

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по выполнению лабораторных работ
по дисциплине
«ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»
для студентов направления подготовки
44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
направленность (профиль):
«Информатика и математика»

Ставрополь, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ	4
Лабораторная работа 1. Виды погрешностей	4
Лабораторная работа 2. Правила приближенных вычислений	6
РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ	9
Лабораторная работа 3. Метод Гаусса	9
Лабораторная работа 4-5. Метод простой итерации. Метод Зейделя	13
РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ	18
Лабораторная работа 6. Машинный алгоритм отделения корней	18
Лабораторная работа 7-8. Метод половинного деления. Метод хорд	20
Лабораторная работа 9-11. Метод касательных, метод секущих, метод итераций	23
МЕТОДЫ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ	29
Лабораторная работа 12. Метод среднеквадратических приближений. Нахождение приближающей функции в виде линейной функции	29
Лабораторная работа 13. Нахождение приближающей функции в виде квадратного трехчлена	33
ЧИСЛЕННАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ	35
Лабораторная работа 14. Интерполяционная формула Лагранжа	35
Лабораторная работа 15-16. Первая интерполяционная формула Ньютона. Вторая интерполяционная формула Ньютона	37
Лабораторная работа 17. Интерполяционная формула Ньютона с разделенными разностями	40
Лабораторная работа 18. Обратное интерполирование	42
ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ	44
Лабораторная работа 19-20. Квадратурная формула прямоугольников. Формула трапеций	44
Лабораторная работа 21. Формула Симпсона	33
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	38
Лабораторная работа 22. Метод Эйлера	38
РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА	31

ВВЕДЕНИЕ

Цель и задачи освоения дисциплины

Цель освоения дисциплины: формирование профессиональных компетенций будущего бакалавра (специалиста) по соответствующему направлению подготовки в области цифровых технологий и обработки данных.

Задачи освоения дисциплины:

- формирование профессиональных знаний, умений и навыков использовать математический аппарат, методологию программирования и современные компьютерные технологии для решения практических задач получения, хранения, обработки и передачи информации;
- применять предметные знания при реализации образовательного процесса.

В результате освоения дисциплины студенты должны:

Знать:

- современные парадигмы в предметной области науки;
- методы математической обработки информации, методологию программирования и современные компьютерные технологии для решения практических задач;
- современные модели и методы представления, сбора и обработки информации.

Уметь:

- использовать естественнонаучные знания для ориентирования в современном информационном пространстве;
- использовать математический аппарат, методологию программирования для решения практических задач получения, хранения, обработки и передачи информации;
- использовать современные модели и методы представления, сбора и обработки информации.

Владеть:

- математическими знаниями для ориентирования в современном информационном пространстве;
- современными компьютерными технологиями для решения практических задач получения, хранения, обработки и передачи информации;
- современными формализованными математическими, информационно-логическими и логико-семантическими моделями и методами представления, сбора и обработки информации.

СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Лабораторная работа 1. Виды погрешностей

Цель работы – закрепление и отработка понятий: абсолютная и относительная погрешности, значащие цифры числа, значащая цифра приближенного числа верная в широком смысле, в строгом смысле.

Задания

Задание 1. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел a и b , если они имеют только верные цифры:

а) в строгом смысле; б) в широком смысле.

Исходные данные для выполнения задания содержатся в таблице 1

Таблица 1

Вариант	a	b	Вариант	a	b
1	11,445	2,043	8	0,5746	236,58
2	8,345	0,288	9	5,634	0,0748
3	0,374	4,348	10	20,43	0,576
4	41,72	0,678	11	12,45	3,4453
5	18,357	2,16	12	2,3445	0,745
6	14,862	8,73	13	7,158	3,61
7	0,3648	21,7	14	8,237	4,5491

Задание 2. Число x , все цифры которого верны в строгом смысле, округлить до трех значащих цифр. Для полученного результата $x_1 \approx x$ вычислить границы абсолютной и относительной погрешностей. В записи числа x_1 указать количество верных цифр по абсолютной и относительной погрешности.

Исходные данные для выполнения задания содержатся в таблице 2.

Таблица 2

Вариант	x	Вариант	x
1	35,49	8	0,009145
2	32,147	9	11,3721
3	35,085	10	0,2538
4	7,544	11	10,2118
5	19,854	12	4,394
6	37,4781	13	11,29
7	0,183814	14	7,349

Содержание отчета

Отчет – это документ, свидетельствующий о выполнении студентом лабораторной работы. Он составляется каждым студентом индивидуально в письменном виде и сдается преподавателю. Отчет должен включать:

- 1) титульный лист (название дисциплины и раздела, тема, ФИО студента, направление подготовки, группа);
- 2) цель выполненной лабораторной работы;
- 3) основную часть (постановка задачи; этапы или программа выполнения; результаты, представленные в текстовом виде, в форме таблиц, графиков, диаграмм и т.д.);
- 4) выводы (анализ и обоснование результатов выполнения работы);
- 5) ответы на контрольные вопросы и тестовые задания.

Тест по теме «Виды погрешностей»

1. Какую погрешность следует считать неустранимой (безусловной)?
 - 1) погрешность метода;
 - 2) погрешность задачи;
 - 3) погрешность округлений.

2. Под предельной абсолютной погрешностью числа A понимают
 - 1) всякое число a не большее абсолютной погрешности этого числа;
 - 2) отношение ошибки к модулю значения A (когда оно неизвестно) или к модулю приближения a ;
 - 3) всякое число a не меньшее абсолютной погрешности этого числа.

3. Границей относительной погрешности (предельной относительной погрешностью) приближенного числа называется
 - 1) всякое число a не большее относительной погрешности этого числа;
 - 2) всякое число a не меньшее относительной погрешности этого числа;
 - 3) отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютному значению приближения a .

4. Относительная погрешность определяется как
 - 1) отношение ошибки к модулю значения A (когда оно неизвестно – к модулю приближения a);
 - 2) отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютному значению приближения a ;
 - 3) отношение абсолютного значения приближения a к предельной абсолютной погрешности.

5. Относительную погрешность выражают
 - 1) численно;
 - 2) в градусах;
 - 3) в процентах.

6. Значащими цифрами числа в его позиционной записи называются
 - 1) все его верные цифры, начиная с первой ненулевой справа;
 - 2) все цифры числа;
 - 3) все его верные цифры, начиная с первой ненулевой слева.

7. Цифра числа называется верной в строгом смысле, если
 - 1) все его цифры, начиная с первой ненулевой справа, являются верными;
 - 2) абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы разряда, в котором стоит эта цифра;
 - 3) абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

8. Используя правила симметричного округления, выберите правильное округление числа 2,39725 до тысячных
 - 1) 2,398;
 - 2) 2,397.

9. Значащую цифру приближенного числа называют верной в широком смысле, если
 - 1) абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы разряда, в котором стоит эта цифра;

- 2) все его цифры, начиная с первой ненулевой справа, являются верными;
- 3) абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

10. Значащую цифру приближенного числа называют верной в строгом смысле, если
- 1) абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы разряда, в котором стоит эта цифра;
 - 2) все его цифры, начиная с первой ненулевой справа, являются верными;
 - 3) абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, в котором стоит эта цифра

Лабораторная работа 2. Правила приближенных вычислений

Цель работы – закрепление и отработка понятий: правила сложения, вычитания, умножения и деления приближенных чисел, определение количества верных цифр в значении элементарных функций от приближенных значений аргумента; вычисление по правилам подсчета цифр, со строгим учетом границ погрешностей, по методу границ.

Теоретическая часть. При вычислении *по правилам подсчета цифр* явного учета погрешностей не ведется, правила подсчета показывают лишь, какое количество значащих цифр или десятичных знаков в результате можно считать надежными. Сами правила основываются на формулах для оценки погрешностей арифметических действий и функций. Приведем эти *правила*.

1. При сложении и вычитании приближенных чисел нужно выбрать из чисел наименее точное, т. е. число, имеющее наибольшую абсолютную погрешность, в результате следует считать верными столько десятичных знаков после запятой, сколько их в приближенном данном с наименьшим числом знаков после запятой.

2. При умножении и делении приближенных чисел нужно выбрать число с наименьшим количеством значащих цифр и округлить остальные числа так, чтобы в них было лишь на одну значащую цифру больше, чем в наименее точном числе. В результате следует считать верными столько значащих цифр, сколько их в числе с наименьшим количеством значащих цифр.

3. При определении количества верных цифр в значении элементарных функций от приближенных значений аргумента следует прикинуть значение модуля производной функции. Если это значение не превосходит единицы или близко к ней, то в значении функции можно считать верными столько знаков после запятой, сколько их имеет значение аргумента. Если же модуль производной функции в окрестности приближенного значения аргумента превосходит единицу, то количество верных десятичных знаков в значении функции меньше, чем в значении аргумента на величину k , где k – наименьший натуральный показатель степени, при котором имеет место неравенство

$$|f'(x)| < 10^k$$

4. При записи промежуточных результатов следует сохранять на одну цифру больше, чем рекомендуют правила 1–3. В окончательном результате эта запасная (сомнительная) цифра округляется.

Правила подсчета цифр носят оценочный характер и не являются методом строгого учета точности вычислений. Они применяются тогда, когда быстро и без особых затрат нужно получить результат, не беспокоясь о его достоверности. Практическая надежность этих правил достаточно высока из-за незначительной вероятности взаимопогашения ошибок.

При пооперационной регистрации результатов вычислений используется расчетная таблица – расписка формулы.

Пример 1. По правилам подсчета цифр для приближенных значений $a = 2,16$ и $b = 0,93$, у которых все цифры верные вычислить значение величины

$$A = \frac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a+b)}$$

Таблица 1

a	b	e ^a	√b	e ^a +√b	a + b	ln(a+b)	A
2,16	0,93	8,55	0,964	9,51	3,09	1,13	8,4

Метод строгого учета границ погрешностей. Этот метод предусматривает строгий подсчет границ погрешностей по правилам вычисления погрешностей. При пооперационном строгом учете ошибок

Пример 2. Вычислить значение величины

$$A = \frac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a+b)}$$

методом строгого учета границ погрешностей для приближенных значений $a = 2,16$ и $b = 0,93$, у которых все цифры верные.

Таблица 2

a	b	e ^a	√b	e ^a +√b	a + b	ln(a+b)	A
2,16	0,93	8,55	0,964	9,5	3,09	1,13	8
Δa	Δb	Δ(e ^a)	Δ(√b)	Δ(e ^a +√b)	Δ(a + b)	Δln(a+b)	ΔA
0,005	0,005	0,05	0,005	0,5	0,05	0,05	0,8

Метод границ (метод двойных вычислений) используют, если нужно иметь гарантированные границы возможных значений вычисляемой величины.

Для того чтобы вычислить значение $f(a, b)$, где a и b – приближенные значения аргументов, причем известно, что

$$НГ_a < a < ВГ_a, ВГ_b < b < ВГ_b$$

Следует помнить, что если функция $f(a, b)$ непрерывная и монотонная в некоторой области допустимых значений аргументов a и b , причем возрастает по каждому из них, тогда

$$f(НГ_a, НГ_b) < f(a, b) < f(ВГ_a, ВГ_b).$$

Пусть теперь $f(a, b)$ возрастает по аргументу a и убывает по аргументу b . Тогда будет выполняться неравенство

$$f(НГ_a, ВГ_b) < f(a, b) < f(ВГ_a, НГ_b).$$

Применим метод границ к основным арифметическим действиям. Пусть, например, $f(a, b) = a + b$. Тогда очевидно, что

$$НГ_a + НГ_b < a + b < ВГ_a + ВГ_b.$$

Точно так же для функции $f(a, b) = a - b$, возрастающей по a и убывающей по b , имеем $НГ_a - ВГ_b < a - b < ВГ_a - НГ_b$.

Аналогично для умножения и деления:

$$НГ_a \cdot НГ_b < a \cdot b < ВГ_a \cdot ВГ_b.$$

$$НГ_a / ВГ_b < a / b < ВГ_a / НГ_b.$$

При выполнении промежуточных вычислений и округлении результатов используются правила подсчета цифр, при этом округление верхних границ ведется по избытку, а нижних границ – по недостатку. Окончательные результаты округляются по этим же правилам до последней верной цифры.

Пример 9. Вычислить методом границ значение величины

$$A = \frac{e^a + \sqrt{b}}{\ln(a+b)}.$$

Нижняя и верхняя границы приближенных значений a и b определяются из условия, что в исходных данных $a = 2,16$ и $b = 0,93$ все цифры верные в строгом смысле. Это значит, что $\Delta a = 0,005$ и $\Delta b = 0,005$.

Таблица 3

	a	b	e^a	$\sqrt{b}$	$e^a + \sqrt{b}$	$a + b$	$\ln(a+b)$	A
НГ	2,155	0,925	8,503	0,962	9,465	3,080	1,125	8,37
ВГ	2,165	0,935	8,588	0,967	9,555	3,100	1,131	8,49

$$\text{По результатам вычислений } A = \frac{8,37 + 8,49}{2} = 8,43$$

Вычисления по методу границ можно вести и без операционного фиксирования промежуточных результатов, например,

$$\frac{HG_{e^a} + \sqrt{HG_b}}{\ln(HG_a + HG_b)} < A < \frac{BG_{e^a} + \sqrt{BG_b}}{\ln(BG_a + BG_b)}$$

Оборудование и материалы: персональный компьютер, текстовый редактор Microsoft Word, табличный процессор Microsoft Excel.

Задания

1. Вычислить значение величины z при заданных значениях чисел a , b и c , все цифры верные в строгом смысле, используя:

- 1) правила подсчета цифр;
- 2) метод строгого учета границ погрешностей;
- 3) метод границ.

Исходные данные для выполнения задания содержатся в таблице 4

Таблица 4

Вариант	Задание	Исходные данные	Вариант	Задание	Исходные данные
1	$z = \frac{b^2 + \ln(c)}{\sqrt{c-a}}$	$a = 0,317$ $b = 3,27$ $c = 4,7561$	8	$z = \frac{b + \cos(c)}{3b + 2a}$	$a = 3,71452$ $b = 3,03$ $c = 0,756$
2	$z = \frac{\ln(b+c)}{b-ac}$	$a = 0,399$ $b = 4,83$ $c = 0,721$	9	$z = \frac{\ln(b)-a}{a^2-12c}$	$a = 0,11587$ $b = 4,256$ $c = 3,00971$
3	$z = \frac{\sqrt{a+b}}{3a-c}$	$a = 1,0574$ $b = 1,40$ $c = 1,1236$	10	$z = \frac{\ln(c)-10a}{\sqrt{bc}}$	$a = 4,05$ $b = 6,723$ $c = 3,254$
4	$z = \frac{ab-4c}{\ln(a)+3b}$	$a = 12,72$ $b = 0,34$ $c = 2,98$	11	$z = \frac{10c + \sqrt{b}}{a^2-b}$	$a = 0,7219$ $b = 135,347$ $c = 0,013$
5	$z = \frac{a-tg(b)}{13c+b}$	$a = 3,49$ $b = 0,845$ $c = 0,037$	12	$z = \frac{\sqrt{b-c}}{\ln(a)+b}$	$a = 0,113$ $b = 10,56$ $c = 8,94$
6	$z = \frac{\ln(a-b)}{\sqrt{b+c}}$	$a = 9,76$ $b = 2,371$ $c = 1,15887$	13	$z = \frac{ac+3b}{\sqrt{b-c}}$	$a = 0,0976$ $b = 2,371$ $c = 1,15874$
7	$z = \frac{a^2-b}{\sqrt{ab-c}}$	$a = 8,3574$ $b = 34,12$ $c = 7,00493$	14	$z = \frac{\sin(a-\sqrt{b})}{c+a\ln(b)}$	$a = 18,407$ $b = 149,12$ $c = 2,3078$

Вопросы для самопроверки

1. Правило сложения и вычитания приближенных чисел. Приведите пример.
3. Правило умножения и деления приближенных чисел. Приведите пример.
5. Правило определения количества верных цифр в значении элементарных функций от приближенных значений аргумента, в случае если модуль производной функции в окрестности приближенного значения аргумента не превосходит единицу. Приведите пример.
6. Правило определения количества верных цифр в значении элементарных функций от приближенных значений аргумента, в случае, когда модуль производной функции в окрестности приближенного значения аргумента превосходит единицу. Приведите пример.
7. Вычисление по правилам подсчета цифр.
8. Вычисление со строгим учетом границ погрешностей.
9. Вычисление по методу границ.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лабораторная работа 3. Метод Гаусса

Цель работы – изучить метод Гаусса и научиться его реализовывать в табличном процессоре Microsoft Excel для решения систем линейных алгебраических уравнений.

Теоретическая часть. Система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными в общем виде может быть записана следующим образом

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Эту систему часто записывают в компактном матричном виде

$$A\bar{x} = \bar{b}, \quad (2)$$

где использованы следующие обозначения:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Здесь A – матрица коэффициентов при неизвестных системы,

$\bar{b}$ – вектор – столбец заданных правых частей,

$\bar{x}$ – вектор – столбец искомого решения.

Прямые (точные) методы – это методы, которые при отсутствии погрешностей округления за конечное число арифметических и логических операций дают точный результат.

К прямым методам относятся: метод Крамера, методы последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса и его модификации), метод Холецкого, метод прогонки и другие методы.

Метод Гаусса (метод последовательного исключения искоемых переменных), его идея заключается в том, чтобы исходную линейную систему:

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

с помощью эквивалентных преобразований привести к виду:

$$U\bar{X} = \bar{b}^*, \quad (3)$$

где U – верхняя треугольная матрица, а $\bar{b}^*$ – измененный в процессе преобразований вектор правых частей. Запишем систему (3) подробнее

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} u_{11}x_1 + & u_{12}x_2 + & \dots + & u_{1,n-1}x_{n-1} + & u_{1n}x_n = & b_1^* \\ & u_{22}x_2 + & \dots + & u_{2,n-1}x_{n-1} + & u_{2n}x_n = & b_2^* \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & u_{n-1,n-1}x_{n-1} + & u_{n-1,n}x_n = & b_{n-1}^* \\ & & & & u_{nn}x_n = & b_n^* \end{array} \right. \quad (4)$$

Метод Гаусса состоит из двух шагов: прямого и обратного хода. При прямом ходе последовательно исключаются неизвестные из уравнений системы (1) и она сводится к треугольному виду (4). Обратный ход заключается в последовательном вычислении искомых переменных из (4).

Желательно, чтобы матрица коэффициентов при неизвестных системы линейных уравнений имела диагональное преобладание.

Матрица A имеет диагональное преобладание, если в каждой строке матрицы элемент, стоящий на главной диагонали, по модулю больше или равен сумме модулей остальных элементов данной строки

$$\left\{ \begin{array}{l} |a_{11}| \geq |a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}| \\ |a_{22}| \geq |a_{21}| + |a_{23}| + \dots + |a_{2n}| \\ \vdots \\ |a_{nn}| \geq |a_{n1}| + |a_{n2}| + \dots + |a_{n,n-1}| \end{array} \right.$$

Оборудование и материалы: персональный компьютер, текстовый редактор Microsoft Word, табличный процессор Microsoft Excel.

Задания

Задание 1. Преобразовать матрицу коэффициентов при неизвестных исходной системы линейных уравнений так, чтобы она имела диагональное преобладание.

Исходные данные для выполнения задания содержатся в таблице 1.

Таблица 1

Вариант	Задание	Вариант	Задание
1	$\begin{cases} 0,21x_1 - 0,45x_2 - 0,20x_3 = 1,97 \\ 0,30x_1 + 0,25x_2 + 0,43x_3 = 0,32 \\ 0,60x_1 - 0,35x_2 - 0,25x_3 = 1,83 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 4,03x_1 + 2,71x_2 - 2,32x_3 = -1,60 \\ -2,45x_1 + 5,28x_2 - 0,36x_3 = 5,36 \\ 1,42x_1 + 2,91x_2 + 12,37x_3 = 5,75 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 1,53x_1 - 1,65x_2 - 0,76x_3 = 2,18 \\ 0,86x_1 + 1,17x_2 + 1,84x_3 = 1,95 \\ 0,32x_1 - 0,65x_2 + 1,11x_3 = -0,47 \end{cases}$	9	$\begin{cases} 0,13x_1 - 0,14x_2 - 2,00x_3 = 0,15 \\ 0,75x_1 + 0,18x_2 + 0,77x_3 = 0,11 \\ 0,28x_1 - 0,17x_2 + 0,39x_3 = 0,12 \end{cases}$

Вариант	Задание	Вариант	Задание
3	$\begin{cases} 0,45x_1 - 0,94x_2 - 0,15x_3 = -0,15 \\ -0,01x_1 + 0,34x_2 + 0,06x_3 = 0,31 \\ -0,35x_1 + 0,05x_2 + 0,65x_3 = 0,37 \end{cases}$	10	$\begin{cases} 0,66x_1 + 0,44x_2 + 0,22x_3 = -0,58 \\ 1,54x_1 + 0,74x_2 + 1,54x_3 = -0,32 \\ 1,42x_1 + 1,42x_2 + 0,86x_3 = 0,83 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 0,63x_1 + 0,05x_2 + 0,15x_3 = 0,34 \\ 0,15x_1 + 0,10x_2 + 0,71x_3 = 0,42 \\ 0,03x_1 - 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32 \end{cases}$	11	$\begin{cases} 0,92x_1 - 0,83x_2 + 0,62x_3 = 2,15 \\ 0,24x_1 - 0,54x_2 + 0,43x_3 = 0,62 \\ 0,73x_1 - 0,81x_2 - 0,67x_3 = 0,88 \end{cases}$
5	$\begin{cases} -0,20x_1 + 1,60x_2 - 0,10x_3 = 0,30 \\ -0,30x_1 + 0,10x_2 - 1,5x_3 = 0,40 \\ 1,20x_1 - 0,20x_2 + 0,30x_3 = -0,60 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 1,02x_1 + 0,72x_2 - 0,65x_3 = 1,27 \\ 0,74x_1 - 1,24x_2 - 1,73x_3 = 0,77 \\ 1,78x_1 + 2,32x_2 + 0,74x_3 = 1,16 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 0,30x_1 + 1,20x_2 - 0,20x_3 = -0,60 \\ -0,10x_1 - 0,20x_2 + 1,60x_3 = 0,30 \\ 0,50x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32 \end{cases}$	13	$\begin{cases} 6,34x_1 + 11,75x_2 + 10x_3 = -41,40 \\ 7,42x_1 - 19,03x_2 + 11,75x_3 = -49,49 \\ 5,57x_1 + 7,48x_2 + 6,36x_3 = -27,67 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 0,20x_1 + 0,44x_2 + 0,81x_3 = 0,74 \\ 0,58x_1 + 0,29x_2 + 0,05x_3 = 0,02 \\ 0,05x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 7,6x_1 + 5,8x_2 + 4,7x_3 = 10,01 \\ 3,8x_1 + 4,1x_2 + 2,7x_3 = 9,7 \\ 2,9x_1 + 2,1x_2 + 3,89x_3 = 7,37 \end{cases}$

Задание 2. Используя преобразованные исходные данные таблицы 1, решите полученную систему уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса с помощью табличного процессора Microsoft Excel.

