенного в n-мерном пространстве. Относительно вектора α предположим, что он с равной вероятностью может принимать любое направление в n-мерном пространстве и имеет длину

равную 1. Такойвектор может быть получен из последовательности случайных чисел β_j (j = 1,2,..., n), равномерно распределенных на числовом интервале.

Для нахождения случайного вектора α с помощь последовательности случайных чисел β_j , выразим компоненты случайного вектора α соотношениями:

$$a_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2}}; j = 1,2, \dots, n.$$

При таком способе определения случайного вектора α его длина будет равна 1, т.к. очевидно равенство:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 = 1.$$

Таким образом, вектор α характеризует случайное направление в n-мерном пространстве.

Метод случайных направлений

Основная идея метода заключается в том, что из точки n-мерного пространства, для которой значение $R(x^{(k)})$ функции цели уже рассчитано, производится шаг в случайном направлении, определяемом случайным вектором $\alpha^{(k)}$.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h\alpha^{(k)} ,$$

в которой вычисляется значение функции цели. Если при выполнении случайного шага $h\alpha^{(k)}$, приводящего в точку $x^{(k+1)}$, получается меньшее значение функции цели, то он считается удовлетворительным (удачным) и новое значение $R(x^{(k+1)})$ запоминается совместно с координатами точки $x^{(k+1)}$. Затем делается новый шаг $h\alpha^{(k+1)}$в случайном направлении и т.д.)

Если же случайный шаг $h\alpha^{(1)}$оказывается неудачным, то производится выборка следующего случайного вектора α и из точки $x^{(k)}$ снова выполняется шаг. Пробные шаги из точки $x^{(k)}$ делаются до тех пор, пока не будет найдена точка $x^{(k+1)}$, в которой функция цели имеет меньшее значение, после чего пробные шаги выполняются уже из точки $x^{(k=1)}$.

Поиск заканчивается, если после выполнения серии из s шагов меньшего значения функции цели найти не удается. Для практических расчетов число шагов в серии часто применяется равным размерности решаемой задачи n.

Эффективность поиска может несколько возрасти при применении шага переменной величины $h^{(k)}$. В данном случае после выполнения серии из s неудачных шагов поиск не заканчивается, а уменьшается только величина шага $h^{(k)}$, вслед за чем отсчет шагов в серии возобновляется. Критерием окончания поиска служит минимальный размер шага h^{min}, которым и задается точность определения оптимума.

Метод случайных направлений с обратным шагом

Этот метод случайного поиска по существу представляет собой улучшение алгоритма, рассмотренного выше. Отличительной особенностью этого метода является то, что при неудачном шаге $h^{(k)}\alpha^{(k)}$ из точки $x^{(k)}$ сразу производится шаг в обратном направлении $-h^{(k)}\alpha^{(k)}$. При достаточном удалении от оптимума такая стратегия поиска оказывается весьма эффективной. Если и обратный шаг оказывается неудачным, то можно сделать новый случайный шаг из точки $x^{(k)}$ или, что более целесообразно, перейти к поиску с уменьшенным размером шага. В последнем случае, однако, существует опасность замедления поиска вдали от оптимума, особенно, когда оптимизируемая функция имеет «овраги».

Получение случайных чисел из последовательности иррациональных чисел

Этот способ основан на свойстве иррациональных чисел образовывать неупорядоченную последовательность цифр дробной части при вычислении иррационального числа с достаточно высокой степенью точности. В наиболее простой форме данный способ реализуется при расчете дробной части произведения иррационального числа z на последовательность натуральных чисел. При этом алгоритм может быть записан в следующем виде:

$$\beta_j^{(k)} = \{kz_j\}; j = 1,2, \dots, n; k = 1,2,3, \dots$$

Фигурные скобки в выражении означают, что из произведения kz_j берется только дробная часть, которая должна вычисляться с необходимой степенью точности, характеризующей разрядность находимых псевдослучайных чисел.

Алгоритм метода случайных направлений с обратным шагом

1. Определяется значение критерия оптимальности в начальной точке поиска $R^{(0)} = R(x^{(0)})$.

2. Производится выборка случайных чисел на основе последовательности иррациональных чисел.

$$\beta_1^{(k)} = \{kz_1\}; \beta_2^{(k)} = \{kz_2\}\ k = 1,2,3, \dots$$

3. Находится значение целевой функции в следующей точке поиска

$$x^{(1)} = x^{(0)} + h^{(0)}\alpha^{(0)}$$

где

$$\alpha_j^{(0)} = \frac{\beta_j^{(1)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^{(1)}}}$$

4. Сравниваются значения целевой функции в точке $x^{(1)}$ и

начальной точке $x^{(0)}$. Если $R^{(1)} < R^{(0)}$, то выполненный шаг удачный и новое значение $R^{(1)}$ запоминается совместно с координатами точки $x^{(1)}$.

5. Затем производится новый шаг в случайном направлении из точки $x^{(1)}$: определяется $\beta^{(2)}$, считается $\alpha^{(1)}$, вычисляются $x^{(2)}$ и $R^{(2)}$ и т.д. При этом каждое новое удачное значение $R^{(k)}$ запоминается совместно с координатами точки $x^{(k)}$. Если же $R^{(k)} < R^{(k-1)}$, то производится шаг в обратном направлении - $h^{(k-1)}\alpha^{(k-1)}$. При удачном шаге также запоминается значение целевой функции и координаты точки. Если обратный шаг неудачный, то можно либо сделать шаг в новом направлении из предыдущей точки $x^{(k-1)}$, либо перейти к поиску с уменьшенным размером шага.

Критерием окончания поиска является минимальная величина рабочего шага h^{min}, которая задается по каждой из переменной.

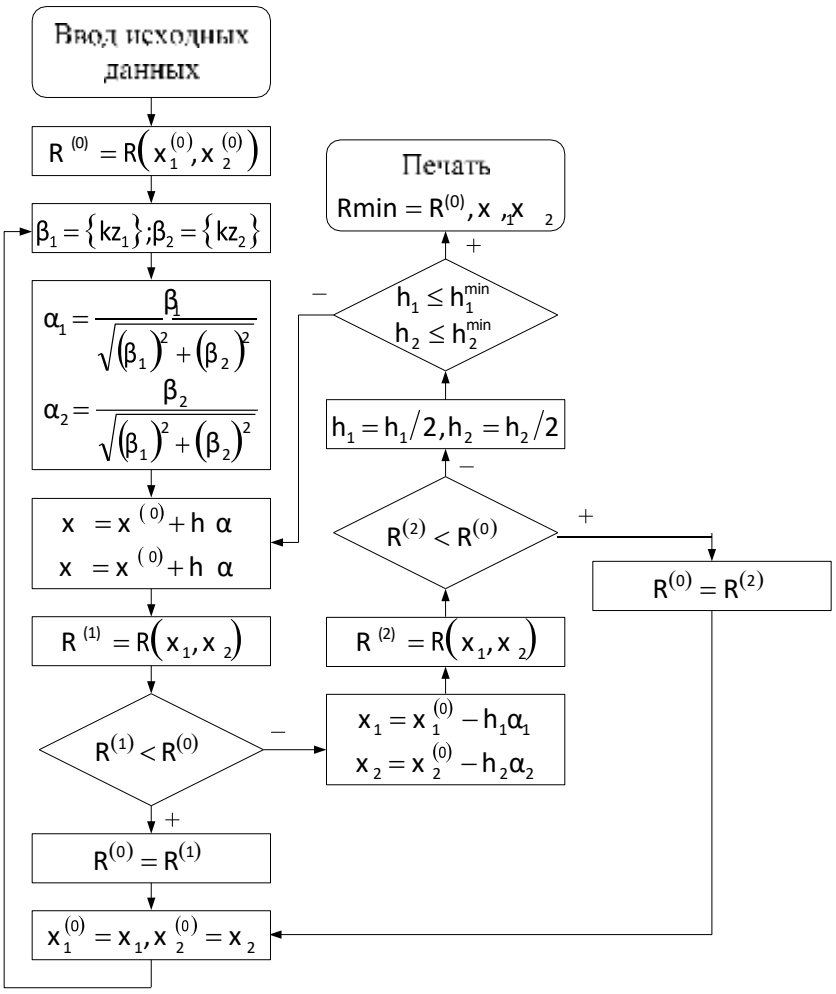
Для получения псевдослучайных последовательностей из иррациональных чисел по каждой переменной необходимо задать иррациональные числа z_1, z_2,..., z_n, например,

$$z_1 = \sqrt{3}, z_2 = \sqrt{5}, \ldots$$

и рассчитать дробную часть из произведения

$$\beta_1^{(k)} = \{k\sqrt{3}\}; \beta_2^{(k)} = \{k\sqrt{5}\}\ k = 1,2,3, \ldots$$

Блок – схема алгоритма решения задачи методом случайных направлений с обратным шагом



4.2. Поиск при наличии «оврагов» целевой функции

Приведенные выше методы оказываются малоэффективными при наличии «оврагов» у целевой функции. Поэтому при решении оптимизационных задач, целевые функции которых имеют особенность типа «оврагов» разработаны специальные методы. Один из таких методов называется методом шагов по «оврагу» .

Алгоритм решения задачи методом шагов по «оврагу»

1. Переменные, входящие в целевую функцию

$R(x_1, x_2, ..., x_n)$ разбиваются на две группы:

а) переменные, изменение которых существенно влияет на значение целевой функции;

б) переменные, при изменении которых значение целевой функции изменяется не столь значительно.

Разбиение переменных на группы по характеру их влияния на величину оптимизируемой функции производится либо перед началом поиска, либо во время его выполнения.

Например, для функции от двух переменных $R(x_1, x_2)$ вычисляются частные производные по каждой из них в начальной точке поиска. Если $\frac{\partial R}{\partial x_1}, \frac{\partial R}{\partial x_2}$, , то x_1 относят к первой, а x_2 ко второй группе.

2. Рассчитывается значение целевой функции в начальной точке поиска $x^{(0)}$.

$R^{(0)} = R(x^{(0)})$.

3. Производится шаг в направлении изменения переменной первой группы, например для x_1

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} - h_1 \frac{\partial R\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)}{\partial x_1}$$

4. Любым методом поиска, в данном случае методом релаксации, осуществляется поиск минимума целевой функции. В результате поиска придем на «дно оврага»

$$x^{Д} = \left(x_1^{Д}, x_2^{Д}\right).$$

5. Из начальной точки $x^{(0)}$ производится шаг в направлении изменения переменных второй группы, в результате которого придем в новое состояние, например для x_2 в случае функции двух переменных

$$x_2^{(1)} = x_2^{(0)} - h_2 \frac{\partial R\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)}{\partial x_2}$$

Вычисляется значение целевой функции в этой точке.

6. Из полученного состояния $x_1^{(0)}, x_2^{(1)}$ производится поиск минимума целевой функции, следуя п. 3-4. В результате поиска придем на новое «дно оврага»

$$x^{\text{НД}} = \left(x_1^{\text{НД}}, x_2^{\text{НД}}\right).$$

7. Выполняется шаг по «оврагу», например для функции двух переменных, шаг по «оврагу» можно произвести следующим образом. Если R(x ^{НД} , x ^{НД})< R(x ^{Д} , x ^{Д}), то

$$x_1^* = 2x^{\text{НД}} - x_1^{\text{Д}}, x_2^* = 2x^{\text{НД}} - x_2^{\text{Д}}$$

Если R(x ^{НД} , x ^{НД})> R(x ^{Д} , x ^{Д}), то

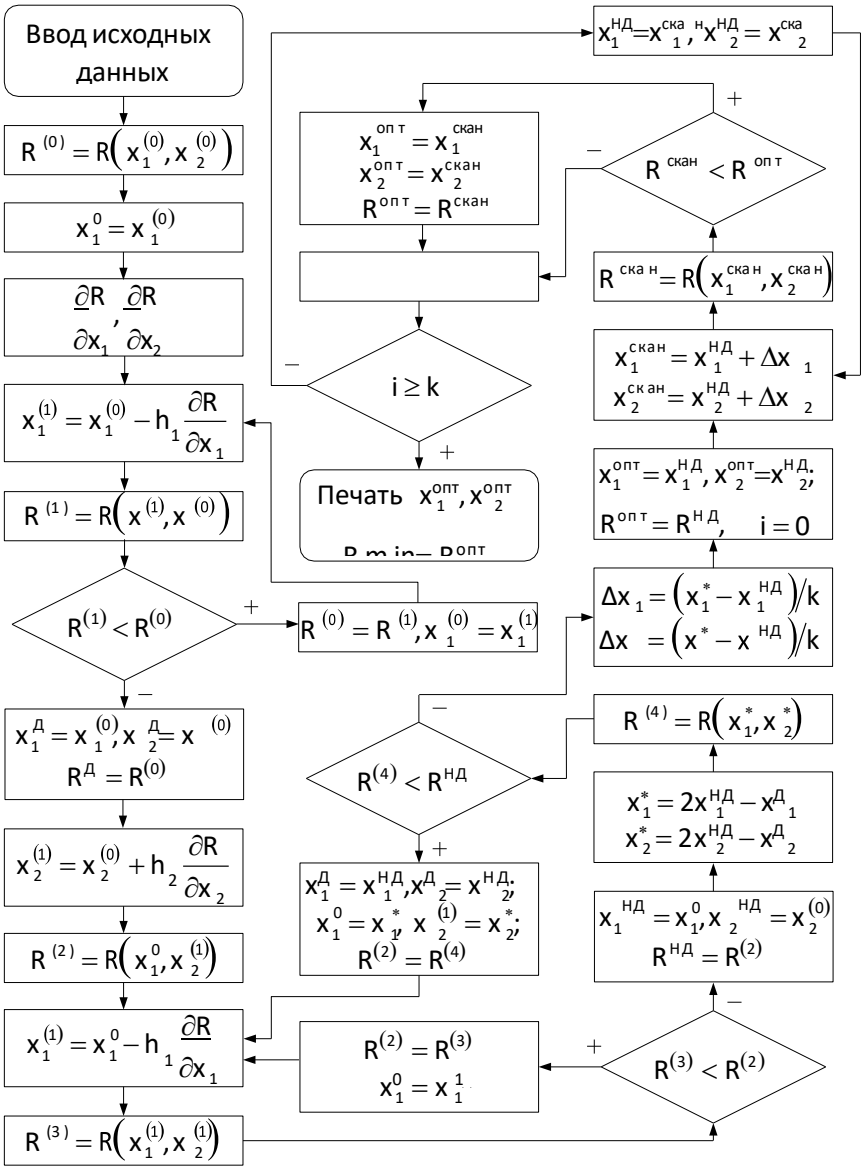
$$x_1^* = 2x^{\text{Д}} - x_1^{\text{НД}}, x_2^* = 2x^{\text{Д}} - x_2^{\text{НД}}$$

Далее вычисляется значение целевой функции в точке (x_1^*, x_2^*).