Этапы решения:

1. Постройте схему единственного деления:

x₁	x₂	x₃	Свободные члены	Σ	Разделы
a₁₁	a₁₂	a₁₃	a₁₄	a₁₅	A
a₂₁	a₂₂	a₂₃	a₂₄	a₂₅	
a₃₁	a₃₂	a₃₃	a₃₄	a₃₅	
1	b₁₂	b₁₃	b₁₄	b₁₅	
	a₂₂⁽¹⁾	a₂₃⁽¹⁾	a₂₄⁽¹⁾	a₂₅⁽¹⁾	A1
	a₃₂⁽¹⁾	a₃₃⁽¹⁾	a₃₄⁽¹⁾	a₃₅⁽¹⁾	
	1	b₂₃⁽¹⁾	b₂₄⁽¹⁾	b₂₅⁽¹⁾	
		a₃₃⁽²⁾	a₃₄⁽²⁾	a₃₅⁽²⁾	A2
		1	b₃₄⁽²⁾	b₃₅⁽²⁾	
			(x₃)	(x₃)	
		1	x₃	x₃	B
	1		x₂	x₂	
1			x₁	x₁	

2. Результаты прямого хода и обратного хода отразите в отчете.
3. Используя преобразованные исходные данные таблицы 1, решите полученную систему уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса с помощью языка программирования высокого уровня.

Примечание. Задания повышенного уровня выделены курсивом.

Тест по теме «Метод Гаусса»

1. На сколько групп можно разделить методы решения систем линейных уравнений.
- 1) на три группы;
 - 2) на две группы;
 - 3) выделяют одну группу.
2. Диагональная матрица – это квадратная матрица, у которой:
- 1) $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$);
 - 2) $a_{ij} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.
 - 3) $a_{ij} = 0$ при $i > j$.
3. Единичная матрица – это диагональная матрица, у которой
- 1) на главной диагонали стоят единицы;
 - 2) ненулевые элементы стоят только на главной диагонали;
 - 3) которой ниже главной диагонали все элементы равны нулю.
4. Верхняя треугольная – это матрица у которой:
- 1) ниже главной диагонали все элементы равны нулю;
 - 2) выше главной диагонали все элементы равны нулю;
 - 3) все элементы, симметричные относительно главной диагонали.
5. Нижняя треугольная матрица – это матрица у которой:
- 1) ниже главной диагонали все элементы равны нулю;
 - 2) выше главной диагонали все элементы равны нулю;
 - 3) все элементы, симметричные относительно главной диагонали.
6. Симметричная матрица – это матрица у которой:
- 1) ниже главной диагонали все элементы равны нулю;
 - 2) выше главной диагонали все элементы равны нулю;
 - 3) все элементы, симметричные относительно главной диагонали.
7. Ленточная матрица – это матрица у которой:
- 1) $a_{ij} = a_{ji}$ ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$);
 - 2) $a_{ij} = 0$ при $|i - j| \geq l$;
 - 3) $a_{ij} = 0$ при $i > j$.
8. Трехдиагональная матрица – это квадратная матрица, у которой:
- 1) ненулевые элементы стоят только на главной диагонали;
 - 2) не равны нулю только те элементы, которые расположены на главной диагонали и двух соседних с ней диагоналях;
 - 3) на главной диагонали стоят единицы.
9. Разреженные матрицы – это матрицы, у которых:
- 1) подавляющее большинство элементов матрицы равны нулю;
 - 2) подавляющее большинство элементов матрицы равны единице;

3) ненулевые элементы стоят только на главной диагонали.

10. К прямым методам относятся

- 1) метод Крамера, метод Гаусса и его модификации;
- 2) метод Крамера, метод Зейделя, метод релаксаций;
- 3) метод Гаусса и его модификации, градиентные методы и их модификации.

11. Основная идея метода Гаусса заключается в том, чтобы исходную линейную систему. с помощью эквивалентных преобразований привести к виду:

- 1) $A\bar{x} = \bar{b}$
- 2) $U\bar{x} = \bar{b}^*$

12. Метод Гаусса основан на сведении исходной системы к

- 1) нижней треугольной матрице;
- 2) верхней треугольной матрице;
- 3) диагональной матрице;
- 4) единичной матрице.

13. Метод Гаусса состоит из двух шагов:

- 1) прямого хода и обратного хода;
- 2) обратного хода и встречного хода;
- 3) прямого и встречного хода.

Лабораторная работа 4-5. Метод простой итерации. Метод Зейделя

Цель работы – сформировать готовность программно реализовывать методы решения систем линейных алгебраических уравнений методом простой итерации и методом Зейделя.

Теоретическая часть. Итерационные методы заключаются в построении последовательности приближенных решений, предел которой (если он существует) является решением системы. К итерационным методам относятся: метод простой итерации, метод Зейделя, метод релаксаций, градиентные методы и их модификации и другие.

Метод простой итерации. Запишем общий вид исходной линейной системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – искомое решение. В методе итераций решение строится в виде последовательности векторов $\bar{x}^{(0)}, \bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots, \bar{x}^{(k)}, \dots$. Верхний индекс в скобках указывает номер итерации.

При решении системы (1) методом простой итераций необходимо:

1) задать начальное приближенное решение $\bar{x}^{(0)} = \{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\}$, которое затем будет уточняться в процессе итераций. В качестве начального приближения берется какой-либо известный вектор, например, вектор правых частей $\bar{b}$ или нулевой вектор, т.е. полагают:

$$x_1^{(0)} = b_1, x_2^{(0)} = b_2, \dots, x_n^{(0)} = b_n, \quad (2)$$

или

$$\mathbf{x}_1^{(0)} = \mathbf{0}, \mathbf{x}_2^{(0)} = \mathbf{0}, \dots, \mathbf{x}_n^{(0)} = \mathbf{0} \quad (3)$$

2) привести исходную систему (1) к виду, удобному для проведения итераций – записать исходную линейную систему (1) в таком виде, чтобы на каждой итерации можно было определять уточненное значение для каждой из неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Для этого надо из n уравнений (1) получить n явных выражений для каждой из переменных через остальные переменные

[illegible]

Для более компактной записи представим общий вид i -го уравнения (4)

$$x_i = \frac{1}{a_{ij}} (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j) \quad (5)$$

3) указать совокупность действий, которые составляют одну итерацию и по заданному приближенному решению $\bar{x}^{(k)}$ позволят получить уточненное решение $\bar{x}^{(k+1)}$.

В общем случае для системы (4) метод простой итерации записывается в виде:

[illegible]

В компактном сокращенном виде, метод простой итерации примет вид

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ij}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} \right), (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

4) выяснить, будет ли итерационный метод сходящимся, т. е. будет ли последовательность получаемых приближенных решений $\bar{x}^{(k)}$ сходиться к искомому решению $\bar{X}$;

5) указать условия окончания итерационного процесса. В качестве условия окончания итерационного процесса можно использовать условие:

$$|\mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_i^{(k-1)}| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

Рассмотрим этапы решения системы линейных уравнений третьего порядка методом простой итерации на конкретном примере:

$$\begin{cases} 0,78x_1 - 0,02x_2 - 0,12x_3 = 0,56 \\ 0,02x_1 - 0,86x_2 + 0,04x_3 = 0,77 \\ 0,12x_1 + 0,44x_2 - 0,72x_3 = 1,01 \end{cases}$$

1. Это система уравнений с преобладающими диагональными коэффициентами. Разделим каждое уравнение на его диагональный коэффициент и выразим из каждого уравнения диагональное неизвестное, из 1-го уравнения x_1 , из 2-го – x_2 , из 3-го – x_3 .

$$\begin{aligned}x_1 &= (0,56 + 0,02x_2 + 0,12x_3)/0,78 \\x_2 &= (0,77 - 0,02x_1 - 0,04x_3)/(-0,86) \\x_3 &= (1,01 - 0,12x_1 - 0,44x_2)/(-0,72)\end{aligned}$$

Получим:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0,718 + 0,026x_2 + 0,154x_3 \\x_2 &= -0,895 + 0,023x_1 + 0,047x_3 \\x_3 &= -1,403 + 0,167x_1 + 0,611x_2\end{aligned}$$

2. На этом этапе необходимо проверить сходимость итерационного процесса. Для попробуем установить сходимость по одной из норм матрицы, а именно найдем сумму квадратов всех коэффициентов при неизвестных в правой части системы. Она должна быть меньше единицы

$$\|\alpha\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2} < 1$$

то итерационный процесс сходится к единственному решению. Для рассматриваемой системы уравнений имеем:

$$0,026^2 + 0,154^2 + 0,023^2 + 0,047^2 + 0,167^2 + 0,611^2 = 0,428 < 1$$

Следовательно, итерационный процесс для данной системы уравнений сходится к единственному решению.

3. Необходимо программно реализовать решение системы линейных алгебраических уравнений методом простой итерации на языке высокого уровня, на основе алгоритма, приведенного в лекции «Итерационные методы. Метод простой итерации. Метод Зейделя».

Метод Зейделя – итерационный метод – заключается в том, что на каждой итерации уже вычисленные значения переменных $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$ используются в правой части при вычислении $x_i^{(k)}$. Остальные переменные в правой части берутся с предыдущей итерации $x_{i+1}^{(k-1)}, x_{i+2}^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}$. Формулы (6) для метода Зейделя запишутся в виде

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)}) \\ x_n^{(k)} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases} \quad (9)$$

или в компактном виде для произвольной переменной

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)}), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (10)$$

Метод Зейделя, по сравнению с методом простой итерации, сходится быстрее. Другое преимущество метода Зейделя заключается в том, что, в отличие от метода простой итерации, в памяти ЭВМ надо хранить не два массива длиной n , а один.

Оборудование и материалы: персональный компьютер, текстовый редактор Microsoft Word, табличный процессор Microsoft Excel, системы программирования.

Задания

Используя систему программирования, составьте программы на языке программирования высокого уровня для решения системы линейных уравнений с тремя неизвестными, имеющей диагональное преобладание и полученной в результате преобразования исходных данных табл. 1 (лаб. раб. Метод Гаусса):

- методом простой итерации;
- методом Зейделя.

Решение осуществить с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

Указания к выполнению задания

1. Приведем словесное описание программы на языке высокого уровня, которая реализует решение системы линейных уравнений с тремя неизвестными методом простой итерации:

1) введем начальное приближение x, y, z , норму матрицы α и заданную точность ε . В качестве начального приближенного решения выберем ноль вектор, т. е. $x = 0, y = 0, z = 0$;

2) присвоим переменной b значение $1/\alpha$;

3) в цикле, обозначив неизвестные через x, y, z , а их новые значения через x_1, y_1, z_1 , т. е. $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$,

a) вычислим: $x_1 = (b_1 - a_{12}y - a_{13}z)/a_{11}$

$$y_1 = (b_2 - a_{21}x - a_{23}z)/a_{22}$$

$$z_1 = (b_3 - a_{31}x - a_{32}y)/a_{33}$$

b) найдем $p = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$, присвоим $x = x_1, y = y_1, z = z_1$

c) продолжаем цикл до тех пор пока не выполнится условие $p \leq b$, в противном случае выходим из цикла;

4) выводим неизвестные переменные x, y, z ;

5) завершаем работу программы.

2. Приведем словесное описание программы на языке высокого уровня, которая реализует решение системы линейных уравнений с тремя неизвестными методом Зейделя:

1) введем начальное приближение x, y, z , норму матрицы α и заданную точность ε . В качестве начального приближенного решения выберем ноль вектор, т. е. $x = 0, y = 0, z = 0$;

2) присвоим переменной b значение $1/\alpha$;

3) в цикле, обозначив неизвестные через x, y, z , а их новые значения через x_1, y_1, z_1 , т.е. $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ учитывая, что это метод Зейделя,

a) вычислим: $x_1 = (b_1 - a_{12}y - a_{13}z)/a_{11}$

$$y_1 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}z)/a_{22}$$

$$z_1 = (b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}y_1)/a_{33}$$

b) найдем $p = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$, присвоим $x = x_1, y = y_1, z = z_1$;

c) продолжаем цикл до тех пор пока не выполнится условие $p \leq b$, в противном случае выходим из цикла;

4) выводим неизвестные переменные x, y, z ;

5) завершаем работу программы.

Контрольные вопросы

1. Итерационные методы решения СЛАУ. Сущность метода простой итерации.
2. Выбор начального приближения при решении СЛАУ методом простой итерации.
3. Сведение линейной системы к виду, удобному для итерации.
4. Условие окончания и сходимости итерационного процесса.
5. Сущность метода Зейделя.
6. Преимущества метода Зейделя в сравнении с методом простой итерации

Тест по теме «Метод простой итерации. Метод Зейделя»

1. Итерационные методы заключаются:

- 1) в получении точного результата за конечное число арифметических и логических операций при отсутствии погрешностей округления;
- 2) в построении последовательности приближенных решений, предел которой (если он существует) является решением системы;
- 3) в получении точного результата с помощью поиска итерации системы.

2. Для получения все более точного решения при условии, что метод сходится к искомому решению необходимо:
 - 1) многократное повторение итераций;
 - 2) нахождение приближенного значения;
 - 3) приведение системы к треугольному виду.
3. Обычно в качестве начального приближения берется:
 - 1) какой-либо известный вектор;
 - 2) нулевой вектор;
 - 3) возможны оба варианта.
4. Сведение линейной системы к виду, удобному для итерации это специальный способ записи линейной системы, в котором:
 - 1) каждая искомая переменная явно выражается через все остальные путем преобразования исходной системы;
 - 2) заданы точные значения каждой переменной;
 - 3) система приведена к треугольному виду.
5. Зависит ли итерационный процесс и его сходимость от выбора начального вектора:
 - 1) зависит;
 - 2) не зависит.
6. Метод Зейделя – итерационный метод, при котором:
 - 1) уже полученные на данной итерации уточненные значения искомых переменных, используются при вычислении остальных искомых переменных на этой итерации;
 - 2) уточненные значения искомых переменных, используются при вычислении остальных переменных на следующей итерации и при многократном повторении итераций дают точный результат;
 - 3) в качестве начального приближения выбирается единица.
7. В качестве одного из примеров эффективного ускорения сходимости для многих задач, связанных с решением уравнений в частных производных, на практике используется:
 - 1) метод Зейделя;
 - 2) метод релаксации;
 - 3) метод Гаусса.
8. Для матриц большой размерности (более 1000) наиболее эффективным является:
 - 1) итерационные методы;
 - 2) метод Крамера;
 - 3) метод Гаусса.
9. Свойство самокорректировки свойственно:
 - 1) прямым методам;
 - 2) точным методам;
 - 3) итерационным методам.
10. Достаточные условия сходимости метода простой итерации и метода Зейделя:
 - 1) матрица A исходной линейной системы имеет диагональное преобладание;

- 2) матрица A исходной линейной системы должна быть единичной;
 - 3) матрица A исходной линейной системы должна быть симметричной.
11. Недостатком итерационных методов во многих случаях является:
- 1) довольно медленная сходимость, особенно при больших n ;
 - 2) зависимость сходимости от выбора начального вектора;
 - 3) зависимость решения от вида исходной матрицы.
12. Сведение линейной системы к виду, удобному для итерации – это
- 1) специальный способ записи линейной системы, в котором каждая искомая переменная явно выражается через все остальные путем преобразования исходной системы;
 - 2) специальный способ преобразования линейной системы, в систему с диагональным преобладанием.

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Лабораторная работа 6. Машинный алгоритм отделения корней

Цель – овладеть практическими навыками отделения корней.

Теоретическая часть. Пусть дано уравнение $f(x) = 0$ (1), где $f(x)$ – нелинейная функция. Решить уравнение (1), значит указать совокупность значений x , которая это уравнение обращает в верное числовое равенство. Каждый такой x называется корнем уравнения.

Процесс решения нелинейных уравнений предполагает реализацию двух этапов:

- 1) отделения корней нелинейных уравнений;
- 2) уточнения корней нелинейных уравнений.

Отделение корней нелинейных уравнений

На этом этапе необходимо исследовать уравнение и выяснить, имеются у него корни или нет. Если корни есть, то необходимо выяснить их количество и затем определить интервалы, в каждом из которых находится единственный корень уравнения. Обычно используются два метода отделения корней:

- 1) графический метод;
- 2) аналитический метод.

Сущность графического метода состоит в следующем. Исходя из уравнения (1), можно построить график функции $y = f(x)$. Тогда точка пересечения графика с осью абсцисс является приближённым значением корня уравнения. Если функция $y = f(x)$ имеет сложный вид, то её можно представить в виде разности двух функций $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Так как $f(x) = 0$, то выполняется равенство $f_1(x) = f_2(x)$. Построим два графика $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, на оси x отметим отрезки, локализирующие абсциссы точек пересечения этих графиков. Приближённое значение корня уравнения является абсциссой точки пересечения двух графиков.

Пример 1. Рассмотрим нелинейное уравнение вида $\sin 4x - \ln x = 0$. Выполним отделение корней уравнения графически.

Решение. Представим уравнение в виде $f_1(x) - f_2(x) = 0$, где $f_1(x) = \sin 4x$, $f_2(x) = \ln x$.

Графики функций $y = \sin 4x$; $y = \ln x$ представлены на рис. 1, из которого видно, что исходное уравнение имеет три корня, которые находятся на отрезках $[0, 1]$; $[1, 2]$; $[2, 3]$.

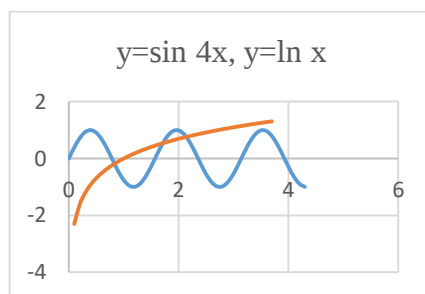


Рис. 1. Графический способ отделения корней нелинейного уравнения

В простейших случаях графическое отделение корней можно осуществить вручную, однако в более сложных случаях для исследования вопроса о наличии (и количестве) корней уравнения на заданном отрезке целесообразнее воспользоваться инструментальным пакетом или составить программу для компьютера на языке программирования.

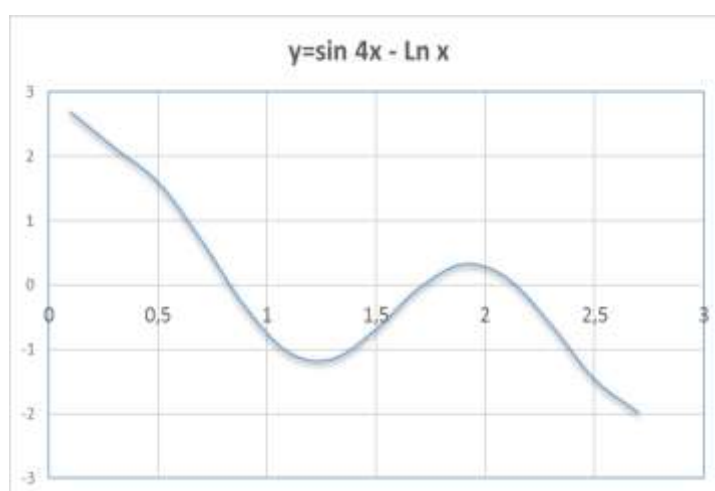
При решении задачи об отделении корней бывают полезными следующие очевидные положения.

1. Если непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ принимает на его концах значения разных знаков (т. е. $f(a) \cdot f(b) < 0$), то уравнение (1) имеет на этом отрезке по меньшей мере один корень.

2. Если функция $f(x)$ к тому же еще и монотонна, то корень на отрезке $[a; b]$ единственный.

Пример 2. Построить графическую иллюстрацию и отделить корни уравнения $\sin 4x - \ln x = 0$ на отрезке $[0; 4]$ с шагом 0,2, с помощью MS Excel. Выполним табулирование функции $f(x) = \sin 4x - \ln x$ для значений x от 0 до 4, с шагом 0,2 и построим график.

х	у
0,1	2,692
0,3	2,13601
0,5	1,60244
0,7	0,69166
0,9	-0,3372
1,1	-1,0469
1,3	-1,1458
1,5	-0,6849
1,7	-0,0365
1,9	0,32607
2,1	0,11266
2,3	-0,61
2,5	-1,4603
2,7	-1,9742
2,9	-1,8875
3,1	-1,297
3,3	-0,6018
3,5	-0,2622
3,7	-0,5201
3,9	-1,2532
4,1	-2,0491



0,7	0,69166
-----	---------

Рис. 2. Способы отделения корней нелинейного уравнения в MS Excel

Из полученной таблицы (рис. 2) находим, что значение функции трижды меняет знак, следовательно, исходное уравнение имеет на заданном отрезке три корня.

Аналитический метод отделения корня выполняется по алгоритму и может быть реализован на языке программирования высокого уровня.

Задания

Выполнить отделение корней нелинейного уравнения $f(x)=0$ графически и написав программу на любом языке программирования. Исходные данные приведены в таблице 1.

Таблица 1

№ Варианта	Нелинейное уравнение
1	$x^2 + e^x = 2$
2	$0,3 e^{0,6x} - x = 0$
3	$\cos x - (x - 1)^2 = 0$
4	$\cos (x + 0,3) = x^2$
5	$3 \sin(x + 0,7) - 0,5x = 0$
6	$x^2 - 3 \sin x = 0$
7	$x \ln(x + 2) = 2$
8	$x^3 - 0,5 - \sin x = 0$
9	$\sin (x + 1) = 0,2x$
10	$5 \sin x = x + \ln(x)$
11	$x^2 + \cos(2 + x) = 1$
12	$x \ln(x + 1) = 1$
13	$x + 1 - 0,5e^x = 0$
14	$x \ln x = 2$

Этапы выполнения задания:

1. Определите количество вещественных корней нелинейного уравнения графическим методом.
2. Постройте графическую иллюстрацию и отделите корни нелинейного уравнения с помощью MS Excel.
3. Отделите вещественные корни нелинейного уравнения аналитическим методом, написав программу на любом языке программирования. Сравните результаты.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается задача отделения корней?
2. Какие методы отделения корней существуют?
3. В чем суть графического метода отделения корней?
4. Какие свойства функции одной переменной используются для проверки правильности отделения корня и его единственности на отрезке?
5. Приведите примеры известных вам способов исследования нелинейных уравнений.

Лабораторная работа 7-8. Метод половинного деления. Метод хорд

Цель – овладеть практическими навыками решения нелинейных уравнений методом половинного деления и методом хорд

Теоретическая часть

Уточнения корней нелинейных уравнений с использованием инструментальных пакетов

Используя возможности MS Excel, можно находить корни нелинейного уравнения вида $f(x) = 0$ в допустимой области определения переменной. Последовательность операций нахождения корней следующая:

- 1) производится вычисление значений функции в диапазоне вероятного существования корней от значений аргумента, изменяющегося с определенным шагом;
- 2) в таблице выделяют ближайшие приближения к значениям корней (пары соседних значений функции с разными знаками);
- 3) используя средство MS Excel «Подбор параметра», вычисляют корни уравнения.

Пример 3. Найти все корни уравнения $\sin 4x - \ln x = 0$ на отрезке $[0; 4]$.

1. В примерах 1 и 2, проведено отделение корней уравнения.
2. Выполним уточнение корней с использованием MS Excel.
3. Для этого скопируем рядом с таблицей произвольную пару выделенных значений x и y (рис. 3).
4. Выполним команду меню *Данные / Анализ / Подбор параметра*. В диалоговом окне (рис. 3) заполним следующие поля:
 - *Установить в ячейке* (в поле указывается адрес ячейки, в которой записана формула правой части функции);
 - *Значение* (в поле указывается значение, которое должна получить функция в результате вычислений, т. е. правая часть уравнения (в нашем случае 0));
 - *Изменяя значение* (в поле указывается адрес ячейки (где записано начальное приближение), в которой будет вычисляться корень уравнения и на которую ссылается формула).

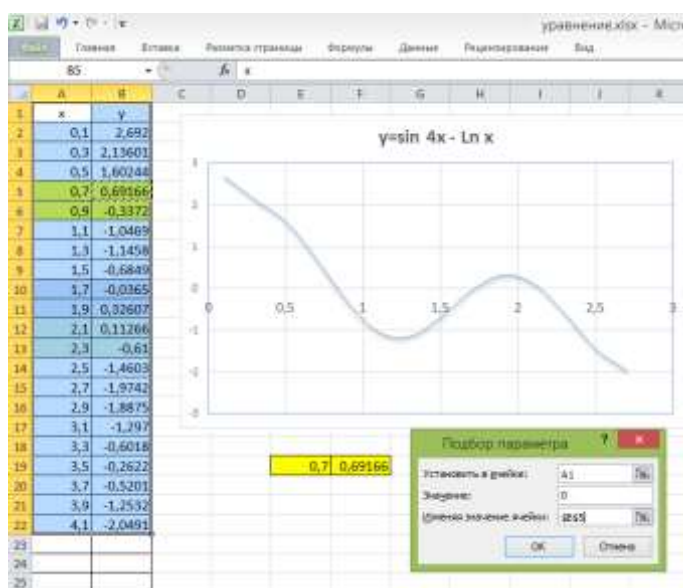


Рис. 3. Уточнение корней нелинейного уравнения в MS Excel

Уточнения корней нелинейных уравнений методом половинного деления

Пусть уравнение $f(x) = 0$ имеет на отрезке $[a; b]$ единственный корень, причем функция $f(x)$ на этом отрезке непрерывна. Разделим отрезок $[a; b]$ пополам точкой $c = (a + b)/2$. Если $f(c) < 0$, то возможны два случая: $f(x)$ меняет знак либо на отрезке $[a; c]$ (рис. 4а), либо на отрезке $[c; b]$ (рис. 4б). Выбирая в каждом случае тот из отрезков, на котором функция меняет знак, и продолжая процесс половинного деления дальше, можно прийти к сколь угодно малому отрезку, содержащему корень уравнения.

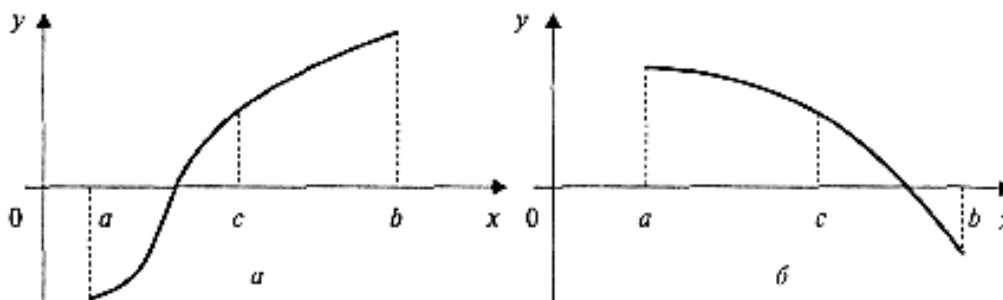


Рис. 4. Решение уравнения $f(x)$ методом половинного деления

Метод половинного деления вполне можно использовать как метод решения уравнения с заданной точностью. Действительно, если на каком-то этапе процесса получен отрезок $[a; b]$, содержащий корень, то, приняв приближенно $x = (a + b) / 2$, получим ошибку, не превышающую значения $\Delta x = (b - a) / 2$.

Метод половинного деления требует утомительных ручных вычислений, однако он легко реализуется с помощью компьютера.

Уточнения корней нелинейных уравнений методом хорд

Для реализации данного метода, нужно найти значения функции на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$. Затем провести хорду АВ с концами в точках $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$.

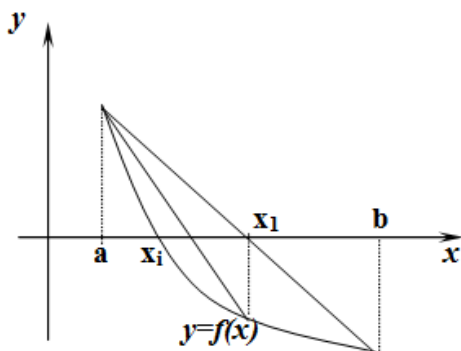


Рис. 5

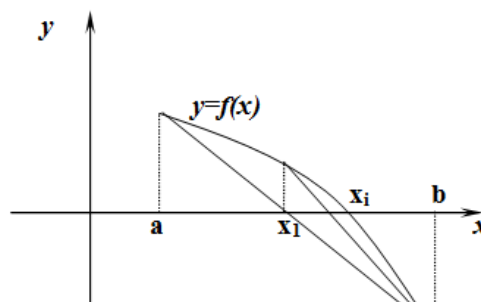


Рис. 6

Абсцисса точки пересечения хорды АВ с осью ОХ это и есть приближенный корень x_1 . Далее найти точку $(x_1, f(x_1))$, построить следующую хорду и найти второй приближенный корень x_2 . Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значение $f(x_n)$ не станет по модулю меньше заданного малого числа ϵ . Значения величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ определяются следующим образом. В зависимости от поведения функции возможны два случая:

Для первого случая (рис. 5) справедлива формула (2):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{a - x_n}{f(a) - f(x_n)} \cdot f(x_n) \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $x_0 = b$, если справедливо неравенство: $F(a) \cdot F''(a) > 0$.

Для второго случая (рис. 6) справедлива формула (3):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{b - x_n}{f(b) - f(x_n)} \cdot f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

где $x_0 = a$, если справедливо неравенство: $F(b) \cdot F''(b) > 0$.

Для оценки точности можно использовать формулу

$$\epsilon \leq |x_n - x_{n-1}|,$$

где x_n и x_{n-1} , приближения корня, полученные на n и $n-1$ шагах.

Оборудование и материалы: персональный компьютер, текстовый редактор Microsoft Word, табличный процессор Microsoft Excel, среда программирования (по выбору).

Задания. Решите нелинейное уравнение $f(x) = 0$ с точностью $\epsilon = 10^{-4}$ методом половинного деления и методом хорд. Исходные данные приведены в таблице 2.

Таблица 2

Вариант	Нелинейное уравнение	Вариант	Нелинейное уравнение
1	$x^2 + e^x = 2$	8	$x^3 - 0,5 - \sin x = 0$
2	$0,3 e^{0,6x} - x = 0$	9	$\sin(x + 1) = 0,2x$
3	$\cos x - (x - 1)^2 = 0$	10	$5 \sin x = x + \ln(x)$

4	$\cos(x + 0,3) = x^2$	11	$x^2 + \cos(2 + x) = 1$
5	$3 \sin(x + 0,7) - 0,5x = 0$	12	$x \ln(x + 1) = 1$
6	$x^2 - 3 \sin x = 0$	13	$x+1 - 0,5e^x = 0$
7	$x \ln(x + 2) = 2$	14	$x \ln x = 2$

Этапы выполнения задания

1. Уточните корни нелинейного уравнения с помощью MS Excel.
2. Уточните корни нелинейного уравнения методом половинного деления, написав программу на языке программирования.
3. Уточните корни нелинейного уравнения методом хорд, написав программу на языке программирования.
4. Решите нелинейное уравнение с использованием математического пакета (MathCAD, MatLab, Maple).
5. Используя встроенный язык программирования среды Maple, найдите решение нелинейного уравнения методом половинного деления.
6. Используя встроенный язык программирования среды Maple, найдите решение нелинейного уравнения методом хорд.
7. Сравните результаты, сделайте вывод об эффективности методов.

Примечание. Задания повышенного уровня выделены курсивом.

Лабораторная работа 9-11. Метод касательных, метод секущих, метод итераций

Цель – овладеть практическими навыками решения нелинейных уравнений с одной переменной методами Ньютона, секущих, простой итерации, оценивать погрешность метода, выполнять сравнительную оценку методов.

Метод Ньютона (касательных). Идея, на которой основан метод, аналогична той, которая реализована в методе хорд, только в качестве прямой берется касательная, проводимая в текущей точке последовательности. Уравнение касательной находится по координате одной точки и углу наклона (значение производной).

Пусть корень x_* отделен на отрезке $[a, b]$ т. е. $x_* \in [a, b]$. В качестве начальной точки в зависимости от свойств функции берется или левая точка $x_0 = a$ (если $f(a) \cdot f''(a) > 0$), или правая точка $x_0 = b$ (если $f(b) \cdot f''(b) > 0$), как показано на рис. 7.

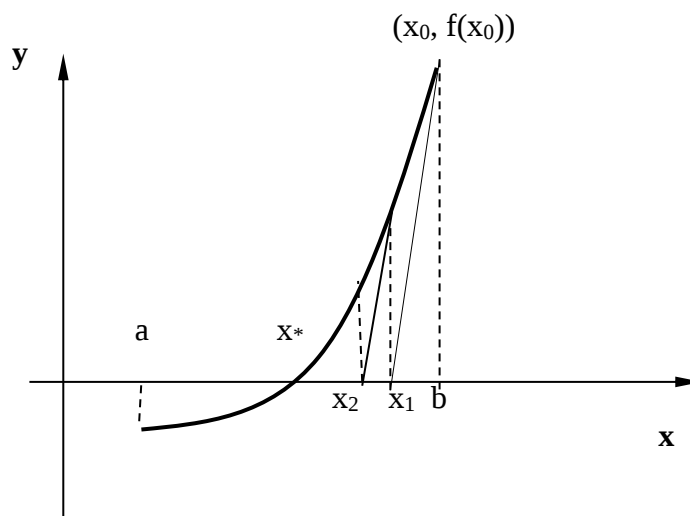


Рис. 7. Иллюстрация метода касательных

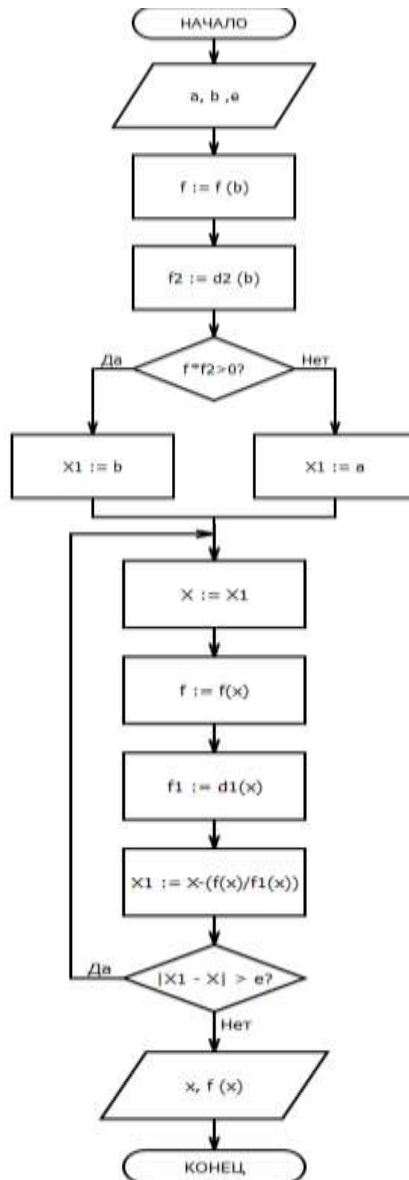


Рис. 8. Схема алгоритма уточнения корня методом касательных

Алгоритм записывается следующим образом:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)};$$

Алгоритм работоспособен при выпуклых и монотонных функциях $f(x)$. Главным теоретическим достоинством метода является квадратичная скорость сходимости, что во многих случаях может привести к сокращению числа вычислений функции при получении решения с заданной погрешностью. В ряде случаев можно применять упрощенный алгоритм, связанный с сокращением числа раз вычисления производных – вместо вычисления производной в каждой очередной точке $f'(x_i)$ использовать значение производной в начальной точке $f'(x_0)$. Следует обратить внимание на следующую особенность метода: последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots$ приближается к корню с другой стороны, чем при использовании метода хорд при прочих равных условиях.

Метод секущих. В методе Ньютона требуется вычисление $f(x_*)$ и $f'(x_*)$. Но иногда производная $f'(x)$ вычисляется сравнительно сложно и желательно ограничиться только

вычислением функции $f(x)$. Существуют методы, которые позволяют по двум приближениям x_{n-1} и x_n построить следующее приближение x_{n+1} . Идея заключается в том, чтобы через две точки на кривой $f(x)$ ($x_n, f(x_n)$) и ($x_{n-1}, f(x_{n-1})$) провести прямую и точку пересечения этой прямой с осью x считать следующим приближением (Рис. 9). Обозначим $y_n = f(x_n)$ и $y_{n-1} = f(x_{n-1})$, запишем уравнение прямой, проходящей через точки с координатами (x_n, y_n) и (x_{n-1}, y_{n-1})

$$\frac{y - y_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

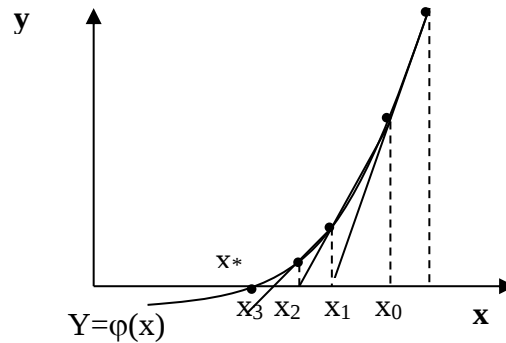


Рис. 9. Иллюстрация метода секущих

Найдем пересечение этой прямой с осью x , положив $y=0$. После простых преобразований найдем абсциссу пересечения этой прямой с осью x

$$x_{n+1} = x_{n-1} - y_{n-1} \frac{(x_n - x_{n-1})}{(y_n - y_{n-1})} \quad (3)$$

Применение метода (3) зависит от того, как выбраны точки x_{n-1} и x_n . Если начальные точки x_0, x_1 выбраны по разные стороны от корня x^* , например, $x_0 = a, x_1 = b$, то мы получаем всегда сходящийся метод хорд. Если же x_0 и x_1 берутся по одну сторону от корня x^* , то мы получаем метод, называемый *методом секущих*. Достаточные условия сходимости этого метода такие же, как у метода Ньютона: требуется выполнение условий Фурье, а именно

- 1) $f'(x) \cdot f''(x) \neq 0$, x – корень уравнения $f(x)=0$, $x \in [a, b]$;
- 2) $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, x_0 - начальное приближение, $x_0 \in [a, b]$.

В этом случае сходимость метода будет монотонной. Если условия Фурье не выполняются, то метод может расходиться. В методе секущих, в отличие от метода Ньютона, не требуется вычисление производных, однако для начала работы метода требуется знать две точки x_0 и x_1 .

Метод простой итерации. В ряде случаев весьма удобным приемом уточнения корня уравнения является метод последовательных приближений (метод итераций). Пусть с точностью ε необходимо найти корень уравнения $f(x) = 0$, принадлежащий отрезку $[a, b]$. Функция $f(x)$ и ее первая производная непрерывны на этом отрезке.

Для применения этого метода исходное уравнение $f(x) = 0$ должно быть приведено к виду $x = \varphi(x)$. Итерационный процесс при решении нелинейного уравнения будет сходящимся, при выполнении следующих условий

Уравнение $f(x) = 0$ имеет:

- единственный корень на отрезке $[a, b]$;
- функция $\varphi(x)$ определена на отрезке $[a, b]$;
- все значения функции $\varphi(x) \in [a, b]$;
- модуль производной $|\varphi'(x)| < 1$.

В качестве начального приближения выбираем любую точку x_0 принадлежащую отрезку $[a, b]$. Вычислим $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$, ..., $x_n = \varphi(x_{n-1})$...

Продолжим итерационный процесс до тех пор, пока выполняется неравенство

$$|x_{n+1} - x_n| \geq \varepsilon, \quad (4)$$

где ε – погрешность вычисления корня.

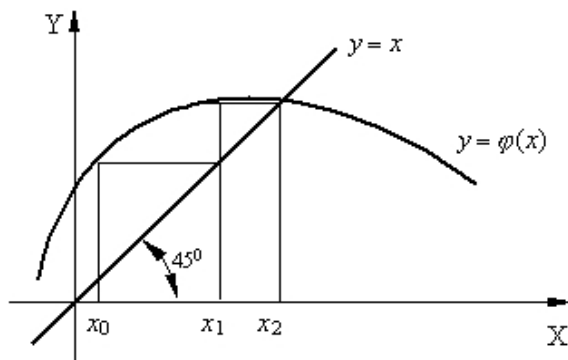


Рис. 10. Геометрический смысл метода итераций

Алгоритм уточнения корня методом итераций представлен на схеме (рис.11).

На современном этапе развития средств вычислительной техники и информационных технологий можно использовать современные математические пакеты, такие как MathCAD, MatLab, Maple, которые позволяют находить решение нелинейного уравнения различными методами, используя встроенный язык программирования среды.

Оборудование и материалы: персональный компьютер, текстовый редактор Microsoft Word, табличный процессор Microsoft Excel, среда программирования, система автоматизации математических вычислений (по выбору студента).