8. Если значение целевой функции в точке (x_1^*, x_2^*) меньше, чем в предыдущей точке, то поиск продолжается, начиная с п.6., при этом движение к новому дну «оврага» осуществляется из точки (x_1^*, x_2^*). Если же оно больше, то предполагается, что оптимум находится между новой точкой (x_1^*, x_2^*) и предыдущей точкой.

9. Любым методом поиска находится минимум целевой функции между предыдущей точкой и точкой (x_1^*, x_2^*).

Блок – схема алгоритма решения задачи методом шагов по «оврагу»



Задание: на основе принципа максимума разработать алгоритм решения задачи оптимизации? составить блок-схему алгоритма, написать программу используя языки программирования.

Задачи определения оптимальных процессов характеризуются двумя наиболее важными особенностями:

1) минимизируемый функционал зависит не только от фазовых координат x_j $(j=1,2,...,n)$, изменяющихся непрерывно, но и от управляющих воздействий u_i $(i=1,2,...,r)$ которые могут быть кусочно-непрерывными функциями с конечным числом точек разрыва первого рода (рис. 4.1);

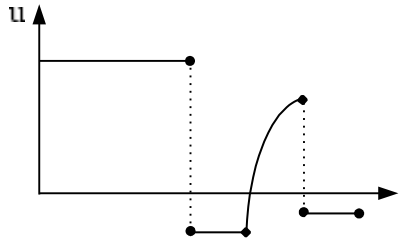


Рис. 4.1. Управляющее воздействие

2) ограничения на фазовые координатыи управляющие воздействия выражаются в виде неравенств

$$|x_j| \leq x_j^*, |u_i| \leq u_i^*.$$

Это значит, что фазовые траектории и управления могут частично или полностью проходить по границе допустимой области. Физический смысл рассмотрения замкнутой и ограниченной области управления u ясен: управляющими параметрами u1 , u 2 ,..., u r могут служить количество подаваемого в печь топлива, температура реактора, количество подаваемого в колонну пара или флегмы и т.п., которые не могут принимать сколь угодно больших или малых значений.

Каждую функцию $u(t)$, определенную на некотором отрезке времени $t_0 \le t \le t_1$ и принимающую значения в области управления U, будем называть управлением. Так как u представляет собой множество в пространстве управляющих параметров $u(t) = u_1(t), u_2(t), ..., u_r(t)$, то каждое управление является вектор-функцией,значения которой лежат в допустимой области $u \in U$.

Допустимым управлением условимся называть всякую кусочно-непрерывную функцию $u(t)$ со значениями в области управления $u \in U$, имеющую в каждой точке разрыва τ значение равное пределу слева

$$u(t) = u(\tau - 0)$$

и непрерывную на концах отрезка $t_0 \le t \le t_1$.

Классическое необходимое условие экстремума функционала в общем случае неприменимо для задач оптимального управления при наличии ограничений.

Задача с ограничениями, наложенными на координаты и управления методами классического вариационного исчисления решаются лишь в частных случаях. В реальных системах, где управление и фазовые переменные удовлетворяют ограничениям, мощным инструментом решения задачи оптимизации является метод, предложенный в 1956 г. Понтрягиным Л.С., Болтянским Б.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., называемый **принципом максимума**.

Принцип максимума является необходимым условием оптимальности для нелинейных систем, а для линейных – необходимым и достаточным. Из многих задач оптимального управления имеют существенное значение три задачи: задача максимального быстродействия, задача управления конечным состоянием и задача управления по минимуму интеграла.

Задачи по минимуму времени, по минимуму интеграла и управления конечным состоянием являются частным случаем задачи минимизации по отношению к одной координате.

Рассмотрим управление процессом n-го порядка

$$x_j = f_j(x, u, t), \; j = 1,2,...,n. \tag{4.9}$$

Необходимо определить управление, обеспечивающее минимум функционала

$$J = \int_{t0}^{t1} F(x, u, t)dt \tag{4.10}$$

Введем новую переменную x_{n+1} уравнением $\dot{x}_{n+1} = F(x, u, t)$ с начальным условием $x_{n+1}(t_0) = 0$. Интегрируя уравнение, получим

$$x_{n+1}(t_1) = \int_{t0}^{t1} F(x, u, t)dt \tag{4.11}$$

Тогда задача отыскания минимума функционала (4.2) сводится к задаче отыскания минимума $(n+1)$-ой координаты $x_{n+1}(t_1)$ в конечной точке траектории, т.е. при $t = t_1$.

Задачи оптимального управления можно рассматривать как частные случаи более общей задачи отыскания максимума или минимума функционала

$$J = \sum_{j=1}^{n} c_i \, x_i(t_i) \tag{4.12}$$

4.3.Формулировка принципа максимума

Пусть процесс описывается системой уравнений

$$x^{\cdot}_{j} = f_j(x, u, t),\ j = 1,2,...,n, \qquad (4.13)$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – n-мерный вектор состояния

$u = (u_1, u_2, ..., u_r)$ – r-мерный вектор управляющих

воздействий. Заданы начальные условия $x_j(t_0) = x_{j,0}$. Правый

конец траектории $x_j(t_1)$ свободен.

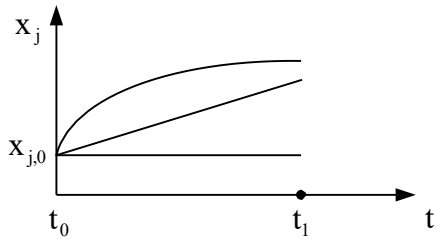


Рис. 4.2. Графическая иллюстрация задачи со свободным правым концом

Управление u определено в допустимой области, $u \in U$.

Необходимо определить вектор управления обеспечивающий минимум

$$J = \sum_{j=1}^{n} c_i\, x_i(t_i) \qquad (4.14)$$

где $c_j =$ const .

Решение задачи можно построить просто, если найти некоторую функцию, тесно связанную с функционалом J и динамикой процесса. Условия минимума функционала J следуют из условия максимума функции Гамильтона H, характеризующей сумму кинетической и потенциальной энергии и выражающейся в виде скалярного произведения вектора количества движения на вектор координат системы

$$H(x,u,\lambda,\mathrm{t}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mathrm{f}_i(x,u,t), \tag{4.15}$$

где λ_j – вектор количества движения.

Вектор количества движения λ_j определяется как решение дифференциального уравнения.

$$\lambda_i = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{f}_i(x,u,t)}{\partial \mathrm{x}_i} \tag{4.16}$$

при конечном условии

$\lambda_j(\mathrm{t}_1) = -\mathrm{c}_j$,

где c j – постоянные, входящие в функционал J.

Дифференцирование гамильтониана H по λ_j дает

$$\frac{\partial H}{\partial \mathrm{x}_j} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial \mathrm{f}_i(x,u,t)}{\partial \mathrm{x}_i} \tag{4.17}$$

Из уравнений (4.4), (4.7), (4.8) можно получить уравнения в канонической форме Гамильтона

$$\mathrm{x}_j = \frac{\partial H}{\partial \lambda_j} \tag{4.18}$$

$$\lambda_j = -\frac{\partial H}{\partial \mathrm{x}_j}, j = 1,2,\dots,n \tag{4.19}$$

которые должны интегрироваться при условиях:

$\mathrm{x}_j(\mathrm{t}_0) = \mathrm{x}_{j,0}$, $\lambda_j(\mathrm{t}_1) = -\mathrm{c}_j$.

Принцип максимума: если управление $\mathrm{u}_{\mathrm{opt}}(\mathrm{t})$ доставляет минимум функционалу J, то необходимо существование такой ненулевой непрерывной

вектор-функции $\lambda(t)=(\lambda_1(t),\lambda_2(t),...,\lambda_n(t))$, что управление $u_{opt}(t)$ удовлетворяет условию

$$H(x_{opt}, u_{opt}, \lambda, t) = \max H(x, u, \lambda, t)$$

Для решения задачи о минимуме функционала (4.5) при дифференциальных связях (4.4) необходимо:

1. Составить функцию

$$H = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i f_i(x, u, t), \qquad (4.20)$$

2. Определить сопряженную систему уравнений

$\lambda_j = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$ с конечными условиями $\lambda_j(t_j) = -c_j$.

1. Проинтегрировать исходную (4.4) и сопряженную (4.10) системы уравнений.

2. Составить условие максимума функции H, из которого определить оптимальное управление

$$H(x_{opt}, u_{opt}, \lambda, t) = \max H(x, u, \lambda, t)$$

Заметим, что для исходной системы уравнений (4.4) заданы начальные условия при $t = t_0$, $x_j(t_0) = x_{j,0}$, а для сопряженной системы (4.10) заданы конечные условия в конце интервала $t = t_1$, $\lambda_j(t_1) = -c_j$. Поэтому процесс вычисления оптимального управления можно вести от начала интервала к концу или же, наоборот, от конца к началу. В первом случае, зная переменные состояния $x_j(t_0)$ вначале интервала, задаются произвольно значениями переменных $\lambda_j(t_0)$ при $t = t_0$.

При вычислении от конца интервала к началу, где известны $\lambda_j(t_1) = -c_j$ задаются значения переменных $x_j(t_1)$. Если при расчете значения переменных λj (в первом случае) не совпадут с заданными в конце

интервала $\lambda_j(t_1) = -c_j$, то процесс вычисления повторяют уже при других значениях $\lambda_j(t_0)$ до тех пор, пока расчетные значения $\lambda_j(t_1)$ в конце интервала не совпадут с заданными с требуемой точностью вычислений. Аналогично поступает при расчете управления от конца к началу.

Решение задачи оптимального управления с использованием принципа максимума проводится численно с помощью ЭВМ.

Алгоритм численного решения задачи со свободным правым концом

Пусть требуется найти $u(t)$, обеспечивающее управление минимум функционалу

$$J = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j(t), \tag{4.21}$$

и удовлетворяющее системе дифференциальных уравнений

$$x_j = f_j(x, u, t), j = 1,2, \dots, n \tag{4.22}$$

с начальными условиями

$$x_i(t_0) = x_{i,0} \tag{4.23}$$

Кроме того управление должно удовлетворять ограничениям

$$u_1 \leq u(t) \leq u_2, \tag{4.24}$$

Где $u_1 = const$, $u_2 = const$, $t \in (t_0, t_1)$.

Алгоритм решения задачи следующий.

1. Составляется функция H

$$H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x, u, t), \qquad (4.25)$$

где f_j – правая часть j-го дифференциального уравнения (4.12), разрешенного относительно первой производной $\dot{x}_j$, λ_j – сопряженные функций, $\lambda_j = \lambda_j(t)$, $j = 1,2,\ldots,n$.

2. Определяется система сопряженных уравнений

$$\lambda_j = -\frac{\partial H}{\partial x_j}, j = 1,2,\ldots,n \qquad (4.26)$$

с конечными условиями $\lambda_j(t_1) = -c_j$.

3. Заданный интервал времени частей с шагом $\mathbf{\Delta t} = \frac{t_1 - t_0}{S}$.

4. Область изменения управления разбивается на L частей с шагом $\mathbf{\Delta u} = \frac{u_1 - u_0}{L}$.

5. Решение задачи условимся вести от начала интервала $t = t_0$. Поэтому в начале интервала задаются начальные условия для интегрирования сопряженных систем уравнений (4.16), полученных в п. 2, $\lambda_j(t_0) = \lambda_{j,0}$, $j = 1,2,\ldots,n$.

6. В начале интервала интегрирования $t = t_0$ по известным $x_{j,0}$, $\lambda_{j,0}$ вычисляется значение функции H при каждом значении управления u из области $u_1 \le u \le u_2$, начиная с $u = u_1$ до $u = u_2$ с шагом Δu.

7. Из рассчитанного массива значений функции H выбирается максимальное и определяется соответствующее оптимальное управление $u = u_{opt}(t)$.

8. На основе $u = u_{opt}(t)$ и $x_j(t)$, $\lambda_j(t)$ рассчитывается для следующего момента времени $t = t + \Delta t$ оптимальная фазовая траектория $x_{jopt}(t + \Delta t, u_{opt}(t))$ и значения сопряженных функций $\lambda_{jopt}(t + \Delta t, u_{opt}(t))$.

9. Используя рассчитанные $x_{jopt}(t + \Delta t)$, $\lambda_{jopt}(t + \Delta t)$ в исходной (4.12) и сопряженной 4.16) системах уравнений для момента времени $t = t + \Delta t$ вычисляется функция $H(t + \Delta t)$ для каждого управления u из области (u_1, u_2) также, как это описано в п. 6 для точки $t = t_0$.

10. Процедура расчета повторяется, начиная с п. 6 при каждом новом значении $t = t + \Delta t$ до тех пор, пока не будет рассчитано управление на всем интервале времени от t_0 до t_1.

11. В конце интервала интегрирования необходимо проверить выполнение конечных условий для функций λ_j: $\lambda_j(t_1) = -c_j$. Если расчетное значение $\lambda_j(t_1) \neq -c_j$, то начальные значения $\lambda_j(t_0) = \lambda_{j,0}$ заданы неверно. Требуется изменить начальные значения так, чтобы конечные λ j □t1 □ были равны заданным с допустимой погрешностью ε . При каждом новом значении $\lambda_{j,0}$ процедура расчета повторяется, начиная с п. 5.

Для определения начальных значений $\lambda_{j,0}$ предлагается использовать метод сканирования.