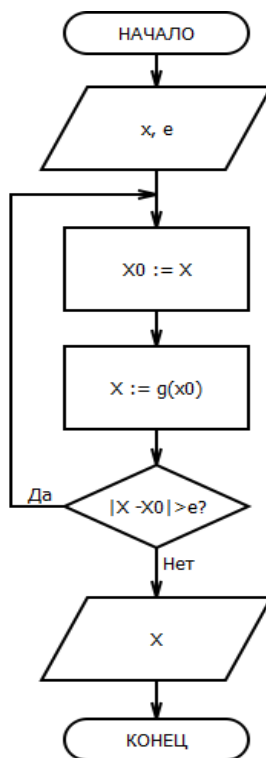


Рис. 11. Схема алгоритма уточнения корня методом итераций

Задания

Решите нелинейное уравнение $f(x) = 0$ с точностью $\epsilon = 0,0001$. Варианты заданий приведены в таблице 2.

- a) методом касательных;
- b) методом секущих;
- c) методом простой итерации;
- d) выполните сравнительную оценку методов.

Этапы выполнения задания

1. Локализируйте корень уравнения графическим методом.
2. Найдите с точностью 10^{-6} корень нелинейного уравнения методом Ньютона, написав программу на языке программирования.
3. Найдите корень уравнения методом секущих с точностью 10^{-4} , написав программу на языке программирования.
4. Выбрав в качестве начального приближения один из концов отрезка, уточните корень методом простых итераций с точностью 10^{-4} . Напишите и отладьте программу на языке программирования.
5. Решите нелинейное уравнение с использованием математического пакета (MathCAD, MatLab, Maple).
6. Используя встроенный язык программирования среды Maple, найдите решение нелинейного уравнения методом Ньютона.
7. Используя встроенный язык программирования среды Maple, найдите решение нелинейного уравнения методом простых итераций.
8. Проведите анализ результатов, сделайте вывод об эффективности методов.

Примечание. Задания повышенного уровня выделены курсивом.

Итоговый тест по разделам «Теория погрешностей», «Решение системы линейных уравнений», «Решение нелинейного уравнения».

1. Нахождение корня нелинейного уравнения включает:
 - 1) процесс отделения корня;
 - 2) процесс уточнения корня каким-либо методом с заданной точностью;
 - 3) оба названных процесса.
2. Неустраняемая (безусловная) погрешность – это:
 - 1) погрешность метода;
 - 2) погрешность задачи;
 - 3) погрешность округлений.
3. Для отделения корней нелинейного уравнения можно использовать метод:
 - 1) итерационный;
 - 2) графический;
 - 3) возможны оба варианта.
4. Под предельной абсолютной погрешностью числа A понимают:
 - 1) всякое число a не большее абсолютной погрешности этого числа;
 - 2) отношение ошибки к модулю значения A (когда оно неизвестно – к модулю приближения a);
 - 3) всякое число a не меньшее абсолютной погрешности этого числа.
5. Для реализации машинного алгоритма отделения корней нелинейного уравнения возможно использование:

- 1) языка высокого уровня;
 - 2) языка гипертекстовой разметки;
 - 3) возможны оба варианта.
6. *Относительная погрешность определяется как:*
- 1) отношение ошибки к модулю значения A (когда оно неизвестно) или к модулю приближения a ;
 - 2) отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютному значению приближения a ;
 - 3) отношение абсолютного значения приближения a к предельной абсолютной погрешности.
7. *Для уточнение корня нелинейного уравнения используются:*
- 1) метод половинного деления, метод прямоугольников, метод Гаусса;
 - 2) метод половинного деления, метод прямоугольников, метод Ньютона, метод Зейделя;
 - 3) метод хорд, метод половинного деления, метод секущих, метод касательных.
8. *Значащими цифрами числа в его позиционной записи называются:*
- 1) все его верные цифры, начиная с первой ненулевой справа;
 - 2) все цифры числа⁴
 - 3) все его верные цифры, начиная с первой ненулевой слева.
9. *Процесс отделения корня нелинейного уравнения определяет:*
- 1) приближенное значение корня по избытку;
 - 2) грубое значение корня по недостатку и по избытку;
 - 3) точное значение корня нелинейного уравнения.
10. *Итерационные методы используются для решения:*
- 1) систем линейных уравнений;
 - 2) нелинейного уравнения;
 - 3) оба варианта верны.
11. *Итерационные методы заключаются:*
- 1) в получении точного результата за конечное число арифметических и логических операций при отсутствии погрешностей округления;
 - 2) в построении последовательности приближенных решений, предел которой (если он существует) является решением системы;
 - 3) в получении точного результата с помощью поиска итерации системы.
12. *Согласно принципу А. Н. Крылова приближенное число должно записываться так, чтобы:*
- 1) отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютному значению приближения a являлось максимальным;
 - 2) в нем все значащие цифры, кроме последней, были верными и лишь последняя была бы сомнительна, и притом в среднем не более чем на одну единицу;
 - 3) все его цифры были верными в строгом смысле.
13. *Для получения все более точного решения при условии, что метод сходится к искомому решению необходимо:*
- 1) многократное повторение итераций;
 - 2) нахождение приближенного значения;

- 3) приведение системы к треугольному виду.
14. *Метод Зейделя – итерационный метод, при котором:*
 - 1) уже полученные на данной итерации уточненные значения искомых переменных, используются при вычислении остальных искомых переменных на этой итерации;
 - 2) уточненные значения искомых переменных, используются при вычислении остальных переменных на следующей итерации и при многократном повторении итераций дают точный результат;
 - 3) в качестве начального приближения выбирается единица.
15. *Сведение линейной системы к виду, удобному для итерации это специальный способ записи линейной системы, в котором:*
 - 1) каждая искомая переменная явно выражается через все остальные путем преобразования исходной системы;
 - 2) заданы точные значения каждой переменной;
 - 3) система приведена к треугольному виду.
16. *Нормы матрицы позволяют определить:*
 - 1) выбор начального приближения;
 - 2) условия сходимости итерационного процесса;
 - 3) погрешность метода простой итераций.
17. *Преимущества метода Зейделя по сравнению с методом простой итерации:*
 - 1) метод Зейделя сходится быстрее;
 - 2) в памяти ЭВМ надо хранить не два массива длиной n , а один;
 - 3) не требуется матрицы с диагональным преобладанием.
18. *Под термином ускорение сходимости итерационных методов понимаются:*
 - 1) специальный способ записи линейной системы, в котором каждая искомая переменная явно выражается через все остальные путем преобразования исходной системы;
 - 2) специальные теоретические разработки, приемы и алгоритмы, позволяющие вместо исходного итерационного метода построить другой, сходящийся к искомому решению быстрее, чем исходный.
19. *В качестве условия окончания итерационного процесса можно использовать условие:*
 - 1) $|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon \quad (i=1, 2, \dots, n);$
 - 2) $|x_* - x_n| < |x_n - x_{n-1}|.$

МЕТОДЫ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Лабораторная работа 12. Метод среднеквадратических приближений. Нахождение приближающей функции в виде линейной функции

Цель – овладеть практическими навыками нахождения формулы, выражающей зависимость экспериментальных данных аналитически, оценивания погрешности метода.

Теоретическая часть. Пусть в результате измерений в процессе опыта получена таблица 1 некоторой зависимости f :

Таблица 1

x	x ₁	x ₂	...	x _n
f(x)	y ₁	y ₂	...	y _n

Нужно найти формулу, выражающую эту зависимость аналитически, т. е. найти функцию вида: $y = f(x)$, которая в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ принимает значения как можно более близкие к табличным значениям $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Практически вид приближающей функции f можно определить следующим образом. По таблице строится точечный график функции f , а затем проводится плавная кривая, по возможности наилучшим образом отражающая характер расположения точек (рис. 1).

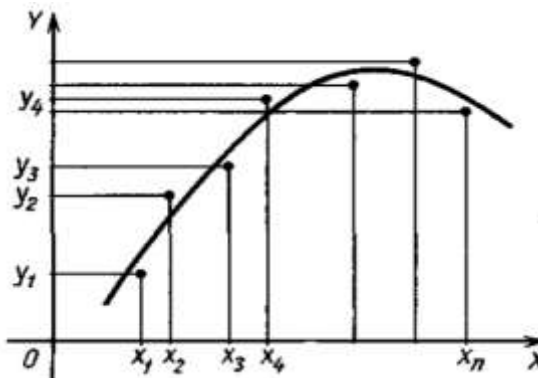


Рис. 1. Аппроксимирующая функция

По полученной таким образом кривой устанавливается вид приближающей функции (обычно из числа простых по виду аналитических функций). Следует заметить, что строгая функциональная зависимость для экспериментально полученных данных наблюдается редко, значение величин может зависеть от многих случайных факторов. Формулу $y = f(x)$ (1) называют эмпирической формулой, или уравнением регрессии y на x . Эта формула позволяет находить значения функции f для не табличных значений x , «сглаживая» результаты измерений величины y . Оправданность такого подхода определяется в конечном счете практической полезностью полученной формулы.

Рассмотрим один из способов нахождения формулы $y = f(x)$. Предположим, что приближающая функция F в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ имеет значения

$$\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_n} \quad (2)$$

Требование близости табличных значений $y_1, y_2, \dots, y_n$ и значений (2) можно истолковать следующим образом. Будем рассматривать совокупность значений функции f из таблицы 1 и совокупность (2) как координаты двух точек n -мерного пространства. С учетом этого задача приближения функции может быть переформулирована следующим образом: найти такую функцию F заданного вида, чтобы расстояние между точками $M(y_1, y_2, \dots, y_n)$ и $\overline{M}(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_n})$ было наименьшим. Воспользовавшись метрикой евклидова пространства, приходим к требованию: сумма квадратов должна быть наименьшей.

$$(y_1 - \overline{y_1})^2 + (y_2 - \overline{y_2})^2 + \dots + (y_n - \overline{y_n})^2 \quad (3)$$

Итак, задача приближения функции f теперь формулируется следующим образом: для функции f , заданной таблицей 1, найти функцию F определенного вида так, чтобы сумма квадратов (3) была наименьшей.

Эта задача носит название приближения функции *методом наименьших квадратов*.

В качестве приближающих функций в зависимости от характера точечного графика функции f часто используют следующие функции:

$$1) y = ax + b;$$

$$2) y = ax^2 + bx + c;$$

$$3) y = ax^m;$$

$$4) y = a \cdot \exp(mx);$$

где a, b, c, m – параметры.

$$5) y = 1/(ax + b);$$

$$6) y = a \cdot \ln x + b;$$

$$7) y = a \cdot 1/x + b;$$

$$8) y = x/(ax + b)$$

Когда вид приближающей функции установлен, задача сводится только к отысканию значений параметров.

При таком подходе выражение

$$\Delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n [y_i - \bar{y}_i]^2}{n-1}} \quad (4)$$

называется среднеквадратическим отклонением (отклонением) функции $\bar{y}_i$ от функции y_i .

Из двух разных приближений одной и той же табличной функции, следуя принципу наименьших квадратов, лучшим нужно считать то, для которого среднеквадратическое отклонение (4) имеет наименьшее значение.

Пример 1. Необходимо найти аппроксимирующую функцию в виде линейного полинома $y = ax + b$ по имеющимся экспериментальным данным

x	-4,38	-3,84	-3,23	-2,76	-2,22	-1,67	-1,13	-0,6
y	2,25	2,83	3,44	4,31	5,29	6,55	8,01	10,04

Для этого необходимо составить и решить систему уравнений (где Σ берется по параметру i в пределах от 1 до n):

$$\begin{cases} \sum x_i y_i - a \sum x_i^2 - b \sum x_i = 0 \\ \sum y_i - a \sum x_i - nb = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Разделив каждое уравнение на n получим:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{n} \sum x_i^2 \right) \cdot a + \left(\frac{1}{n} \sum x_i \right) \cdot b = \frac{1}{n} \sum x_i y_i \\ \left(\frac{1}{n} \sum x_i \right) \cdot a + b = \frac{1}{n} \sum y_i \end{cases} \quad (6)$$

Выполним вспомогательные вычисления в Microsoft Excel

$1/n \sum X_i^2$	$1/n \sum X_i$	$1/n \sum X_i \cdot Y_i$	$1/n \sum Y_i$
8,7621	-2,8329	-11,6409	6,1029

Получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 8,7621 \cdot a - 2,8329 \cdot b = -11,6409 \\ -2,7621 \cdot a + b = 6,1029 \end{cases}$$

Проведя несложные вычисления, найдем $a = 7,6$; $b = 27,8$.

Затем вычислим $\bar{y}_i$ по формуле

$$\bar{y}_i = ax_i + b$$

x	-4,38	-3,84	-3,23	-2,76	-2,22	-1,67	-1,13	-0,6
$y_i = ax_i + b$	-5,754	-1,615	3,060	6,662	10,800	15,015	19,154	23,216

По формуле (4) вычислим среднеквадратичное уклонение функции $\Delta = 7,373$.

Значение среднеквадратичного уклонения достаточно велико, что позволяет сделать вывод: линейная функция аппроксимирует имеющиеся экспериментальные данные с большой погрешностью. Этот вывод подтверждает построенный график (рис. 2).

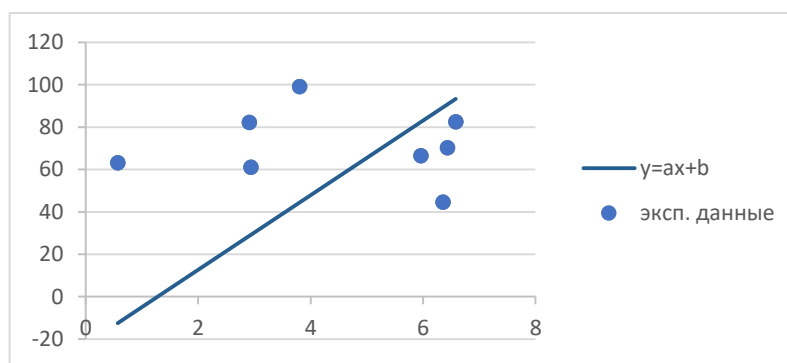


Рис. 2. График аппроксимирующую функцию в виде линейного полинома $y = ax + b$

Оборудование и материалы: персональный компьютер, текстовый редактор Microsoft Word, табличный процессор Microsoft Excel, система автоматизации математических вычислений (по выбору студента).

Задания

Набор экспериментальных данных представлен в таблице 2, найдите методом наименьших квадратов аппроксимирующую функцию в виде линейного полинома $y = ax + b$.

Этапы выполнения задания

1. Найдите методом наименьших квадратов вид приближающих функций в виде линейной регрессии.
2. Вычислите среднеквадратичное уклонение функции.
3. Постройте графики получившейся зависимости и экспериментальных данных. Сделайте вывод.
4. При помощи математического пакета (по выбору студента) выполните аппроксимацию функции. Используя метод наименьших квадратов, вычислите значения коэффициентов при условии, что между эмпирическими данными существует линейная зависимость. Постройте график получившейся зависимости. Сравните полученные результаты.

Таблица 2

Вариант	Исходные данные для аппроксимации методом наименьших квадратов								
1	x	5,08	3,82	6,19	9,22	7,87	6,29	4,43	8,91
	y	79,31	57,43	60,66	92,55	90,12	71,30	70,50	91,25
2	x	1,00	1,64	2,28	2,91	3,56	4,19	4,84	5,48
	y	0,28	0,19	0,15	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06
3	x	1,73	2,56	3,39	4,22	5,05	5,89	6,70	7,53
	y	0,63	1,11	1,42	1,94	2,30	2,89	3,29	3,87
4	x	1,20	1,57	1,94	2,31	2,68	3,05	3,42	3,79
	y	2,59	2,06	1,58	1,25	0,91	0,66	0,38	0,21
5	x	2,91	2,94	6,35	6,58	3,80	6,43	0,57	5,96
	y	82,16	61,02	44,56	82,52	99,17	70,24	63,23	66,48

Вариант	Исходные данные для аппроксимации методом наименьших квадратов								
6	x	5,46	2,73	6,49	4,26	2,39	6,46	0,86	2,05
	y	65,72	58,05	60,05	55,79	50,83	47,69	44,49	59,74
7	x	1,28	1,76	2,24	2,72	3,20	3,68	4,16	4,64
	y	2,10	2,62	3,21	3,96	4,98	6,06	7,47	9,25
8	x	-4,84	-4,30	-3,76	-3,22	-2,68	-2,14	-1,60	-1,06
	y	-0,09	-0,01	-0,13	-0,16	-0,19	-0,26	-0,39	-0,81
9	x	3,54	4,29	4,78	3,99	1,13	6,29	1,89	3,27
	y	22,81	28,42	24,95	26,96	8,78	33,55	15,77	22,89
10	x	4,08	4,42	2,52	-0,08	2,14	3,36	7,35	5,00
	y	18,31	21,85	16,93	-8,23	10,90	17,18	36,45	24,11
11	x	1,16	1,88	2,60	-3,32	4,04	4,76	5,48	6,20
	y	0,18	0,26	0,32	0,36	0,40	0,43	0,95	0,85
12	x	1,00	1,71	2,42	-3,13	3,84	4,55	5,26	5,97
	y	12,49	4,76	2,55	1,60	1,11	0,82	0,63	0,50
13	x	0,64	1,13	1,43	1,96	2,33	2,89	3,31	3,89
	y	1,22	1,59	1,96	2,33	2,69	3,07	3,44	3,81
14	x	1,25	1,78	2,26	2,75	3,22	3,68	4,18	4,66
	y	2,10	2,64	3,23	3,98	4,99	6,08	7,49	9,27

Примечание. Вариант для выполнения заданий, приведенных в лабораторной работе, определяется порядковым номером студента в подгруппе. Задания повышенного уровня выделены курсивом.

Лабораторная работа 13. Нахождение приближающей функции в виде квадратного трехчлена

Цель – овладеть практическими навыками нахождения формулы, выражающей зависимость экспериментальных данных аналитически, оцениванием погрешности метода.

Теоретическая часть. Численные методы приближения функции основываются на двух концепциях: интерполяция и аппроксимация. Основной задачей *аппроксимации* является построение приближенной функции, которая наиболее близко проходит около данных точек. Аппроксимацией функции также называют получение аналитической зависимости, описывающей данную функцию.

Одним из основных методов аппроксимации является метод наименьших квадратов, который заключается в следующем: найти такие значения параметров, входящих в аналитическую зависимость, для которых имеет место равенство (3).

В качестве аппроксимирующей функции выберем квадратный трехчлен

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

Для этого необходимо составить и решить систему уравнений.

$$\begin{cases} a_0(n+1) + a_1 \sum_{i=0}^n x_i + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 = \sum_{i=0}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 = \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^n x_i^4 = \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{cases} \quad (7)$$

Пример 1. Необходимо найти аппроксимирующую функцию в виде квадратного трехчлена по имеющимся экспериментальным данным

x	2,91	2,94	6,35	6,58	3,8	6,43	0,57	5,96
y	82,16	61,02	44,56	82,52	99,17	70,24	63,23	66,48

Для этого необходимо составить и решить систему уравнений (7).
Выполним вспомогательные вычисления в Microsoft Excel

$\sum x_i$	$\sum x_i^2$	$\sum x_i^3$	$\sum x_i^4$	$\sum y_i$	$\sum x_i \cdot y_i$	$\sum x_i^2 \cdot y_i$
35,54	192,36	1123,61	6826,71	569,38	2505,17	13310,86

Получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 9a_0 + 35,54a_1 + 192,36a_2 = 569,38 \\ 35,54a_0 + 192,36a_1 + 1123,61a_2 = 2505,17 \\ 192,36a_0 + 1123,61a_1 + 6826,71a_2 = 13310,86 \end{cases}$$

Решим систему линейных уравнения методом Гаусса

x_1	x_2	x_3	своб. члены	сумма	разделы
9	35,54	192,36	569,38	806,28	A
35,54	192,36	1123,61	2505,17	3856,68	
192,36	1123,61	6826,71	13310,86	21453,54	
1	3,95	21,37	63,26	89,59	A1
	52,02	363,99	256,75	672,76	
	363,99	2715,25	1141,19	4220,42	
	1	7,00	4,94	12,93	A2
		168,29	-655,41	-487,12	
		1	-3,89	-2,89	
			-3,89	-2,89	B
		1	-3,89	-2,89	
	1		32,19	33,19	
1			19,40	20,40	

Получим $a_0 = 19,40$; $a_1 = 32,19$; $a_2 = -3,89$.

Затем вычислим $\overline{y_i}$ по формуле, $\overline{y_i} = 19,40 + 32,19x - 3,89x^2$

x	2,91	2,94	6,35	6,58	3,8	6,43	0,57	5,96
$\overline{y_i} = a_0 + a_1x + a_2x^2$	80,09	80,37	66,75	62,57	85,47	65,35	36,48	72,90

По формуле (2) вычислим среднеквадратичное отклонение функции $\Delta = 0,09$.

Значение среднеквадратичного отклонения достаточно мало, что позволяет сделать вывод: квадратичная функция аппроксимирует имеющиеся экспериментальные данные с большой степенью точности. Этот вывод подтверждает построенный график.

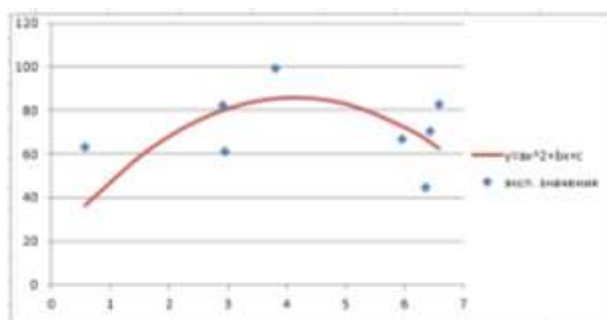


Рис. 3. График аппроксимирующую функцию в виде квадратного трехчлена

Оборудование и материалы: персональный компьютер, текстовый редактор Microsoft Word, табличный процессор Microsoft Excel, система автоматизации математических вычислений (по выбору студента).

Задание

Набор экспериментальных данных представлен в таблице 2 (Лаб. раб. Нахождение приближающей функции в виде линейной функции). Найдите методом наименьших квадратов аппроксимирующую функцию в виде квадратного трехчлена.

Этапы выполнения задания

1. Найдите методом наименьших квадратов вид приближающих функций в виде квадратичной регрессии.
2. Вычислите среднеквадратичное уклонение функции.
3. Постройте графики получившейся зависимости и экспериментальных данных. Сделайте вывод.
4. При помощи математического пакета (по выбору студента) выполните аппроксимацию функции. Используя метод наименьших квадратов, вычислите значения коэффициентов при условии, что между эмпирическими данными существует квадратичная зависимость. Постройте график получившейся зависимости. Сравните полученные результаты.

Контрольные вопросы

1. В каком случае для вычисления исходной функции используется аппроксимирующие функции.
2. На чем основан метод среднеквадратических приближений.
3. Какие функции используются в качестве приближающих функций в зависимости от характера точечного графика функции $f(x)$. Формула среднеквадратического уклонения.
4. Какой результат, полученный из двух разных приближений одной и той же табличной функции, считается лучшим.

ЧИСЛЕННАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Лабораторная работа 14. Интерполяционная формула Лагранжа

Цель работы – сформировать готовность применять современные информационные технологии для построения и графической иллюстрации по имеющимся данным интерполяционный многочлен Лагранжа и автоматизации его вычисления.

Теоретическая часть. Существуют два основных случая, когда на практике необходимо найти аналитическое выражение для описания функции $y = f(x)$:

- 1) функция $y = f(x)$ задана таблично;

2) аналитическая зависимость $y = f(x)$ известна, но имеет громоздкий вид.

Наибольшее распространение в качестве приближающих (аппроксимирующих) функций получили многочлены. Основой для этого является свойство полноты класса многочленов в классе непрерывных функций, то что они являются функциями простой природы, что производная многочлена и неопределенный интеграл тоже являются многочленами.

Интерполяционная формула Лагранжа:

$$L_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} \cdot y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} \cdot y_1 + \dots$$

$$\dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} \cdot y_n$$

Формуле Лагранжа можно придать более сжатый вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{j \neq i} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Оборудование и материалы: персональный компьютер, текстовый редактор MS Word, табличный процессор MS Excel, система программирования (по выбору).

Задания

1. Построить по имеющимся данным интерполяционный многочлен Лагранжа. Найти значение функции в точке x , используя интерполяционный многочлен Лагранжа. Исходные данные приведены в таблице 1.

2. Построить графическую иллюстрацию интерполирования.

3. Составить программу на языке программирования высокого уровня для автоматизации вычисления.

Таблица 1

Вариант 1		Вариант 2		Вариант 3		Вариант 4	
x	y	x	y	x	y	x	y
0,43	1,63597	0,43	1,63597	0,43	1,63597	0,43	1,63597
0,48	1,73234	0,48	1,73234	0,48	1,73234	0,48	1,73234
0,55	1,87686	0,55	1,87686	0,55	1,87686	0,55	1,87686
0,62	2,03045	0,62	2,03045	0,62	2,03045	0,62	2,03045
0,70	2,22846	0,70	2,22846	0,70	2,22846	0,70	2,22846
0,75	2,35973	0,75	2,35973	0,75	2,35973	0,75	2,35973
в точке $x = 0,702$		в точке $x = 0,512$		в точке $x = 0,645$		в точке $x = 0,608$	
Вариант 5		Вариант 6		Вариант 7		Вариант 8	
x	y	x	y	x	y	x	y
0,02	1,02316	0,35	2,73951	0,41	2,57418	0,35	2,73951
0,08	1,09590	0,41	2,30080	0,46	2,32513	0,41	2,30080
0,12	1,14725	0,47	1,96864	0,52	2,09336	0,47	1,96864
0,17	1,21483	0,51	1,78776	0,60	1,86203	0,51	1,78776
0,23	1,30120	0,56	1,59502	0,65	1,74926	0,56	1,59502
0,30	1,40976	0,64	1,34310	0,72	1,62098	0,64	1,34310
в точке $x = 0,203$		в точке $x = 0,482$		в точке $x = 0,487$		в точке $x = 0,552$	

Вариант 9		Вариант 10		Вариант 11		Вариант 12	
0,35	2,73951	0,02	1,02316	0,35	2,73951	0,41	2,57418
0,41	2,30080	0,08	1,09590	0,41	2,30080	0,46	2,32513
0,47	1,96864	0,12	1,14725	0,47	1,96864	0,52	2,09336
0,51	1,78776	0,17	1,21483	0,51	1,78776	0,60	1,86203
0,56	1,59502	0,23	1,30120	0,56	1,59502	0,65	1,74926
0,64	1,34310	0,30	1,40976	0,64	1,34310	0,72	1,62098
в точке $x = 0,526$		в точке $x = 0,102$		в точке $x = 0,436$		в точке $x = 0,487$	
Вариант 13							
x	0,11	0,15	0,21	0,29	0,35	0,40	в точке $x = 0,275$
y	9,0542	6,6166	4,6917	3,3511	2,7395	2,3652	
Вариант 14							
x	0,11	0,15	0,21	0,29	0,35	0,40	в точке $x = 0,332$
y	9,0542	6,6166	4,6917	3,3511	2,7395	2,3652	

Контрольные вопросы

1. Использование многочленов в качестве аппроксимирующих функций.
2. На что она указывает первая теорема Вейерштрасса.
3. Сущность интерполирования.
4. Классический подход к решению задачи построения приближающей функции.
5. Интерполяционная формула Лагранжа.
6. Алгоритм вычисления интерполяционного многочлена Лагранжа.

Лабораторная работа 15-16. Первая интерполяционная формула Ньютона. Вторая интерполяционная формула Ньютона

Цель работы – сформировать готовность применять современные информационные технологии для построения и графической иллюстрации, по имеющимся данным, интерполяционного многочлена Ньютона.

Теоретическая часть. Пусть функция $f(x)$ задана таблицей с постоянным шагом.

x	x_0	x_1	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	...	y_n

Разности между значениями функции в соседних узлах интерполяции называются *конечными разностями первого порядка*:

$$\Delta y = y_{i+1} - y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Из конечных разностей первого порядка образуются конечные разности второго порядка:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Конечные разности любого порядка могут быть представлены через значения функции. Для разностей первого порядка это следует из определения. Для разностей второго порядка имеем:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i.$$

Конечные разности $(n+1)$ -го порядка определяются через разности n -го порядка по формуле

$$\Delta^{n+1} y_i = \Delta^n y_{i+1} - \Delta^n y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Последовательно получаемые разности записываются в таблицу: диагональную или горизонтальную. В горизонтальной таблице конечные разности порядка k записываются в одной строке с конечной разностью порядка $k-1$ с тем же индексом.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$		
x_4	y_4	Δy_4			
x_5	y_5				

Диагональную таблицу получают, если конечные разности порядка k ($\Delta^k y_m$) записывают в строке, расположенной между строками, в которых находятся табличные разности порядка $k-1$ ($\Delta^{k-1} y_{m+1}$, $\Delta^{k-1} y_m$).

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_1$
		Δy_3		$\Delta^3 y_2$	
x_4	y_4		$\Delta^2 y_3$		
		Δy_4			
x_5	y_5				

Первая интерполяционная формула Ньютона. Многочлен вида

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

где x_i , y_i – узлы интерполяции; x – текущая переменная; h – разность между двумя узлами интерполяции величина постоянная, называют интерполяционным полиномом (многочленом) Ньютона для интерполяции в начале таблицы (интерполирование «вперед»), или первым полиномом Ньютона.

Для практического использования этот полином записывают в несколько ином виде.

Положим $\frac{x-x_0}{h} = t$, т. е. $x = x_0 + ht$. Тогда:

$$\frac{x-x_1}{h} = \frac{x-x_0-h}{h} = t-1, \quad \frac{x-x_2}{h} = \frac{x-x_0-2h}{h} = t-2 \text{ и т. д.}$$

Окончательно имеем

$$P(x) = P_n(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (1)$$

Формула (1) называется *первой интерполяционной формулой Ньютона*. Она применяется для интерполирования в начале отрезка, когда t мало по абсолютной величине. За начальное значение x_0 можно принять любое табличное значение аргумента x .

$$P_n(x) = P_n(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)*\dots*(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (2)$$

Формула (2) называется *второй интерполяционной формулой Ньютона*. Она применяется для интерполирования, когда значение аргумента находится ближе к концу отрезка.

Оборудование и материалы: персональный компьютер, текстовый редактор Microsoft Word, табличный процессор Microsoft Excel, система программирования.

Задания

Функция задана таблично (таблица 2). Используя первую интерполяционную формулу Ньютона и вторую интерполяционную формулу Ньютона:

- 1) вычислить значения функции в точках x_1 и x_2 ;
- 2) оценить погрешность.

Таблица 2

Варианты заданий 1–9

х	у	х	у	х	у
1,215	0,106044	1,415	0,888551	1,340	4,25562
1,220	0,113276	1,420	0,889599	1,345	4,35325
1,225	0,119671	1,425	0,890637	1,350	4,45422
1,230	0,125324	1,430	0,891667	1,355	4,56184
1,235	0,130328	1,435	0,892687	1,360	4,67344
1,240	0,134776	1,440	0,893698	1,365	4,79038
1,245	0,138759	1,445	0,894700	1,370	4,91306
1,250	0,142367	1,450	0,895693	1,375	5,04192
1,255	0,145688	1,455	0,896677	1,380	5,17744
1,260	0,148809	1,460	0,897653	1,385	5,32016
вариант	точки	вариант	точки	вариант	точки
1	$x_1 = 1,2273$	4	$x_1 = 1,4156$	7	$x_1 = 1,3473$
	$x_2 = 1,253$		$x_2 = 1,4527$		$x_2 = 1,3763$
2	$x_1 = 1,223$	5	$x_1 = 1,4256$	8	$x_1 = 1,3583$
	$x_2 = 1,257$		$x_2 = 1,4452$		$x_2 = 1,3812$
3	$x_1 = 1,2208$	6	$x_1 = 1,4263$	9	$x_1 = 1,3787$
	$x_2 = 1,2435$		$x_2 = 1,4575$		$x = 1,3455$

Варианты заданий 10–14

х	у	х	у	х	у
0,101	1,26183	0,101	1,26183	0,180	5,61543
0,106	1,27644	0,106	1,27644	0,185	5,46547
0,111	1,29122	0,111	1,29122	0,190	5,32159
0,116	1,30617	0,116	1,30617	0,195	5,15326
0,121	1,32130	0,121	1,32130	0,200	5,06478
0,126	1,33660	0,126	1,33660	0,205	4,94856
0,131	1,35207	0,131	1,35207	0,210	4,83170
0,136	1,36773	0,136	1,36773	0,215	4,72545
0,141	1,38357	0,141	1,38357	0,220	4,61855
0,146	1,39959	0,146	1,39959	0,225	4,5182
вариант	точки	вариант	точки	вариант	точки
10	$x_1 = 0,1156$	12	$x_1 = 0,1063$	13	$x_1 = 0,1857$
	$x_2 = 0,1457$				$x_2 = 0,2165$
11	$x_1 = 0,1142$		$x_2 = 0,1369$	14	$x_1 = 0,1980$
	$x_2 = 0,1452$				$x_2 = 0,2209$

Контрольные вопросы

1. Равноотстоящие узлы интерполяции.
2. Понятие конечных разностей.
3. Конечные разности первого порядка.
4. Конечные разности $(n+1)$ порядка.
5. Диагональная таблица конечных разностей.
6. Горизонтальная таблица конечных разностей.
7. Интерполяционный многочлен Ньютона.
8. Первая интерполяционная формула Ньютона.
9. Вторая интерполяционная формула Ньютона

Лабораторная работа 17. Интерполяционная формула Ньютона с разделенными разностями

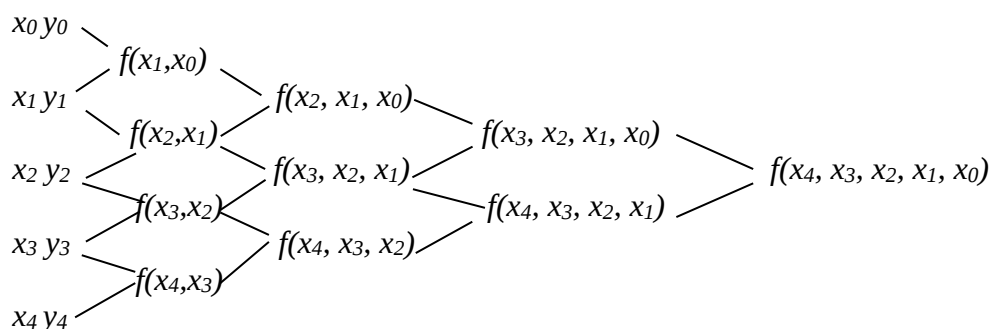
Цель работы – сформировать готовность применять современные информационные технологии для построения и графической иллюстрации по имеющимся данным интерполяционный многочлен Ньютона и для автоматизации вычисления.

Теоретическая часть. *Разделенные разности различных порядков* – разностные отношения, применяемые на произвольной системе точек.

Разделенные разности являются функциями, симметричными относительно своих аргументов, т. е. разделенная разность не зависит от порядка расположения аргументов.

Например $f(x_3, x_2, x_1) = f(x_3, x_1, x_2)$

Разделенные разности строятся по следующей схеме:



Каждое число этой таблицы равно частному от деления разности 2 смежных с ним чисел в столбце слева на разность x_i соответствующих тем u_i , которые лежат на диагоналях, проходящих через это число.

Интерполяционная формула Ньютона с разделенными разностями имеет следующий вид

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1}) f(x_0; x_1; \dots; x_i)$$

ей можно придать более сжатый вид:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^n \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i) \cdot f(x_0, x_1, \dots, x_j).$$

Добавление нового узла интерполяции требует полной перестройки многочлена Лагранжа, в многочлене же Ньютона все предыдущие слагаемые остаются без изменения, только добавляется один новый член в формуле.

Оборудование и материалы: персональный компьютер, текстовый редактор Microsoft Word, табличный процессор Microsoft Excel, системы программирования.

Задания

Функция задана таблично (таблица 3). Используя интерполяционную формулу Ньютона с разделенными разностями:

- 1) вычислить значения функции в точках x_1 и x_2 ;
- 2) оценить погрешность;
- 3) составить программу на языке высокого уровня для автоматизации вычисления.

Таблица 3

Варианты заданий 1–9

х	у	х	у	х	у
0,180	5,61543	0,01	0,26183	0,15	0,860708
0,185	5,46547	0,06	0,27644	0,20	0,818731
0,190	5,32159	0,11	0,29122	0,25	0,778801
0,195	5,15326	0,16	1,30617	0,30	0,740818
0,200	5,06478	0,21	1,32130	0,35	0,704688
0,205	4,94856	0,26	1,33660	0,40	0,670320
0,210	4,83170	0,13	1,35207	0,45	0,637628
0,215	4,72545	0,36	1,36773	0,50	0,606531
0,220	4,61855	0,41	1,38357	0,55	0,576950
0,225	4,5182	0,46	1,39959	0,60	0,548812
вариант	точки	вариант	точки	вариант	точки
1	$x_1 = 0,1857$	4	$x_1 = 0,156$	7	$x_1 = 0,2073$
	$x_2 = 0,2165$		$x_2 = 0,3627$		$x = 0,53$
2	$x_1 = 0,198$	5	$x_1 = 0,026$	8	$x_1 = 0,223$
	$x_2 = 0,2209$		$x_2 = 0,4058$		$x_2 = 0,557$
3	$x_1 = 0,1908$	6	$x_1 = 0,1563$	9	$x_1 = 0,2208$
	$x_2 = 0,2189$		$x_2 = 0,377$		$x_2 = 0,5435$

Варианты заданий 10–14

х	у	х	у	х	у
1,340	4,25562	1,340	4,25562	1,215	0,106044
1,345	4,35325	1,345	4,35325	1,220	0,113276
1,350	4,45422	1,350	4,45422	1,225	0,119671
1,355	4,56184	1,355	4,56184	1,230	0,125324
1,360	4,67344	1,360	4,67344	1,235	0,130328
1,365	4,79038	1,365	4,79038	1,240	0,134776
1,370	4,91306	1,370	4,91306	1,245	0,138759
1,375	5,04192	1,375	5,04192	1,250	0,142367
1,380	5,17744	1,380	5,17744	1,255	0,145688
1,385	5,32016	1,385	5,32016	1,260	0,148809
вариант	точки	вариант	точки	вариант	точки
10	$x_1 = 1,3473$	12	$x_1 = 1,3787$	13	$x_1 = 1,2273$
	$x_2 = 1,3763$				$x_2 = 1,253$
11	$x_1 = 1,3583$		$x_1 = 1,3787$	14	$x_1 = 1,223$
	$x_2 = 1,3812$				$x_2 = 1,257$

Контрольные вопросы

1. Разделенные разности различных порядков. Схема разделенных разностей.
2. Интерполяционная формула Ньютона с разделенными разностями.
3. Требуется ли полная перестройка многочлен Ньютона при добавлении нового узла интерполяции. Алгоритм вычисления интерполяционного многочлена Ньютона.
4. Остаточный член интерполяционного многочлена.

5. Какой результат будет получен если в многочлене Лагранжа и Ньютона выполнить все действия и привести подобные члены.
6. От чего зависит ошибка интерполяции.
7. Что показывает оценка погрешности интерполяционных многочленов.

Лабораторная работа 18. Обратное интерполирование

Цель работы – сформировать готовность применять современные информационные технологии для решения задач обратного интерполирования.

Теоретическая часть. *Обратное интерполирование* (для случая неравноотстоящих узлов). Пусть функция $y = f(x)$ задана таблицей. Задача обратного интерполирования заключается в том, чтобы по заданному значению функции определить соответствующее значение аргумента x .

Будем считать, что в рассматриваемом интервале функция $f(x)$ монотонна. Это значит, что поставленная задача имеет единственное решение и решается с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа (или Ньютона).

Примем y за независимую переменную, а функцией будем считать x . Напишем по заданным узлам (y_i, x_i) , где $(i = 0, 1, \dots, n)$, многочлен Лагранжа:

$$x = \sum_{i=0}^n x_i \prod_{i \neq j} \frac{(y - y_j)}{(y_i - y_j)}$$

и определим x по заданному y .

Считая y аргументом, запишем интерполяционный многочлен Ньютона для неравноотстоящих узлов интерполяции:

$$x = x_0 + f(y_1, y_0)(y - y_0) + f(y_2, y_1, y_0)(y - y_0)(y - y_1) + \dots + f(y_n, y_{n-1}, \dots, y_1, y_0)(y - y_0)(y - y_1) \dots (y - y_{n-1}).$$

Оборудование и материалы: персональный компьютер, текстовый редактор Microsoft Word, табличный процессор Microsoft Excel, система программирования.

Задания

Используя значение функции $y = f(x)$, приведенные в таблице 4, найти значение x при заданном значении y_1 :

- а) применить интерполяционную формулу Лагранжа;
- б) применить интерполяционную формулу Ньютона.

Таблица 4

Вариант	$f(x)$	$[a, b]$	y_1
1	$\sin x$	[1; 2]	0,9725
2	$\ln x$	[2; 3]	0,9425
3	$\cos x$	[5; 6]	0,7662
4	$\operatorname{tg} x$	[-1; 0]	-0,6666
5	$\sin x - 0,56$	[2; 3]	-0,0452
6	$\ln x + 0,4$	[5; 6]	2,0991
7	$\cos x - 0,2$	[0; 1]	0,496707
8	$\operatorname{tg} x + 1$	[0,5; 1,5]	1,4101
9	$5\sin x + 1$	[0; 1]	2,7821
10	$\ln x - 0,34$	[2; 3]	0,6421
11	$\cos x + 1,2$	[0; 1]	2,222
12	$\operatorname{tg} x - 1/x$	[-1; 0]	1,5522
13	$5\sin x$	[0; 1]	2,7852
14	$\cos x$	[0; 1]	0,9444

Итоговый тест по разделу «Численная интерполяция»

1. Важной причиной использования многочлена в качестве приближающих функций является то, что:

- 1) производная многочлена и неопределенный интеграл тоже являются многочленами;
- 2) класс многочленов обладает свойством полноты в классе непрерывных функций, выражающимся теоремой Вейерштрасса;
- 3) важны обе причины.

2. Сущность интерполирования состоит в:

- 1) приближенной замене функции на данном отрезке более простой функцией;
- 2) поиске приближенных корней уравнения
- 3) нахождении точных корней уравнения, которые являются узлами интерполирования.

3. Произвольно расположенные узлы интерполяции характерны для:

- 1) многочлена Лагранжа;
- 2) многочлена Ньютона;
- 3) многочлена Гаусса.

4. Конечными разностями первого порядка называются:

- 1) разности между значениями функции в соседних узлах интерполяции;
- 2) разности между значениями функции в начальных и конечных узлах интерполяции;
- 3) первую производную функции, если она знакопостоянна.

5. Разделенные разности 3-го порядка определяются при помощи разделенных разностей:

- 1) 1-го порядка;
- 2) 2-го порядка;
- 3) 1-го и 2-го порядка.

6. Конечные разности 3-го порядка определяются при помощи конечных разностей:

- 1) 1-го порядка;
- 2) 2-го порядка;
- 3) 1-го и 2-го порядка.