При использовании данного метода необходимо задать область значений начальных условий для интегрирования сопряженных систем уравнений и определить величину рабочего шага поиска

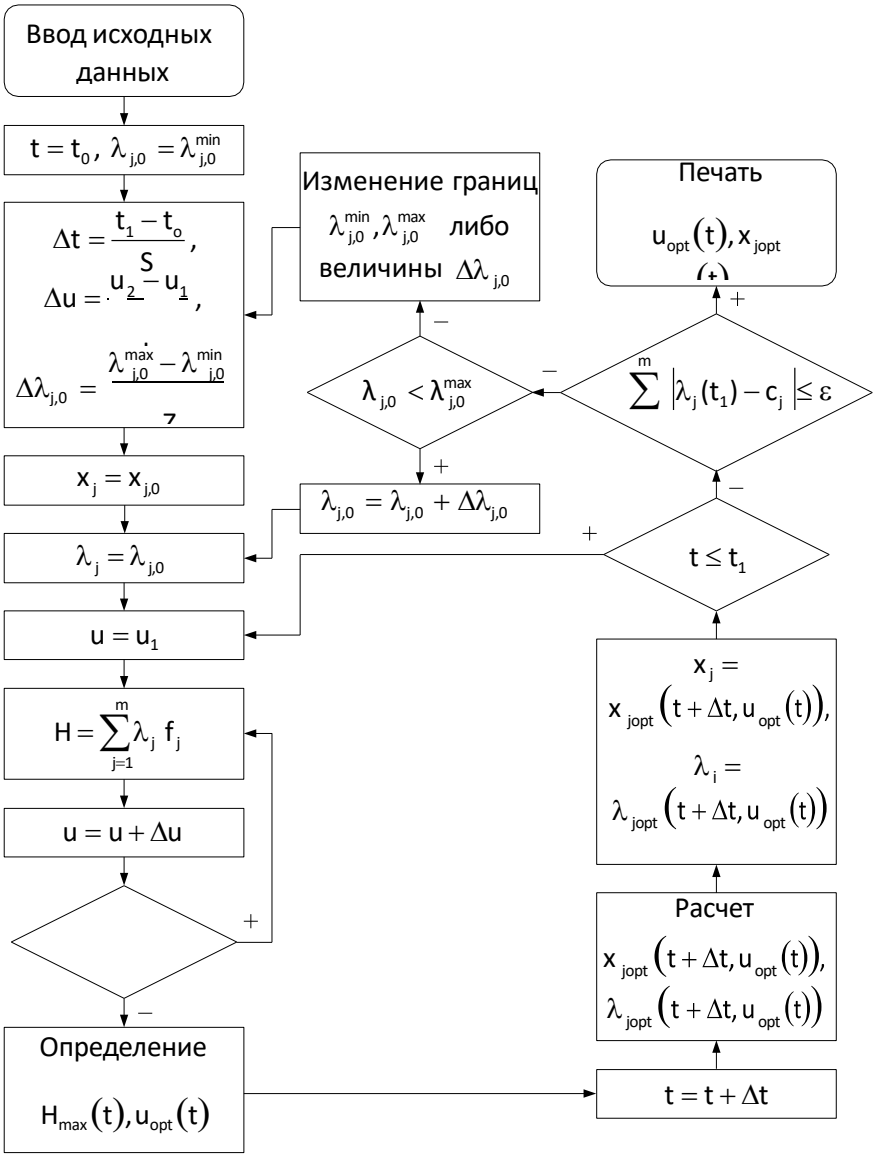
$$\Delta\lambda_{j,0} = \frac{\lambda_{j,o}^{max} \lambda_{j,o}^{min}}{Z}$$

Критерием окончания поиска может служить условие

$$\sum_{j=1}^{m}\left|\lambda_j(t_1) - c_j\right| \le \varepsilon$$

где ε – заданная погрешность расчета. Если в результате поиска не найдено значение λ j,0 , обеспечивающее выполнение условия окончания поиска, то следует пересмотреть границы области $\left(\lambda_{j,o}^{max}\lambda_{j,o}^{min}\right)$либо изменить величину рабочего шага $\Delta\lambda_{j0}$.

Блок-схема алгоритма решения задачи на основе принципа максимума



В реакторе идеального вытеснения протекает реакция первого порядка превращения исходного реагента А в продукт реакции Р.

Скорости химической реакций:

$w_A = -k_1(T)x_A$,

$w_P = k_1(T)\,x_A - k_2(T)x_p$,

где $k_1(T)$, $k_2(T)$ – константы скорости реакций, связаны с температурой реакции уравнением Аррениуса

$$k_1(T) = k_{1\infty}\exp\left(-\frac{E}{R_g T}\right), k_2(T) = k_{2\infty}\exp\left(-\frac{E}{R_g T}\right)$$

x A , x p – концентрации компонентов А и Р соответственно.

Обозначим x_A, x_p .

Процесс реакции в реакторе описывается системой уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = -k_1(T)x_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = k_1(T)x_1 - k_2(T)x_2$$

с начальными условиями $x_1(0) = x_{1,0}$, $x_2(0) = x_{2,0}$; $x_{1,0} = 1$, $x_{2,0} = 0$.

Управлением процесса является распределение температуры реактора $T(t)$, ^{0}C, которое удовлетворяет ограничениям $T_1 \le T \le T_2$, где $T_1 = \text{const}$, $T_2 = \text{const}$.

Время реакции $t \in [0, \tau_k]$, где τ_k – время окончания реакции, $\tau_k = 2$ мин.

Требуется найти такой закон изменения температуры реактора $T_{opt}(t)$, при котором концентрация продукта реакции на выходе реактора максимальна, что эквивалентно минимуму функционала $J = -x_2(\tau_k)$.

Шаг разбиения времени реакции τ_k следует выбрать равным

$\Delta t = \frac{T_2 - T_1}{L} = (0{,}1/0{,}2)$мин.

Шаг разбиения области изменения управления $T_1 \le T \le T_2$ принять равным

$\Delta T = \frac{T_2 - T_1}{L} = 5\ /10\ ^0$C.

Область значений начальных условий для интегрирования сопряженных систем уравнений $\left(\lambda_{j,o}^{max} \lambda_{j,o}^{min}\right)$ составляет [0.5;1], величина рабочего шага поиска

$$\Delta\lambda_{j,0} = \frac{\lambda_{j,o}^{max} \lambda_{j,o}^{min}}{Z} = 0.01/0.05.$$

После расчете функции H по каждому $T_1 \le T \le T_2$ в фиксированный момент времени t выбирается максимальное значение функции $H_{max}(t)$=max H(t), при этом величина $H_{max}(t)$ неотрицательна. Соответствующее этому значению управление есть оптимальное управление $T_{opt}(t)$. Далее на основе $T_{opt}(t)$. рассчитываются оптимальные значения концентраций $x_{1opt}(t+\Delta t, T\ \ (t))$ и $x_{2opt}(t+\Delta t, T\ \ (t))$, а также сопряженных функций $\lambda_{1opt}(t+\Delta t, T\ \ (t))$, $\lambda_{2opt}(t+\Delta t, T(t))$.

Расчет x_{1opt}, x_{2opt}, λ_{1opt} и λ_{2opt} в пределах от t до $t+\Delta t$ осуществляется одним из приближенных методов интегрирования дифференциальных уравнений.

Приближенные методы численного интегрирования дифференциальных уравнений

Существует несколько методов численного интегрирования дифференциальных уравнений (метод Эйлера, Рунге-Кутта, Милна, Адамса и др.) Рассмотрим методы Эйлера и Рунга-Кутта.

Метод Эйлера

Пусть дано уравнение $x^{\cdot} = f(x, t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$. Решением этого уравнения будет искомая интегральная кривая x = x(t).

Выберем достаточно малый шаг и построим систему равноотстоящих точек:

$t_i = t_0 + ih$, $i = 0,1,...,q$, где h – величина шага.

Интегрирование дифференциального уравнения проводится на основе соотношения:

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, t_i).$$

Интегрирование по методу Эйлера заключается в последовательном применении этого соотношения к уравнению $x^{\cdot} = f(x, t)$. В результате вычислений определяется некоторая ломаная линия, линейные отрезки которой имеют угол наклона, вычисляемый с помощью производной в соответствующей точке интегральной кривой. Недостатками метода являются малая точность и систематическое накопление ошибок.

Метод Рунге-Кутта

Наиболее распространенным в практике интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнения является метод Рунге-Кутта. При его использовании решение уравнений представляется в виде итерационных формул Рунге-Кутта.

Пусть дано уравнение

$$x^{\cdot} = f(x, t),$$

удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Выберем достаточно малый шаг и построим систему равноотстоящих точек:

$$t_i = t_0 + ih, \; i = 0,1,...,q.$$

Рассмотрим метод Рунге-Кутта четвертого порядка:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(g_1^{(i)} + 2g_2^{(i)} + 2g_3^{(i)} + g_4^{(i)}),$$

где

$$g_1^{(i)} = hf(x_i, t),$$

$$g_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{g_1^{(i)}}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right),$$

$$g_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{g_2^{(i)}}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right),$$

$$g_3^{(i)} = hf\left(x_i + g_3^{(i)}, t_i + h\right).$$

Достоинством метода Рунге-Кутта является то, что при его использовании нет необходимости вычислять производные выше первого порядка, а основные недостатки – громоздкость и значительный объем вычислений на каждом шаге.

Алгоритм численного интегрирования дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутта

В данной задаче исходная система уравнений имеет вид:

$x^{\cdot}_1 = -k_1(T)x_1$, $x^{\cdot}_2 = k_1(T)x_1 - k_2(T)x_2$ с начальными условиями $x_1(0) = x_{1,0}$, $x_2(0) = x_{2,0}$.

Сопряженная система уравнений:

$\dot{\lambda}_1 = k_1(T)(\lambda_1 - \lambda_2)$, $\dot{\lambda}_2 = k_2(T)\lambda_2$ с граничными условиями $\lambda_1(\tau_k) = -c_1$, $\lambda_2(\tau_k) = -c_2$.

Зададим начальные условия $\lambda_1(0) = \lambda_{1,0}$, $\lambda_2(0) = \lambda_{2,0}$.

1. Для интегрирования уравнений в интервале времени от t до t + Δt разобьем интервал на P частей с шагом $\Delta t_{RK} = \frac{\Delta t}{P}$

2. Пусть i = 0 . Определяем значение $t_i = t_{i-1} + i\Delta t_{RK}$.

3. Для уравнений исходной и сопряженной систем определяем величины:

$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}, a_4^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, b_3^{(i)}, b_4^{(i)}, c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, c_3^{(i)}, c_4^{(i)}, d_1^{(i)}, d_2^{(i)}, d_3^{(i)}, d_4^{(i)}$

Для уравнения $\dot{x}\ \dot{x}_1 = -k_1(T)x_1$:

$$a_1^{(i)} = \Delta t_{RK}(T_{opt}(t), x_{1,i} + a^i)$$

$$a_2^{(i)} = \Delta t_{RK}(T_{opt}(t), x_{1,i} + a^i)$$

$$a_2^{(i)} = \Delta t_{RK}(T_{opt}(t), x_{1,i} + a^i)$$

$$a_4^{(i)} = \Delta t_{RK}(T_{opt}(t), x_{1,i} + a^i)$$

Для уравнения $\dot{\lambda}_2 = k_2(T)\lambda_2$:

$$b_1^{(i)} = \Delta t_{RK}(T_{opt}(t), x_{1,i} + b^i)$$

$$b_2^{(i)} = \Delta t_{RK}(T_{opt}(t), x_{1,i} + b^i)$$

$$b_2^{(i)} = \Delta t_{RK}(T_{opt}(t), x_{1,i} + b^i)$$

$$b_4^{(i)} = \Delta t_{RK}(T_{opt}(t), x_{1,i} + b^i$$

Для уравнения $\dot{x}_2 = k_1(T)x_1 - k_2(T)x_2$:

$$c_1^{(i)} = \Delta t_{RK}(T_{opt}(t), x_{1,i} + c^i)$$

$$c_2^{(i)} = \Delta t_{RK}(T_{opt}(t), x_{1,i} + c^i)$$

$$c_2^{(i)} = \Delta t_{RK}(T_{opt}(t), x_{1,i} + c^i)$$

$$c_4^{(i)} = \Delta t_{RK}(T_{opt}(t), x_{1,i} + c^i)$$

Для уравнения $\dot{\lambda}_1 = k_1(T)(\lambda_1 - \lambda_2)$:

$$d_1^{(i)} = \Delta t_{RK}(T_{opt}(t), x_{1,i} + d^i)$$

$$d_2^{(i)} = \Delta t_{RK}(T_{opt}(t), x_{1,i} + d^i)$$

$$d_2^{(i)} = \Delta t_{RK}(T_{opt}(t), x_{1,i} + d^i)$$

$$d_4^{(i)} = \Delta t_{RK}(T_{opt}(t), x_{1,i} + d^i)$$

4. Далее вычисляем:

$$x_{1,i+1} = x_{1,i} + \frac{1}{6}(a_1^{(i)} + 2a_2^{(i)} + 2a_3^{(i)} + a_4^{(i)}),$$

$$\lambda_{2,i+1} = \lambda_{2,i} + \frac{1}{6}(b_1^{(i)} + 2b_2^{(i)} + 2b_3^{(i)} + b_4^{(i)}),$$

$$x_{2,i+1} = x_{2,i} + \frac{1}{6}(c_1^{(i)} + 2c_2^{(i)} + 2c_3^{(i)} + c_4^{(i)}),$$

$$\lambda_{1,i+1} = \lambda_{1,i} + \frac{1}{6}(d_1^{(i)} + 2d_2^{(i)} + 2d_3^{(i)} + d_4^{(i)}),$$

5. Процедуру вычисления значений $x_{1,i+1}, x_{2,i+1}, \lambda_{2,i+1}, \lambda_{1,i+1}$ повторяем при последующих значениях $i = 1,2,\ldots,P-1$.

4.4. Порядок выполнения работы

1. Изучить принцип максимума.

2. Получить задание и исходные данные у преподавателя согласно табл. 4.1.

3. Разработать алгоритм решения задачи оптимизации и составить блок-схему.

4. Написать программу решения задачи на ЭВМ.

5. Исследовать влияние величины рабочего шага поиска начальных условий для интегрирования сопряженных систем уравнений на погрешность расчета.

6. Проанализировать влияние величины шага интегрирования в методе Рунге-Кутта на оптимальные фазовые траектории концентраций и температурный профиль по длине реактора.

7. Подготовить ответы на контрольные вопросы.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №5

Разработка и оптимизация модели ресурсов облачных технологий на основе пакета MS Excel

Особенности ресурсного обеспечения сложных информационно-вычислительных систем

Применение разработок виртуализации в сложных вычислительных системах выделяется следующими особенностями:

1. Приемлемой ценой оборудования из-за применения серверов виртуализации вместе с тонкими клиентами, позволяющего:

– во много раз уменьшить объем используемого дискового пространства;

– заказчикам приобретать оборудование по более низким ценам.

2. Заметное сокращение энергопотребления. Так как при работе тонкие клиенты меньше расходуют электроэнергию.

3. В настоящее время тонкие клиенты в гораздо дешевле чем раньше.

4. Сейчас тонкие клиенты могут быть установлены на компьютеры более ранних версий это говорит о том, что не обязательно использовать новые дорогостоящие ПК.

5. С использованием виртуализации снижается цена на лицензионное ПО.

6. Сокращается время на обслуживание программного обеспечения.

7. Создание образов на виртуальных машинах, говорит о высокой защищенности от вирусов.

8. Имея под рукой интернет, можно подключиться к рабочему столу из любой точки мира.

9. Работа с виртуальной машиной показывает, что по времени загрузка ОС проходит быстрее.