7. Разделенная разность является функцией, которая:

- 1) не зависит от порядка расположения своих аргументов;
- 2) зависит от порядка расположения своих аргументов.

8. Добавление нового узла интерполяции требует полной перестройки:

- 1) многочлена Лагранжа;
- 2) многочлена Ньютона;
- 3) обоих многочленов.

9. Если в многочлене Лагранжа и Ньютона выполнить все действия и привести подобные члены, то можно получить:

- 1) различные результаты;
- 2) один и тот же результат;
- 3) зависит от функции.

10. Оценка погрешности интерполяционных многочленов показывает, что с ростом числа узлов n соответственно степени аппроксимирующего многочлена погрешность может:

- 1) уменьшаться;
- 2) увеличиваться, если функция непрерывна;
- 3) увеличиваться.

11. Задача обратного интерполирования заключается в том, чтобы:

- 1) по заданному значению функции определить соответствующее значение аргумента;
- 2) по заданному значению аргумента определить соответствующее значение функции;
- 3) по заданному значению узлов интерполяции определить соответствующее значение функции.

12. Коэффициенты многочлена Чебышева –

- 1) целые числа;
- 2) числа с высокими степенями;
- 3) числа с низкими степенями.

13. Аппроксимация называется точечной, если аппроксимирующая функция строится:

- 1) на непрерывном множестве точек;
- 2) на дискретном множестве точек;
- 3) в конечных узлах интерполяции.

14. Аппроксимация – это

- 1) приближение;
- 2) нахождение конечных разностей;
- 3) нахождение разделенных разностей.

15. Среднеквадратичное приближение:

- 1) уменьшает наибольшую ошибку, допуская большое среднеквадратичное отклонение;
- 2) уменьшает и среднюю квадратичную ошибку, и ошибки в отдельных точках интервала;
- 3) уменьшает среднюю квадратичную ошибку, но при этом может допускать большие ошибки в отдельных точках интервала.

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Лабораторная работа 19-20. Квадратурная формула прямоугольников. Формула трапеций

Цель работы – овладеть приближенными методами интегрирования и показать их реализацию при помощи различных информационных технологий.

Теоретическая часть. Методы численного интегрирования при решении научных задач применяются в том случае, если первообразную исходной функции $F(x)$ найти очень сложно или вообще невозможно. Основными методами численного интегрирования принято считать метод прямоугольников, метод трапеций, метод Симпсона (метод парабол).

Метод прямоугольников является самым простым из всех методов численного интегрирования. При использовании этого метода для вычисления приближенного значения определенного интеграла исходная функция $f(x)$ заменяется интерполяционным многочленом нулевого порядка, а сам отрезок интегрирования $[a, b]$ разбивается на n равных частей.

Если высота каждого частичного прямоугольника равна значению подынтегральной функции в левых концах каждого шага, то метод называется *методом левых прямоугольников* (рис. 1). Тогда квадратурная формула имеет вид

$$S = \sum_{i=1}^n y_{i-1} h_i; \quad (1)$$

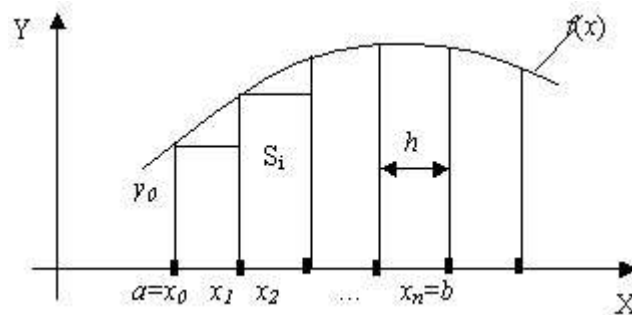


Рис. 1. Метод левых прямоугольников

Если высота каждого частичного прямоугольника равна значению подынтегральной функции в правых концах каждого шага, то метод называется *методом правых прямоугольников* (рис. 2). Тогда квадратурная формула имеет вид

$$S = \sum_{i=1}^n y_i h_i \quad (2)$$

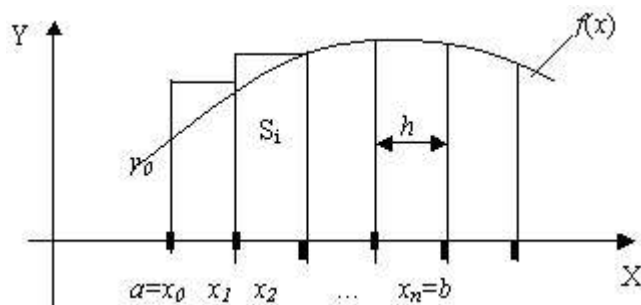


Рис. 2. Метод правых прямоугольников

Метод средних прямоугольников изображен на рис. 3 и вычисляется по формуле

$$S = \sum_{i=1}^n h_i f\left(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}\right) \quad (3)$$

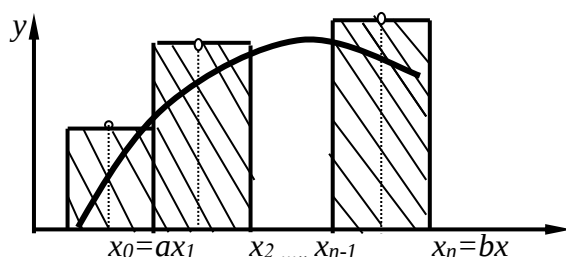


Рис. 3. Метод средних треугольников

Как видно из рисунков из трех рассмотренных методов, из-за нарушения симметрии в формулах правых и левых прямоугольников, метод средних прямоугольников является наиболее точным. Если подынтегральная функция $f(x)$ задана не аналитическим выражением, а таблично, то формула средних прямоугольников оказывается неприменима (без привлечения дополнительной интерполяции), так как значения функции известны лишь в узловых точках. В этом случае пользуются либо формулами левых или правых прямоугольников, либо используют другие методы.

Алгоритм метода прямоугольников

1. Вычислить величину шага $h = (b - a) / n$.
2. Определяем значение подынтегральной функции $f_i(x)$ на одном элементарном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ по формуле.
3. В каждой части деления подынтегральную функцию $f(x)$ аппроксимируем интерполяционным многочленом степени $n = 0$, т. е. прямой, параллельной оси OX . В результате вся подынтегральная функция на участке $[a, b]$ аппроксимируется ломаной линией.
4. Для каждой части деления определяем площадь S_i частичного прямоугольника.
5. Суммируем эти площади. Приближенное значение интеграла S равно сумме площадей частичных прямоугольников.

При использовании *метода трапеций* для отыскания приближенного значения определенного интеграла функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ аппроксимируется линейной функцией. Для того чтобы уменьшить погрешность вычисления, отрезок интегрирования разбивается на n равных частей, таким образом, что $h = \frac{b-a}{m}$.

С учетом сделанных выше предположений и суммирования смежных ординат внутри $[a, b]$, обобщенная формула для вычисления численного значения *по методу трапеций* имеет вид:

$$S = \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (y_{i-1} + y_i) \cdot h_i + R \quad (4)$$

Алгоритм метода трапеций

1. Введите значения нижнего и верхнего пределов интегрирования A и B , а также число точек разбиения отрезка $[a, b]$ – M .
2. Организуйте процедуру для расчета значений функции $y_i = f(x_i)$ в каждой из точек $[a, b]$.
3. Вычислите значение суммы $\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{m-1} + \frac{y_m}{2}$, а затем величину S с помощью формулы (4).

Пример. Вычислить интеграл

$$S = \int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 1}{1 + x^2} dx$$

Применим для вычисления интеграла метод прямоугольников (1, 2, 3) и метод трапеций (4) Разобьем отрезок интегрирования $[0, 1]$ на n равных частей: $n = 10, h = 0,1$. Вычислим значение подынтегральной функции y_i в точках разбиения x_i (для мет. трап.) и в серединах отрезков разбиения $x_{i-1} + 0,5h$ (для метода прямоуго.). Результаты вычислений представим в таблице 1.

Таблица 1

x	$f(x)$	$\frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$\frac{f(x_i + x_{i+1})}{2}$	$\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$	Значение интеграла	Погрешность метода
0	1	0,05	0,900249377	0,900990099	Точное значение 0,30685	
0,1	0,8019	0,15	0,706601467	0,708682407		
0,2	0,6153	0,25	0,529411765	0,53246295	Метод левых прямоуголь- ников 0,358521577	0,05167158
0,3	0,4495	0,35	0,376391982	0,379943056		
0,4	0,3103	0,45	0,251559252	0,255172414	Метод сред- них прямо- угольников 0,306017655	0,00083234
0,5	0,2	0,55	0,15547025	0,158823529		
0,6	0,1176	0,65	0,086115993	0,089024872	Метод правых прямоуголь- ников 0,258521577	0,04832842
0,7	0,0604	0,75	0,04	0,042396464		
0,8	0,0243	0,85	0,013062409	0,014957553	Метод трапеций 0,308521577	0,00167158
0,9	0,0055	0,95	0,00131406	0,002762431		
1						

Несмотря на то что в методе трапеций используется более высокий порядок интерполяции подынтегральной функции, по сравнению с методом прямоугольников, который использует интерполяцию нулевого порядка (кусочно-постоянная), точность метода трапеций оказывается ниже точности метода средних прямоугольников. Более высокая точность метода средних прямоугольников объясняется «удачным» выбором узловых точек, в которых вычисляется высота элементарного прямоугольника.

Оборудование и материалы: персональный компьютер, текстовый редактор Microsoft Word, табличный процессор Microsoft Excel, среда программирования, система автоматизации математических вычислений (по выбору студента).

Задание

Найдите приближенное значение интеграла заданной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с помощью методов численного интегрирования. Варианты заданий приведены в таблице 2.

Таблица 2

Вариант	$f(x)$	$[a, b]$
1	$\sin(2x^2 + 1)$	$[0; 1]$
2	$(x^2 + 1) \sin(x - 0,5)$	$[0,5; 1,5]$
3	$-21 / (6 - 7x)^2$	$[-2; 0]$
4	$-4 / (1 + 8x)^2$	$[0; 3]$
5	$\cos x / x$	$[\pi; \pi/2]$
6	$1 / (x \ln(x + 2))$	$[2; 3]$
7	$(x + 1,9) \sin(x / 3)$	$[1; 2]$
8	$x^2 \cos(x / 4)$	$[2; 3]$

9	$8 / (3x + 4)^2$	[0; 1]
10	$1 / (1 + x)^2$	[0; 9]
11	$x^2 \operatorname{tg} (x / 2)$	[1,5; 2,5]
12	$(3x + \sin x) / x^2$	[0,1; 1,1]
13	$3x^2 + \operatorname{tg} x$	[-0,5; 0,5]
14	$2,6x^2 \ln x$	[1,2; 2,2]

Этапы выполнения задания

1. Разработайте программу на языке программирования, позволяющую вычислить определенный интеграл, с использованием метода прямоугольников.
2. Вычислите приближенное значение определенного интеграла методом трапеций, написав программу на языке программирования.
3. Произведите оценку погрешности методов интегрирования и сравните точность полученных результатов.
4. *Используя математический пакет (MathCAD, MatLab, Maple), найдите приближенное значение определенного интеграла.*
5. *Используя встроенный язык программирования среды Maple, вычислите определенный интеграл методом правых и левых прямоугольников.*
6. *Найдите приближенное значение интеграла методом трапеций, используя встроенный язык программирования Maple.*

Примечание. Задания повышенного уровня выделены курсивом.

Контрольные вопросы

1. Геометрический смысл определенного интеграла.
2. Квадратурная формула прямоугольников.
3. Формула левых прямоугольников.
4. Формула правых прямоугольников.
5. Геометрический смысл применения формул левых и правых прямоугольников.
6. Как в методе прямоугольников уменьшить погрешность нахождения интеграла?
7. Формула трапеций. Как уменьшить в методе погрешность нахождения интеграла?
8. В каких случаях метод трапеций находит применение?
9. Можно ли получить методами прямоугольников и трапеций точное значение интеграла?

Лабораторная работа 21. Формула Симпсона

Цель – овладеть приближенными методами интегрирования и показать их реализацию при помощи различных информационных технологий.

Теоретическая часть. *Метод Симпсона (метод парабол).* Разобьем интервал интегрирования $[a, b]$ на четное число n равных отрезков с шагом h . На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, содержащем три узла, заменим подынтегральную функцию интерполяционным полиномом второй степени, т. е. параболой.

Общая формула Симпсона имеет вид:

$$S = \frac{h}{3} [y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})]$$

Метод Симпсона имеет четвертый порядок точности с очень малым численным коэффициентом. Формула Симпсона позволяет получить очень высокую точность, если четвертая производная подынтегральной функции не слишком велика. В противном случае методы второго порядка точности могут дать большую точность, чем метод Симпсона.

Пример. Вычислить методом Симпсона интеграл

$$S = \int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 1}{1 + x^2} dx$$

Разобьем отрезок $[0, 1]$ на n элементарных отрезков: $n = 10$, $h = 0,1$, результаты вычисления подынтегральной функции

$$F(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{1 + x^2}$$

занесем в таблицу 3.

Таблица 3

X	$F(X)$	$F(X_i) + 4 * F((X_i + X_{i+1})/2) + F(X_{i+1})$	
0	1	5,402977704	Точное решение $S = 0,30685$
0,1	0,80198	4,243770681	
0,2	0,61538	3,182572959	
0,3	0,44954	2,265454041	Метод Симпсона $S = 0,306852296$
0,4	0,31034	1,516581834	
0,5	0,2	0,939528057	
0,6	0,11765	0,522513715	
0,7	0,0604	0,244792928	Погрешность 2,2961E-06
0,8	0,02439	0,082164743	
0,9	0,00552	0,010781104	
1			

На рис. 4 приведен пример вычисления определенного интеграла средствами Microsoft Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	F(X)	$(X_i + X_{i+1})/2$	$F((X_i + X_{i+1})/2)$	$F(X_i) + F(X_{i+1})$	$F(X_i) + 4 * F((X_i + X_{i+1})/2) + F(X_{i+1})$	A=	0
2	0	1	0,05	0,900249377	0,900990099	5,402977704	B=	1
3	0,1	0,80198	0,15	0,706601467	0,708682407	4,243770681	N=	10
4	0,2	0,61538	0,25	0,529411765	0,53246295	3,182572959	dX=	0,1
5	0,3	0,44954	0,35	0,376391982	0,379943056	2,265454041		
6	0,4	0,31034	0,45	0,251559252	0,255172414	1,516581834		
7	0,5	0,2	0,55	0,15547025	0,158823529	0,939528057		
8	0,6	0,11765	0,65	0,086115993	0,089024872	0,522513715		
9	0,7	0,0604	0,75	0,04	0,042396464	0,244792928	Точ.=	0,30685
10	0,8	0,02439	0,85	0,013062409	0,014957553	0,082164743	ЛП=	0,358521577
11	0,9	0,00552	0,95	0,00131406	0,002762431	0,010781104	СП=	0,306017655
12	1	0					ПП=	0,258521577
13							Трап.=	0,308521577
14							Симп.=	0,306852296

Рис. 4. Вычисления определенного интеграла средствами Microsoft Excel

Оборудование и материалы: персональный компьютер, текстовый редактор Microsoft Word, табличный процессор Microsoft Excel, среда программирования, система автоматизации математических вычислений (по выбору студента).

Задание

С помощью методов численного интегрирования найдите приближенное значение интеграла заданной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Варианты заданий приведены в табл. 4.

Таблица 4

Вариант	$f(x)$	$[a, b]$	Вариант	$f(x)$	$[a, b]$
1	$1 / x \ln (x + 2)$	$[2; 3]$	8	$(2 - x^2) + \sin 3x$	$[-1,1; 1,1]$
2	$2,6 x^2 \ln x$	$[1,2; 2,2]$	9	$(2x - x^2) - \cos 2x$	$[-1,5; 1,2]$
3	$3x + \ln x$	$[1; 2]$	10	$(3x + \sin x) / x^2$	$[0,1; 1,1]$
4	$3x^2 + \operatorname{tg} x$	$[-0,5; 0,5]$	11	$(x + 1,9) + \sin (x / 3)$	$[1; 2]$
5	$9 / (5x + 7)^2$	$[2; 3]$	12	$1 / (1 + x^2)$	$[0; 1]$
6	$12 / (4x - 9)^2$	$[0; 1]$	13	$1 / \lg x$	$[4; 10]$
7	$x^2 + \cos (x / 4)$	$[2; 3]$	14	$(x^2 + 1) \sin (x - 0,5)$	$[0,5; 1,5]$

Этапы выполнения задания

1. Разработайте программу на языке программирования, позволяющую вычислить определенный интеграл, с использованием метода Симпсона.
2. Произведите оценку погрешности методов интегрирования и сравните точность полученных результатов.
3. *Используя математический пакет (MathCAD, MatLab, Maple), найдите приближенное значение определенного интеграла.*
4. *Используя встроенный язык программирования среды Maple, вычислите определенный интеграл методом Симпсона.*

Примечание. Вариант для выполнения заданий, приведенных в лабораторной работе, определяется порядковым номером студента в подгруппе. Задания повышенного уровня выделены курсивом.

Контрольные вопросы

1. Какой аппроксимирующей заменяется подынтегральная функция в методе Симпсона?
2. Если для построения аппроксимирующей функции средняя точка берется не в середине участка, то что изменится в алгоритме?
3. Обязательно ли участок интегрирования разбивать при реализации метода на более мелкие участки?
4. Почему метод Симпсона использует аппроксимацию подынтегральной функции квадратичной параболы, а способен интегрировать без ошибки и кубические параболы?

Тест по разделу «Численное интегрирование»

1. *Метод замены исходной функции более простой аппроксимирующей функцией используется при*
 - 1) численном интегрировании;
 - 2) численном интерполировании;
 - 3) численном интегрировании и численном интерполировании;
 - 4) линейной регрессии.
2. *Функция называется интегрируемой, если*
 - 1) существует предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа точек разбиения, при котором длина наибольшего из отрезков стремится к нулю;
 - 2) ее можно заменить более простой аппроксимирующей функцией, стремящейся к нулю;

3) существует предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа точек разбиения, при котором длина наибольшего из отрезков стремится к бесконечности;

4) ее можно заменить более простой аппроксимирующей, стремящейся к бесконечности.

3. *Метод прямоугольников - метод численного интегрирования, в котором подынтегральная функция заменяется*

- 1) кусочно-постоянной функцией;
- 2) кусочно-линейной функцией;
- 3) интерполяционным многочленом Лагранжа первой степени;
- 4) линейной функцией.

4. *Метод трапеций - метод численного интегрирования, в котором подынтегральная функция заменяется*

- 1) кусочно-постоянной функцией;
- 2) кусочно-линейной функцией;
- 3) интерполяционным многочленом Лагранжа;
- 4) интерполяционным многочленом Ньютона второй степени.

5. *В методе Симпсона подынтегральная функция заменяется*

- 1) интерполяционным многочленом Лагранжа первой степени;
- 2) интерполяционным многочленом Ньютона второй степени;
- 3) кусочно-постоянной функцией;
- 4) интерполяционным многочленом Ньютона первой степени.

6. *Обобщенная формула* $S = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i) \cdot h_i + R$

- 1) для вычисления численного значения по методу трапеций;
- 2) для вычисления численного значения по методу прямоугольников;
- 3) для вычисления численного значения по методу Симпсона;
- 4) для вычисления численного значения по методу Гаусса.

7. *Обобщенная формула* $S = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n h_i \cdot f\left(x_{i-1} + \frac{h_i}{2}\right) + R$

- 1) для вычисления численного значения по методу трапеций;
- 2) для вычисления численного значения по методу прямоугольников;
- 3) для вычисления численного значения по методу Симпсона;
- 4) для вычисления численного значения по методу Гаусса.

8. *Обобщенная формула*

$$S = \frac{h}{3} [y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})]$$

- 1) для вычисления численного значения по методу трапеций;
- 2) для вычисления численного значения по методу прямоугольников;
- 3) для вычисления численного значения по методу Симпсона;
- 4) для вычисления численного значения по методу Гаусса.

9. *Формула* $S = \sum_{i=1}^n y_{i-1} h_i;$

- 1) для вычисления численного значения по методу трапеций;

- 2) для вычисления численного значения по методу левых прямоугольников;
- 3) для вычисления численного значения по методу правых прямоугольников;
- 4) для вычисления численного значения по методу средних прямоугольников.

10. Формула $S = \sum_{i=1}^n y_i \cdot h_i$

- 1) для вычисления численного значения по методу трапеций;
- 2) для вычисления численного значения по методу левых прямоугольников;
- 3) для вычисления численного значения по методу правых прямоугольников;
- 4) для вычисления численного значения по методу средних прямоугольников.

11. Формула $R = \frac{h^2(b-a)}{24} f''(\zeta)$

- 1) для оценки величины погрешностей при применении квадратурных формул прямоугольников;
- 2) для оценки величины погрешностей при применении квадратурных формул трапеций;
- 3) для оценки величины погрешностей при применении квадратурных формул Симпсона;
- 4) для оценки величины погрешностей при применении квадратурных формул Гаусса.

12. Формула $R = -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(\zeta)$

- 1) для оценки величины погрешностей при применении квадратурных формул прямоугольников;
- 2) для оценки величины погрешностей при применении квадратурных формул трапеций;
- 3) для оценки величины погрешностей при применении квадратурных формул Симпсона;
- 4) для оценки величины погрешностей при применении квадратурных формул Гаусса.

13. Формула $R = -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\zeta)$

- 1) для оценки величины погрешностей при применении квадратурных формул прямоугольников;
- 2) для оценки величины погрешностей при применении квадратурных формул трапеций;
- 3) для оценки величины погрешностей при применении квадратурных формул Симпсона;
- 4) для оценки величины погрешностей при применении квадратурных формул Гаусса.

14. Метод прямоугольников дает решение

- 1) с недостатком;
- 2) с избытком;
- 3) точное.

15. Метод трапеций дает решение

- 1) с недостатком;
- 2) с избытком;

3) точное.

16. В методе Симпсона повышение точности вычисления достигается за счет

- 1) замены подинтегральной функции многочленом Лагранжа второй степени;
- 2) замены подинтегральной функции многочленом Ньютона второй степени;
- 3) замены подинтегральной функции многочленом Чебышева;
- 4) замены подинтегральной функции первой интерполяционной формулой

Ньютона.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лабораторная работа 22. Метод Эйлера

Цель работы – изучить метод Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и научиться его реализовывать в табличном процессоре Microsoft Excel и в системе программирования.

Теоретическая часть. Обыкновенным дифференциальным уравнением называют такое уравнение, которое содержит аргумент x , искомую функцию $y(x)$ и одну или несколько производных от искомой функции:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Наивысший порядок n входящей в уравнение производной называется порядком дифференциального уравнения.

Решением дифференциального уравнения (1) называется такая функция $y(x)$, которая после подстановки ее в уравнение (1) превращает его в тождество.

Метод Эйлера наиболее простой явный одношаговый метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В основе метода ломаных Эйлера лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения, однако этот метод дает одновременно и способ нахождения искомой функции в численной (табличной) форме.

Пусть дано уравнение $y' = f(x, y)$ (2) с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Выбрав достаточно малый шаг h , построим, начиная с точки x_0 систему равностоящих точек

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Вместо искомой интегральной кривой на отрезке $[x_0, x_1]$ рассмотрим отрезок касательной к ней в точке $M_0(x_0, y_0)$ (обозначим ее L_1 , рис. 1) с уравнением

$$y = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0).$$

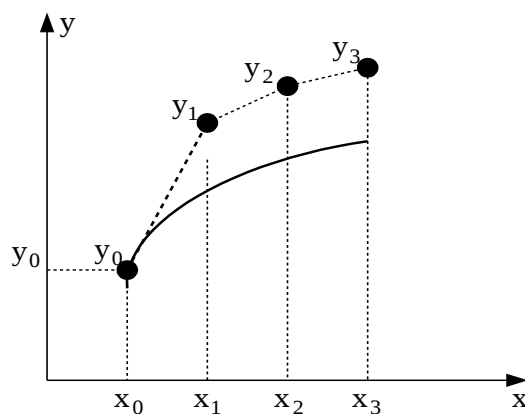


Рис. 1.

При $x = x_2$ из уравнения касательной L_1 получаем: $y = y_0 + hf(x_0, y_0)$, откуда видно, что приращение значения функции на первом шаге имеет вид

$$\Delta y_0 = hf(x_0, y_0).$$

Аналогично, проводя касательную L_2 к некоторой интегральной кривой семейства в точке $M_1(x_1, y_1)$, получим:

$$y = y_1 + f(x_1, y_1) * (x - x_1),$$

что при $x = x_2$ дает $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$, т. е. y_2 получается из y_1 добавлением приращения $\Delta y_1 = hf(x_1, y_1)$.

Таким образом, получение таблицы значений искомой функции $y(x)$ по методу Эйлера заключается в циклическом применении пары формул:

$$\Delta y_k = hf(x_k, y_k),$$

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

Метод Эйлера обладает малой точностью, к тому же погрешность нового шага, вообще говоря, систематически возрастает.

Наиболее приемлемым для практики методом оценки точности является в данном случае способ двойного счета – с шагом h и с шагом $h/2$. Совпадение десятичных знаков в полученных двумя способами результатах дает естественное основание считать их верными.

Блок-схема алгоритма решения дифференциального уравнения вида (2) методом Эйлера имеет вид

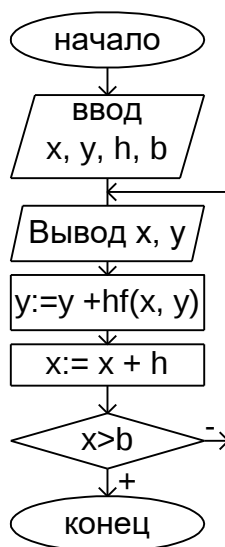


Рис. 2. Алгоритм решения обыкновенного дифференциального уравнения методом Эйлера

Оборудование и материалы: персональный компьютер, текстовый редактор Microsoft Word, табличный процессор Microsoft Excel, системы программирования.

Задания

Составить программу на языке высокого уровня для решения методом Эйлера дифференциального уравнения $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ при заданном начальном условии $y(a)=c$ и шаге интегрирования h . Варианты заданий приведены в таблице 1.

Таблица 1

Вариант	$f(x)$	a	b	c	h
1	$xy^3 - x^2$	4	5	0,7	0,1
2	$\sin(x + y) + 1,5$	1,5	2,5	0,5	0,1
3	$\cos(1,5x - y^2) - 1,3$	-1	1	0,2	0,2
4	$x^2 + xy + y^2$	2	3	1,2	0,1
5	$e^{-(y^2+1)} + 2x$	0	0,5	0,3	0,05
6	$\cos(1,5y + x)^2 + 1,4$	1	2	0,9	0,1
7	$4,1x - y^2 + 0,6$	0,6	2,6	3,4	0,2
8	$1 / (1 + x^3y) + 2y$	1,5	2	2,1	0,05

9	$2 - \sin(x + y)^2$	2	3	2,3	0,1
10	$2xy / (x + 4) - 0,4$	3	5	1,7	0,2
11	$2,5x + \cos(y + 0,6)$	1	3	1,5	0,2
12	$x + 2,5y^2 + 2$	1	2	0,9	0,1
13	$\sqrt{4x^2 + 1} - 3y^2$	2,6	4,6	1,8	0,2
14	$x + \cos\left(\frac{y}{\sqrt{11}}\right)$	-1	1	0,2	0,2

Контрольные вопросы

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения: общие понятия.
2. Общий вид дифференциального уравнения первого порядка.
3. Общий вид дифференциального уравнения второго порядка.
4. Произвольные постоянные в общем решении обыкновенного дифференциального уравнения.
5. Получение частного решения дифференциального уравнения.
6. Задача Коши. Примеры.
7. Одношаговый метод.
8. Двухшаговый метод.
9. Метод Эйлера. Геометрическая интерпретация метода Эйлера.
10. Как можно усовершенствовать метод Эйлера.
11. Алгоритм решения обыкновенного дифференциального уравнения методом Эйлера.

Тест по разделу «Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений»

1. Обыкновенным дифференциальным уравнением называют такое уравнение, которое содержит:
 - 1) искомую функцию $y(x)$ и одну или несколько производных первого порядка от искомой функции;
 - 2) аргумент x , искомую функцию $y(x)$ и одну или несколько производных от искомой функции;
 - 3) искомую функцию $y(x)$, аргумент x и не менее двух производных от искомой функции.
2. Порядком дифференциального уравнения называется:
 - 1) наивысший порядок входящей в уравнение производной;
 - 2) количество входящих в уравнение производных;
 - 3) количество аргументов функции.
3. В общем случае дифференциальное уравнение имеет:
 - 1) только одно решение;
 - 2) конечное множество решений;
 - 3) бесчисленное множество решений.
4. В большинстве случаев, встречающихся на практике, для дифференциального уравнения легче найти:
 - 1) частное решение;
 - 2) общее решение;
 - 3) искомое решение.
5. В зависимости от вида дополнительных условий для получения частного решения дифференциального уравнения существуют два различных типа задач:
 - 1) задача Коши и дифференциальная задача;

- 2) задача с начальными данными и краевая задача;
- 3) задача Коши и задача Гаусса.

6. В двухшаговом методе для вычисления значения функции требуется знание:

- 1) двух предыдущих значений функции;
- 2) начального значения для определения следующего значения u ;
- 3) последующего значения функции.

7. Теорема Пикара формулируется с использованием постоянной:

- 1) Коши;
- 2) Пикара;
- 3) Липшица.

8. Метод Пикара позволяет получить приближенное решение дифференциального уравнения в виде функции, представленной:

- 1) аналитически;
- 2) графически;
- 3) численно;
- 4) верно все выше перечисленное.

9. Метод Эйлера позволяет получить приближенное решение дифференциального уравнения в виде функции, представленной:

- 1) графически;
- 2) таблично
- 3) численно;
- 4) верно все выше перечисленное.

10. Метод Эйлера можно реализовать с помощью:

- 1) языка высокого уровня;
- 2) языка гипертекстовой разметки;
- 3) всего выше перечисленного.

Итоговый тест по разделам «Методы наилучшего приближения», «Численная интерполяция», «Численное дифференцирование», «Численное интегрирование», «Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений»

1. Сущность интерполирования состоит в:

- 1) приближенной замене функции на данном отрезке более простой функцией;
- 2) поиске приближенных корней уравнения;
- 3) нахождении точных корней уравнения, которые являются узлами интерполирования.

2. Конечными разностями первого порядка называются:

- 1) разности между значениями функции в соседних узлах интерполяции;
- 2) разности между значениями функции в начальных и конечных узлах интерполяции;
- 3) первую производную функции, если она знакопостоянна.

3. Разделенные разности 3-го порядка определяются при помощи разделенных разностей:

- 1) 1-го порядка;
- 2) 2-го порядка;

3) 1-го и 2-го порядка.

4. Метод замены исходной функции более простой аппроксимирующей функцией используется при:

- 1) численном интегрировании;
- 2) численном интерполировании;
- 3) в обоих случаях.

5. Задача обратного интерполирования заключается в том, чтобы:

- 1) по заданному значению функции определить соответствующее значение аргумента;
- 2) по заданному значению аргумента определить соответствующее значение функции;
- 3) по заданному значению узлов интерполяции определить соответствующее значение функции.

6. Функция называется интегрируемой, если:

- 1) существует предел интегральной суммы при неограниченном увеличении числа точек разбиения, при котором длина наибольшего из отрезков стремится к нулю;
- 2) ее можно заменить более простой аппроксимирующей функцией, стремящейся к нулю;
- 3) ее можно заменить более простой аппроксимирующей функцией, стремящейся к бесконечности.

7. Обыкновенным дифференциальным уравнением называют такое уравнение, которое содержит:

- 1) искомую функцию $y(x)$ и одну или несколько производных первого порядка от искомой функции;
- 2) аргумент x , искомую функцию $y(x)$ и одну или несколько производных от искомой функции;
- 3) искомую функцию $y(x)$, аргумент x и не менее $2x$ производных от искомой функции.

8. Формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона являются частным случаем квадратурных формул:

- 1) Ньютона-Котеса;
- 2) Гаусса;
- 3) Лагранжа.

9. Коэффициенты многочлена Чебышева – это:

- 1) целые числа;
- 2) числа с высокими степенями;
- 3) числа с низкими степенями.

10. В большинстве случаев, встречающихся на практике, для дифференциального уравнения легче найти:

- 1) частное решение;
- 2) общее решение;
- 3) искомое решение.

11. В общем случае дифференциальное уравнение имеет:

- 1) только одно решение;

- 2) конечное множество решений;
- 3) бесчисленное множество решений.

12. Метод Эйлера позволяет получить приближенное решение дифференциального уравнения в виде функции, представленной:

- 1) графически;
- 2) таблично;
- 3) численно;
- 4) верно все выше перечисленное.

13. Частным случаем квадратурных формул Ньютона-Котеса являются:

- 1) формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона;
- 2) формулы Лагранжа, Ньютона, Гаусса;
- 3) формулы Чебышева, Лежандра, Гаусса.

14. Метод Гаусса – вычисления определенного интеграла:

- 1) не обладает явлением насыщения численного метода;
- 2) обладает явлением насыщения численного метода;
- 3) имеет очень высокую точность.

15. В квадратурной формуле Гаусса используются:

- 1) значения корней многочленов Лежандра;
- 2) значения корней многочлена Чебышева;
- 3) значения корней многочлена Ньютона;
- 4) значения корней многочлена Лагранжа.

16. Корни многочленов Лежандра и коэффициенты w_i :

- 1) зависят только от степени многочлена n и не зависят от вида подынтегральной функции;
- 2) зависят только от вида подынтегральной функции и не зависят от степени многочлена n ;
- 3) ни от чего не зависят.

17. В формуле Симпсона отрезок интегрирования $[a, b]$ разбивается:

- 1) на четное число равных частей;
- 2) на нечетное число равных частей;
- 3) на четное число неравных частей;
- 4) на нечетное число неравных частей.

18. В методе трапеций подынтегральную функцию заменяют:

- 1) кусочно-постоянной функцией на отрезке;
- 2) кусочно-линейной функцией на отрезке;
- 3) кусочно-нелинейной функцией на отрезке.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Перечень основной литературы:

1. Зенков, А.В. Численные методы: учеб. пособие / А.В. Зенков. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016. – 124 с.
2. Калиткин, Н. Н. Численные методы : учеб. пособие / Н.Н. Калиткин ; под ред. А.А. Самарского. – 2-е изд. – СПб. : БХВ-Петербург, 2014. – 586 с. : ил. – (Учебная литература для вузов). – Гриф.: Рек. Научно-методическим советом. – Библиогр.: с. 575-581 (129 назв.). – Предм. указ.: с. 582-586. (10 экз.): [Электронный ресурс]. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=467402>
3. Шевченко Г.И. Численные методы : учебное пособие : Направление подготовки 44.03.01 - Педагогическое образование. Профили подготовки: «Информатика», «Информатика и информационные технологии в образовании». Бакалавриат / Сев.-Кав. фед. ун-т ; авт.-сост.: Г. И. Шевченко. - Ставрополь : СКФУ, 2015. - 151 с. (9 экз.)
4. Шевченко, Г.И. Численные методы: лабораторный практикум / Г.И. Шевченко, Т.А. Куликова – Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2016. - 107 с.

Перечень дополнительной литературы:

1. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах: [учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по направлению «Прикладная математика»] / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. – 4-е изд., испр. – Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2015. – 448 с.
2. Пирумов, У. Г. Численные методы : теория и практика : учеб. пособие для бакалавров / У. Г. Пирумов ; Моск. авиац. ин-т (нац. исслед. ун-т). – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2012. – 421 с. – (Бакалавр. Базовый курс). – Гриф: Доп. МО. – Библиогр.: с. 416.
3. Срочко, В. А. Численные методы: курс лекций: [для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 010200 «Прикладная Информатика и математика» и по направлению 510200 «Прикладная Информатика и математика»] / В. А. Срочко. – Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2016. – 208 с.

Методическая:

1. Шевченко, Г. И. Методические рекомендации по организации самостоятельной работы Шевченко Г.И., Куликова Т.А. Численные методы : лабораторный практикум : Направление подготовки 44.03.01 - Педагогическое образование. Профили подготовки : «Информатика», «Информатика и информационные технологии в образовании». Бакалавриат / Сев.-Кав. фед. ун-т ; авт.-сост.: Г. И. Шевченко, Т. А. Куликова. - Ставрополь : СКФУ, 2016. - 107 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. Баженова И.Ю. Введение в программирование [Электронный ресурс] : учебное пособие / И.Ю. Баженова, В.А. Сухомлин. – Электрон. текстовые данные. — Москва, Саратов: Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Вузовское образование, 2017. – 327 с. – URL: <http://www.iprbookshop.ru/67397.html>
2. Иванов А.П., Позняк Л.Т. Практикум по численным методам. Вычисление функций. URL: <http://www.apmath.spbu.ru/ru/structure/depts/is/task1-2013.pdf>.
3. Пименов, В.Г. Численные методы: в 2 ч. Ч. 2: [учебное пособие] / В.Г. Пименов, А.Б. Ложников ; [науч. ред. Ю.А. Меленцова] ; Мн-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 106 с. – URL: http://elar.urfu.ru/bitstream/10995/31219/1/978-5-7996-1342-6_2014.pdf.
4. Численные методы. Ч. 1. URL: <https://teach-in.ru/course/numerical-methods-part-1>.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для обучающихся по организации и проведению самостоятельной работы
по дисциплине

«ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

для студентов направления подготовки

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
направленность (профиль):
«Информатика и математика»

Ставрополь, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения	3
2. Цель и задачи самостоятельной работы	4
3. Технологическая карта самостоятельной работы студента	5
4. Порядок выполнения самостоятельной работы студентом	5
4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой	5
4.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим и лабораторным занятиям	7
4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний	7
4.4. Методические рекомендации по написанию научных текстов (докладов, докладов, эссе, научных статей и т.д.)	7
4.5. Методические рекомендации по выполнению исследовательских проектов	10
4.6. Методические рекомендации по подготовке к экзаменам и зачетам	13
5. Контроль самостоятельной работы студентов	14
6. Список литературы для выполнения СРС	14

1. Общие положения

Самостоятельная работа - планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов).

Самостоятельная работа студентов (СРС) в ВУЗе является важным видом учебной и научной деятельности студента. Самостоятельная работа студентов играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения.

К основным видам самостоятельной работы студентов относятся:

- формирование и усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы (электронные учебники, электронные библиотеки и др.);
- написание докладов;
- подготовка к семинарам, практическим и лабораторным работам, их оформление;
- составление аннотированного списка статей из соответствующих журналов по отраслям знаний (педагогических, психологических, методических и др.);
- выполнение учебно-исследовательских работ, проектная деятельность;
- подготовка практических разработок и рекомендаций по решению проблемной ситуации;
- выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-компьютерных и индивидуальных работ по отдельным разделам содержания дисциплин и т.д.;
- компьютерный текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов;
- выполнение курсовых работ (проектов) в рамках дисциплин;
- выполнение выпускной квалификационной работы и др.

Методика организации самостоятельной работы студентов зависит от структуры, характера и особенностей изучаемой дисциплины, объема часов на ее изучение, вида заданий для самостоятельной работы студентов, индивидуальных качеств студентов и условий учебной деятельности.

Процесс организации самостоятельной работы студентов включает в себя следующие этапы:

- подготовительный (определение целей, составление программы, подготовка методического обеспечения, подготовка оборудования);
- основной (реализация программы, использование приемов поиска информации, усвоения, переработки, применения, передачи знаний, фиксирование результатов, самоорганизация процесса работы);
- заключительный (оценка значимости и анализ результатов, их систематизация, оценка эффективности программы и приемов работы, выводы о направлениях оптимизации труда).

Самостоятельная работа по дисциплине «**Численные методы**» направлена на формирование следующих **компетенций**:

Код	Формулировка:
ПК-3	Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов
ПК-10	Способен использовать математический аппарат, методологию программирования и современные компьютерные технологии для решения практических задач получения, хранения, обработки и передачи информации

2. Цель и задачи самостоятельной работы

Ведущая цель организации и осуществления СРС совпадает с целью обучения студента – формирование набора общенаучных, профессиональных и специальных компетенций будущего бакалавра по соответствующему направлению подготовки

При организации СРС важным и необходимым условием становятся формирование умения самостоятельной работы для приобретения знаний, навыков и возможности организации учебной и научной деятельности. Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений;
- использование материала, собранного и полученного в ходе самостоятельных занятий на лабораторных занятиях, при написании курсовых и выпускной квалификационной работ, для эффективной подготовки к итоговым зачетам и экзаменам.

3. Технологическая карта самостоятельной работы студента

Коды реали- зуемых ком- петенций	Вид деятельности сту- дентов	Средства и технологии оценки	Объем часов, в том числе (астр.)		
			СРС	Контакт- ная ра- бота с препода- вателем	Всего
2 семестр					
ПК-3 ПК-10	Самостоятельное изу- чение литературы и источников	Собеседова- ние	18	2	20
ПК-3 ПК-10	Подготовка к лабора- торным занятиям	Защита ЛР	18	2	20
ПК-3 ПК-10	Написание рефе- рата/доклада	Защита до- клада	18	2	16
Итого за 2 семестр			50	6	56
3 семестр					
ПК-3 ПК-10	Самостоятельное изу- чение литературы и источников	Собеседова- ние	16	2	18
ПК-3 ПК-10	Подготовка к лабора- торным занятиям	Защита ЛР	16	2	18
ПК-3 ПК-10	Написание рефе- рата/доклада	Защита до- клада	16	2	18
Итого за 3 семестр			48	6	54
Итого			98	12	110

4. Порядок выполнения самостоятельной работы студентом

4.1. Методические рекомендации по работе с учебной литературой

При работе с книгой необходимо подобрать литературу, научиться правильно ее читать, вести записи. Для подбора литературы в библиотеке используются алфавитный и систематический каталоги.

Важно помнить, что рациональные навыки работы с книгой - это всегда большая экономия времени и сил.

Правильный подбор учебников рекомендуется преподавателем, читающим лекционный курс. Необходимая литература может быть также указана в методических разработках по данному курсу.

Изучая материал по учебнику, следует переходить к следующему вопросу только после правильного уяснения предыдущего, описывая на бумаге все выкладки и вычисления (в том числе те, которые в учебнике опущены или на лекции даны для самостоятельного вывода).

При изучении любой дисциплины большую и важную роль играет самостоятельная индивидуальная работа.

Особое внимание следует обратить на определение основных понятий курса. Студент должен подробно разбирать примеры, которые поясняют такие определения, и уметь строить аналогичные примеры самостоятельно. Нужно добиваться точного представления

о том, что изучаешь. Полезно составлять опорные конспекты. При изучении материала по учебнику полезно в тетради (на специально отведенных полях) дополнять конспект лекций. Там же следует отмечать вопросы, выделенные студентом для консультации с преподавателем.