5.1. Разработка задачи оптимизации

Допустим, что для любого вида виртуальной машины F_i, где $i=1, \ldots, n$, известны ее технические характеристики, то есть количественное содержание в одном экземпляре данного вида виртуальных машин назначенных компонентов. В таком случае можно изобразить матрицу, состоящую из характеристики видов виртуальных машин:

$$\begin{array}{c} \\ N_1 \\ \vdots \\ N_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} F_1 & \ldots & F_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \end{array} \tag{5.1}$$

Из ячеек такой таблицы образуется матрица размера m*n, которая будет называться матрицей виртуальных ресурсов. Затем, мы составили распределение мощностей $x^T=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ на определенный промежуток времени, для которого известно точное количество пользователей. Другими словами, планируется предоставить каждой группе пользователей сессию:

1) x_1 экземпляров ВМ вида F_1;

2) x_2 экземпляров ВМ вида F_2;

3) ……;

4) x_n экземпляров ВМ вида F_n.

Просто определить, какой размер оперативной памяти и прибора хранения данных, а также значение производительности микропроцессора получит каждая группа пользователей на сессию. Именно характеристика N_1 располагается в этом распределении мощностей в общем количестве:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \tag{5.2}$$

Потому что в x_1 экземплярах ВМ типа F_1,исходя из матрицы виртуальных ресурсов, содержится $a_{11}x_2$ единиц характеристик N_1. К этому количеству прибавляется размер $a_{12}x_2$ характеристики N_1 из x_2 экземпляров ВМ вида F_2 и т. д. Так же можно вычислить и число всех остальных характеристик N_i в составленном распределении мощностей $x^T=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Положим, что имеются требования, которые касаются предоставления некого определенного количества каждой из характеристики N_i, где $i = 1, \ldots, m$, каждой группе пользователей в заданный срок. Например, общий объем выделяемой оперативной памяти не должен быть меньше требуемого. Выразим такие

требования вектором $b^T = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, i компонента которого указывает минимальное требуемое содержание характеристики N_i в распределении мощностей. Отсюда следует, что координаты x_i вектора x^T должны удовлетворять следующей системе ограничений:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Из постановки задачи видно, что все переменные x_1, x_2, …, x_n положительны. Исходя из этого к ограничениям (3) добавляются неравенства:

$$\begin{gathered} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n \geq 0. \end{gathered} \tag{5.4}$$

Понятно, что любое распределение мощностей $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обязано удовлетворять условиям (3) и (4). Но таких распределений мощностей может оказаться бесконечно много, в связи с этим для выбора одного из них вводят критерий стоимости – цену набора. Пусть стоимость ВМ типа F_1, F_2, …, F_n равна соответственно c_1, c_2, …, c_n. От сюда следует, что стоимость общего распределения мощностей $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно записать в виде ценовой функции:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{5.5}$$

Окончательная формулировка задачи о распределении виртуальных ресурсов: среди всех векторов $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которые подходят под ограничения (3) и (4), необходимо выбрать такой вектор, для которого выражение (5) принимает минимальное значение. На этом процесс построение задачи о составлении распределения мощностей окончен. Задачу поиска наиболее экономичного распределения виртуальных ресурсов кратко выражается в следующей матрично-векторной формой:

$$\begin{gathered} c^T x \to min, \\ A_x \geq b, \\ x \geq 0. \end{gathered} \tag{5.6}$$

где A – матрица размерности $m \times n$; b, c, x – векторы-столбцы соответствующей размерности. Выражение реальной задачи в строгой математической форме, позволило применить весь арсенал математических методов для ее решения.

5.2. Средство Excel «Поиск решения»

Надстройка MS Excel «Поиск решения» позволяет решать широкий круг задач на оптимизацию. «Поиск решения» в Excel позволяет без временных затрат находить оптимальные решения достаточно сложных моделей, не только линейных, без знания алгоритмов и длительных рутинных итераций.

«Поиск решения» — это часть блока задач, который иногда называют анализ «что-если». С помощью процедуры поиска решения можно найти оптимальное значение формулы, содержащейся в ячейке, такая ячейка называется целевой. Процедура работает с группой ячеек, прямо или косвенно связанных с формулой в целевой ячейке. Чтобы получить в зависимости от формулы, которая содержится в целевой ячейке, заданный результат, процедура изменяет значения во влияющих ячейках. Так же для уменьшения количества значений, которые используются в модели, применяются ограничения. Такие ограничения могут ссылаться на другие влияющие ячейки.

Процедуру поиска решения можно использовать для определения значения влияющей ячейки, соответствующему экстремуму зависимой ячейки.

Надстройка MS Excel «Поиск решения» позволяет получить искомое значение в определенной ячейке, которую называют целевой, путем изменения значений нескольких влияющих ячеек. Кроме того, при поиске решения можно указать дополнительные условия – ввести ограничения на изменение параметров влияющих ячеек. Допускается установка до 200 изменяемых ячеек.

Для выполнения операции «Поиск решения» используется команда меню «Сервис – Поиск решения». Она может отсутствовать в меню сервис. В этом случае нужно в меню Сервис выбрать команду Надстройки и установить в списке включенных надстроек нужный флажок.

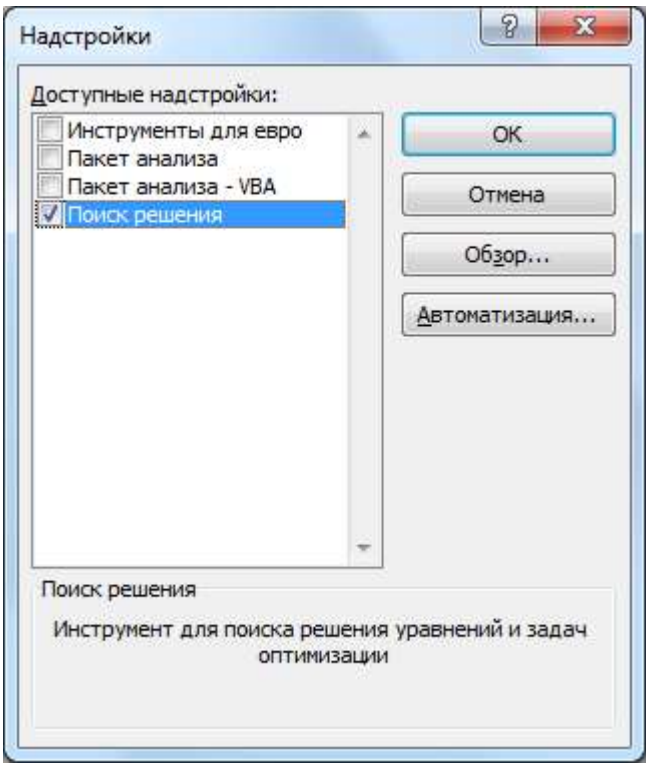


Рисунок 5.1. Список подключенных надстроек

Надстройки — это специальные средства, которые расширяют вычислительные возможности Excel. Так как подключение надстроек увеличивает нагрузку на вычислительную систему, рекомендуется подключать только те из них, которые необходимы для текущего сеанса работы.

Для выполнения операции «Поиск решения» нужно выполнить команду «Сервис» – «Поиск решения» и в диалоговом окне «Поиск решения» задать значения параметров решения:

– адрес целевой ячейки, в которой будет подбираться значение;

– критерий оптимальности (максимальное или минимальное значение) или значение, которое следует найти;

– адреса изменяемых ячеек; при этом адреса отдельных ячеек или диапазонов разделяются запятыми; кнопка «Предположить» служит для автоматического выделения ячеек, влияющих на целевую;

– ограничения, которые должны учитываться при поиске решения; для ввода нескольких ограничений используется кнопка «Добавить».

Результат выполнения вышеописанных действий можно наблюдать на рисунке 5.2:

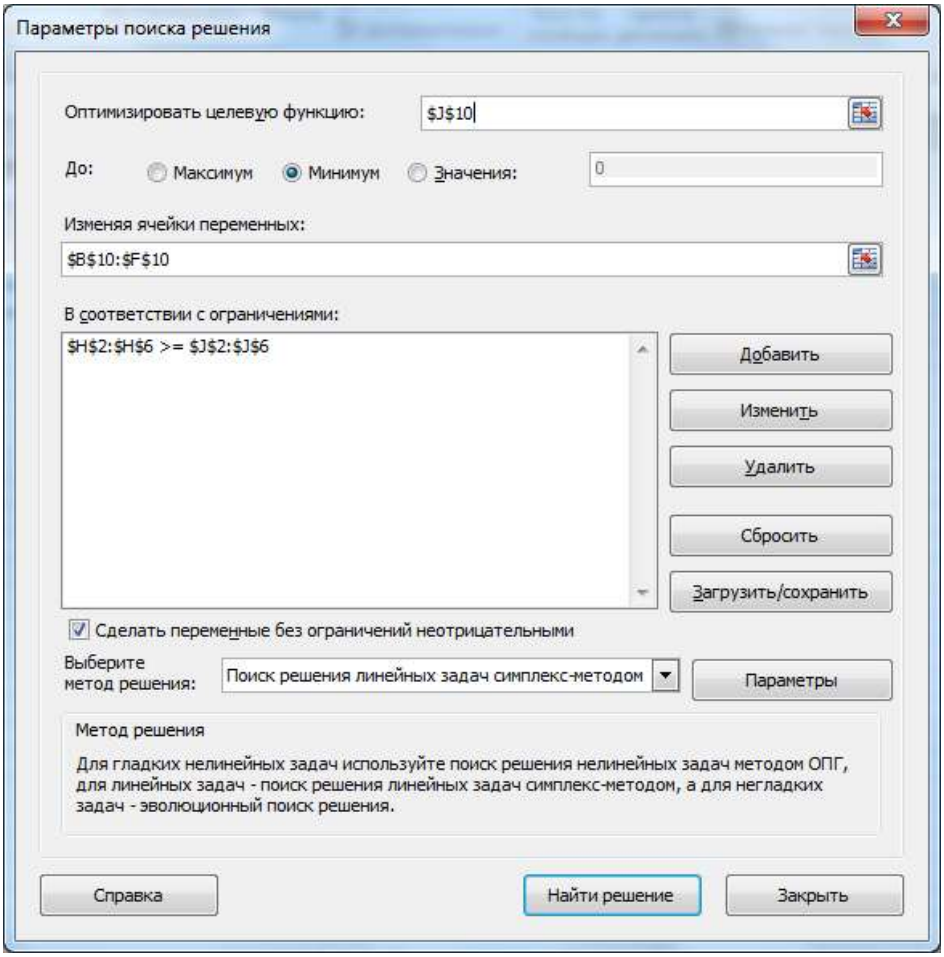


Рисунок 5.2. Окно параметров надстройки «Поиск решения»

Кликнув на кнопку «Параметры» позволяется изменить параметры поиска: способ поиска решения, время вычислений, точность определения результатов.

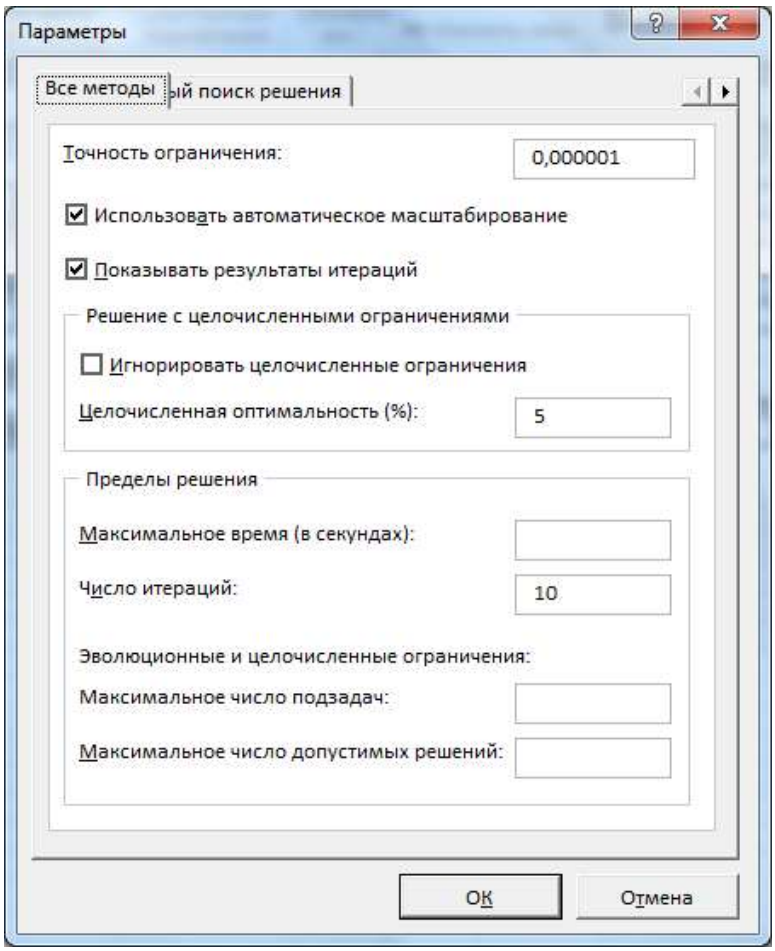


Рисунок 5.3. Диалоговое окно установки параметров поиска решения

В основном достаточно будет использовать настройки по умолчанию. Это окно позволяет так же сохранить модель поиска или загрузить ранее сохраненную модель.

Когда поиск решения успешно завершается, результаты вычислений заносятся в исходную таблицу, а в окне «Результаты решения» пользователь имеет возможность выбрать следующие варианты:

– сохранить найденной решение в исходной таблице;
– восстановить исходные значения;
– сохранить результаты в виде сценария;
– сформировать отчет по результатам выполнения операции.

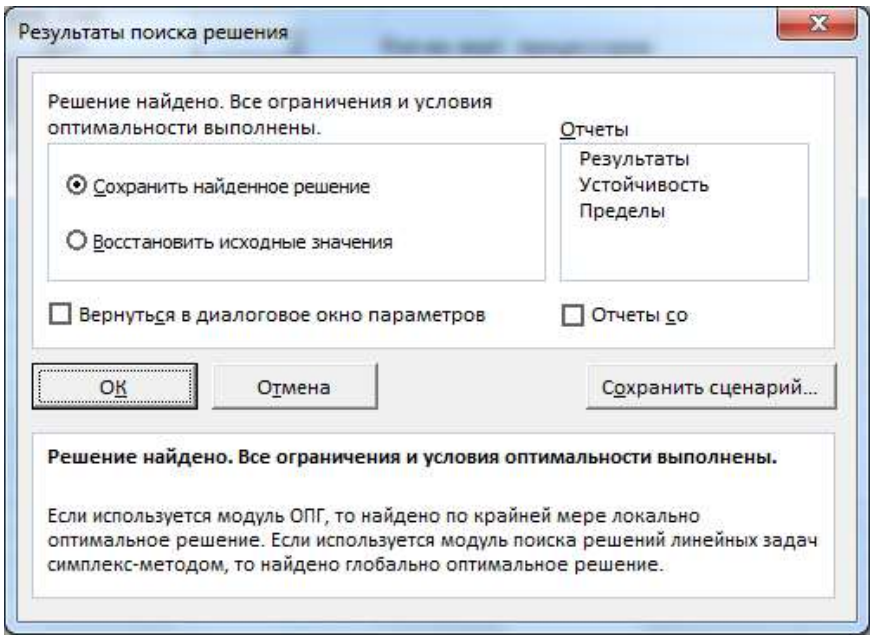


Рисунок 5.4. Диалог «Результаты поиска решений»

Отчет по результатам поиска создается на отдельном рабочем листе и содержит информацию об исходных и конечных значениях целевой и влияющей ячеек и наложенных ограничениях.

5.3. Вычисление плана предоставления ресурсов

Используя описанное выше программное средство, вычислим комбинацию ВМ с наименьшей стоимостью, удовлетворяющую системным требованиям приложения, выполняемого в ЦОД, основанном на облачных технологиях. В рассматриваемой системе используется пять типов виртуальных машин (таблица 1), используемых для обеспечения работы конечного множества экземпляров приложения, требующих одинаковых объемов ресурсов.

Таблица 5.1. Типы виртуальных машин

№	Стоимость в час, $	Название	vCPU (кол-во процессоров)	ECU (производительность вирт. процессора)	ОЗУ, Гб	Уст-во хранения, Гб	Производительность Сети
1	0.209	r3.xlarge	4	13	30.5	80	Средняя(3)
2	0.190	m3.xlarge	4	13	15	80	Высокая(4)
3	0.111	m2.xlarge	2	6,5	17,1	420	Средняя(3)
4	0.146	c3.xlarge	4	14	7,5	80	Средняя(3)
5	0.767	g2.2xlarge	8	26	15	100	Высокая(4)

Здесь vCPU (virtual CPU) – виртуальный процессор, производительность которого измеряется в ECU (EC2 Compute Unit). Согласно информации, один ECU соответствует 1–1,2 ГГц процессора AMD Opteron или Intel Xeon 2007 года производства. Так, про экземпляр ВМ типа r3.xlarge можно сказать, что он содержит 30,5 Гб оперативной памяти, четыре процессора по тринадцать ECU каждый и устройство хранения данных в 80 Гб, при этом его базовая стоимость составляет 0,209 долларов в час. Данные типы ВМ были выбраны из набора экземпляров ВМ, разработанных компанией Amazon EC2 , являющейся одним из лидеров на рынке виртуализации. Обозначим типы ВМ r3.xlarge, m3.xlarge, m2.xlarge, c3.xlarge, g2.2xlarge как F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 соответственно, а технические характеристики ВМ через N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, где N_1 – количество виртуальных процессоров: {4; 4; 2; 4; 8}, N_2 – мера производительности процессора: {13; 13; 6,5; 14; 26}, N_3 – объем оперативной памяти в Гб: {30,5; 15; 17,1; 7,5; 15}, N_4 – устройство хранения данных в Гб: {80; 80; 420; 80; 100}, $N5$ – мера производительности сети, где очень низкая производительность – 1, низкая – 2, средняя – 3, высокая - 4: {3;4;3;3;4}. На основании (1) и введенных обозначений построим матрицу виртуальных ресурсов ЦОД:

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
N_1	4	4	2	4	8
N_2	13	13	6.5	14	26
N_3	30.5	15	17.1	7.5	15
N_4	80	80	420	80	100
N_5	3	4	3	3	4

Пусть нам известно, что для работы одного экземпляра приложения необходимы следующие минимальные значения технических характеристик: 3 виртуальных процессора производительностью в 8 ECU, 4,096 Гб оперативной памяти, устройство хранения данных объемом 100Гб и средняя производительность сети. Тогда вектор ограничений имеет вид b^T = (3; 8; 4.096; 100; 3) и мы получаем:

$$\begin{gathered} 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 8x_5 \geq 3 \\ 13x_1 + 13x_2 + 6.5x_3 + 14x_4 + 26x_5 \geq 8, \end{gathered} \tag{5.7}$$

$$30.5x_1 + 15x_2 + 17.1x_3 + 7.5x_4 + 15x_5 \geq 4.096,$$
$$80x_1 + 80x_2 + 420x_3 + 80x_4 + 100x_5 \geq 100,$$
$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 \geq 3.$$

Из смысла задачи очевидно, что все переменные x_1, x_2, …, x_n неотрицательны. На основании этого к ограничениям (5.5) добавляются неравенства:

$$\begin{gathered} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ \ldots, \\ x_5 \geq 0. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Из табл. можно вывести вектор стоимости ВМ типа F_1, F_2, …, F_5, который записывается следующим образом:

$$c^T = (0.209;\ 0.190;\ 0.111;\ 0.146;\ 0.767). \tag{5.9}$$

Следовательно, стоимость всего распределения мощностей $x^T = (x_1, x_2, \ldots, x_5)$ может быть записана в виде ценовой функции:

$$0.209x_1 + 0.190x_2 + 0.111x_3 + 0.146x_4 + 0.767x_5 \rightarrow \mathrm{m}in \tag{5.10}$$

Задачу поиска наиболее дешевого распределения виртуальных ресурсов можно выразить в следующей матрично-векторной форме:

$$\begin{gathered} 0.209x_1 + 0.190x_2 + 0.111x_3 + 0.146x_4 + 0.767x_5 \rightarrow min \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 8x_5 \geq 3 \\ 13x_1 + 13x_2 + 6.5x_3 + 14x_4 + 26x_5 \geq 8, \\ 30.5x_1 + 15x_2 + 17.1x_3 + 7.5x_4 + 15x_5 \geq 4.096, \\ 80x_1 + 80x_2 + 420x_3 + 80x_4 + 100x_5 \geq 100, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 \geq 3 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_5 \geq 0. \end{gathered} \tag{5.11}$$

5.4. Вычисление плана предоставления ресурсов

Вычисления системы уравнений (5.11) производились с помощью надстройки «Поиск решения» в таблице Microsoft Excel.

Для выполнения расчетов требуется повторить следующие этапы:

1. Активировать надстройку пакета MS Excel «Поиск решения».
   1.1. Нажать кнопку «Параметры» в меню «Файл».

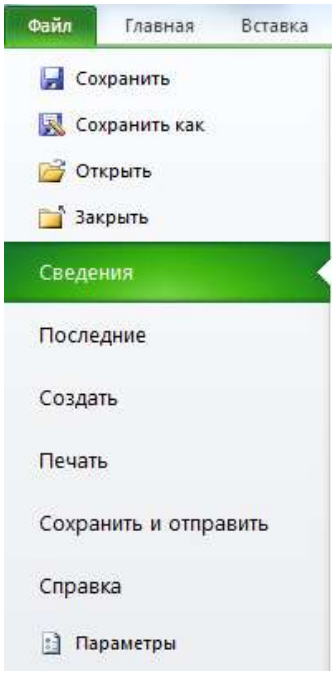


Рисунок 5.5. Расположение кнопки «Параметры» в пакете MS Excel

1.2. В открывшемся окне «Параметры Excel» выбрать вкладку «Дополнения»:

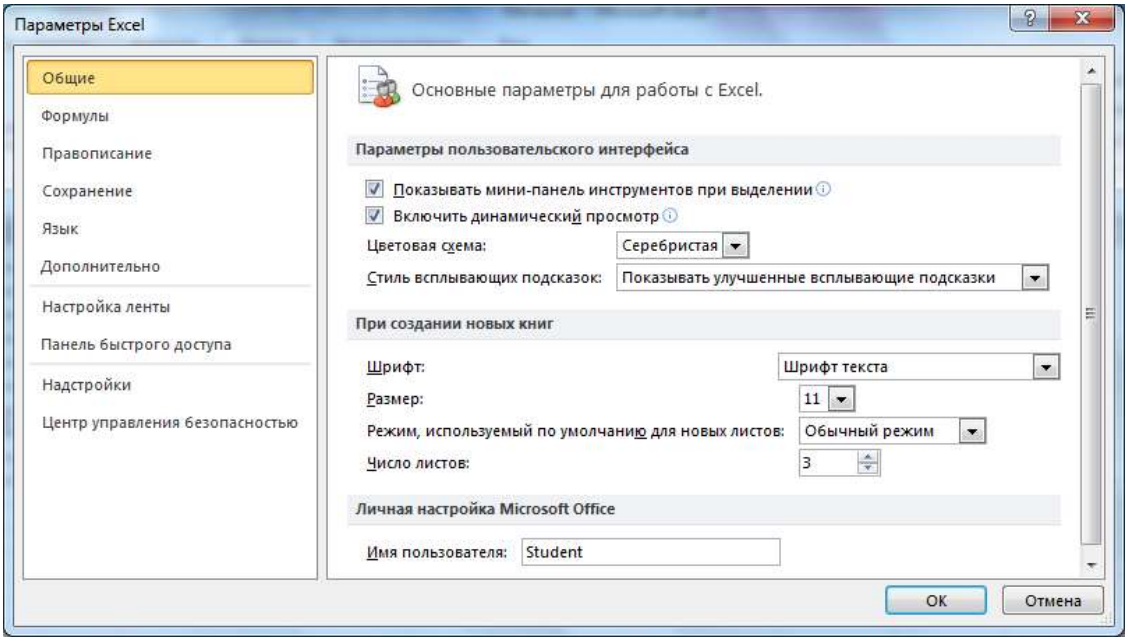


Рисунок 5.6. Окно «Параметры Excel»

1.3. Выбрать пункт «Поиск решений» из списка доступных дополнений и нажать кнопку «Перейти».

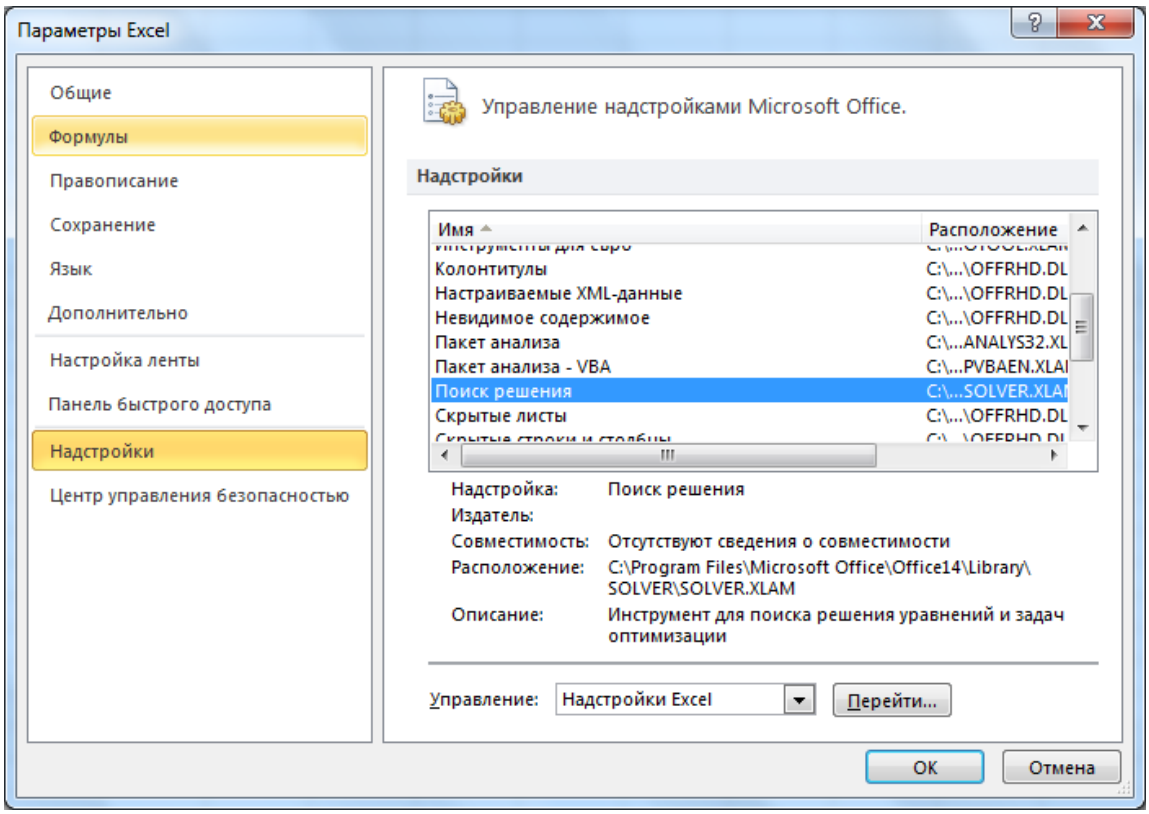


Рисунок 5.7. Список доступных дополнений в MS Excel

1.4. В открывшемся окне ответить пункт «Поиск решений» и нажать кнопку «ОК».

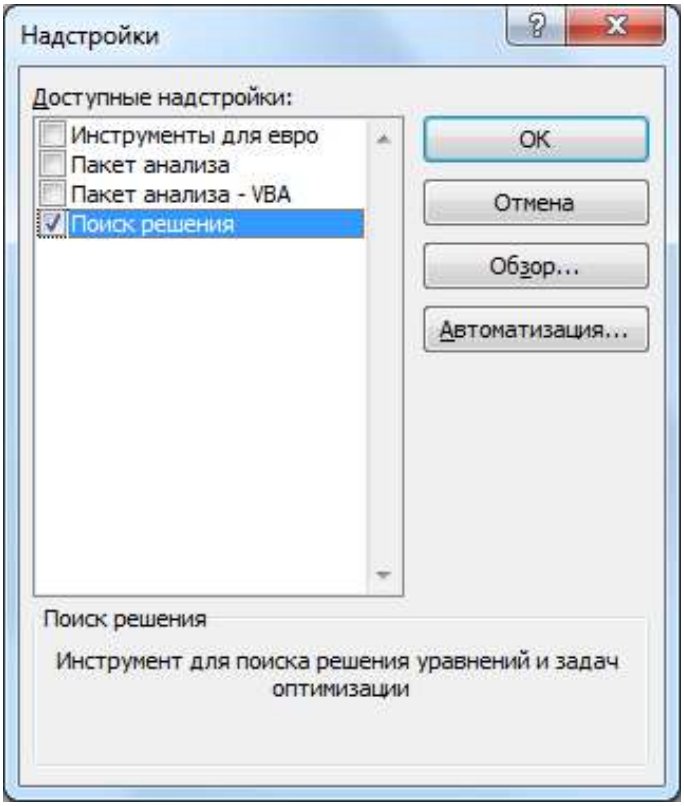


Рисунок 5.8. Список подключенных надстроек

2. Создать таблицу следующего вида:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		F1	F2	F3	F4	F5		Треб. техн. ч-ки				
2	N1	4	4	2	4	8		3	>=	3		Кол-во вирт. процессоров
3	N2	13	13	6,5	14	26		1,03E+01	>=	10,25		Произв. процессоров
4	N3	30,5	15	17,1	7,5	15		1,23E+01	>=	12,3		Обьем ОЗУ
5	N4	80	80	420	80	100		250	>=	250		Обьем НЖДМ
6	N5	3	4	3	3	4		3	>=	3		Произв. сети
7												
8	Ст-ть	0,209	0,19	0,111	0,146	0,767						
9										Итог. стоим.		
10	X	1,39E-16	0	0,5	0,5	0				0,1285		
11												
12												
13												

Рисунок 5.9. Структура расчетной таблицы

3. Ввести значения исходных данных в расчетную таблицу. В ячейки диапазона B2:F6 вводятся характеристики F1..F5 виртуальных машин N1..N5. В диапазон ячеек J2:J6 вводятся требуемые приложениям характеристики производительности. В диапазон B8:F8 вводятся стоимости часа использования виртуальных машин N1..N5.