Выводы, полученные в результате изучения, рекомендуется в конспекте выделять, чтобы они при перечитывании записей лучше запоминались.

Опыт показывает, что многим студентам помогает составление листа опорных сигналов, содержащего важнейшие и наиболее часто употребляемые формулы и понятия. Такой лист помогает запомнить формулы, основные положения лекции, а также может служить постоянным справочником для студента.

Чтение научного текста является частью познавательной деятельности. Ее цель – извлечение из текста необходимой информации. От того, насколько осознанно читающим собственная внутренняя установка при обращении к печатному слову (найти нужные сведения, усвоить информацию полностью или частично, критически проанализировать материал и т.п.) во многом зависит эффективность осуществляемого действия.

Выделяют **четыре основные установки в чтении научного текста:**

информационно-поисковый (задача – найти, выделить искомую информацию)

усваивающая (усилия читателя направлены на то, чтобы как можно полнее осознать и запомнить как сами сведения излагаемые автором, так и всю логику его рассуждений)

аналитико-критическая (читатель стремится критически осмыслить материал, проанализировав его, определив свое отношение к нему)

творческая (создает у читателя готовность в том или ином виде – как отправной пункт для своих рассуждений, как образ для действия по аналогии и т.п. – использовать суждения автора, ход его мыслей, результат наблюдения, разработанную методику, дополнить их, подвергнуть новой проверке).

Основные виды систематизированной записи прочитанного:

Аннотирование – предельно краткое связное описание просмотренной или прочитанной книги (статьи), ее содержания, источников, характера и назначения;

Планирование – краткая логическая организация текста, раскрывающая содержание и структуру изучаемого материала;

Тезирование – лаконичное воспроизведение основных утверждений автора без привлечения фактического материала;

Цитирование – дословное выписывание из текста выдержек, извлечений, наиболее существенно отражающих ту или иную мысль автора;

Конспектирование – краткое и последовательное изложение содержания прочитанного.

Конспект – сложный способ изложения содержания книги или статьи в логической последовательности. Конспект аккумулирует в себе предыдущие виды записи, позволяет всесторонне охватить содержание книги, статьи. Поэтому умение составлять план, тезисы, делать выписки и другие записи определяет и технологию составления конспекта.

Методические рекомендации по составлению конспекта:

1. Внимательно прочитайте текст. Уточните в справочной литературе непонятные слова. При записи не забудьте вынести справочные данные на поля конспекта;

2. Выделите главное, составьте план;

3. Кратко сформулируйте основные положения текста, отметьте аргументацию автора;

4. Законспектируйте материал, четко следуя пунктам плана. При конспектировании старайтесь выразить мысль своими словами. Записи следует вести четко, ясно.

5. Грамотно записывайте цитаты. Цитируя, учитывайте лаконичность, значимость мысли.

В тексте конспекта желательно приводить не только тезисные положения, но и их доказательства. При оформлении конспекта необходимо стремиться к емкости каждого

предложения. Мысли автора книги следует излагать кратко, заботясь о стиле и выразительности написанного. Число дополнительных элементов конспекта должно быть логически обоснованным, записи должны распределяться в определенной последовательности, отвечающей логической структуре произведения. Для уточнения и дополнения необходимо оставлять поля.

Овладение навыками конспектирования требует от студента целеустремленности, повседневной самостоятельной работы.

4.2. Методические рекомендации по подготовке к лабораторным занятиям

Для того чтобы практические и лабораторные занятия приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение задач проводятся по вычитанному на лекциях материалу и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов лекционного курса. Следует подчеркнуть, что только после усвоения лекционного материала с определенной точки зрения (а именно с той, с которой он излагается на лекциях) он будет закрепляться на практических занятиях как в результате обсуждения и анализа лекционного материала, так и с помощью решения проблемных ситуаций, задач. При этих условиях студент не только хорошо усвоит материал, но и научится применять его на практике, а также получит дополнительный стимул (и это очень важно) для активной проработки лекции.

При самостоятельном решении задач нужно обосновывать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса. Если студент видит несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала вычислений составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение проблемных задач или примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. Решения при необходимости нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками.

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом. Полученный ответ следует проверить способами, вытекающими из существа данной задачи. Полезно также (если возможно) решать несколькими способами и сравнить полученные результаты. Решение задач данного типа нужно продолжать до приобретения твердых навыков в их решении.

4.3. Методические рекомендации по самопроверке знаний

После изучения определенной темы по записям в конспекте и учебнику, а также решения достаточного количества соответствующих задач на практических занятиях и самостоятельно студенту рекомендуется, провести самопроверку усвоенных знаний, ответив на контрольные вопросы по изученной теме.

В случае необходимости нужно еще раз внимательно разобраться в материале.

Иногда недостаточность усвоения того или иного вопроса выясняется только при изучении дальнейшего материала. В этом случае надо вернуться назад и повторить плохо усвоенный материал. Важный критерий усвоения теоретического материала - умение решать задачи или пройти тестирование по пройденному материалу. Однако следует помнить, что правильное решение задачи может получиться в результате применения механически заученных формул без понимания сущности теоретических положений.

4.4. Методические рекомендации по написанию научных текстов (докладов, докладов, эссе, научных статей и т.д.)

Перед тем, как приступить к написанию научного текста, важно разобраться, какова истинная цель вашего научного текста - это поможет вам разумно распределить свои силы и время.

Во-первых, сначала нужно определиться с идеей научного текста, а для этого необходимо научиться либо относиться к разным явлениям и фактам несколько критически (своя идея – как иная точка зрения), либо научиться увлекаться какими-то известными идеями, которые нуждаются в доработке (идея – как оптимистическая позиция и направленность на дальнейшее совершенствование уже известного). Во-вторых, научиться организовывать свое время, ведь, как известно, свободное (от всяких глупостей) время – важнейшее условие настоящего творчества, для него наконец-то появляется время. Иногда именно на организацию такого времени уходит немалая часть сил и талантов.

Писать следует ясно и понятно, стараясь основные положения формулировать четко и недвусмысленно (чтобы и самому понятно было), а также стремясь структурировать свой текст. Каждый раз надо представлять, что ваш текст будет кто-то читать и ему захочется сориентироваться в нем, быстро находить ответы на интересующие вопросы (заодно представьте себя на месте такого человека). Понятно, что работа, написанная «сплошным текстом» (без заголовков, без выделения крупным шрифтом наиболее важных мест и т. п.), у культурного читателя должна вызывать брезгливость и даже жалость к автору (исключения составляют некоторые древние тексты, когда и жанр был иной и к текстам относились иначе, да и самих текстов было гораздо меньше – не то, что в эпоху «информационного взрыва» и соответствующего «информационного мусора»).

Объем текста и различные оформительские требования во многом зависят от принятых в конкретном учебном заведении порядков.

Доклад – это самостоятельное исследование студентом определенной проблемы, комплекса взаимосвязанных вопросов.

Доклад не должна составляться из фрагментов статей, монографий, пособий. Кроме простого изложения фактов и цитат, в докладе должно проявляться авторское видение проблемы и ее решения.

Рассмотрим основные этапы подготовки доклада студентом.

Выполнение доклада начинается с выбора темы.

Затем студент приходит на первую консультацию к руководителю, которая предусматривает:

- обсуждение цели и задач работы, основных моментов избранной темы;
- консультирование по вопросам подбора литературы;
- составление предварительного плана.

Следующим этапом является работа с литературой. Необходимая литература подбирается студентом самостоятельно.

После подбора литературы целесообразно сделать рабочий вариант плана работы. В нем нужно выделить основные вопросы темы и параграфы, раскрывающие их содержание.

Составленный список литературы и предварительный вариант плана уточняются, согласуются на очередной консультации с руководителем.

Затем начинается следующий этап работы – изучение литературы. Только внимательно читая и конспектируя литературу, можно разобраться в основных вопросах темы и подготовиться к самостоятельному (авторскому) изложению содержания доклада. Конспектируя первоисточники, необходимо отразить основную идею автора и его позицию по исследуемому вопросу, выявить проблемы и наметить задачи для дальнейшего изучения данных проблем.

Систематизация и анализ изученной литературы по проблеме исследования позволяют студенту написать работу.

Рабочий вариант текста доклада предоставляется руководителю на проверку. На основе рабочего варианта текста руководитель вместе со студентом обсуждает возможности доработки текста, его оформление. После доработки доклад сдается на кафедру для его оценивания руководителем.

Требования к написанию доклада

Написание доклада является обязательным условием выполнения плана СРС по любой дисциплине профессионального цикла.

Тема доклада может быть выбрана студентом из предложенных в рабочей программе или фонде оценочных средств дисциплины, либо определена самостоятельно, исходя из интересов студента (в рамках изучаемой дисциплины). Выбранную тему необходимо согласовать с преподавателем.

Доклад должен быть написан научным языком.

Объем доклада должен составлять 20-25 стр.

Структура доклада:

- Введение (не более 3-4 страниц). Во введении необходимо обосновать выбор темы, ее актуальность, очертить область исследования, объект исследования, основные цели и задачи исследования.

- Основная часть состоит из 2-3 разделов. В них раскрывается суть исследуемой проблемы, проводится обзор мировой литературы и источников Интернет по предмету исследования, в котором дается характеристика степени разработанности проблемы и авторская аналитическая оценка основных теоретических подходов к ее решению. Изложение материала не должно ограничиваться лишь описательным подходом к раскрытию выбранной темы. Оно также должно содержать собственное видение рассматриваемой проблемы и изложение собственной точки зрения на возможные пути ее решения.

- Заключение (1-2 страницы). В заключении кратко излагаются достигнутые при изучении проблемы цели, перспективы развития исследуемого вопроса

- Список использованной литературы (не меньше 10 источников), в алфавитном порядке, оформленный в соответствии с принятыми правилами. В список использованной литературы рекомендуется включать работы отечественных и зарубежных авторов, в том числе статьи, опубликованные в научных журналах в течение последних 3-х лет и ссылки на ресурсы сети Интернет.

- Приложение (при необходимости).

Требования к оформлению:

- текст с одной стороны листа;
- шрифт Times New Roman;
- кегль шрифта 14;
- межстрочное расстояние 1,5;
- поля: сверху 2,5 см, снизу – 2,5 см, слева - 3 см, справа 1,5 см;
- доклад должен быть представлен в сброшюрованном виде.

Порядок защиты доклада:

Защита доклада проводится на практических занятиях, после окончания работы студента над ним и исправления всех недочетов, выявленных преподавателем в ходе консультаций. На защиту доклада отводится 5-7 минут времени, в ходе которого студент должен показать свободное владение материалом по заявленной теме. При защите доклада приветствуется использование мультимедиа-презентации.

Оценка доклада

Доклад оценивается по следующим критериям:

- соблюдение требований к его оформлению;
- необходимость и достаточность для раскрытия темы приведенной в тексте доклада информации;
- умение студента свободно излагать основные идеи, отраженные в докладе;
- способность студента понять суть задаваемых преподавателем и сокурсниками вопросов и сформулировать точные ответы на них.

Критерии оценки:

Оценка «отлично» выставляется студенту, если в докладе студент исчерпывающе, последовательно, четко и логически стройно излагает материал; свободно справляется с за-

дачами, вопросами и другими видами применения знаний; использует для написания доклада современные научные материалы; анализирует полученную информацию; проявляет самостоятельность при написании доклада.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, если качество выполнения доклада достаточно высокое. Студент твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, не допуская существенных неточностей в ответе на вопросы по теме доклада.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если материал доклада излагается частично, но пробелы не носят существенного характера, студент допускает неточности и ошибки при защите доклада, дает недостаточно правильные формулировки, наблюдаются нарушения логической последовательности в изложении материала.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если он не подготовил доклад или допустил существенные ошибки. Студент неуверенно излагает материал доклада, не отвечает на вопросы преподавателя.

Описание шкалы оценивания

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным 55. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

4.5. Методические рекомендации по выполнению исследовательских проектов

Исследовательская проектная работа – это групповая работа, для выполнения которой необходим выбор и приложение научной методики к поставленной задаче, получение собственного теоретического или экспериментального материала, на основании которого необходимо провести анализ и сделать выводы об исследуемом явлении. Выполнение проекта – это всегда коллективная, творческая практическая работа, предназначенная для получения определенного продукта или научно-технического результата. Такая работа подразумевает четкое, однозначное формирование поставленной задачи, определение сроков выполнения намеченного, определение требований к разрабатываемому объекту.

Выполнение 1 группового проекта является обязательным условием выполнения самостоятельной работы по любой дисциплине профессионального цикла. Тема проектного задания может быть выбрана студентом из предложенных в рабочей программе или фонде оценочных средств дисциплины, либо определена самостоятельно, исходя из интересов студента (в рамках изучаемой дисциплины). Выбранную тему необходимо согласовать с преподавателем.

Требования по выполнению и оформлению проекта

При выполнении проекта приветствуется работа в группе (2-3 человека). Проект – это исследовательская работа, в ходе которой студенты должны продемонстрировать владение навыками научного исследования, умения проводить анализ, обобщать информацию, делать выводы, предлагать свои решения проблемы, рассматриваемой в проекте.

При подготовке материалов проекта студенты должны продемонстрировать владение современными методами компьютерной обработки данных.

Критерии оценки работы участника проекта.

Для каждого из участников проекта оцениваются:

- профессиональные теоретические знания в соответствующей области;
- умение работать со справочной и научной литературой, осуществлять поиск необходимой информации в Интернет;
- умение работать с техническими средствами;
- умение пользоваться соответствующими выполняемому проекту информационными технологиями;
- умение готовить материалы проекта для презентации: составлять и редактировать тексты, формировать презентацию проекта;
- умение работать в команде;
- умение публично представлять результаты собственной деятельности;
- коммуникабельность, инициативность, творческие способности.

Критерии выставления оценки участникам проекта

Оценка	Профессиональные компетенции	Компетенции, связанные с использованием соответствующих выполняемому проекту технических средств и информационных технологий	Иные универсальные компетенции (коммуникабельность, инициативность, умение работать в «команде», управленческие навыки и т.д.)	Отчетность
«Отлично»	Работа выполнена на высоком профессиональном уровне. Представленный материал в основном фактически верен, допускаются негрубые фактические неточности. Студент свободно отвечает на вопросы, связанные с проектом.	Технические средства и информационные технологии освоены и использованы для реализации проекта полностью	Студент проявил инициативу, творческий подход, способность к выполнению сложных заданий, навыки работы в коллективе, организационные способности.	Проект представлен полностью и в срок.
«Хорошо»	Работа выполнена на достаточно высоком профессиональном уровне. Допущено до 4–5 фактических ошибок. Студент отвечает на вопросы, связанные с проектом, но недостаточно полно.	Обнаруживаются некоторые ошибки в использовании соответствующих технических средств и информационных технологий	Студент достаточно полно, но без инициативы и творческих находок выполнил возложенные на него задачи.	Проект представлен достаточно полно и в срок, но с некоторыми недоработками.
«Удовлетворительно»	Уровень недостаточно высок. Допущено до 8 фактических ошибок. Студент может ответить лишь на некоторые	Обнаруживает недостаточное владение навыками работы с техническими средствами и соответствующими	Студент выполнил большую часть возложенной на него работы.	Проект сдан со значительным опозданием (более недели) и не полностью

Оценка	Профессиональные компетенции	Компетенции, связанные с использованием соответствующих выполняемому проекту технических средств и информационных технологий	Иные универсальные компетенции (коммуникабельность, инициативность, умение работать в «команде», управленческие навыки и т.д.)	Отчетность
	из заданных вопросов, связанных с проектом.	щими информационными технологиями		
«Неудовлетворительно»	Работа не выполнена или выполнена на низком уровне. Допущено более 8 фактических ошибок. Ответы на связанные с проектом вопросы обнаруживают непонимание предмета и отсутствие ориентации в материале проекта.	Навыков работы с техническими средствами нет, информационные технологии не освоены	Студент практически не работал, не выполнил свои задачи или выполнил лишь отдельные не существенные поручения в групповом проекте.	Проект не сдан.

Студенты должны: защитить проект в режиме презентации, предъявить файлы выполненного проекта, уметь рассказать о технологиях, использованных ими при выполнении проекта, дать оценку работы каждого члена группы (*если проект групповой*).

Максимально возможный балл за весь текущий контроль устанавливается равным 55. Текущее контрольное мероприятие считается сданным, если студент получил за него не менее 60% от установленного для этого контроля максимального балла. Рейтинговый балл, выставляемый студенту за текущее контрольное мероприятие, сданное студентом в установленные графиком контрольных мероприятий сроки, определяется следующим образом:

Уровень выполнения контрольного задания	Рейтинговый балл (в % от максимального балла за контрольное задание)
Отличный	100
Хороший	80
Удовлетворительный	60
Неудовлетворительный	0

4.6. Методические рекомендации по подготовке к экзаменам и зачетам

Изучение многих общепрофессиональных и специальных дисциплин завершается экзаменом. Подготовка к экзамену способствует закреплению, углублению и обобщению знаний, получаемых, в процессе обучения, а также применению их к решению практических задач. Готовясь к экзамену, студент ликвидирует имеющиеся пробелы в знаниях, углубляет, систематизирует и упорядочивает свои знания. На экзамене студент демонстрирует то, что он приобрел в процессе обучения по конкретной учебной дисциплине.

Экзаменационная сессия - это серия экзаменов, установленных учебным планом. Между экзаменами интервал 3-4 дня. Не следует думать, что 3-4 дня достаточно для успешной подготовки к экзаменам.

В эти 3-4 дня нужно систематизировать уже имеющиеся знания. На консультации перед экзаменом студентов познакомят с основными требованиями, ответят на возникшие у них вопросы. Поэтому посещение консультаций обязательно.

Требования к организации подготовки к экзаменам те же, что и при занятиях в течение семестра, но соблюдаться они должны более строго. Во-первых, очень важно соблюдение режима дня; сон не менее 8 часов в сутки, занятия заканчиваются не позднее, чем за 2-3 часа до сна. Оптимальное время занятий - утренние и дневные часы. В перерывах между занятиями рекомендуются прогулки на свежем воздухе, неустойчивые занятия спортом. Во-вторых, наличие хороших собственных конспектов лекций. Даже в том случае, если была пропущена какая-либо лекция, необходимо во время ее восстановить (переписать ее на кафедре), обдумать, снять возникшие вопросы для того, чтобы запоминание материала было осознанным. В-третьих, при подготовке к экзаменам у студента должен быть хороший учебник или конспект литературы, прочитанной по указанию преподавателя в течение семестра. Здесь можно эффективно использовать листы опорных сигналов.

Вначале следует просмотреть весь материал по сдаваемой дисциплине, отметить для себя трудные вопросы. Обязательно в них разобраться. В заключение еще раз целесообразно повторить основные положения, используя при этом листы опорных сигналов.

Систематическая подготовка к занятиям в течение семестра позволит использовать время экзаменационной сессии для систематизации знаний.

Контроль самостоятельной работы студентов

Контроль самостоятельной работы проводится преподавателем в аудитории.

Предусмотрены следующие виды контроля: собеседование, оценка доклада, оценка презентации, оценка участия в круглом столе, оценка выполнения проекта.

Подробные критерии оценивания компетенций приведены в Фонде оценочных средств для проведения текущей и промежуточной аттестации.

Список литературы для выполнения СРС

Основная литература:

1. Современные информационные технологии Электронный ресурс : учебное пособие / С.С. Мытько / Д.А. Репечко / И.А. Королькова / А.Р. Ванютин / А.П. Алексеев ; ред. А.П. Алексеев. - Самара : Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, 2016. - 101 с. - Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks., экземпляров неограниченно

2. Адлер, Ю.П. Статистическое управление процессами. «Большие данные» Электронный ресурс : учебное пособие / Е.А. Черных / Ю.П. Адлер. - Статистическое управление процессами. «Большие данные», 2021-09-01. - Москва : Издательский Дом МИСиС, 2016. - 52 с. - Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks. - ISBN 978-5-87623-969-3, экземпляров неограниченно

Дополнительная литература:

1. Современные информационные технологии Электронный ресурс : Сборник трудов по материалам 3-й межвузовской научно-технической конференции с международным участием 29 сентября 2017 г. / В. И. Воловач [и др.] ; ред. В. М. Артюшенко. - Королёв : Научный консультант, МГОТУ, 2017. - 191 с. - Книга находится в премиум-версии ЭБС IPR BOOKS. - ISBN 978-5-9500999-7-7, экземпляров неограниченно

2. Современные мультимедийные информационные технологии Электронный ресурс : учебное пособие / С.С. Мытько / Д.А. Репечко / А.П. Алексеев / А.Р. Ванютин / И.А. Королькова. - Современные мультимедийные информационные технологии, 2021-05-25. - Москва : СОЛОН-ПРЕСС, 2017. - 108 с. - Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks. - ISBN 978-5-91359-219-4, экземпляров неограниченно

Методическая литература:

1. Методические рекомендации для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Введение в информационные технологии»

2. Методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Цифровая грамотность и обработка данных»

Интернет-ресурсы:

1. <http://el.ncfu.ru/> – система управления обучением ФГАОУ ВО СКФУ. Дистанционная поддержка дисциплины «Введение в информационные технологии»

2. <http://www.un.org> - Сайт ООН Информационно-коммуникационные технологии

3. <http://www.intuit.ru> – Интернет-Университет Компьютерных технологий.