4. Ввести формулы в расчетную таблицу согласно таблице 2:

Таблица 5.2. Значения ячеек расчетной таблицы

Адрес ячейки	Формула в ячейке
H2	=$B2*$B$10+$C2*$C$10+$D2*$D$10+$E2*$E$10+$F2*$F$10
H3	=$B3*$B$10+$C3*$C$10+$D3*$D$10+$E3*$E$10+$F3*$F$10
H4	=$B4*$B$10+$C4*$C$10+$D4*$D$10+$E4*$E$10+$F4*$F$10
H5	=$B5*$B$10+$C5*$C$10+$D5*$D$10+$E5*$E$10+$F5*$F$10
H6	=$B6*$B$10+$C6*$C$10+$D6*$D$10+$E6*$E$10+$F6*$F$10
J10	=B10*B8 + C10*C8 + D10*D8 + E10*E8+F10*F8

5. Нажат кнопку «Поиск решения» из группы «Анализ» во вкладке «Данные».

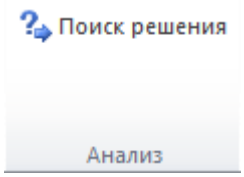


Рисунок 5.10. Расположение кнопки «Поиск решения» в MS Excel

6. В появившемся окне «Параметры поиска решения» ввести параметры поиска решения согласно рисунку 11, а именно:

— к какому значению будет стремиться полученный результат (минимальное, максимально или просто значение);

— какие ячейки переменных при этом изменяются;

— ограничения;

— метод решения (в данной работе используется «Поиск решения линейных задач симплекс-методом»).

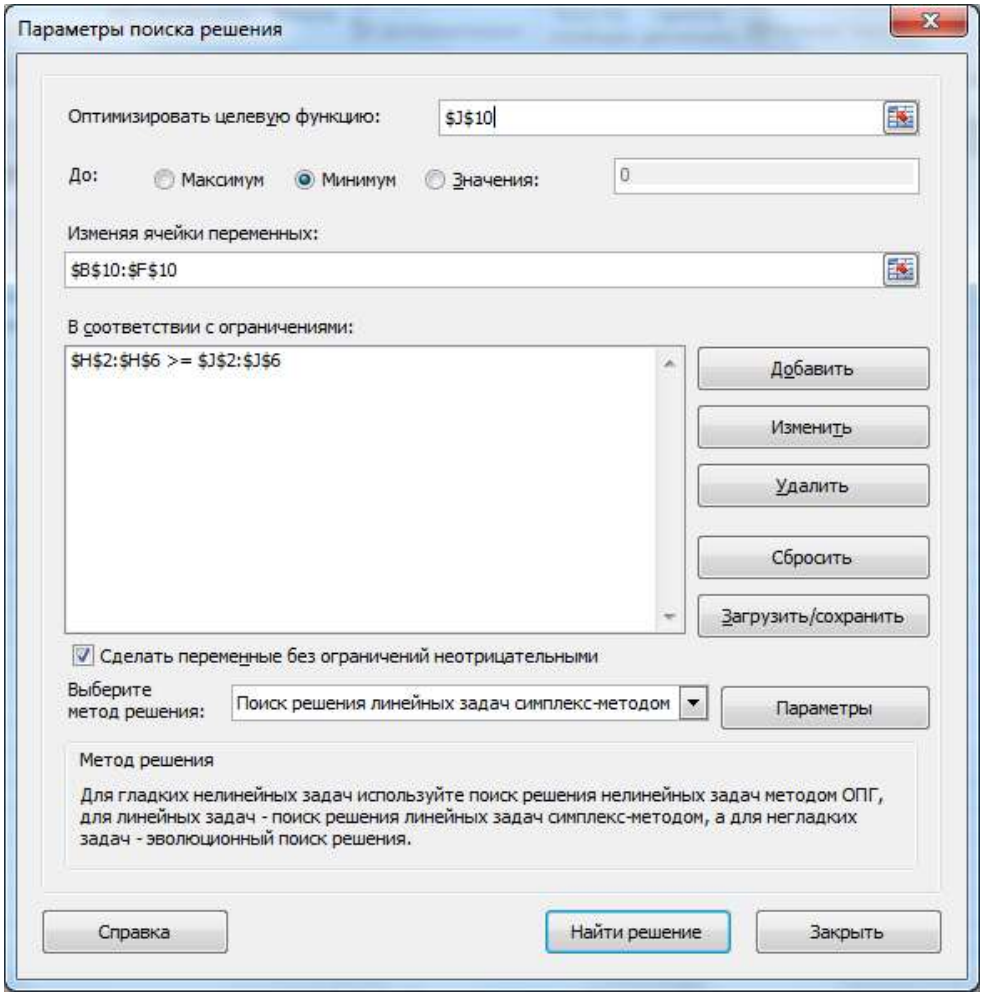


Рисунок 5.11. Параметры поиска решения.

Также можно ввести более точный поиск решения, для этого нужно кликнуть «Параметры» (Рисунок 12).

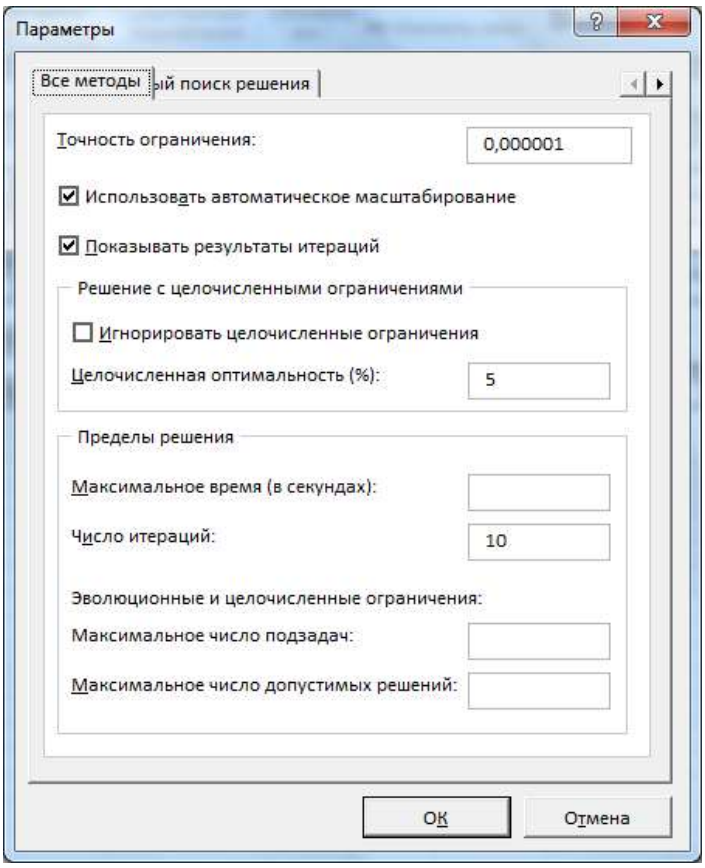


Рисунок 5.12. Дополнительные параметры поиска решения

Здесь указывается:

1) Точность ограничения (в работе 0,000001);

2) Автоматическое масштабирование (в работе включено, потому что результаты могли существенно различаться);

3) Целочисленная оптимальность показывает, что в работе 5% от целого числа ограничение имеет право быть;

4) Число итераций 10.

7. Запустить решение, нажав кнопку «Найти решение» в окне «Параметры поиска решения». При появлении окна «Показать предварительное решение» нажимайте кнопку «Продолжить».

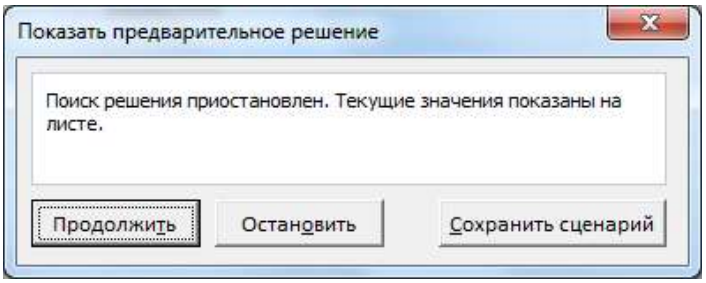


Рисунок 5.13. Окно предварительных результатов

8. При появлении окна «Результаты поиска решения» сохранить результат. Для этого выбрать вариант «Сохранить найденное решения», нажать на пункты «Результаты» и подтвердить сохранение нажатием кнопки «ОК», при этом будет создана дополнительная вкладка с результатами.

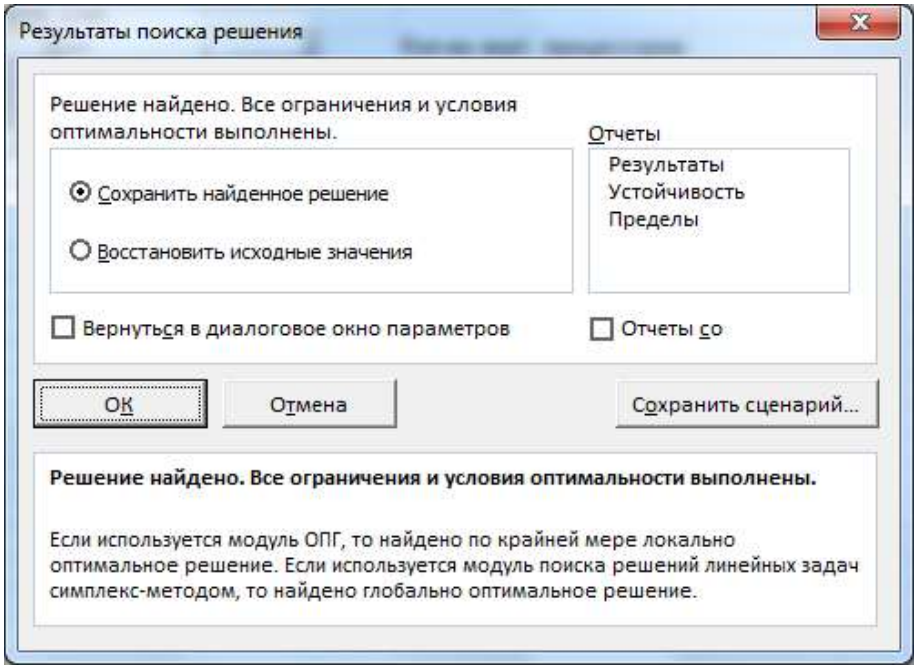


Рисунок 5.14. Окно результатов поиска решения

Построенную задачу можно отнести к классу задач линейного программирования, а поиск ее решения осуществлялся с помощью симплекс-метода. При решении данной задачи для получения оптимального плана в основном симплекс-методе было проведено 9 итераций. Время вычисления оптимального плана с применением программного пакета Microsoft Excel на персональном компьютере с системными параметрами: процессор – Intel CORE i5, 2,5 ГГц, оперативная память – 4 Гб – составило 6.241 секунды (Рисунок 5.15).

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0.5, x_4 = 0.5, x_5 = 0,$ $F(x) = 0{,}5 \cdot 0{,}111 + 0.5 \cdot 0.146 = 0{,}129.$	(12)

Оптимальный план предоставления виртуальных ресурсов можно записать так:

Microsoft Excel 16.0 Отчет о результатах
Лист: [Таблица Типы ВМ.xlsx]Лист1
Отчет создан: 30.04.2020 19:35:31
Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.
Модуль поиска решения
Модуль: Поиск решения лин. задач симплекс-методом
Время решения: 6,241 секунд.
Число итераций: 9 Число подзадач: 0
Параметры поиска решения
Максимальное время Без пределов, Число итераций 9, Precision 0,000001, Использовать автоматическое масштабирование, Показывать результаты итераций
Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 5%, Считать неотрицательными

Ячейка целевой функции (Минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$J$10	ЦФ=	0,1285	0,1285

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$B$10	X F1	0	0	Продолжить
$C$10	X F2	0	0	Продолжить
$D$10	X F3	0,5	0,5	Продолжить
$E$10	X F4	0,5	0,5	Продолжить
$F$10	X F5	0	0	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$H$2	N1 Треб. техн.х-ки	3	$H$2<=$J$2	Привязка	0
$H$3	N2 Треб. техн.х-ки	8	$H$3<=$J$3	Без привязки	2,25
$H$4	N3 Треб. техн.х-ки	4,096	$H$4<=$J$4	Без привязки	8,204
$H$5	N4 Треб. техн.х-ки	100	$H$5<=$J$5	Без привязки	150
$H$6	N5 Треб. техн.х-ки	3	$H$6<=$J$6	Привязка	0

Рисунок 5.15. Результат оптимизации функции стоимости

Полученное решение может говорить о том, что для обеспечения наиболее дешевого предоставления ресурсов, необходимых для работы одного экземпляра приложения, потребуется 0,5 экземпляров ВМ типа 3 и 0,5 экземпляров ВМ типа 4, а минимальная стоимость такого предоставления составит 0,129 долларов в час.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		F1	F2	F3	F4	F5		Треб. техн.х-						
2	N1	4	4	2	4	8		3		3		Кол-во. Вирт. Процесоров		
3	N2	13	13	6,5	14	26		8		10,25		Произв. Процессора		
4	N3	30,5	15	17,1	7,5	15		4,096		12,3		Обьем ОЗУ		
5	N4	80	80	420	80	60		100		250		Объем НЖМД		
6	N5	3	4	3	3	4		3		3		Произв. Сети		
7														
8	Ст-ть	0,209	0,19	0,111	0,146	0,767								
9														
10	X	0	0	0,5	0,5	0			ЦФ=	0,1285				
11														

Рисунок 5.16. Значение целевой функции после поиска решения задачи симплекс-методом

Наряду с полученным результатом известно, что основные существующие средства виртуализации (например, Windows Azure) используют принцип предоставления каждому экземпляру приложения отдельной ВМ и только после анализа работы выполняемых экземпляров приложений платформа выделяет дополнительные или сокращает

неиспользуемые экземпляры ВМ. Данный подход более дорогостоящий в плане использования облачных сервисов.

Из этого можно сделать вывод, что прикладной эффект полученного решения заключается в экономичности использования облачных сервисов за счет того, что количество используемых виртуальных машин сокращается.

Так, при «классическом» подходе для работы 1000 экземпляров виртуального приложения с заданными характеристиками используется 1000 экземпляров виртуальных машин типа g2.2xlarge стоимостью 0,767 долларов в час (таблица), при этом стоимость услуги составит 767 долларов в час. Так как для работы 1000 экземпляров приложения понадобится 100000 Гб для хранения данных, а один ВМ типа g2.2xlarge может обеспечить лишь 100 Гб. Наряду с этим при использовании предложенного алгоритма, с учетом результата, стоимость услуги составит 129 доллара в час, что на 83% сократит стоимость работы 1000 экземпляров приложения.

5.5. Индивидуальная работа

Выполнить оптимизацию системы уравнений согласно варианту с использованием характеристик виртуальных машин из таблицы 3. Каждая ячейка в таблице соответствует набору значений для виртуальных машины N1..N5, соответственно. При выполнении расчетов значения требований приложения и стоимостей 1 часа виртуальных машин оставить неизменными.

Таблица 5.3. Варианты характеристик виртуальных машин

№ варианта	Технические характеристики, реализуемые виртуальными машинами				
	Количества виртуальных процессоров (N1)	Производительности виртуальных процессоров (N2)	Объемы ОП (N3), Гб	Объемы дисков (N4), Гб	Производительность сети (N5)
1	5 3 4 3 2	6,5 13 13 13 13	2,73 4,57 3,96 3,25 3,76	85 35 80 75 100	4 4 3 4 3
2	3 5 4 5 4	14 6,5 26 14 6,5	3,84 2,73 5,23 4,96 4,73	95 85 100 60 70	3 4 4 3 3
3	2 4 3 2 3	26 26 13 13 13	2,35 5,23 3,25 3,76 4,57	100 100 75 100 35	4 4 4 3 4
4	4 4 3 2 4	6,5 26 13 13 13	4,73 5,23 3,25 3,76 3,96	70 100 75 100 80	3 4 4 3 3
5	3 2 3 5 4	13 13 13 6,5 6,5	3,25 3,76 4,57 2,73 4,73	75 100 35 85 70	4 3 4 4 3
6	2 4 3 4 5	26 6,5 13 26 14	2,35 4,73 4,57 5,23 4,96	100 70 35 100 60	4 3 4 4 3
7	5 5 4 2 4	14 6,5 6,5 13 26	4,96 2,73 4,73 3,76 5,23	60 85 70 100 100	3 4 3 3 4
8	3 5 4 2 4	13 14 26 13 6,5	4,57 4,96 5,23 3,76 4,73	35 60 100 100 70	4 3 4 3 3
9	4 3 2 4 5	13 13 26 26 6,5	3,96 3,25 2,35 5,23 2,73	80 75 100 100 85	3 4 4 4 4
10	3 4 3 3 2	13 6,5 13 14 13	3,25 4,73 4,57 3,84 3,76	75 70 35 95 100	4 3 4 3 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П, Столярова Е.М. Методы оптимизации. М., «Наука», 2020.*

2. *Гумеров Аз.М., Гумеров Ас.М. Табличный процессор Excel. Учеб. пособие по лаб. практикуму. Казан. гос. технол. ун-т. Казань. 2022.*

3. *Заславский Ю.Л. Сборник задач по линейному программированию. М., «Наука», 2024.*

4. *Черноруцкий И.Г. Методы оптимизации в теории управления. СПб., «Питер», 2004.*

5. *Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 2023.*

6. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные метода анализа. М., «Физматгиз», 2021.*

7. *Алехин М.Ю. и др. Применение теории массового обслуживания для решения производственных задач. – Л.: ЛКИ, 1989.*

8. *Бронштейн О.И., Духовный И.М. Модели приоритетного обслуживания в информационно-вычислительных системах. – М.: Наука, 1976.*

9. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения.– М.: Наука, 1991.*

10. *Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. /Пер. с англ. И.И. Грушко; ред. В.И. Нейман. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с., ил.*

11. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука: Гл.ред. физ.-мат. лит., 1987. – 336 с.*

12. *Хугаев К.Д. Элементы теории массового обслуживания: Учеб. пособие. – Ленинград; ЛИИЖТ, 1973. – 53 с.*

13. *Понттогофф Г. Теория массового обслуживания /Пер. с нем.; Под ред. Е.П. Нестерова. -М.: Транспорт, 1979. - 144 с.*

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕ- ЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для организации и проведения самостоятельной работы
студентов по дисциплине «Теория систем и системный анализ»
направления подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника,
направленность (профиль) «Программное обеспечение средств вычислительной техники и автоматизированных систем»

Ставрополь, 2026

Методические указания по организации самостоятельной работы студентов составлено в соответствии с требованиями программы дисциплины «Теория систем и системный анализ» для бакалавров направления подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника. Учебно-методическое пособие посвящено планируемой учебной работе студентов, выполняемой во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия, при частичном, непосредственном участии преподавателя.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Самостоятельная работа как важнейшая форма учебного процесса
2. Цели и основные задачи СРС
3. Виды самостоятельной работы
4. Организация СРС
5. Общие рекомендации по организации самостоятельной работы
6. Самостоятельная работа студента - необходимое звено становления исследователя
7. Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы
8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1. Самостоятельная работа как важнейшая форма учебного процесса

Самостоятельная работа – это планируемая учебная, учебно- исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Изначально необходимо ознакомиться с технологической картой самостоятельной работы обучающегося.

№	Раздел (тема) дисциплины и краткое содержание	Формируемые компетенции, индикаторы	очная форма				Формы текущего контроля успеваемости
			Контактная работа обучающихся с преподавателем /из них в форме практической подготовки, часов			Самостоятельная работа, часов	
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы		
1.	Система и ее основные признаки 1.Дескриптивное и конструктивное определение сис-темы. 2. Способы выделения системы.	ПК2 ИД-1$_{ПК-2}$ ИД-2$_{ПК-2}$	2			-	
2.	Условия применения системного подхода 1. Задачи системного подхода. 2. Связь цели, ресурсов и алгоритма функционирования системы.	ПК2 ИД-1$_{ПК-2}$ ИД-2$_{ПК-2}$	2			4	
3.	Системный анализ как метод исследования 1. Методология системного анализа 2. Задачи системного анализа	ПК2 ИД-1$_{ПК-2}$ ИД-2$_{ПК-2}$	2			4	

4.	Принципы системного анализа и принятия решений 1. Методология системного анализа. 2. Подходы к принятию решений.	ПК2 ИД-1$_{ПК-2}$ ИД-2$_{ПК-2}$	2			4	
5.	Методы системного анализа 1.Методы теории принятия решений. 2. Математическое программирование.	ПК2 ИД-1$_{ПК-2}$ ИД-2$_{ПК-2}$	2			4	
6.	Системы массового обслуживания 1.Случайные процессы. 2.Положения СМО. Практическое занятие: Исследование характеристик потоков требований в информационных системах	ПК2 ИД-1$_{ПК-2}$ ИД-2$_{ПК-2}$	2	12/12		4	собеседование
7.	Математические методы оптимизации и оценки вариантов 1. Формальные методы оптимизации. 2. Методы оценки вариантов.	ПК2 ИД-1$_{ПК-2}$ ИД-2$_{ПК-2}$	2			6	
8.	Метод линейного программирования, симплекс-метод и линейные оценки 1. Постановка задачи линейного программирования. 2. Симплекс-метод и линейные оценки. Практическое занятие: Методы решения задач линейного программирования Практическое занятие: Транспортные задачи линейного программирования	ПК2 ИД-1$_{ПК-2}$ ИД-2$_{ПК-2}$	2	8/8		6	собеседование

9.	Метод динамического программирования и оценки задач оптимального управления 1. Постановка задачи динамического программирования. 2. Задачи оптимального управления. Практическое занятие: Оптимизация параметров систем методом нелинейного программирования.	ПК2 ИД-$1_{ПК-2}$ ИД-$2_{ПК-2}$	2	6/6		6	собеседование
10.	Методы принятия решений и оценки вариантов 1. Структура принятия решений. 2. Оценки вариантов принятия решений	ПК2 ИД-$1_{ПК-2}$ ИД-$2_{ПК-2}$	2			6	
11.	Принципы моделирования 1. Системные аспекты проектировочной деятельности. 2. Подходы и принципы системного анализа при моделировании.	ПК2 ИД-$1_{ПК-2}$ ИД-$2_{ПК-2}$	2			6	
12.	Управление в сложных системах 1.Принципы управления. 2.Процессный подход в управлении.	ПК2 ИД-$1_{ПК-2}$ ИД-$2_{ПК-2}$	2			6	
13.	Информационные системы управления предприятием. IDEF системы 1. Информационные системы управления предприятием. 2.PFDD-диаграммы.	ПК2 ИД-$1_{ПК-2}$ ИД-$2_{ПК-2}$	2			6	
14.	Процессы и потоки в сложных системах 1.Модели процессов в сетях. 2.Потоки в сетях.	ПК2 ИД-$1_{ПК-2}$ ИД-$2_{ПК-2}$	2			6	

15.	Системный анализ в информационных системах 1. Проблемы инфокоммуникаций и необходимость их системного анализа. 2. Оптимальное управление конфигурацией. Практическое занятие: Разработка и оптимизация моделей вычислительных ресурсов облачных технологий на основе пакета MS Excel.	ПК2 ИД-$1_{ПК-2}$ ИД-$2_{ПК-2}$	2	6/6		6	собеседование
16.	Качество обслуживания в информационных системах 1.Меры и протоколы обеспечения QoS. 2.Алгоритмы управления очередями.	ПК2 ИД-$1_{ПК-2}$ ИД-$2_{ПК-2}$	2			6	
	ИТОГО за семестр		32	32/32		80	

Самостоятельная работа студентов в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Обучение в ВУЗе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

Концепцией модернизации российского образования определены основные задачи профессионального образования - "подготовка квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, компетентного, ответственного, свободно владеющего своей профессией и ориентированного в смежных областях деятельности, способного к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, готового к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности".

Решение этих задач невозможно без повышения роли самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиления ответственности преподавателей за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание творческой активности и инициативы.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной финансовой ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в лабораторных или практических занятиях, в выполнении контрольных заданий и тестов, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

Формы самостоятельной работы студентов разнообразны. По данной дисциплине «Теория систем и системный анализ» предусмотрены следующие:

Использование материала учебно-методического комплекса дисциплины

На первом этапе необходимо ознакомиться с обязательным минимумом содержания основной образовательной программы по изучаемой дисциплине. Далее необходимо изучить рабочую программу дисциплины, в которой рассмотрено содержание тем дисциплины лекционного курса, взаимосвязь тем лекций лабораторных/практических занятий, темы и виды самостоятельной работы. По каждому виду самостоятельной работы предусмотрены определённые формы отчетности, представленные в учебной программе по дисциплине «Теория систем и системный анализ».

Работа с литературой

Для успешного освоения дисциплины, необходимо самостоятельно детально изучить представленные темы по рекомендуемым источникам информации, которые представлены в учебной программе.

Самостоятельная работа приобщает студентов к научному творчеству, поиску и решению актуальных современных проблем.

2. Цели и основные задачи СРС

Ведущая цель организации и осуществления СРС должна совпадать с целью обучения студента – подготовкой бакалавра с высшим образованием. При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности.

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

– систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

– углубление и расширение теоретических знаний;

– формирование умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;

– развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;

– формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

– развитие исследовательских умений;

– использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на семинарах, на лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3. Виды самостоятельной работы

В образовательном процессе высшего профессионального образовательного учреждения выделяется два вида самостоятельной работы – аудиторная, под руководством преподавателя, и внеаудиторная. Тесная взаимосвязь этих видов работ предусматривает дифференциацию и эффективность результатов ее выполнения и зависит от организации, содержания, логики учебного процесса (межпредметных связей, перспективных знаний и др.):

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Основными видами самостоятельной работы студентов без участия преподавателя по данной дисциплине являются:

– формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);

– подготовка к лабораторным или практическим работам, их оформление.

Основными видами самостоятельной работы студентов с участием преподавателей являются:

– текущие консультации;

– прием и защита лабораторных работ (во время проведения л/р, если они предусмотрены учебным планом);

– выполнение заданий на практических занятиях (если таковые предусмотрены учебным планом дисциплины);

– выполнение курсовой работы или проекта, если они предусмотрены учебным планом.

4. Организация СРС

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей дисциплины «Теория систем и системный анализ», объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

– подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);

– основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);

– заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Деятельность студентов по формированию и развитию навыков учебной самостоятельной работы

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления, саморефлексии и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Выполняя самостоятельную работу под контролем преподавателя студент должен:

– освоить минимум содержания, выносимый на самостоятельную работу студентов и предложенный преподавателем в соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования;

– планировать самостоятельную работу в соответствии с графиком самостоятельной работы, предложенным преподавателем;

– самостоятельную работу студент должен осуществлять в организационных формах, предусмотренных учебным планом и рабочей программой преподавателя;

– выполнять самостоятельную работу и отчитываться по ее результатам в соответствии с графиком представления результатов, видами и сроками отчетности по самостоятельной работе студентов.

студент может:

сверх предложенного преподавателем (при обосновании и согласовании с ним) минимума обязательного содержания, определяемого программой по данной дисциплине:

– самостоятельно определять уровень (глубину) проработки содержания материала;

– предлагать темы и вопросы для самостоятельной проработки;

– в рамках общего графика выполнения самостоятельной работы предлагать обоснованный индивидуальный график выполнения и отчетности по результатам самостоятельной работы;

– предлагать свои варианты организационных форм самостоятельной работы;

– использовать для самостоятельной работы методические пособия, учебные пособия, разработки сверх предложенного преподавателем перечня;

– использовать не только контроль, но и самоконтроль результатов самостоятельной работы в соответствии с методами самоконтроля, предложенными преподавателем или выбранными самостоятельно.

Самостоятельная работа студентов должна оказывать важное влияние на формирование личности будущего профессионала, она планируется студентом самостоятельно. Каждый студент самостоятельно определяет режим своей работы и меру труда, затрачиваемого на овладение учебным содержанием по каждой дисциплине. Он выполняет внеаудиторную работу по личному индивидуальному плану, в зависимости от его подготовки, времени и других условий.

5. Общие рекомендации по организации самостоятельной работы

Основной формой самостоятельной работы студента является изучение конспекта лекций, их дополнение, рекомендованной литературы, активное участие на лабораторных или практических занятиях (в зависимости от учебного плана). Но для успешной учебной деятельности, ее интенсификации, необходимо учитывать следующие субъективные факторы:

1. Знание школьного программного материала, наличие прочной системы зияний, необходимой для усвоения основных вузовских курсов. Это особенно важно для математических и инженерных дисциплин. Необходимо отличать пробелы в знаниях, затрудняющие усвоение нового материала, от малых способностей. Затратив силы на

преодоление этих пробелов, студент обеспечит себе нормальную успеваемость и поверит в свои способности.

2. Наличие умений, навыков умственного труда:

а) умение конспектировать на лекции и при работе с книгой;

б) владение логическими операциями: сравнение, анализ, синтез, обобщение, определение понятий, правила систематизации и классификации.

3. Специфика познавательных психических процессов: внимание, память, речь, наблюдательность, интеллект и мышление. Слабое развитие каждого из них становится серьезным препятствием в учебе.

4. Хорошая работоспособность, которая обеспечивается нормальным физическим состоянием. Ведь серьезное учение - это большой многосторонний и разнообразный труд. Результат обучения оценивается не количеством сообщаемой информации, а качеством ее усвоения, умением ее использовать и развитием у себя способности к дальнейшему самостоятельному образованию.

5. Соответствие избранной деятельности, профессии индивидуальным способностям. Необходимо выработать у себя умение регулировать свое эмоциональное состояние и устранять обстоятельства, нарушающие деловой настрой, мешающие намеченной работе.

6. Овладение оптимальным стилем работы, обеспечивающим успех в деятельности. Чередование труда и пауз в работе, периоды отдыха, индивидуально обоснованная норма продолжительности сна, предпочтение вечерних или утренних занятий, стрессоустойчивость на экзаменах и особенности подготовки к ним,

7. Уровень требований к себе, определяемый сложившейся самооценкой. Адекватная оценка знаний, достоинств, недостатков - важная составляющая самоорганизации человека, без нее невозможна успешная работа по управлению своим поведением, деятельностью.

Одна из основных особенностей обучения в высшей школе заключается в том, что постоянный внешний контроль заменяется самоконтролем, активная роль в обучении принадлежит уже не столько преподавателю, сколько студенту.

Зная основные методы научной организации умственного труда, можно при наименьших затратах времени, средств и трудовых усилий достичь наилучших результатов.

Эффективность усвоения поступающей информации зависит от работоспособности человека в тот или иной момент его деятельности.

Работоспособность - способность человека к труду с высокой степенью напряженности в течение определенного времени. Различают внутренние и внешние факторы работоспособности.

К внутренним факторам работоспособности относятся интеллектуальные особенности, воля, состояние здоровья.

К внешним:

- организация рабочего места, режим труда и отдыха;
- уровень организации труда - умение получить справку и пользоваться информацией;
- величина умственной нагрузки.

Выдающийся русский физиолог Н. Е. Введенский выделил следующие условия продуктивности умственной деятельности:

- во всякий труд нужно входить постепенно;
- мерность и ритм работы. Разным людям присущ более или менее разный темп

работы;

- привычная последовательность и систематичность деятельности;
- правильное чередование труда и отдыха.

Отдых не предполагает обязательного полного бездействия со стороны человека, он может быть достигнут простой переменой дела. В течение дня работоспособность изменяется. Наиболее плодотворным является *утреннее время (с 8 до 14 часов),* причем максимальная работоспособность приходится на период с 10 до 13 часов, затем *послеобеденное* - (с 16 до 19 часов) и *вечернее* (с 20 до 24 часов). Очень трудный для понимания материал лучше изучать в начале каждого отрезка времени (лучше всего утреннего) после хорошего отдыха. Через 1-1,5 часа нужны перерывы по 10 - 15 мин, через 3 - 4 часа работы отдых должен быть продолжительным - около часа.

Составной частью научной организации умственного труда является овладение техникой умственного труда.

Время, которым располагает студент для выполнения учебного плана, складывается из двух составляющих: одна из них – это аудиторная работа в вузе по расписанию занятий, другая - внеаудиторная самостоятельная работа. Задания и материалы для самостоятельной работы выдаются во время учебных занятий по расписанию, на этих же занятиях преподаватель осуществляет контроль за самостоятельной работой, а также оказывает помощь студентам по правильной организации работы.

Самостоятельные занятия потребуют интенсивного умственного труда, который необходимо не только правильно организовать, но и стимулировать. При этом очень важно уметь поддерживать устойчивое внимание к изучаемому материалу. Выработка внимания требует значительных волевых усилий. Именно поэтому, если студент замечает, что он часто отвлекается во время самостоятельных занятий, ему надо заставить себя сосредоточиться. Подобную процедуру необходимо проделывать постоянно, так как это является тренировкой внимания. Устойчивое внимание появляется тогда, когда человек относится к делу с интересом.

Следует правильно организовать свои занятия по времени: 50 минут - работа, 5-10 минут - перерыв; после 3 часов работы перерыв - 20-25 минут. Иначе нарастающее утомление повлечет неустойчивость внимания. Очень существенным фактором, влияющим на повышение умственной работоспособности, являются систематические занятия физической культурой. Организация активного отдыха предусматривает чередование умственной и физической деятельности, что полностью восстанавливает работоспособность человека.

6. Самостоятельная работа студента - необходимое звено становления исследователя

Прогресс науки и техники, информационных технологий приводит к значительному увеличению научной информации, что предъявляет более высокие требования не только к моральным, нравственным свойствам человека, но и в особенности, постоянно возрастающие требования в области образования – обновление, модернизация общих и профессиональных знаний, умений специалиста.

Всякое образование должно выступать как динамический процесс, присущий человеку и продолжающийся всю его жизнь. Овладение научной мыслью и языком науки является

необходимой составляющей в самоорганизации будущего специалиста исследователя. Под этим понимается не столько накопление знаний, сколько овладение научно обоснованными способами их приобретения. В этом, вообще говоря, состоит основная задача вуза.

Специфика вузовского учебного процесса, в организации которого самостоятельной работе студента отводятся все больше места, состоит в том, что он является как будто бы последним и самым адекватным звеном для реализации этой задачи. Поскольку во время учебы в вузе происходит выработка стиля, навыков учебной (познавательной) деятельности, рациональный характер которых будет способствовать постоянному обновлению знаний высококвалифицированного выпускника вуза.

Однако до этом пути существуют определенные трудности, в частности, переход студента от синтетического процесса обучения в средней школе, к аналитическому в высшей. Это связано как с новым содержанием обучения (расширение общего образования и углубление профессиональной подготовки), так и с новыми, неизвестными до сих пор формами: обучения (лекции, семинары, лабораторные занятия и т.д.). Студент получает не только знания, предусмотренные программой и учебными пособиями, но он также должен познакомиться со способами приобретения знаний так, чтобы суметь оценить, что мы знаем, откуда мы это знаем и как этого знания мы достигли. Ко всему этому приходят через собственную самостоятельную работу.

Это и потому, что самостоятельно приобретенные знания являются более оперативными, они становятся личной собственностью, а также мотивом поведения, развивают интеллектуальные черты, внимание, наблюдательность, критичность, умение оценивать. Роль преподавателя в основном заключается в руководстве накопления знаний (по отношению к первокурсникам), а в последующие годы учебы, на старших курсах, в совместном установлении проблем и заботе о самостоятельных поисках студента, а также контролирования за их деятельностью. Отметим, что нельзя ограничиваться только приобретением знаний, предусмотренных программой изучаемой дисциплины, надо постоянно углублять полученные знания, сосредотачивая их на какой-нибудь узкой определенной области, соответствующей интересам студента. Углубленное изучение всех предметов, предусмотренных программой, на практике является возможным, и хорошая организация работы позволяет экономить время, что создает условия для глубокого, систематического, заинтересованного изучения самостоятельно выбранной студентом темы.

Конечно, все советы, примеры, рекомендации в этой области, даваемые преподавателем, или определенными публикациями, или другими источниками, не гарантируют никакого успеха без проявления собственной активности в этом деле, т. е. они не дают готовых рецептов, а должны способствовать анализу собственной работы, ее целей, организации в соответствии с индивидуальными особенностями. Учитывая личные возможности, существующие условия жизни и работы, навыки, на основе этих рекомендаций, возможно, выработать индивидуально обоснованную совокупность методов, способов, найти свой стиль или усовершенствовать его, чтобы изучив определенный материал, иметь время оценить его значимость, пригодность и возможности его применения, чтобы, в конечном счете, обеспечить успешность своей учебе с будущей профессиональной деятельности

7. Методические рекомендации для студентов по отдельным формам самостоятельной работы

Система вузовского обучения подразумевает значительно большую самостоятельность студентов в планировании и организации своей деятельности.

Работа с литературой

При работе с литературой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой – это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента. Различают два вида чтения; первичное и вторичное. *Первичное* - эти внимательное, неторопливое чтение, при котором можно остановиться на трудных местах. После него не должно остаться ни одного непонятного олова. Содержание не всегда может быть понятно после первичного чтения.

Задача *вторичного* чтения полное усвоение смысла целого (по счету это чтение может быть и не вторым, а третьим или четвертым).

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того на сколько осознанна читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют четыре основные установки в чтении научного текста:

1. информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию);

2. усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения, излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений);

3. аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему);

4. творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

С наличием различных установок обращения к научному тексту связано существование и нескольких ***видов чтения***:

1. библиографическое – просматривание карточек каталога, рекомендательных списков, сводных списков журналов и статей за год и т.п.;

2. просмотровое – используется для поиска материалов, содержащих нужную информацию, обычно к нему прибегают сразу после работы со списками литературы и каталогами, в результате такого просмотра читатель устанавливает, какие из источников будут использованы в дальнейшей работе;

3. ознакомительное – подразумевает сплошное, достаточно подробное прочтение отобранных статей, глав, отдельных страниц, цель – познакомиться с характером информации, узнать, какие вопросы вынесены автором на рассмотрение, провести сортировку материала;

4. изучающее – предполагает доскональное освоение материала; в ходе такого чтения проявляется доверие читателя к автору, готовность принять изложенную информацию, реализуется установка на предельно полное понимание материала;

5. аналитико-критическое и творческое чтение – два вида чтения близкие между собой тем, что участвуют в решении исследовательских задач. Первый из них предполагает направленный критический анализ, как самой информации, так и способов ее получения и подачи автором; второе – поиск тех суждений, фактов, по которым или в связи с которыми, читатель считает нужным высказать собственные мысли.

Из всех рассмотренных видов чтения основным для студентов является изучающее – именно оно позволяет в работе с учебной литературой накапливать знания в различных областях. Вот почему именно этот вид чтения в рамках учебной деятельности должен быть освоен в первую очередь. Кроме того, при овладении данным видом чтения формируются основные приемы, повышающие эффективность работы с научным текстом.

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

1. Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;

2. Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;

3. Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;

4. Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;

5. Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической

последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта.
2. Выделите главное, составьте план.
3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора.
4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.
5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

Лабораторные/Практические занятия (в зависимости от учебного плана)

Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на лабораторных или практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью выполнения заданий лабораторной или практической работы, поставленных задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном выполнении заданий нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение задач или примеров следует излагать по дробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что выполнение каждого учебного задания должно до водиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Выполнение заданий данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

Самопроверка

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих заданий на лабораторных занятиях и

самостоятельно студенту рекомендуется, используя лист опорных материалов, воспроизвести по памяти определения, выводы формул, формулировки основных положений и доказательств.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в мате риале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

Консультации

Если в процессе самостоятельной работы над изучением теоретического материала или при выполнении заданий у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается, необходимо обратиться к преподавателю для получения у него разъяснений или указаний. В своих вопросах студент должен четко выразить, в чем он испытывает затруднения, характер этого затруднения. За консультацией следует обращаться и в случае, если возникнут сомнения в правильности ответов на вопросы самопроверки.

Подготовка к зачету с оценкой по дисциплине «Теория систем и системный анализ»

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин завершается зачетом с оценкой. Подготовка к зачету способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания.

Для успешной сдачи зачета с оценкой студенту важно в течение семестра полностью выполнить задания лабораторных или практических работ, подготовить отчет по каждой работе и отчет по результатам самостоятельного изучения тем, согласно учебной программе.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Текущая аттестация студентов проводится преподавателями, ведущими лабораторные или практические занятия по дисциплине в следующих формах: собеседование при защите лабораторной работы или заданий практической работы с предоставлением письменного (или в электронной форме) отчета, в зависимости от предъявляемых требований.

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

Основная литература	1.Системный анализ и принятие решений / под ред. В.Н. Волковой, В.Н. Козлова. М.: Изд-во ≪Высш. школа≫. 2018. 800 с. Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks, http://biblioclub.ru/. 2. Суханов А. В.,Интеллектуальные информационные системы, Ростовский государственный университет путей сообщения, 2021. 131 с. ISBN 978-5-88814-972-0. Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks,

	https://e.lanbook.com/book/220130
Дополнительная литература	1.Афонин В.В. Моделирование систем : учебное пособие / Афонин В.В. –М.:Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), 2016. - 269 с. - Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks. , http://biblioclub.ru/. - ISBN 978-5-9963-0352-6 2.Нерсесянц, А. А. Моделирование инфокоммуникационных систем и сетей связи Элек-тронный ресурс : Учебное пособие по дисциплине «Моделирование систем» / А. А. Нерсесянц. - Ростов-на-Дону : Северо-Кавказский филиал Московского технического университета связи и информатики, 2016. - 115 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 2227-8397 3.Пуговкин, А. В.; Основы построения инфокоммуникационных систем и сетей : учеб-ное пособие / А.В. Пуговкин ; Министерство образования и науки Российской Федера-ции ; Томский Государственный Университет Систем Управления и Радиоэлектроники (ТУСУР). - Томск : Эль Контент, 2014. - 156 с. : схем., табл. - http://biblioclub.ru/. - Биб-лиогр.: с. 150-151. - ISBN 978-5-4332-0148-4 Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 2227-8397, http://biblioclub.ru/.
Программное обеспечение	Альт Рабочая станция 10 Альт Рабочая станция К Альт «Сервер» Пакет офисных программ - Р7-Офис